

水理解析と有限要素法

川 原 睦 人

1. 緒 言

水理解析に有限要素法が用いられるようになったのは1960年代の後半から1970年代の初頭にかけてからである。水質汚濁の予測解析、津波や高潮解析、流出解析あるいは洪水解析などの水理解析に対して、電子計算機による数値的シミュレーションは、模型実験などとあいまって有効な解析手段のうちの一つである。この目的のためには、従来は主として差分法が用いられてきた。

一方有限要素法は、構造解析を中心として発達した解析手法ではあるが、構造解析のみに限らず、広く偏微分方程式の数値解析法として確立されつつある。近年、有限要素法の水理解析への適用を主題とした文献が増加し、さらにまた、有効に実際問題の解析が数多く行なわれるようになってきた。ここでは、有限要素法の基本的考え方、その特徴、現在までに発表された文献、ならびに適用された具体例について述べることにする。

2. 有限要素法の基本的な考え方

有限要素法とは、微分方程式をデジタル計算機で計算するための離散化の手法のうちの一つである。この基本的な考え方を、次の簡単な例題を用いて説明することにする。未知関数 u 、既知関数 f として、次の微分方程式を考える。

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (2)$$

もちろん、この微分方程式は、関数 f が与えられれば簡単に解くことができるが、説明用の例題として、これをとりあげることにする。

2.1 変分方程式の誘導

有限要素法の第一段階は、微分方程式から変分方程式を誘導することである。この方法には、幾多の方法が考えられているが、ここでは、ガレルキン法による定式化を説明する。いま、任意の関数 u^* を選び、式(1)の両辺にかけて、領域 $[0, 1]$ について積分すると、次の方程式を得ることができる。

$$\int_0^1 u^* \left(-\frac{d^2u}{dx^2} \right) dx = \int_0^1 (u^* f) dx \quad (3)$$

この関係は、

$$\frac{\int_0^1 u^* \left(\frac{d^2u}{dx^2} + f \right) dx}{\int_0^1 u^* dx} = 0 \quad (4)$$

のように変形して考えると、微分方程式(1)を重み u^* によって荷重平均したものが零となるようにした関係であると解釈することができる。このような意味で、重みつき変分方程式などと呼ばれている。

式(3)の関係を、そのまま用いる場合もあるが、一般には、式(3)を多少変形した方程式を用いる場合が多い。すなわち、式(3)の左辺は、次の部分積分の公式

$$\int_0^1 u^* \left(-\frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{du^*}{dx} \cdot \frac{du}{dx} \right) dx - \left[u^* \frac{du}{dx} \right]_0^1 \quad (5)$$

を用いると、次のように変形することができる。

$$\int_0^1 \left(\frac{du^*}{dx} \cdot \frac{du}{dx} \right) dx = \int_0^1 (u^* f) dx \quad (6)$$

ここに、式(2)の境界条件を考慮している点に注意されたい。また、式(3)では、最高2階微分までが含まれているのに対して、式(6)では、1階微分しか含まれていない点が、このように変形した理由のうちの一つである。

2.2 試験関数と重み関数

有限要素法の第二段階は、領域内の未知関数 u を、ある簡単な関数形として仮定することである。

図-1のごとく、解析領域 $[0, 1]$ をいま、等間隔に n 等分する。

この分割された点を節点と呼び、分割区間を有限要素と呼ぶことにする。ここでは、説明の簡単のため等分割とするが、後ほど不等分割の場合を考察することにする。節点に $0, 1, 2, \dots, n$ の番号をつけて表わすことにし、各節点の未知関数を $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ と書くことにする。領域内の未知関数 u を、各節点での値を用いて、次のように表わされるものと仮定する。

$$u(x) = \phi_0(x) \cdot u_0 + \phi_1(x) \cdot u_1 + \phi_2(x) \cdot u_2 + \dots + \phi_n(x) \cdot u_n \quad (7)$$

