

流出現象の非定常解析

萩 原 能 男

1. まえがき

ある流域に降雨があって河川に水が流出してくる現象は複雑な要素がからみ合っているために解析が困難な現象の一つである。Horton 流の研究は雨水の浸透・蒸発・流出係数・地下水流など静的な研究が主体であるが、この流出現象の本質を明確にする上から極めて重要なことである。しかし、1932 年に Sherman によって単位図法が流出解析に適用されてから、流出関数法・貯留関数法・タンクモデル・特性曲線法などの Sherman 流の研究が盛んになった。

さて、流出現象の非定常解析を単に降雨、流出量などが時間的に変動する現象の解析であると考えるならば、前記の Sherman 流の流出解析法も非定常解析である。ところが諸水文量が時間的に変化するのとは当然のことであるので、その一段上位の諸水文量が変動する法則性が時間的に変動するかどうかという点に着目すると、さらに高度の非定常性の定義がされる。後者の意味の非定常性を考慮した流出解析は現在、確率過程水文学²⁾などで研究が緒についたばかりであるので、ここでは前者の意味での非定常解析について記述しよう。

流出現象を数式を使わずに表現することは現在工学的実用性の面からも好まれない。何らかの形で数式を用いて計算をし、水文諸量の最大値・最小値・平均値さらに高度の複雑性のある変動性・非定常性をあらわす関数などを表現しなければならない。それでは、どんな数式を用いるべきかが問題になる。すなわち、どのようなモデルを設定すべきであるかということになる。これについては実用性を強調する人と、現象の本質を解明しようとする人では考え方がやや異なる。しかし、両者の考え方を持ち合せることが、この学問の発展のためには必要なことであろう。なお、この数理モデルは応答モデルと物理モデルとに分類され、物理モデルは集中パラメーターモデルと分布パラメーターモデルとに二分される³⁾。

現在、確率統計水文学とともに水流の運動則などに着目した動力学的水文学 (Dynamic Hydrology) が多くの研究者によって研究されるに至った。後者は物理モデルの代表的なものである、ここではその中の分布パラメーターモデルに主点をおいて説明する。

2. 基礎方程式^{4), 5), 6)}

都市流出などに良くみられる流出は表面流および河道流である。これらの流出は水理学的には開水路の流れに他ならない。したがって、基礎方程式は開水路非定常流の Saint Venant 方程式になる。これを水文流出の基礎方程式として最初に用いたのは Keulegan⁷⁾ であるといわれている。これらの方程式には次のような基本的な仮定が含まれている。

- 1) 流れは急変しない。
- 2) 斜面あるいは水路のこう配は小さい。
- 3) 流線はほぼ平行で圧力は静水圧分布をする。
- 4) 抵抗則は等流抵抗則を準用する。
- 5) 降雨または横流入による水流におよぼす運動量は無視できる。
- 6) 水の圧縮性は無視する。
- 7) 水流に空気混入はしないものとする。

8) Coriolis 係数 α , Boussinesq 係数 β はともに 1 とする。

2.1 連続の方程式

流れの質量保存則をあらわすのが連続の方程式である。図-1 に示すように Q を流量, V を平均流速, q を横流入量 (降雨, 浸透などがある場合は, これらを加減した量), h を水深, A を流積, x を水路床にそう距離軸, t を時刻, θ を水路床の傾斜角とすると, 図-1 の Δx 区間について Δt 時間に

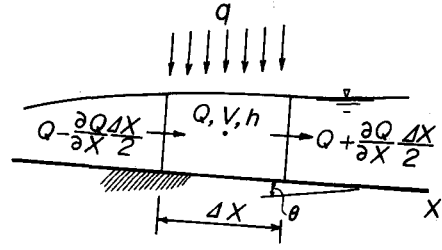


図-1 流れの座標系

流入する容積は

$$\left(Q - \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta t + q \Delta x \Delta t$$

流出する容積は

$$\left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta t$$

貯水される容積は

$$\frac{\partial A}{\partial t} \Delta t \Delta x$$

となるので, 質量保存の法則により

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q \quad (1)$$

また, 幅広長方形断面 (幅を B とする) においては

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{B} \quad (2)$$

と変形される。式(1), (2)を連続の方程式という。

2.2 運動方程式

図-1 の Δx 区間で区切られた要素について力の均合いを考えると, 圧力を p , 水の密度を ρ , 単位重量を w , 重力の加速度を g , 潤辺の長さを s , 潤辺に働く平均摩擦力を τ_0 として

圧力

$$-\frac{\partial(pA)}{\partial x} \Delta x$$

重力

$$\rho g \sin \theta A \Delta x$$

抵抗

$$-\tau_0 s \Delta x$$

これらの力の総和が零にならない場合には, 区間 Δx の水の部分に運動量変化が生ずる。図-2 に示すように, 水面上昇による運動量変化として (Δt 時間の変化, 以下同じ),

$$\frac{\partial(\rho A \Delta x \cdot V)}{\partial t} \Delta t = \rho \Delta x \Delta t \frac{\partial(VA)}{\partial t}$$

運動量の流入・流出による変化として

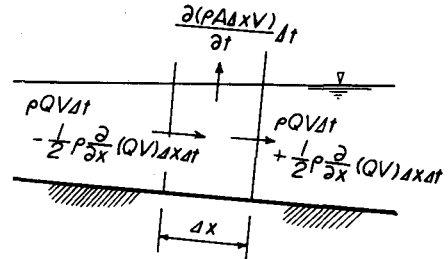


図-2 運動量の変化

$$\frac{\partial(\rho AV \Delta t \cdot V)}{\partial x} \Delta x = \rho \Delta x \Delta t \frac{\partial(V^2 A)}{\partial x}$$

