# 貯水池汚濁現象の水理

足　立　昭　平

## まえがき

貯水池の水質問題は，ダム建設がもたらす重大な環境変化の一つとして，近年とみに注目されるようになり，貯水池内の水の流動変態と水質との関係については，かなり広範な観測・調査資料が整いつつある。しかし，貯水池内の水の流動機構はきわめて複雑であり，かつ貯水池の規模，立地条件あるいは運用方法にはそれぞれの固有の特性があって，まだ貯水池水質問題を解き明かすことは至難である。本講の標題は「汚濁」ということにはなっているが，ここでは，貯水池水質問題に関する貯水池水理の基本的構成について講述してみたい。

## 1. 不等質流水の基礎方程式

熱供給を受け，かつ濁質を含む水の密度$\rho$は，厳密には，圧力$p$，水温$T$および濁質濃度$c$の関数であって，

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p}\, dp + \frac{\partial \rho}{\partial T}\, dT + \frac{\partial \rho}{\partial c}\, dc$$

である。$\rho$の$p$，$T$，および$c$に対する変化率をそれぞれ

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p} = \alpha,\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T} = \beta \text{ および } \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial c} = \gamma$$

とおけば，$\alpha$および$\beta$の値は，$T$および$p$の値によって若干の変化はあるが，河水の場合には，ほぼ

$$\alpha = 4 \times 10^{-5}\ \mathrm{cm^2/kg},\ \beta = 2 \times 10^{-4}\ \ 1/{}^\circ\mathrm{C}$$

であり，$\gamma$の値は，濁質の比重を2.6と見積れば，

$$\gamma = 6 \times 10^{-7}\ \ 1/\mathrm{ppm}$$

である。密度の変化は，力学的には，流れの慣性力および物体力に関与するわけであるが，上記のように河水の$\alpha$，$\beta$および$\gamma$はいずれもきわめて小さく，通常の場合，密度変化は無視して差支えない。しかし，水面勾配が0に近い貯水池内の流れでは，流れの原動力である重力項は，水面勾配よりもむしろ密度勾配にもとずく場合が少なくない。現実に想定される状態として，$dp = 10\ \mathrm{kg/cm^2}$，$dT = 20\ {}^\circ\mathrm{C}$，$dc = 10^4$ ppm に対応する密度変化は，$\alpha\, dp = 4 \times 10^{-4}$，$\beta\, dT = 4 \times 10^{-3}$，$\gamma\, dc = 6 \times 10^{-3}$の程度であり，$dp$はともかくとして，$dT$および$dc$の影響は，貯水池の水面勾配よりもはるかに大きいと考えなければならない。したがって，そうした場合の流水の基礎方程式には，まず河水の状態方程式　　$\rho = \rho_0 (1-\beta T+\gamma c)$

を挙げねばならない。ここに，$\rho_0$はある標準状態の密度であり，$T$および$c$はその標準状態の値を基準とする数値で与えるものとする。　　　(1)

なお，$dc < 10^3$ ppmであれば，式(1)の$\gamma\, dc$も省略して十分であり，密度は水温のみの関数として

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta T) \qquad (1_a)$$

とおいてよい。

流体の全質量に対する連続方程式（質量の保存則）は一般に

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{V}) = 0 \qquad (2)$$

であらわされるが，質量の流束$\rho \boldsymbol{V}$は，いまの場合，水の運動による流束$\rho \boldsymbol{u}$と熱の拡散，輻射ある

いは濁質の拡散，沈降による質量の流出 $-\boldsymbol{a}$ との和であることを留意しなければならない。つまり，流体要素の密度の時間変化

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\rho$$

は，$\boldsymbol{a}$ によって生ずるから，式(2)は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\rho=\nabla\boldsymbol{a} \qquad (3)$$

のように書きあらわされる。したがって，式(2)と式(3)とから，水の流速 $\boldsymbol{u}$ に関する運動学的連続方程式として，

$$\nabla\boldsymbol{u}=0 \qquad (4)$$

すなわち，非圧縮性の条件が付加されることになる。

流水の運動方程式は，式(4)を考慮して

$$\rho\left\{\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right\}=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p+\mu'\nabla^2\boldsymbol{u} \qquad (5)$$

である。ここに，$\boldsymbol{F}$ は単位質量当りの物体力であり，$\mu'$ は分子粘性だけでなく乱れによる渦粘性を含めた運動量交換係数である。

熱量の保存および濁質の質量保存から，水温 $T$ および濁質 $c$ の連続方程式は，式(3)と同様な形式でそれぞれ次式のように書きあらわされる。

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)T=D\nabla^2T-\frac{1}{c_p}\nabla\varphi \qquad (6)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)c=E\nabla^2c-\nabla(c\boldsymbol{w}_0) \qquad (7)$$