式(7)における $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ は、有限要素内部における未知関数 $u(x)$ の形状を仮定した関数で形状関数と呼ばれている。

この関数の仮定の方法が有限要素法の誤差を左右する重要な仮定のうちのひとつである。

ここでは、図-2に示すような、有限要素内で、座標の一次式で表わされる形状関数を用いるものとする。

すなわち、第 i 節点に対応する形状関数は、

$$\phi_i(x) = \begin{cases} nx - (i-1) & \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n} \\ (i+1) - nx & \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n} \end{cases}$$

(8)

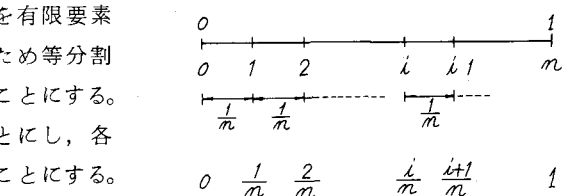


図-1 有限要素分割

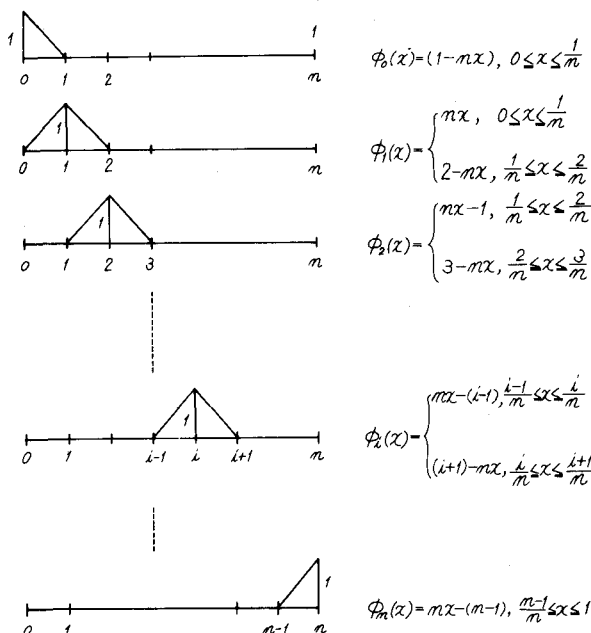


図-2 形状関数

であるとする。式(7)の関係は、近似解の仮定となっている関数で、試験関数と呼ばれている。

一方、式(6)における重み関数は、任意の関数であったことを想起して、試験関数と同じ関数形を仮定することにする。すなわち、

$$u^*(x) = \phi_0(x) \cdot u_0^* + \phi_1(x) \cdot u_1^* + \phi_2(x) \cdot u_2^* + \dots + \phi_n(x) \cdot u_n^* \quad (9)$$

ここに、 $u_0^*, u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*$ は、任意定数であるとする。このように、重み関数と試験関数に、同じ関数形を仮定する場合をガレルキン法と呼んでいる。

式(7)をグラフに示せば、図-3の上段のようになる。また、既知関数 f も、有限要素内では、一定であるとし図-3下段のようであるとしておく。

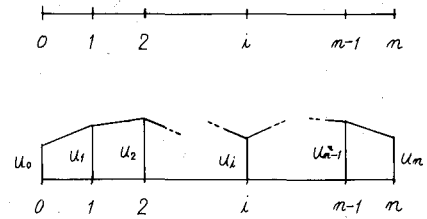
2.3 解式の誘導

次に、最終的に解くべき、離散化した連立方程式を誘導する。式(7)と式(9)を式(6)に代入して整頓する。このとき、形状関数は、式(8)で示したように、となり合った有限要素以外では、すべて零であることを用いると、次のように整頓することができる。