となり、その和として

$$\rho \Delta x \Delta t \left(V \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial t} + V^2 \frac{\partial A}{\partial x} + 2VA \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

この運動量変化は上記の力の不均合により生ずるものであるから、運動量・力積の関係より

$$V \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial t} + V \left(V \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} \right) + VA \frac{\partial V}{\partial x} = g \sin \theta A - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(pA)}{\partial x} - \frac{\tau_0 s}{\rho}$$

一方、上式のアンダーラインをした部分は式(1)より

$$V \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial(VA)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = q - \frac{\partial A}{\partial t}$$

となるので

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho A} \frac{\partial(pA)}{\partial x} - \frac{\tau_0 s}{\rho A} - \frac{qV}{A}$$

一方、

$$\frac{1}{\rho A} \frac{\partial(pA)}{\partial x} \rightleftharpoons g \frac{\partial h}{\partial x}$$

となり、水路床こう配を $S_0 = \sin \theta$ 、エネルギーこう配を

$$S_f = \frac{\tau_0 s}{\rho g A}$$

であらわすと、上式は次のように変形される。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) - \frac{Vq}{A} \quad (3)$$

この式(3)が横流入（降雨）をともなう表面流の運動方程式である。

2.3 解法の種類

基礎方程式(1)（または(2)）と(3)を連立し、適当な初期条件・境界条件を用いて解析解を求めることは困難であるため近似解法や数値解法が用意されている。

運動方程式を無視して連続の方程式を主体にして解く方法を貯留追跡法（Storage Routing）という。連続の方程式と運動方程式の一部の項を用いることによって Kinematic Wave 法、Diffusion Wave 法、Dynamic Wave 法と下記のように分類される。

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q \quad (1)$$

→ 貯留追跡法

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{Vq}{A} - gS_0 + gS_f = 0 \quad (3)$$

→ Kinematic Wave 法

→ Diffusion Wave 法

→ Dynamic Wave 法

3. 貯留追跡法

連続の方程式(1)のみによって非定常解析をする方法で貯留関数法などがこれに属する。式(1)を x で積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \int A dx = \int q dx - Q$$

となり、 S を貯留量、 I を流入量とすると上式は

$$\frac{dS}{dt} = I - Q \tag{4}$$

となる。貯留関数法は上式の他に S と Q の間に

$$Q = f(S) \tag{5}$$

なる関係を経験的に求めて、式(4)、(5)を連立して解く方法である。式(5)の代表的なものとして

木村⁹⁾によって示された $dS = \varphi(Q) dQ$

日野¹⁰⁾によって示された $S = K_1(Q - Q_1)^m$

Prasad¹¹⁾によって示された $S = K_1 Q^n + K_2 dQ/dt$

などがある。また $Q = \lambda S$ としたのがタンクモデルであり、タンクに複数の孔をあけたり、タンクを直列に接続することによって諸損失・長期流出などを考慮した複雑なモデルを作ること¹²⁾も可能である。

4. Kinematic Wave 法

運動方程式の各項の大きさを比較した一例¹³⁾を表-1に示す。

表-1 運動方程式の各項の大きさの比較

流れの種類	慣性項		圧力項	重力項	抵抗項	単位
	$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t}$	$\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x}$	$\frac{\partial h}{\partial x}$	S_0	S_f	
河川	0.01	0.03	0.09	4.92	4.83	m/km
人工水路	0.93	0.93	1.86	34.5	34.1	"
地表面流	0.31	0.31	3.11	40.2	40.2	"

この表より慣性項(加速度項)と圧力項は重力項・抵抗項に比較して無視できると考えられる。したがって基礎方程式として

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q \tag{1}$$

$$S_0 = S_f \tag{6}$$

を用いればよい。このような数理モデルを Kinematic Wave モデルという。このモデルは Lighthill, Whitham,¹⁴⁾ 岩垣,¹⁵⁾ Henderson, Wooding¹⁶⁾らによって提唱された。式(6)は

Chezy 型抵抗則を用いると $Q = CA\sqrt{RS_0}$
Manning 型抵抗則を用いると $Q = \frac{1}{n} AR^{2/3}\sqrt{S_0}$

となる。幅広長方形断面（幅 B ）については式(1), (6)を次のように書きかえることができる。

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = q \quad (7)$$

$$Q = \alpha B \sqrt{S_0} h^m \quad (8)$$

式(8)を時間 t で微分すると

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \alpha m B \sqrt{S_0} h^{m-1} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (9)$$

式(7)を λ 倍して式(9)と加え合わせると

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} + \left\{ \lambda B - \alpha m B \sqrt{S_0} h^{m-1} \right\} \frac{\partial h}{\partial t} = \lambda q$$

これが完全微分形になるためには

$$\textcircled{1} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda = \alpha m \sqrt{S_0} h^{m-1} = mV \quad (10)$$

$$\frac{dQ}{dt} = mVq \quad (11)$$

または

$$\textcircled{2} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda = 0 \quad (12)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \alpha m B \sqrt{S_0} h^{m-1} \frac{dh}{dt} = 0 \quad (13)$$