ここに，$D$ は熱の拡散係数，$\varphi$ は輻射による単位質量当りの熱流束，$c_p$ は比熱であり，$E$ は濁質の拡散係数，$\boldsymbol{w}_0$ は濁質の沈降速度である。

以上，不等質流水の $\rho$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{a}$，$p$，$T$ および $c$ を決定する基礎方程式は，式(1)，(3)，(4)，(5)，(6)，および(7)であり，これらを所定の初期条件および境界条件のもとに解けばよいわけである。

なお，$\boldsymbol{a}$ の定義は，式(1)，(3)，(6)および(7)から導かれる関係式

$$\boldsymbol{a}=\rho_0\{-\beta(D\nabla T-\varphi)+\gamma(E\nabla c-c\boldsymbol{w}_0)\} \qquad (8)$$

によって一層明確に記述されよう。

## 2. $\boldsymbol{a}=0$ の場合

前節に示した6個の基礎方程式を解析的に解くことは一般には困難であるが，単純化された状況における流れの形態を解析的に考察することはある程度可能である。

$\boldsymbol{a}=0$ の想定はそうした単純化の基本型であり，貯水池の水の流動特性を類推するうえにも有用である。

$\boldsymbol{a}=0$ であれば，水温および濁質の連続方程式(6)および(7)は，全質量の連続方程式(3)に帰着し，

$$T=T(\rho),\quad c=c(\rho)$$

であるから，$\rho$，$\boldsymbol{u}$ および $p$ は式(3)，(4)，(5)，すなわち

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\rho=0,\quad\nabla\boldsymbol{u}=0\\[2mm]\rho\left\{\dfrac{\partial u}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right\}=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p\end{cases}$$

によって決定される。なお，$a=0$ の想定は，拡散係数の項が無視できるということであるから，運動方程式においても $\mu'$ の項は省略される。

貯水池の流れを考えて，空間座標を水平に $x$ 軸を主流方向にとり，鉛直上向きに $y$ 軸を設定し，2次元定常流をとりあげれば，上記の基礎方程式はそれぞれ

$$u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{10}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{12}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-g\rho-\frac{\partial p}{\partial y} \tag{$11_a$}$$

となる。ここに，$u$，$v$ は流速の $x$，$y$ 成分，$g$ は重力の加速度である。

Yih[1] に従って，$u$，$v$ に代えて

$$u'=\sqrt{\rho/\rho_0}\ u,\quad v'=\sqrt{\rho/\rho_0}\ v \tag{12}$$

を導入すれば，式(9)，(10)，（11）はそれぞれ

$$\begin{cases} u'\dfrac{\partial\rho}{\partial x}+v'\dfrac{\partial\rho}{\partial y}=0 & (13)\\[2ex] \dfrac{\partial u'}{\partial x}+\dfrac{\partial v'}{\partial y}=0 & (14)\\[2ex] \rho_0\left(u'\dfrac{\partial u'}{\partial x}+v'\dfrac{\partial u'}{\partial y}\right)=-\dfrac{\partial p}{\partial x} & (15_a)\\[2ex] \rho_0\left(u'\dfrac{\partial v'}{\partial x}+v'\dfrac{\partial v'}{\partial y}\right)=-g\rho-\dfrac{\partial p}{\partial y} & (15_b)\end{cases}$$

のように書きあらわされる。さて，式（14）から，

$$u'=\frac{\partial\psi'}{\partial y},\quad v'=-\frac{\partial\psi'}{\partial x} \tag{16}$$

であるような流れの関数 $\psi'$ の存在が保証され，したがって，式（13）は

$$\rho=\rho(\psi') \tag{17}$$

すなわち，$\psi'=\mathrm{const.}$ の流線に沿って $\rho$ が不変であることを記述することになる。一方，式（$15_a$），（$15_b$）は，

$$\begin{cases}\rho_0=\nabla^2\psi'\dfrac{\partial\psi'}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{p+\dfrac{\rho_0}{2}(u'^2+v'^2)\right\}\\[2ex] \rho_0=\nabla^2\psi'\dfrac{\partial\psi'}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{p+\dfrac{\rho_0}{2}(u'^2+v'^2)\right\}\end{cases}$$

となるから，これらを全微分の形であらわせば，

$$\rho_0\nabla^2\psi'\,d\psi'=d\left\{p+\frac{\rho_0}{2}(u'^2+v'^2)\right\}+g\rho dy$$

$$=d\left\{p+\frac{\rho_0}{2}(u'^2+v'^2)+g\rho y\right\}-gy\,d\rho$$

であり，$\psi'$ の微分方程式

$$\nabla^2\psi' = \frac{dH}{d\psi'} - \frac{gy}{\rho_0}\frac{d\rho}{d\psi'} \tag{18}$$