$$\begin{aligned} & u_0^* (a_{00}u_0 + a_{01}u_1 - b_0) + u_1^* (a_{10}u_0 + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 - b_1) \\ & + u_2^* (a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 - b_2) \dots \dots \dots \\ & + u_i^* (a_{ii-1}u_{i-1} + a_{ii}u_i + a_{ii+1}u_{i+1} - b_i) \dots \dots \dots \\ & + u_n^* (a_{nn-1}u_{n-1} + a_{nn}u_n - b_n) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 $a_{00}, a_{01}, \dots, a_{nn}$ の係数は、形状関数を実際に代入することにより、次のように計算することができる。すなわち、

$$\begin{aligned} a_{00} &= \int_0^1 \left(\frac{d\phi_0}{dx} \cdot \frac{d\phi_0}{dx} \right) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (-n)(-n) dx = n \\ a_{01} &= \int_0^1 \left(\frac{d\phi_0}{dx} \cdot \frac{d\phi_1}{dx} \right) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (-n)(n) dx = -n \\ a_{10} &= \int_0^1 \left(\frac{d\phi_1}{dx} \cdot \frac{d\phi_0}{dx} \right) dx = -n \\ a_{11} &= \int_0^1 \left(\frac{d\phi_1}{dx} \cdot \frac{d\phi_1}{dx} \right) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n \cdot n dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} (-n)(-n) dx = 2n \\ a_{12} &= \int_0^1 \left(\frac{d\phi_1}{dx} \cdot \frac{d\phi_2}{dx} \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} (-n)(n) dx = -n \\ &\dots \dots \dots \\ a_{ii-1} &= \int_0^1 \left(\frac{d\phi_i}{dx} \cdot \frac{d\phi_{i-1}}{dx} \right) dx = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} (n)(-n) dx = -n \\ a_{ii} &= \int_0^1 \left(\frac{d\phi_i}{dx} \cdot \frac{d\phi_i}{dx} \right) dx = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} (n)(n) dx + \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} (-n)(-n) dx = 2n \\ a_{ii+1} &= \int_0^1 \left(\frac{d\phi_i}{dx} \cdot \frac{d\phi_{i+1}}{dx} \right) dx = \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} n(-n) dx = -n \\ &\dots \dots \dots \\ a_{nn-1} &= \int_0^1 \left(\frac{d\phi_n}{dx} \cdot \frac{d\phi_{n-1}}{dx} \right) dx = \int_{\frac{n-1}{n}}^1 (-n)(n) dx = -n \end{aligned}$$



$$u = \phi_0 u_0 + \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \dots + \phi_n u_n$$

既知関数 f

図-3 試験関数と既知関数

$$a_{nn} = \int_0^1 \left(\frac{d\phi_n}{dx} \cdot \frac{d\phi_n}{dx} \right) dx = \int_{\frac{n-1}{n}}^1 (n)(n) dx = n$$

である。同様にして、

$$b_0 = \int_0^1 (\phi_0 f_1) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx) dx \cdot f_1 = \frac{1}{2n} f_1$$

$$b_1 = \int_0^{\frac{1}{n}} (\phi_1 f_1) dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} (\phi_1 f_2) dx = \frac{1}{2n} (f_1 + f_2)$$

.....

$$b_i = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} (\phi_i f_i) dx + \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} (\phi_i f_{i+1}) dx$$

$$= f_i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \{nx - (i-1)\} dx + f_{i+1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \{(i+1) - nx\} dx = \frac{1}{2n} (f_i + f_{i+1})$$

.....

$$b_n = \int_{\frac{n-1}{n}}^1 (\phi_n f_n) dx = f_n \int_{\frac{n-1}{n}}^1 \{nx - (n-1)\} dx = \frac{1}{2n} f_n$$