とならなければならない。すなわち、Kinematic Wave モデルでは水面を伝播する波の波速は一方が 0、他方は平均流速 V の m 倍になることがわかる。この波を Kinematic Wave という。

①の波の上においては式(8), (10), (11), の関係より

$$\frac{dh}{dt} = \frac{q}{B} \quad (14)$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{q}{\alpha m B \sqrt{S_0} h^{m-1}} \quad (15)$$

なる関係も成立していることになる。

Kinematic Wave 法では上流に伝わる波がない。そのため Froude 数が 1 より大きい射流の状態がよく適合するといわれている。

さて、境界条件として

$$\left. \begin{array}{ll} t = 0 & L \geq x \geq 0 \\ t > 0 & x = 0 \end{array} \right\} \text{のとき} \quad h = h_0 = \text{const} \quad (16)$$

として式(14)を積分し、式(10)に代入してさらに積分すると

$$x - x_0 = \alpha m \sqrt{S_0} \int_0^t \left(\frac{1}{B} \int_0^t q d\sigma + h_0 \right)^{m-1} dt \quad (17)$$

なる関係がえられる。これは、 $t = 0$ のとき $x = x_0$ にあった観測者が Kinematic Wave にのって移動する条件を示すものである。

さらに図-3の流入の場合には

$$x - x_0 = \frac{\alpha B \sqrt{S_0}}{q_0} \left[\left(\frac{q_0}{B} t + h_0 \right)^n - h_0^n \right] \quad t_r \geq t \geq 0$$

$$x - x_0 = \frac{\alpha B \sqrt{S_0}}{q_0} \left[\left(\frac{q_0}{B} t_r + h_0 \right)^n - h_0^n \right] + \alpha m \sqrt{S_0} h_0^{n-1} (t - t_r) \quad t > t_r$$

(18)

となり、図-4の軌跡をたどることになる。この関係を用いて式(15)を積分すると

$$\left. \begin{aligned} (h - h_0)^n &= \frac{q_0}{\alpha B \sqrt{S_0}} (x - x_0) & t_r \geq t \geq 0 \\ (h - h_0)^n &= \left(\frac{q_0}{B} t_r + h_0 \right)^n - h_0^n & t > t_r \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

また、式(10)、(11)より明らかなように

$$Q = q_0 (x - x_0) + Q_0 \quad (20)$$

となり、式(17)の条件下での水深 h 、流量 Q の関係が表現される。図-5は水深 h の変化を示すものである。

Kinematic Wave 法は前述のように射流状態で良好な結果をもたらすが、常流状態においても Gburek, Overton¹⁸⁾らによって計算可能とされた。また、Sherman, Singh¹⁹⁾、金丸昭治²⁰⁾らによって Kinematic Wave モデルの解析解が示されている。

5. Diffusion Wave 法

運動方程式として圧力項・重力項・抵抗項の三項を採用したものを Diffusion Wave モデルと呼び、Kinematic Wave モデルに圧力項が加わったものである。

幅広長方形断面（幅 B ）と仮定すると基礎方程式は

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = q \quad (21)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} - S_0 + \frac{Q^2}{\alpha^2 B^2 h^{2m}} = 0 \quad (22)$$

式(22)を x で微分し、式(21)を用いて整理すると

$$\frac{\partial h}{\partial t} + mV \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\alpha h^m}{2\sqrt{S_0}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{q}{B} \quad (23)$$

水深、流速ともに変動が小さいとして $h = h_0 + h$ 、 $V = V_0 + V$ とおいて式(23)を線形化すると

$$\frac{\partial h}{\partial t} + mV_0 \frac{\partial h}{\partial x} - K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{q}{B} \quad (24)$$

ここに、 $K = \alpha h_0^m / (2\sqrt{S_0})$ であり一般に拡散係数と呼ばれるものである。式(24)は拡散方程式であるため、式(21)、(22)の数値モデルを拡散類似法とか拡散モデルという。式(24)は線形であるため解析解がえられ、速水は洪水解析としてこの方程式の一般解を

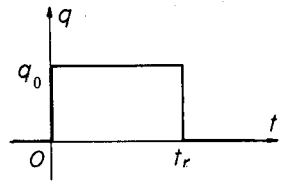


図-3 横流入（降雨）の条件

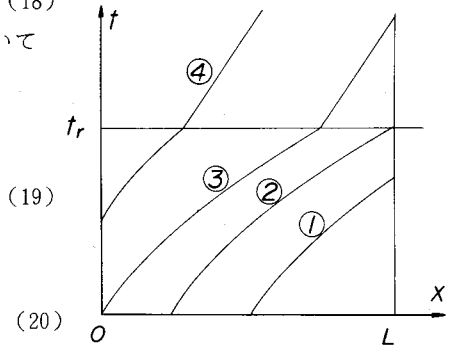


図-4 Kinematic Wave の伝播特性 (1)