が導かれる。ここに，$H=H(\psi')$ であって，

$$H = \frac{1}{\rho_0}\{p + \frac{\rho_0}{2}(u'^2 + v'^2) + g\rho y\} \tag{19}$$

である。式 (18) において，$dH/d\psi'$および $d\rho/d\psi'$ は，$H$および$\rho$がいずれも$\psi'$ のみの関数であることから，流れの場の境界条件によってその関数形が指定される。

いま，$y=0$ および $h$ に水平境界面を，$x=0$ に鉛直境界面をもつ流れの場において，

$$\left.\begin{array}{l} x=-\infty \text{ で} \quad u'=U' \text{（一定）}, \quad v'=0 \\ \text{および} \quad -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{d\rho}{dy} = e \quad \text{（一定）} \end{array}\right\}$$

であれば，$x=-\infty$において，$\psi'=U'y$ （$y=0$ で$\psi'=0$とする）であるから，

$$\frac{d\rho}{d\psi'} = -\frac{\rho_0 e}{U'}$$

$$\frac{dH}{d\psi'} = \frac{1}{\rho_0 U'}\left(\frac{dp}{dy} + g\rho + gy\frac{d\rho}{dy}\right) = -\frac{eg}{U'}y = -\frac{eg}{U'^2}\psi'$$

であり，式 (18) は

$$\nabla^2\psi' + \frac{eg}{U'^2}\psi' = -\frac{eg}{U'}y \tag{20}$$

となる。ここで，

$$\Psi = \psi'/U'h, \quad \xi = x/h, \quad \eta = y/h \tag{21}$$

とおいて無次元化すれば，式 (20) は次式に書き代えられる。

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} + F^{-2}\Psi = -F^{-2}\eta \tag{22}$$

ここに，

$$F = U'/\sqrt{eg}\,h \tag{23}$$

式 (22) は $\Psi'$，したがって流れの形態がパラメータ $F$ の値によって特性づけられることをあらわしている。

$x=0$，$y=0$，すなわち原点に2次元吸込口が設けられた場合の式 (22) の解については，Yih[1] の著書に詳しいが，$F$がある限界値（この場合 $1/\pi$ （$=0.32$））よりも低い場合には，上層部に澱み層が形成され，吸込み口を通しての流出は（$d<h$）に限られる。Kao[2] の計算によれば，その場合

$$F = U'/\sqrt{eg}\,d = 0.68 \tag{24}$$

である。

### 3. $\boldsymbol{a} = D\nabla\rho$ の場合

前節の非拡散の想定に対して，$T$あるいは$c$の拡散現象をとり入れたもので，$T(\rho)$ あるいは $c(\rho)$ と見なす点は前節と同様であるが，この場合の基礎方程式は，

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\rho = D\nabla^2\rho \\ \nabla\boldsymbol{u} = 0 \end{array}\right.$$

$$\rho_0\left\{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right\}=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p+\mu'\nabla^2\boldsymbol{u}$$

となる。なお，ここでは Boussinesq の近似を用い，密度変化による流れの加速度項の変化量は省略可能と考える。

流れが水平方向に卓越しているような2次元流では，鉛直方向の加速度成分は重力項に対して省略可能であり，また，拡散項は鉛直方向だけを考慮することにすれば，2次元定常流の基礎方程式は次のように書きあらわされる。

$$u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}=D\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \tag{25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{26}$$

$$\rho_0\left(u\frac{\partial y}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu'\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{27$_a$}$$

$$0=-g\rho-\frac{\partial p}{\partial y} \tag{27$_b$}$$

流れの関数

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}\ ,\quad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{28}$$

を導入し，式 $(27_a)$ と $(27_b)$ とから $p$ を消去すれば，式 (25) および (27) は $\rho$ と $\Psi$ に関する方程式

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial y}=D\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} &(29)\\ &\rho_0\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^3 \psi}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}\right)=\mu'\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}+g\frac{\partial \rho}{\partial x} &(30)\end{aligned}\right.$$

に書き代えられる。

Koh[3] は，$-\infty<y<\infty$ の水域で，$x=-\infty$ において $-\dfrac{1}{\rho_0}d\rho/dy=e$（一定）である場合をとりあげ，

$$\rho=\rho_0(1-ey)+\rho'(x,y) \tag{31}$$

とおくとともに，

$$\alpha_0=(e\rho_0 g/\mu' D)^{1/6} \tag{32}$$

で定義される係数 $\alpha_0$ と単位幅当りの流量 $q$ を導入して，座標（$x$，$y$）を

$$\xi=(q/\alpha_0 D)x^{-\frac{2}{3}},\quad \varsigma=\alpha_0 y x^{-\frac{1}{3}} \tag{33}$$