とすることができる。さて、ここで、 u_0^* , u_1^* , u_n^* は、 任意の定数であることを想起する。いま、 $u_0^* = 1$, $u_1^* = u_2^* = \dots \dots \dots u_n^* = 0$ とすれば、式(10)の第一行を0とおいた関係が得られる。まったく同様にして、 $u_0^* = u_1^* = \dots \dots \dots u_{n-1}^* = 0$, $u_n^* = 1$ までくり返せば、次の連立方程式が得られる。

$$n^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}f_1 \\ \frac{1}{2}(f_1+f_2) \\ \frac{1}{2}(f_2+f_3) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(f_i+f_{i+1}) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(f_{n-1}+f_n) \\ \frac{1}{2}f_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで、境界条件式(2)を考慮すれば、 $u_0 = 0$, $u_n = 0$ であるので、式(11)は次のように書きなおすことができる。

$$n^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(f_1+f_2) \\ \frac{1}{2}(f_2+f_3) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(f_i+f_{i+1}) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(f_{n-2}+f_{n-1}) \\ \frac{1}{2}(f_{n-1}+f_n) \end{bmatrix} \quad (12)$$

式(12)の連立方程式を解くことにより、有限要素法による近似解 $u_1, u_2, \dots \dots \dots u_{n-1}$ を求めることができる。

また、式(12)は、微分方程式(1)、(2)に対する中央差分による差分化した方程式に一致している点も興味深い。

2.4 有限要素ごとの定式化

前節において、有限要素法の離散化の手順を述べ、その終結方程式が、差分法による方程式と同一になることを指摘した。ここでは、以上の定式化を、おのおのの有限要素に着目して、別の見方により定式化することを考察する。ここでは、分割を、図-4に示すごとく、分割区間ごとに区間長を変えておくことにする。

図-4下段に示すごとく、任意の区間をとりだし、あらためてその区間長を ℓ としておく。両端に a 、 b の別をつけ、 a から b へ向う座標を x とあらわす。着目する区間、すなわち有限要素、について、式(1)が成立しているのであるから、その重みつき変分方程式は、

$$\int_0^1 u^* \left(-\frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx = \int_0^1 (u^* f) dx \quad (13)$$

となる。着目する有限要素 $a-b$ について、部分積分の方程式は、次のようになる。

$$\int_0^1 u^* \left(-\frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{du^*}{dx} \cdot \frac{du}{dx} \right) dx - N_a u_a^* - N_b u_b^* \quad (14)$$

ここに、

$$N_a = \left[-\frac{du}{dx} \right]_{x=0}, \quad N_b = \left[\frac{du}{dx} \right]_{x=1} \quad (15)$$

である。式(14)を式(13)に代入して整頓すると、有限要素 $a-b$ に対して成立すべき重みつき変分方程式として、次の方程式を得ることができる。

$$\int_0^1 \left(\frac{du^*}{dx} \cdot \frac{du}{dx} \right) dx = N_a u_a^* + N_b u_b^* + \int_0^1 (u^* f) dx \quad (16)$$

次に、重み関数と試験関数を仮定する。試験関数式(7)は、要素 $a-b$ に着目すれば、次の関数を仮定したことと対応している。

$$u = \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) u_a + \left(\frac{x}{\ell} \right) u_b \quad (17)$$

ここに、 u_a 、 u_b は、それぞれ有限要素 $a-b$ の a 端、 b 端における未知関数 u の値である。まったく、同様にして、重み関数についても、式(9)に対応する方程式として、

$$u^* = \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) u_a^* + \left(\frac{x}{\ell} \right) u_b^* \quad (18)$$

なる方程式を導入しておく。ここに u_a^* 、 u_b^* は、任意定数である。

さて、式(17)、(18)を式(16)に代入して、整頓すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & u_a^* \left[\int_0^1 \left(-\frac{1}{\ell} \right) \left(-\frac{1}{\ell} \right) dx \cdot u_a + \int_0^1 \left(-\frac{1}{\ell} \right) \left(\frac{1}{\ell} \right) dx \cdot u_b - \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) f dx - N_a \right] \\ & + u_b^* \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{\ell} \right) \left(-\frac{1}{\ell} \right) dx \cdot u_a + \int_0^1 \left(\frac{1}{\ell} \right) \left(\frac{1}{\ell} \right) dx \cdot u_b - \int_0^1 \left(\frac{x}{\ell} \right) f dx - N_b \right] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