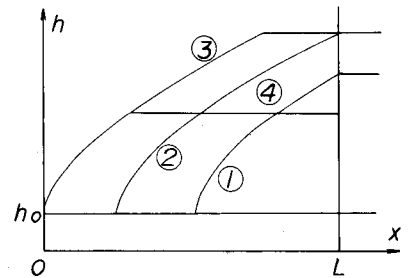


図-5 Kinematic Wave の伝播特性 (2)

$$\frac{h-h_n}{h_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{Kt}} \exp \left\{ \frac{mV_0x}{2K} - \xi^2 - \left(\frac{mV_0x}{4K\xi} \right)^2 \right\} d\xi$$

h_n : 初期等流水深

h_0 : 上流端水深

であらわした。²¹⁾ Gunaratnam と Perkins は $t = 0$ において $h = \sin \omega x$ なる条件のもとに

$$h = e^{-K\omega^2 t} \sin \omega (x - mV_0 t)$$

なる解を求めた。²²⁾

6 Dynamic Wave 法

6.1 特性曲線法による解法

運動方程式の全項を用いて流出解析をすることは先の二法に比較してかなり複雑である。しかし最近
 近は高速の電算機が発達して数値計算を容易に実行できることもあって、この種の研究が盛んになっ
 てきた。例えば Harris,²³⁾ Amein,²⁴⁾ 河西²⁵⁾ らはハイドログラフの実用化・特性の解明などを試みて
 いる。

ここでは基礎方程式として式(2), (3)を用いて説明する。式(2), (3)の特性方程式は式(2)を λ 倍して式
 (3)に加え

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\lambda h + V) \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\lambda V + g}{\lambda} \frac{\partial h}{\partial x} \right\} = g(S_0 - S_f) - \frac{Vq}{Bh} + \lambda \frac{q}{B}$$

とし、これが完全微分形になるように λ を選定することによって求められる。すなわち

$$\frac{dx}{dt} = \lambda h + V = \frac{\lambda V + g}{\lambda}$$

が要求されるため

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{g}{h}}$$

となる。このとき上記の二式は $c = \sqrt{gh}$ とおくことにより

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V + c \\ \frac{d}{dt}(V + 2c) &= g(S_0 - S_f) - (V - c) \frac{q}{Bh} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V - c \\ \frac{d}{dt}(V - 2c) &= g(S_0 - S_f) - (V + c) \frac{q}{Bh} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

と表現される。この式(25), (26)が基礎方程式(2), (3)の特性方程式である。この二組の方程式を
 陽形式の差分化をし、数値計算をすすめる方法を以下に示す。

図-6に示す $x \sim t$ 座標面上の点1, 2の諸水理量 (V, h など) が既知で、点3の諸水理量が未
 知である場合を例にとり説明する。点1より点3への特性曲線が式(25), 点2より点3への特性曲線
 が式(26)であらわされる。すなわち点3の位置および時刻は

$$\frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} = V_1 + c_1 \quad (27)$$

$$\frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = V_2 - c_2 \quad (28)$$

より次のように計算される。

$$x_3 = \frac{XM_2 \cdot CP_1 - XP_1 \cdot CM_2}{CP_1 - CM_2} \quad (29)$$

$$t_3 = \frac{XM_2 - XP_1}{CP_1 - CM_2} \quad (30)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} CP &= V + c, \quad CM = V - c \\ XP &= x - (V + c)t \\ XM &= x - (V - c)t \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

添字 1, 2, 3 は点 1, 2, 3 の量であることを示す。

また, 点 3 の流速 V_3 , 水深 h_3 は式 (25), (26)

の第 2 式を差分化して

$$\begin{aligned} \frac{V_3 + 2c_3 - V_1 - 2c_1}{t_3 - t_1} &= g(S_0 - S_{f1}) - (V_1 - c_1) \frac{q_1}{Bh_1} \\ \frac{V_3 - 2c_3 - V_2 + 2c_2}{t_3 - t_2} &= g(S_0 - S_{f2}) - (V_2 + c_2) \frac{q}{Bh_2} \end{aligned}$$

より次のように求められる。

$$V_3 = \frac{VP_1 + VM_2}{2} \quad (32)$$

$$c_3 = \frac{VP_1 - VM_2}{4}, \quad (33)$$

$$h_3 = c_3^2 / g \quad (34)$$

ここに,

$$VP_1 = V_1 + 2c_1 + \left\{ g(S_0 - S_{f1}) - (V_1 - c_1) \frac{q_1}{Bh_1} \right\} (t_3 - t_1)$$

$$VM_2 = V_2 - 2c_2 + \left\{ g(S_0 - S_{f2}) - (V_2 + c_2) \frac{q_2}{Bh_2} \right\} (t_3 - t_2)$$

$$c_1 = \sqrt{gh_1}, \quad c_2 = \sqrt{gh_2}$$

である。

一般にこの方法で計算をすすめると $x \sim t$ 座標面での特性曲線の傾きが流れの状態によって種々変化するために網目が乱れて計算を続行することが不可能になる。

Streeter と Wylie は図-7 のように, AC 間の R と CB 間の S より特性曲線を出して所定の点 P の値を求める方法を提案してこの欠点をなくした。この場合, R, S 2 点の諸量は既知点 ACB の間を線形変化するとして内挿する。

また, 計算が安定するためには総ての点で次の Courant の安定条件²⁷⁾を満足していることを確かめる必要がある。

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{V + c} \quad (35)$$

上流端, 下流端においては, そこで用意される境界条件と特性方程式とを用いて未知量を決定する。

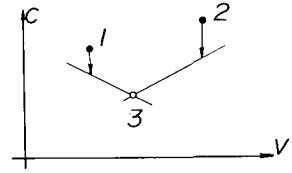
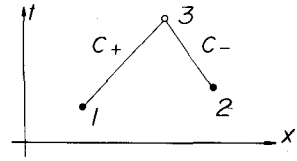