の無次元変数に変換し，$\xi<<1$ の範囲を対象として $\Psi$ および $\rho'$ の摂動解を求めた。

その第1近似解によれば，$y=0$ 上の最大流速は

$$u(x,0)=0.284\,\alpha_0 q/x^{1/3} \tag{34}$$

で与えられ，流動層厚 $d$ を　$u$（$x$，$d/2$）$=0$　で定義すれば，

$$\alpha_0 d/2x^{1/3}=3.57\qquad \text{すなわち}\quad d=7.14\,x^{1/3}/\alpha_0 \tag{35}$$

で与えられる。

Koh[4] は，これらの解析結果を実験によって験証し，式 (34)，(35) は　$q/(\alpha_0 Dx^{2/3})<0.8$ のかぎられた範囲でしか成立しないが，両式における　$\alpha_0$　を

$$\alpha=\alpha_0\{3.5\,q/(\alpha_0 Dx^{1/3})\}^{-0.133}$$

で与えられる$\alpha$におき代えることによって，それらの関係式が$0.3 \leqq q / (\alpha_0 D x^{2/3}) < 10^3$ の幅広い範囲にわたって成立することを見出し，流動層厚さ$d$は結局

$$d = 7.14\, x^{1/3} / (e \rho_0 g / \mu' D)^{1/6} \tag{36}$$

で与えられると結論づけている。また，Koh はその実験結果から，速度分布形の相似性を見出し，

$$\frac{u(x, y)}{u(x, 0)} = F\left(\frac{y}{d}\right) \tag{37}$$

と見なせることを提示している。

## 4. 貯水池取水口付近の流れ

貯水池水の密度変化は，通常は式（$1_a$）に従い，密度分布形成の主因は水表面からの熱供給であって，春季から秋季にかけて鉛直方向に顕著な密度勾配が形成され，水平な成層状態が出現する。したがって，前2節に述べた2次元重力密度流の解析結果は，貯水池取水口付近の流れの性状に適用できるものと考えられる。

Huber ら[5]は，次節に述べる貯水池成層モデルにおいて，Koh の解析および実験結果を成層貯水領域の下流条件に用いることを提案している。まず流動層厚$d$については，式(36)あるいは式(24)を観測資料にもとづいて修正した次式で与える。

$$F^{*} \equiv \frac{q}{\sqrt{eg}\; d^2} = 0.044 \tag{39}$$

ここに，$q$は単位幅当りの流量である。

つぎに，流動層内の速度分布に対して式（37）をガウス分布であらわし

$$u(y, t) = u(y_0, t) \exp\{-(y - y_0)^2 / 2\sigma_0^2\} \tag{40}$$

とする。ここに，$y_0$ は取水口の標高，$\sigma_0$は標準偏差であって，便宜的に全流量の95％が流動層を流れるとすると $\sigma_0 = d / 3.92$ となる。

Huber らのこうした提案は，成層貯水領域の下流側条件の具体的計算式を与えたものとして注目されるが，現実の貯水池における取水口は下流端水面幅に対しては点状吸込口と見なされる場合が多いから，取水口付近の流れを単純に2次元流と見なすことに若干の疑問がある。

貯水池の平面的広がりは無限水域ではないが，仮りに吸込口に関する軸対称2次元流を想定し，簡単のために$\boldsymbol{a} = 0$を仮定して，原点からの距離$r$，鉛直高さ$z$の円柱座標を用いて式（22）を書き改めれば

$$\frac{1}{\xi^2}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right) + G^{-2}\Psi = -G^{-2}\eta \tag{41}$$

となる。ただし，

$$\xi = r/h,\quad \eta = z/h,\quad \Psi = 2\pi\psi''/Q$$

ここに，$Q$は全流量，$\psi''$は流速の $r$成分 $v_r$ および$z$成分$v_z$ に対する流れの関数で

$$\sqrt{\rho/\rho_0}\; v_r = \frac{1}{r}\;\frac{\partial \psi''}{\partial r}$$

ある。また $G$は式（23）における$F$に対応するパラメーターであって，

$$G = \frac{Q}{2\pi\sqrt{eg}\; h^3} \tag{42}$$

である。

日野・大西[6]は摂動法によって式（41）の理論解を求めるとともに，吸込口の高さ$b$と澱み層の発

生限界との関係を論じ，Yih らの研究では考慮されていない吸込口の高さの影響を明らかにした。日野・大西の研究によれば，$G$の値がある限界値$G_c$よりも小さくなると，水平境界の一方に澱み層が発生し，限界値$G_c$の値は吸込口高さ$b$が$h/2$に近づくほど減少する。さらに$G$が小さくなり，第2の限界値$G_c'$よりも小さくなると，上下の境界面に接して澱み層が発生する（これらの限界値$G_c$，$G_c'$の値については，水理公式集[7]を参照されたい）。そして，流動層厚 $d$は