既知関数 f は、有限要素 $a-b$ 内で一定であるとして、積分を行って整頓すると、次のように変形

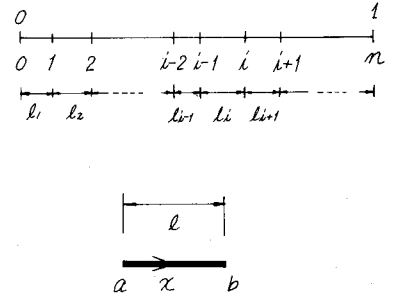


図-4 有限要素分割と着目する有限要素

することができる。

$$u_a^* \left[\left(\frac{1}{\ell} \right) u_a + \left(-\frac{1}{\ell} \right) u_b - \frac{\ell f}{2} - N_a \right] \\ + u_b^* \left[\left(-\frac{1}{\ell} \right) u_a + \left(\frac{1}{\ell} \right) u_b - \frac{\ell f}{2} - N_b \right] = 0 \quad (20)$$

式(20)において、すでに述べたとおり、 u_a^* 、 u_b^* は任意に選べる定数であるから、 $u_a^* = 1$ 、 $u_b^* = 0$ および、 $u_a^* = 0$ 、 $u_b^* = 1$ と選ぶと、

$$\begin{bmatrix} N_a \\ N_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell} & -\frac{1}{\ell} \\ -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\ell f}{2} \\ \frac{\ell f}{2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

なる方程式を得ることができる。ここに、 N_a 、 N_b は式(15)にみるごとく、要素端における微係数であり、また、 u_a 、 u_b は要素端における未知関数値である。この方程式は、それぞれの有限要素について、成立する方程式であり、有限要素方程式と呼ばれている。

2.5 全領域へのかさね合わせ

さて、図-4を参照して、 $i-1$ 節点と i 節点との間の要素を第 i 要素と番号づけすることにする。式(21)は、第 i 要素でも、第 $i+1$ 要素でも成立していなければならない。また、第 i 要素の a 端は、 $i-1$ 節点、 b 端は、 i 節点であることから、第 i 要素について、式(21)の第2式を書くと、次のようになる。

$$N_b^i = \left(\frac{1}{\ell_i} \right) u_{i-1} + \left(-\frac{1}{\ell_i} \right) u_i - \frac{\ell_i f_i}{2} \quad (22)$$

ここに ℓ_i 、 f_i は、第 i 要素の区間長と既知関数値である。同様にして、第 $i+1$ 要素について、式(21)の第1式を書くと、

$$N_a^{i+1} = \left(\frac{1}{\ell_{i+1}} \right) u_i + \left(-\frac{1}{\ell_{i+1}} \right) u_{i+1} - \frac{\ell_{i+1} f_{i+1}}{2} \quad (23)$$

となる。ここに第 $i+1$ 要素の a 端は i 節点、 b 端は、 $i+1$ 節点であることを用いている。式(15)を参照して第 i 節点では、

$$N_b^i + N_a^{i+1} = 0 \quad (24)$$

でなければならないことがわかる。式(22)、(23)を式(24)に代入して、整頓すれば、第 i 節点について、成立すべき方程式として、次の関係を得ることができる。

$$\left(-\frac{1}{\ell_i} \right) u_{i-1} + \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right) u_i + \left(-\frac{1}{\ell_{i+1}} \right) u_{i+1} = \frac{1}{2} (\ell_i f_i + \ell_{i+1} f_{i+1}) \quad (25)$$