図-6 特性曲線の陽式差分

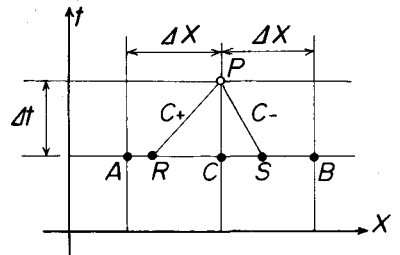


図-7 特性曲線網の整齊

上流端が常流の場合には図-8に示すようにC-の特性曲線(式(26)の条件を満たす)と上流境界条件とによって上流端の諸量を求めることができる。たとえば上流端で

$$h_2 = h_0 = \text{const} \quad (\text{貯水池条件}) \quad (36)$$

であれば

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = V_1 - c_1$$

より、まず点1が定まっている場合には Δt が、点2が定まっている場合には Δx がきまり、1,2両点の位置・時刻が定まる。点1より点2にむかう特性曲線上では

$$V_2 - c_2 = VM_1 \quad (37)$$

なる条件が満足されるため、 $c_2 = \sqrt{gh_2}$ より、式(36)の境界条件を用いて c_2 が、式(37)より V_2 がそれぞれ計算される。

上流端が射流の場合には、下流からの特性曲線が到着しないため、上流端で水深 h 、流速 V がともに定まっていなければならない。

下流端で常流の場合には図-9に示すように上流側よりC+の特性曲線が到着し、これが満足する式(25)と下流境界条件

$$h_2 = f(V_2) \quad (38)$$

とによって下流端での水深 h_2 と流速 V_2 とを計算することができる。

下流端で射流の場合には、流れが上流条件のみで定まるため計算は中間点と全く同様に遂行され(図-10)、下流端境界条件は不要である。

Amein²⁸⁾がこの特性曲線法を用いて計算した結果が図-11,12である。

この計算は初期水深8.20 ft、初期流速6.0 ft/secの定常流に洪水流を加えたものであって図-11より洪水波形の下流伝播にともなう変形が、図-12より粗度の影響が読みとれる。

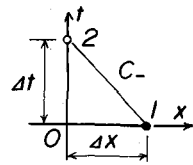


図-8 上流端

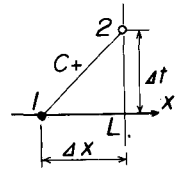


図-9 下流端

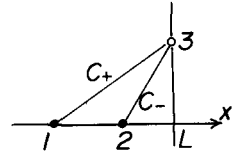


図-10 下流端(射流)

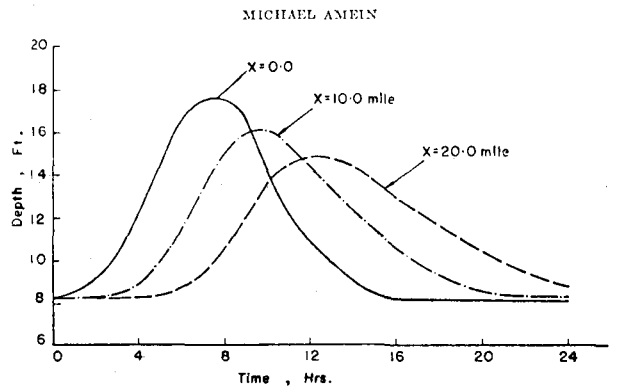


図-11 $n = 0.025$ とした流出解析例

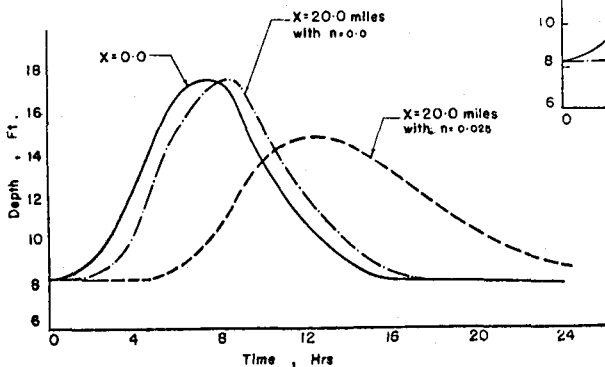


図-12 流出波形におよぼす粗度の影響

6.2 差分法による解法

前節の特性曲線法による計算法と並んで、電算機の普及により数値計算を多とする差分法も使われるようになった。

特性曲線法に比較して差分法は時間 t ～ 場所 x 座標面において、あらかじめ定められた点の諸水理量を計算することができる長所がある。計算方法には陽式差分法と陰式差分法とがあり、一般に陽式差分法は線形代数方程式に、陰式差分法は非線形代数方程式に変換される。この流出現象をあらわす Saint Venant 方程式の差分計算には四点陰形式差分法が安定性・能率性の上から現在最も使われている。²⁹⁾ また、Chow, V. T. と Ben-Zvi, A. の二次元流出モデルへの適用³⁰⁾ のように計算対象の拡大への試みなども差分法の特長を巧みに利用したものである。

(1) 陽式差分法

図-13 に示すような格子点において M 点の諸量を

$$V(M) = \{V(R) + V(L)\} / 2$$

$$\frac{\partial V(M)}{\partial t} = \frac{V(P) - V(M)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial V(M)}{\partial x} = \frac{V(R) - V(L)}{2 \Delta x}$$

.....