$$G^{*} = \frac{Q}{2\pi\sqrt{eg}\ d^3} = G_c(b) \tag{41}$$

によって与えられる。

貯水池取水口付近の流れに対する2次元流解析および軸対称流解析の適用性について，白砂[8]は幅の異なる2水槽の実験結果から，単位幅当りの流量$q$が同じであっても，水路幅が異なると$F^{*}$の値が相違することを確め，取水口から比較的に短い距離の間で流動層厚がほぼ一定になることから，現実の貯水池取水口には軸対称流解析の方が適用性が良いものと判断している。さらに，白砂の実験によれば，取水口の水深が流動層厚の1/2～1/3程度であれば，実用上 $G_c$ =一定と見なして

$$G^{*} = \frac{Q}{Q\sqrt{eg}\ d^3} = 0.324 \tag{42}$$

とおけるようである。安芸・白砂[9]はこれらの結果から，さきの Huber らの成層貯水領域の下流端条件の設定にあたって，$d$の値を式（42）で算定することを提唱している。

### 5. 貯水池の成層モデル

貯水池の水の流動は，原理的には第1節に述べた基礎方程式を解けばよいわけであるが，現実の貯水池では境界条件そのものに変動があるうえに，熱の供給，損失，拡散など，あるいは濁質の拡散，沈降などの機構を適確に表現することはかならずしも容易でなく，経験的に定量化するにも未知係数が多いから，その解析は容易でない。

しかし，貯水池水の流動を巨視的に見れば，水温変化の主因が水表面からの熱供給にあるから，貯水領域において水平方向の水温分布，したがって密度分布は，少なくとも鉛直方向のそれに比較して一様性が強いと考えられる。そこで，第1節に述べた基礎方程式を，貯水領域の薄い水平層に関する積分形で与えることが許されるのであろう。式(1)，(3)，(4)，(5)，(6)および(7)を水平層についての平均値を用いて再記すれば，次のようである。

流水の状態方程式：
$$\overline{\rho} = \rho_0(1 - \beta\overline{T} + r\overline{c}) \tag{43}$$

質量保存の連続方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}S) + \rho_2 B_2 u_2 - \rho_1 B_1 u_1 + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho v}S) = \frac{\partial}{\partial y}(\overline{a}S) \tag{44}$$

流水の運動学的連続方程式：

$$B_2 u_2 - B_1 u_1 + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v}S) = 0 \tag{45}$$

流水の力学方程式：

$$0 = -\frac{d}{dy}(\overline{p}S) - g\overline{\rho}S \tag{46}$$

熱量保存の連続方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{T}S) + T_2 B_2 u_2 - T_1 B_1 u_1 + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{Tv}S) = \frac{\partial}{\partial y}\left(D\overline{\frac{\partial T}{\partial y}}S\right) - \frac{1}{c_p}\frac{\partial}{\partial y}(\overline{\varphi}S) \tag{47}$$

濁質保存の連続方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{c}S)+c_2B_2u_2-c_1B_1u_1+\frac{\partial}{\partial y}(\overline{cv}S)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{E\frac{\partial T}{\partial y}S}\right)-\frac{\partial}{\partial y}(\overline{cw_0}S) \qquad (48)$$

ここに，$S$および$B$は標高$y$における貯水領域の水平面積および水平幅であり，記号$\bar{\ }$は$S$に関する平均値を，添字1および2はそれぞれ貯水領域の上流端および下流端における値をあらわす。

なお，流束$\boldsymbol{a}$は鉛直$y$成分をとりあげるだけで十分であるとし，流水の力学方程式は，貯水領域内の流水の運動量変化がきわめて微小であることから，圧力の静水圧分布を指示するだけで十分であるとしている。

ここで，$T$および$c$，したがって$\rho$の水平分布を一様と見なし，さらに，$T_2=\bar{T}$，$c_2=\bar{c}$ および$D$，$E$，$w_0$が一定であると仮定すれば，式（47）および（48）はそれぞれ次式のように書きあらわされる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{T}S)=T_1B_1u_1-\bar{T}B_2u_2-\frac{\partial}{\partial y}(\bar{T}\bar{v}S)+D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}S\right)-\frac{1}{c_p}\frac{\partial}{\partial y}(\bar{\varphi}S) \qquad (49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{c}S)=c_1B_1u_1-\bar{c}B_2u_2-\frac{\partial}{\partial y}(\bar{c}\bar{v}S)+E\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\bar{c}}{\partial y}S\right)-w_0\frac{\partial}{\partial y}(\bar{c}S) \qquad (50)$$