全く同様の操作を、1 節点から n 節点まで、くり返して行くと、次の $n-1$ 個の連立方程式を得ることができる。

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2}\right)\left(-\frac{1}{\ell_2}\right) \\ \left(-\frac{1}{\ell_2}\right)\left(\frac{1}{\ell_2} + \frac{1}{\ell_3}\right)\left(-\frac{1}{\ell_3}\right) \\ \vdots \\ \left(-\frac{1}{\ell_i}\right)\left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}}\right)\left(-\frac{1}{\ell_{i+1}}\right) \\ \vdots \\ \left(-\frac{1}{\ell_{n-1}}\right)\left(\frac{1}{\ell_{n-1}} + \frac{1}{\ell_n}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\ell_1 f_1 + \ell_2 f_2) \\ \frac{1}{2}(\ell_2 f_2 + \ell_3 f_3) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(\ell_i f_i + \ell_{i+1} f_{i+1}) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(\ell_{n-1} f_{n-1} + \ell_n f_n) \end{bmatrix} \quad (26)$$

ただし、ここでは、式(2)における境界条件を考慮している。式(26)の連立方程式を解けば、有限要素法による解 $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ を求めることができる。

さて、特別な場合として、分割を等分割にした場合を考えることにする。いま、

$$\ell_1 = \ell_2 = \dots = \ell_i = \dots = \ell_n = \Delta x \quad (27)$$

であるとすると、式(25)は、次のように変形される。

$$\frac{1}{\Delta x^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1}) \quad (28)$$

式(28)は、微分方程式(1)を Δx なる差分間隔によって、中央差分をとったものと、まったく一致している。また、 $\Delta x = 1/n$ と置くことにより、式(28)を全節点についてたてた方程式は、式(12)とまったく一致する。すなわち、有限要素法による離散化方程式は差分法による離散化方程式を、任意の大きさをもつ区間に分割することができるように拡張したものであるとすることができる。かきねて、差分法による離散化方程式は、有限要素法の離散化方程式のうちの等間隔等分割とした特別の場合であることを強調しておきたい。

3. 有限要素法の従来の研究と特徴

3.1 有限要素法の基本的考え方の整理

一般に、自然現象は、微分方程式によって表示されるのが通例である。このような連続量を、デジタル計算機によって、計算を行うためには、解析領域内にとられた、独立した点における離散化量によって近似的に計算する方法が、用いられることになる。有限要素法も差分法も、高速のデジタル計算機によって、未知数の非常に多い多元連立方程式が、比較的簡単に解けるようになったことを前提とした解法である。前節までに説明した、有限要素法は、いわゆるガレルキン法に基礎をおいた解法であるが、簡単に要約すると次のようになる。

① 解析する領域を任意の形状（二次元問題の場合には、三角形が用いられる場合が多い。）を持つ有限要素に分割する。

② 微分方程式から重みつき変分方程式を作成する。

③ 個々の有限要素内の未知数を、要素の節点での値を用いた補間方程式、すなわち、試験関数を用いて近似する。

④ 重み関数に、試験関数と相似の関数形を仮定しておく。

⑤ 試験関数と重み関数を、重みつき変分方程式に代入し、個々の有限要素に対する離散化した、有限要素方程式を誘導する。

⑥ 個々の有限要素方程式を重ね合わせることで解析領域全体の離散化方程式を得る。

⑦ 解析領域全体の離散化方程式を解いて、有限要素法による解を得る。

以上のように、有限要素法による解析は、いささか、まわりくどい過程を通ることによって近似解を得る方法である。このために、ともすると曲解され、有限要素法の本質が見落されることがある。しかし、理論的には、きわめて整然と整理された解法であり、一たん、理解の端緒をつかむと、次々に理解が深まるものである。

3.2 有限要素法の特徴

有限要素法と差分法を比較し、有限要素法の特徴を述べると次のようになる。

① 差分法は、直接的近似法であり、有限要素法は間接的近似法であるといえる。差分法は、基礎となる微分方程式を直接に差分式に置き換えることにより近似を行うので、直感的に理解しやすい。これに対して、有限要素法は、すでに説明したように、基礎方程式を、いったん重みつき変分方程式に変換した後に、近似を行う。このために、有限要素法による近似式を得るためには、多少複雑な過程を通らねばならない。しかし、多くの場合、この変分方程式は、単なる数式のみにとどまらず、エネルギー保存則と結びついて、物理的意味づけを行うことができる。