.....

$$S_f(M) = \{S_f(R) + S_f(L)\} / 2$$

$$q(M) = \{q(R) + q(L)\} / 2$$

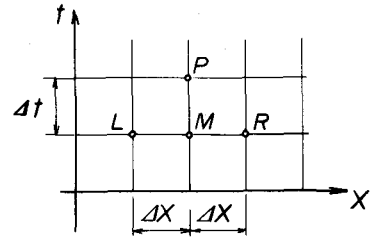


図-13 陽式差分のとり方

であらわして、基礎方程式(1), (3)を M 点で差分化して $V(P)$, $h(P)$ を求めると

$$\begin{aligned} V(P) = & \frac{1}{2} \{V(R) + V(L)\} - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} \left[\frac{1}{2} \{V(R)^2 - V(L)^2\} \right. \\ & - g \{2S_0 - S_f(R) - S_f(L)\} \Delta x - g \{h(R) - h(L)\} \\ & \left. + \frac{\{V(R) + V(L)\} \{q(R) + q(L)\}}{A(R) + A(L)} \Delta x \right] \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} h(P) = & \frac{1}{2} \{h(R) + h(L)\} - \frac{\Delta t}{4 \Delta x} \left[\{V(R) + V(L)\} \{h(R) - h(L)\} \right. \\ & + \{V(R) - V(L)\} \{h(R) + h(L)\} \\ & \left. + \frac{\Delta t}{2B} \{q(R) + q(L)\} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

となる。この計算が安定するためには、次の Courant の安定条件

$$\Delta t \leq \Delta x / |V + \sqrt{gh}| \quad (35)$$

が満足されなければならない。

この計算方法は T. V. A. において実際に利用された。³¹⁾

(2) 陰式四点差分法

この方法は、最初に Stoker³²⁾ によって紹介されたといわれている。その後、Amein と Fang³³⁾ によって発展されてきたもので Courant の安定条件を満足して用いると安定性も良く、計算能率も良い。

基礎方程式として式(2)、(3)を例にとって説明する。

図-14 に示すように、 $x = x_i$ 、 $x = x_{i+1}$ の縦軸と $t = t_j$ 、 $t = t_{j+1}$ の横軸との交点に関する水理量をそれぞれ $\alpha_{i,j}$ 、 $\alpha_{i+1,j}$ 、 $\alpha_{i,j+1}$ 、 $\alpha_{i+1,j+1}$ として、格子の中央点 M における α に関する諸量を次のようにあらわすことにする。

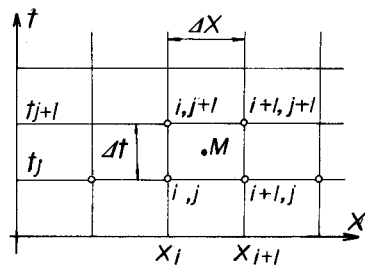


図-14 陰式差分のとり方

$$\left. \begin{aligned} \alpha(M) &= \frac{1}{4} \{ \alpha_{i,j} + \alpha_{i+1,j} + \alpha_{i,j+1} + \alpha_{i+1,j+1} \} \\ \frac{\partial \alpha(M)}{\partial x} &= \frac{1}{2 \Delta x} \{ \alpha_{i+1,j} + \alpha_{i+1,j+1} - (\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}) \} \\ \frac{\partial \alpha(M)}{\partial t} &= \frac{1}{2 \Delta t} \{ \alpha_{i,j+1} + \alpha_{i+1,j+1} - (\alpha_{i,j} + \alpha_{i+1,j}) \} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

式(2)、(3)において上記の α に相当する量は水深 h 、流速 V 、水路幅 B 、エネルギーこう配 S_f などである。式(41)の方法で式(2)を差分化すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \Delta t} \{ (h_{i+1,j+1} + h_{i,j+1}) - (h_{i+1,j} + h_{i,j}) \} + \frac{V(M)}{2 \Delta x} \{ (h_{i+1,j+1} + h_{i+1,j}) \\ & - (h_{i,j+1} + h_{i,j}) \} + \frac{h(M)}{2 \Delta x} \{ (V_{i+1,j} + V_{i+1,j+1}) - (V_{i,j} + V_{i,j+1}) \} - \frac{q(M)}{B(M)} = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

同様に式(3)を差分化すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \Delta t} \{ (V_{i+1,j+1} + V_{i,j+1}) - (V_{i+1,j} + V_{i,j}) \} + \frac{V(M)}{2 \Delta x} \{ (V_{i+1,j+1} + V_{i+1,j}) \\ & - (V_{i,j+1} + V_{i,j}) \} + \frac{g}{2 \Delta x} \{ (h_{i+1,j+1} + h_{i+1,j}) - (h_{i,j+1} + h_{i,j}) \} \\ & + g S_f(M) - \frac{g}{\Delta x} (z_{i,j} - z_{i+1,j}) + \frac{V(M)q(M)}{B(M)h(M)} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