これがいわゆる成層モデルであり，式（49）および（50）をそれぞれ数値的に解くことによって，池内の$\bar{T}$および$\bar{c}$の予測が行なわれる。数値解析にあたっては，拡散係数$D$，$E$，熱流束$\bar{\varphi}$　濁質沈降速度$w_0$に対して適切な見積りがなされねばならないが，水の流動に関する流出速度$u_2$，流入速度$u_1$および上昇流$\bar{v}$はつぎのようにして算定される。

$u_2$：　取水口の標高$y_0$，取水流出$Q_2$が指定されれば，貯水領域の密度勾配$e$は式（43）から

$$e=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho}{\partial y}=\beta\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}-r\frac{\partial\bar{c}}{\partial y} \qquad (51)$$

であるから，前節に述べたように流動層厚$d$が算定される。すなわち，Huber らの提案に従えば（36）あるいは式（39），安芸・白砂の提案に従えば式（42）から各時刻における$d$が求まる。流動層内の速度分布について，同じく Huber らの提案に従えば式（40）のようであるから

$$\left\{\begin{array}{l} u_2(y_0,t)=Q_2\Big/\displaystyle\int_{y_0-\frac{d}{2}}^{y_0+\frac{d}{2}}B_2\cdot\exp\{-(y-y_0)^2/2\sigma_2^2\}\,dy \\ \sigma_2=d/3.92 \end{array}\right. \qquad (51)$$

とおくことによって，$u_2$は次式で与えられる。

$$u_2(y,t)=u_2(y_0,t)\exp\{-(y-y_0)^2/2\sigma_2^2\} \qquad (52)$$

$u_1$：　原理的には，吸込みを吹き出しにおきかえれば密度成層流の流入問題になるわけであるが，貯水池流入部の流れの様相は複雑であり，河水の貯水池水との混合，中層・深層への貫入などその流入過程には未知の問題が多い。 Huber，安芸・白砂らは成層モデルの貯水領域上流端条件として，まず河水は貯水池流入部における混合過程によって貯水池表層水を連行し，貯水領域への流入流量$Q_1$，その水温$T_1$および濁質濃度$c_1$は

$$\left\{\begin{array}{l} Q_1=(1+r)Q_0 \\ T_1=(T_0+rT_m)/(1+r) \\ c_1=(c_0+rc_m)/(1+r) \end{array}\right. \qquad (53)$$

であらわされるとした。ここに，$Q_0$は河水流量，$T_0$，$c_0$は河水の水温および濃度であり，$T_m$，$c_m$は連行される表層水の平均水温および平均濃度，$r$は連行係数である。連行される表層水の深さ

は流入河川の水深程度，$r$ は 0.5 ～ 1.0 の程度と考えられる。

つぎに，貯水池流入部での混合後の流れは，それと同密度の成層深さに吹き出し口がある場合と同様な流れの形態をとって貯水領域へ流入するものと考えた。このような想定に従えば，流入の流動層厚 $d_1$ は取水口によるそれと同様に

$$F^{*}= \frac{Q_1}{B_1\sqrt{eg}\ d_1^2} = \mathrm{const} \tag{54}$$

で与えられ（安芸・白砂によれば，$F^{*}= 0.25$），流動層内の速度分布は式（40）であらわされることになる。すなわち，流入水と同密度の成層標高を $y_i$ とおいて，

$$u_1(y,t)=u_1(y_i,t)\exp\{-(y-y_i)^2/2\sigma_1^2\}$$

ここに

$$\begin{cases} u_1(y_i,t)=Q_1/\int_{y_i-\frac{d_1}{2}}^{y_i+\frac{d_1}{2}} B_1\exp\{-(y-y_i)^2/2\sigma_1^2\}\,dy \\ \sigma_1=d_1/3.92 \end{cases}$$

$\bar{v}$ ： 上記のようにして $u_1$ および $u_2$ が見出されれば，貯水池底面 $y=y_b$ において $\bar{v}=0$ であるから，式（45）から

$$vS=\int_{y_b}^{y}(B_1u_1-B_2u_2)\,dy \tag{55}$$

によって与えられる。

## 6. 貯水池の集約モデル

貯水池による濁水長期化問題のように，実際問題として，池内の水温，濁質分布そのものよりも，貯水池からの流出水質が当面の課題であることも少なくない。もちろん流出水質は池内の水質過程に支配されるものであるから，池内の諸機構の解明は重要であるが，それらの過程を集約化して貯水池へ流入する河水に対応して変化する流出水質を予測する方式を開発することも貯水池水理の重要な課題である。