ここに

$$S_f = \frac{n^2}{h^{4/3}} |V| \cdot V$$

z はある基準面よりの高さ、 B は水路幅

上式において $t = t_j$ における諸量は既知で、 $t = t_{j+1}$ における諸量を計算するものとする。すなわち、未知量は時刻 $t = t_{j+1}$ における水深 $h_{i,j+1}$ 、 $h_{i+1,j+1}$ と流速 $V_{i,j+1}$ 、 $V_{i+1,j+1}$ の4量である。これらの未知量は $h(M)$ 、 $V(M)$ 、 $S_f(M)$ の中にも含まれるために上の式(42)、(43)はともに未知量に関する非線形代数方程式である。いま、 $t = t_j$ にそって、格子点の数が N 個あるとすれば、長方形の要素は $N - 1$ 個あることになる。この時、各格子点で h 、 V の2個の未知量があるため、全体の未知量は $2N$ 個になる。これに対する方程式(式(42)、(43)に相当)は $2(N - 1)$ 個しか存在しない。残りの2個の方程式は上流端と下流端に境界条件として用意されるため全部で未知量と同数の方程式が存在することになり、これを解いて未知量が計算される。

$$\text{上流端境界条件を} \quad G_0(h_{1,j+1}, V_{1,j+1}) = 0 \quad (44)$$

$$\text{下流端境界条件を} \quad F_N(h_{N,j+1}, V_{N,j+1}) = 0 \quad (45)$$

とあらわし、式 (42), (43) をそれぞれ

$$F_i(h_{i,j+1}, h_{i+1,j+1}, V_{i,j+1}, V_{i+1,j+1}) = 0 \quad (42)'$$

$$G_i(h_{i,j+1}, h_{i+1,j+1}, V_{i,j+1}, V_{i+1,j+1}) = 0 \quad (43)'$$

とあらわすことができるので、結局、2N個の未知量に対して2N個の非線形代数方程式が次のように用意される。ただし、添字 $j+1$ は省略する。

$$\left. \begin{aligned} G_0(h_1, V_1) &= 0 \\ F_1(h_1, V_1, h_2, V_2) &= 0 \\ G_1(h_1, V_1, h_2, V_2) &= 0 \\ F_2(h_2, V_2, h_3, V_3) &= 0 \\ G_2(h_2, V_2, h_3, V_3) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ F_{N-1}(h_{N-1}, V_{N-1}, h_N, V_N) &= 0 \\ G_{N-1}(h_{N-1}, V_{N-1}, h_N, V_N) &= 0 \\ F_N(h_N, V_N) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

この方程式は一般に解析的に解くことが不可能のため近似値を与えて逐次その精度を高めていく Newton の方法によって解かれる。すなわち、第 k 近似値まで計算され次の第 $k+1$ 近似値を求めるのに次の関係を用いる。

$$\text{第 } k \text{ 近似値を} \quad h_i^*, V_i^*$$

であらわし

$$\Delta h_i = h_i^{k+1} - h_i^* \quad (i = 1, 2, \dots\dots\dots N)$$

$$\Delta V_i = V_i^{k+1} - V_i^* \quad (i = 1, 2, \dots\dots\dots N)$$

とすると、 Δh , ΔV に関して次の関係が近似的に成立し、第 $k+1$ 近似を計算することができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_0}{\partial h_1} \Delta h_1 + \frac{\partial G_0}{\partial V_1} \Delta V_1 &= -G_0(h_1^*, V_1^*) \\ \frac{\partial F_1}{\partial h_1} \Delta h_1 + \frac{\partial F_1}{\partial V_1} \Delta V_1 + \frac{\partial F_1}{\partial h_2} \Delta h_2 + \frac{\partial F_1}{\partial V_2} \Delta V_2 &= -F_1(h_1^*, V_1^*, h_2^*, V_2^*) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_N}{\partial h_N} \Delta h_N + \frac{\partial F_N}{\partial V_N} \Delta V_N &= -F_N(h_N^*, V_N^*) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\text{ここに} \quad \frac{\partial G_i}{\partial h_e}, \frac{\partial G_i}{\partial V_e}, \frac{\partial F_i}{\partial h_e}, \frac{\partial F_i}{\partial V_e}, G_i, F_i$$

は第 k 近似値 h_e^*, V_e^* によって計算される定数である。また式 (47) は $\Delta h_i, \Delta V_i (i = 1, 2, \dots\dots\dots N)$ に関して線形代数方程式であるため容易に $\Delta h_i, \Delta V_i$ が計算され、第 $k+1$ 近似値が

$$\left. \begin{aligned} h_i^{k+1} &= h_i^* + \Delta h_i \\ V_i^{k+1} &= V_i^* + \Delta V_i \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

によって求まる。この操作を所定の精度がえられるまで繰返せばよい。

最初に与える第1近似値は、その時刻より前のその場所の該当する量(値)より外挿することにより

よって近似の高い値をあたえることができ、この計算の能率を高めることができる。

7. あとがき

流出の非定常解析として Saint Venant 方程式の解法を主体として、その要点のみを簡単に説明した。しかし、頁数の関係でここに記述しなかったものとして、有限要素法を用いた解法がある。例えば、Cooley, Moin,³⁴⁾ Taylor³⁵⁾らの論文を参照するとよい。

運動方程式の全項を考えに入れて解く方法は、流出の非線形性などを調べるには興味深い方法であるが、計算手数が複雑になり電算機を用いないと処理できない欠点がある。しかし、この手法を用いて数多くの数値実験を重ね、その結果より帰納的に流出の特性を明確にすることが望まれよう。

参 考 文 献

- 1) 四俣正俊, 吉川秀夫; 水資源の最適計画に関する基礎的研究(その2), 洪水流出系のモデル化に関する研究, 昭和47年度文部省科研報告 特定研究(1)水資源 昭和48年3月
吉川秀夫編, 流出機構モデルの総合化に関する研究文部省科研最終報告 特定研究(水文学) 1970年3月
- 2) 日野幹雄; データ処理の手法 応用水理学下II pp. 81~137 丸善 昭和46年3月
日野幹雄; 水理学水文学におけるシステム解析
土木学会 水工学シリーズ 72 - A - 3 1972年7月など
- 3) 土木学会編; 土木工学ハンドブック 上巻 p. 496 技報堂 昭和49年11月
- 4) Eagleson, P. S.; Dynamic Hydrology. McGraw-Hill Book Comp. 1970, pp. 326-330
- 5) Overton, D. E. and Meadows, M. E.; Stormwater Modeling. Academic Press pp. 42-45, 1976
- 6) Amisial, R. A.; Analog computer solution of the unsteady flow equations and its use in modeling the surface runoff process. UTAH. STATE. UNIV. 1969, pp. 8-26
- 7) Keulegan, G. H.; Spatially variable discharge over a sloping plane, Trans. Amer. Geophys. Union. Part VI, pp. 956-958, 1944
- 8) Gunaratnam, D. J. and Perkins, F. E.; Numerical solution of unsteady flow in open channels. MIT Report No. 127, 1970, p. 37
- 9) 木村俊晃; 貯留関数法, 土木技術資料, Vol. 4, No. 1 1962
- 10) 日野幹雄; 非線形流出解析および適応流出予測 1975年度土木学会水工学暑期研修会講義集A-8
- 11) Prasad, R.; A nonlinear hydrologic system response model. Proc. ASCE, Vol. 93, No. HY 4, 1967
- 12) 土木学会編; 水理公式集(昭和46年改訂版) pp. 119~120
- 13) 8)と同じ p. 45
- 14) Lighthill, H. J., and Whitham, G. B.; On Kinematic waves. I. Flood Movement in long rivers. Proc. Royal Society, London, England, Series A, Vol. 229, May, 1955, pp. 281-316
- 15) 岩垣雄一 Fundamental Studies on the Runoff Analysis of Characteristics.
京大防災研究所年報 No. 10, Dec, 1955
- 16) Henderson, F. M., and Wooding, R. A.; Overland flow and groundwater flow from a steady rainfall of finite duration. Journal of Geophys. Research. Vol. 69, No. 8, Apr. 1964, pp. 1531-1540
- 17) 5)と同じ p. 46

- 18) Gurek, W. J. and Overton, D. E. ; Subcritical kinematic flow in a stable stream. Proc. ASCE. Vol. 99, No. HY 9, Sept. 1973, pp. 1433 - 1447
- 19) Sherman, B. and Singh, V. P. ; A distributed converging overland flow model. 1. Mathematical solutions. W. R. R. Oct. 1976, pp. 889 - 896
Singh, V. P. ; Hybrid formation of kinematic wave models of watershed runoff. J. of Hydrology, 27 (1975), pp. 33 - 50
- 20) 金丸昭治 ; 流出を計算する場合の山腹斜面形の単純化について, 土木学会論文集 第73号 昭36, 3 pp. 7 ~ 12
- 21) Shoitiro Hayami. ; On the propagation of flood waves. 京大防災研究所年報, 1951年12月
- 22) 8) と同じ, p. 46
- 23) Harris, G. S. ; Real time routing of flood hydrographs in storm sewers. Proc. ASCE. Vol. 96, No. HY 6, June, 1970, pp. 1247 - 1260
- 24) Amein, M. ; Streamflow routing on computer by characteristics. W. R. R. Vol. 2, No. 1, 1966, pp. 123 - 130
- 25) 荻原, 河西基 ; 斜面流出における非線型効果に関する一考察, 山梨大学工学部研究報告 第27号 pp. 62 - 67, 昭和51年12月
- 26) Streeter, V. L. and Wylie, E. B. ; Hydraulic Transients., McGraw-Hill, New York, 1967
- 27) Harris, G. S. ; Real time routing of flood hydrographs in storm sewers. Proc. ASCE. Vol. 96, No. HY 6, June, 1970, pp. 1247 - 1260
- 28) Amein, M. ; Streamflow routing on computer by characteristics. W. R. R. (Water Resources Research), Vol. 2, No. 1, pp. 123 - 130, 1966
- 29) Amein, M. and Chu, A. H - L. ; Implicit numerical modeling of unsteady flows. Proc. ASCE. Vol. 101, No. HY 6, June 1975, pp. 717 - 731
- 30) Chow, V. T. and Ben-Zvi, A. ; Hydrodynamic modeling of two-dimensional watershed flow. Proc. ASCE. Vol. 99, No. HY 11, Nov. 1973, pp. 2023 - 2040
- 31) Price, J. T. ; Garrison, J. M. and Granju, J - P. ; Seminar on hydraulic transients in open channels. Tennessee Valley Authority, Knoxville, Tennessee, Feb. 1968
- 32) Stoker, J. J. ; Water Waves. Interscience Publishers, New York, 1957
- 33) Amein, M. and Fang, C. S. ; Implicit flood routing in natural channels. Proc. ASCE. Vol. 96, No. HY 12, Dec. 1970, pp. 2481 - 2500
Amein, M. and Chu, A. H - L. ; Implicit numerical modeling of unsteady flows. Proc. ASCE. Vol. 101, No. HY 6, June, 1975, pp. 717 - 731
- 34) Cooley, R. L. and Moin, S. A. ; Finite element solution of Saint-Venant equations. Proc. ASCE. Vol. 102, No. HY 6, June, 1975, pp. 759 - 775
- 35) Taylor, C., AL-Mashidani, G. and Davis, J. M. ; A finite element approach to watershed runoff. Jour. of Hydrology, Vol. 21, 1974, pp. 231 - 246