成層モデルは水平層に関する平均量から池内の水温，濁質の分布特性を記述しようとしたものであるが，さらに巨視的に貯水池全体にわたる積分形で基礎方程式を書きあらわすと，式（45），（47），（48）は

$$\frac{dV}{dt}=Q_1-Q_2 \tag{56}$$

$$\frac{d}{dt}(\overline{T}V)=Q_1T_1-Q_2T_2-\frac{1}{C_p}\Phi \tag{57}$$

$$\frac{d}{dt}(\overline{C}V)=Q_1C_1-Q_2C_2+P+W \tag{58}$$

となる。ここに，$V$ は全貯水量であり，記号 ‾ は $V$ についての平均量をあらわし，添字$_1$ は流入河水，添字$_2$ は流出水である。また $\Phi$ は貯水表面を通しての総受熱流束，$p$ および $W$ は単位時間当りの濁質生産量および沈澱量である。

もし，池内の水質過程を何らかの形に集約することができて，$\overline{T}$ と $T_2$，$\overline{C}$ と $C_2$ の関係を指示することができれば，上記の 3 式を解いて流入河水の $Q_1$，$T_1$，$C_1$ の時系列および取水操作による流出流量 $Q_2$ に対応する流出水の $T_2$，$C_2$ を算定することは，手順的にはさほど難しい問題ではない。しかしながら，さきの成層モデルで説明されるように，一般に，貯水池流入部と貯水領域および取水

口付近とでは，流れの性状が著しく異なるから，全貯水量の平均量として$\bar{T}$，$\bar{C}$を集約するのは容易でない。そこで，$V$をもう少し細分して，流入水質を貯水水質に変換する場$V_1$と，流出水質を形成する場$V_2$を想定し，

$$V = V_1 + V_2 \tag{59}$$

とおけば，式（56）および（58）は

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_1 - Q\,, \qquad \frac{dV_2}{dt} = Q - Q_2 \tag{60}$$

$$\frac{d(CV_1)}{dt} = Q_1C_1 - QC + p_1 - W_1\,, \qquad \frac{d(C_2V_2)}{dt} = QC - Q_2C_2 + p_2 - W_2 \tag{61}$$

となる。したがって，$C_2$（$Q_1$，$Q_2$，$C_1$）を導くためには，$p$および$W$のほかに，$V_2$に関する何らかの関係式を指定できればよいことになる。

$V_2$は成層モデルにおける流動層の概念に対応するものであるから，

$$V_2 = V_2\ (Q_2\,,\ e\,,\ y_0\ )$$

であると考えられる。ここで，取水口標高$y_0$は人為的制御の因子であるが，貯水池内の鉛直密度勾配$e$は濁質よりも水温に支配されるから，熱量に関する式（57）が関係することになる。しかし平均水温と$e$との間にはまだ未知の問題が多いから，当面の取扱いとして$e$の項は，季節および洪水の規模，頻度などの状況に応じて適当に区分して取扱うのが実際的であろう。

Koh によれば，式（36）のように流動層厚$d$は取水口からの距離$x$の1/3乗に比例するから，$V_2$は2次元流の場合$d$の4/3乗に，軸対称流の場合$d$の7/3に比例すると考えることができる。一方$d$は式（39），（41）のように，2次元流の場合$Q$の1/2乗に，軸対称流の場合$Q$の1/3乗に比例するから，結局

$$V_2 = f(e,\ y_0)\,Q^m,\quad m = \frac{2}{3} \sim \frac{7}{9} \tag{62}$$

の関係式を期待することができる。

このような集約モデルを現実の貯水池に適用して，モデルのパラメータを同定する試みはまだほとんど行なわれていないが，筆者がかつて試みた一例[10]を紹介すれば以下のようである。

まず，ごく単純に$Q = Q_1$とおき，$p$は流出入水の濁度差に，$W$は濁度に比例すると仮定して式（60），（61）を簡略化し，式（62）については$m = 1$とおくことによって，次式を想定した。

$$K_1 \frac{d}{dt}(Q_2C_2) + (Q_2 + K_2)\,C_2 = (Q_1 + K_3)\,C_1 \tag{63}$$

ここに，$K_1$，$K_2$および$K_3$は定係数とする。

式（63）は線型であるから解析的にも解けるが，$K_1$，$K_2$および$K_3$の値を観測値から同定する便宜上，これを差分方程式におき代えると，

$$a_nK_1 + b_nK_2 + c_nK_3 = d_n \tag{64}$$

ここに，

$$a_n = \{ Q_2^{(n+1)}C_2^{(n+1)} - Q_2^{(n)}C_2^{(n)} \}/\Delta t$$

$$b_n = \{ C_2^{(n)} + C_2^{(n+1)} \}/2$$

$$c_n = \{ C_1^{(n)} + C_2^{(n+1)} \}/2$$

$$d_n = \{ Q_1^{(n)}C_1^{(n)} + Q_1^{(n+1)}C_1^{(n+1)} - Q_2^{(n)}C_2^{(n)} - Q_2^{(n+1)}C_2^{(n+1)} \}/2$$

である。あるいは$C_2^{(n+1)}$について整頓して

$$C_2^{(n+1)} = \frac{(\frac{2K_1}{\Delta t} - 1)\,Q_2^{(n)}C_2^{(n)} + Q_1^{(n)}C_1^{(n)} + Q_1^{(n+1)}C_1^{(n+1)} - K_2C^{(n)} + K_3C_1^{(n)} + K_3C_1^{(n+1)}}{(\frac{2K_1}{\Delta t} + 1)\,Q_2^{(n+1)} + K_2} \tag{65}$$

となる。ここに，$\Delta t$ は時間差分，$(n+1)$ はそれぞれ時刻 $n\Delta t$ および $(n+1)\Delta t$ の値をあらわす。

さて，$Q_1$，$C_1$ および $Q_2$ の連続的観測が行なわれるならば，その記録から得られる一連の $\{a_n, b_n, c_n, d_n\}$ の値に対する $K_1$，$K_2$ および $K_3$ の最確値は，最小2乗法によれば次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \Sigma a_n^2 & \Sigma a_n b_n & \Sigma a_n c_n \\ \Sigma b_n a_n & \Sigma b_n^2 & \Sigma b_n c_n \\ \Sigma c_n a_n & \Sigma c_n b_n & \Sigma c_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma a_n d_n \\ \Sigma b_n d_n \\ \Sigma c_n d_n \end{pmatrix}$$

著者が揖斐川横山ダム貯水池において，$\Delta t = 1$ 日の観測資料から，昭.46. 8. 8～8. 21，昭.46. 9. 27～10. 11，昭. 46. 5. 7～5. 17 および 昭.46. 6. 12～6. 21 の4洪水に対する $K_1$，$K_2$ および $K_3$ の最確値を式（66）によって求めた結果は，それぞれの各期間ごとに大きく変動したが，それらの数値を参考値として適当に選んだ一組の値（$K_1 = 0.86$，$K_2 = 20$，$K_3 = 60$）を用い，改めて式（65）によって $C_2$ を試算した結果は，各洪水の観測とかなり良好な対応を示した。この試算例はかり乱暴な想定にもとづいており，なお検討を要するところが多いが，貯水池の水質過程に対する集約モデルの可能性を示唆したものと考えられ，地道な継続的現地観測とあいまって今後開発すべき一つの研究課題であるといってよいであろう。

## むすび

以上，貯水池水理の基礎概念として，不等質流の基礎方程式を述べ，それらの解析にもとづく貯水池水質過程に対する水理モデルの一端を紹介した。本講の範囲内だけでも貯水池流入部における河水流入過程の混合現象や，ここでは単に定数として取扱っている諸係数の吟味など水理モデルの確立には今後の研究に待つべき問題が少なくない。量から質への発展が水環境の新しい認識として要望されている現代において，貯水池水理も水質過程への進展が切望されている。本講は緒論に過ぎないが，そうした意味で多少なりとも貯水池水理に新らしい興味を持って頂ければ幸いである。

## 参 考 文 献


1）Yih, C. S. : Dynamics of Nonhomogeneous Fluids, Macmillian Company, New York, 1965.

2）Kao, T. W. : A Free－Streamline Solution for Stratified Flow into a Line Sink, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 21. Part 3, 1965. pp. 535－543.

3）Koh, R. C. Y. : Viscous Stratified Flow towards a Sink, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 24, Part 3, March, 1966. pp. 555－575.

4）Koh, R. C. Y. : Selective Withdrawal from Density Stratified Reservoirs, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 95. No. HY 4, July, 1969. pp. 1369－1400.

5）Huber, W. C., Harleman, D. R. F., and Ryan, P. J. : Temperature Prediction in Stratified Reservoirs, Journal of the Hydranlics Division, ASCE, Vol. 98. No. HY4, April, 1972. pp. 645－666.

6）日野幹雄，大西外明：密度成層流に及ぼす Point Sink の高さの効果，土木学会論文報告集，第163号，1969－3，pp. 39－48.

7）土木学会編：水理公式集，昭. 46改訂版，pp. 358.

8）白砂孝夫：貯水池の水質保全対策の水理的検討，大ダム，第71号，1975－3，pp. 14－21.

9）安芸周一，白砂孝夫：貯水池流動形態のシミュレーション解析，発電水力，No.134，1975－1，pp. 37－50.

10）足立昭平，中村俊六：貯水池からの放流濁度について，土木学会第27回年次学術講演会概要集第2部，1972－10，pp. 605～606.