② 差分法は、原則として規則的に配置された正方形格子点を前提としているが、有限要素法では、まったく、任意に配置された分割点を前提としている。これは、離散化の過程において、個々の有限要素ごとに離散化方程式を作成し、これを重ね合わせることによって、全体の解式を構成していることになる。このために、複雑な河川・海岸の沿岸地形、河底・海底地形、島嶼、堤防、導流堤などを無理なく近似することができる。このことは、沿岸地形や堤防などの工作物の有無により、影響を受ける流況解析にはきわめて重要なことである。さらに、現象が、複雑に急激に変化する部分をより細く、現象の変化が緩やかな部分は、より粗い分割を用いることができる。そのうえに、必要な部分は細く、さほど重要でない部分は粗く分割することにすれば、計算時間や計算機容量を節約することができる。これはまた、連立方程式を解くときの安定性の改善にもつながるものである。安定性の改善にもつながるものである。

③ 有限要素法で扱い得る境界条件は、差分法に比べて自然であるといえることができる。差分法の場合は、例えば、微分係数で与えられた境界条件や、斜めに傾斜した境界の条件の処理などに対して特別な近似法を考察しなければならないことが多い。有限要素法では、これらは、さしたる特別な処理を行うことなしに、境界条件を処理することができる。特に、微係数によって与えられる境界条件は、重みつき変分方程式の自然境界条件として処理される場合が多い。

④ 有限要素法による解法は、②、③に指摘した点を考え合わせると、多目的汎用プログラムの作成が容易であるといえることができる。構造解析においては、諸外国で作成されたほんの数種類の汎用プログラムが、わが国を含めて全世界を制圧している。このことは、汎用プログラム作成の容易さの例証といえよう。水理解析についても、欧米諸国では、汎用プログラムの作成に着手していると聞く。わが国においても、汎用プログラム作成のための体制づくりが急がれると考える。

⑤ 有限要素法による解析では、広い解析領域を一たん粗い分割によって解いておき、必要な部分をあらためてとり出し、より細かい分割によって計算するという、いわゆるズームング手法を有効に用いることができる。

これは、粗い分割と細かい分割を混在して計算ができることの応用である。このことにより、計算費用を軽減することができる。

⑥ 差分法による解法は、格子点における物理量をもって近似を行なう。これに対して、有限要素法は要素に着目し、要素内部全体にわたって平均的に等価になるように、独立点の等価物理量に変換している。このことは、有限要素法による場合、近似関数の選び方によって、いくらでも近似の度をあげることができることを意味する。実際には、計算時間や、最終の連立方程式の安定性から制約が科せられることになるが、多くの種類の近似解法を考えることができることにつながる。

⑦ 有限要素法は、差分法に比べて、きわめて近い歴史しか持たない点をあげることができる。差分法は、電子計算機の出現以前に端を発し、電子計算機の発達とともに発達してきている。このために、現在までに多くの適用例をもっており、その性質がかなり明らかにされてきている。有限要素法は、最近 10 年間に、急激に発達した解法であるため、その利点や欠点が実際に応用する利用者に浸透していないのが現況である。近年、実際問題への多くの適用例がみられるようになってきているので、多くの利用者の間にその価値が浸透するのも真近いものと予想される。

3.3 有限要素法の従来の研究

水理解析に応用された有限要素法は、大別してナビエーストックス方程式を直接解析するものと浅海長波方程式を解析するものがある。前者については、別途（川原（1976））考察するものとし、土木解析に関連の深い後者に対して概要を述べることにする。

有限要素法の標準的教科書としては、Zienkiewicz（1972）をあげることができる。これは、近く改訂 3 版が出版される予定で、その中には、長波方程式を扱った章が含まれることになっている。Heubner（1976）は、粘性流体について詳しい書物であり、Brebbia・Conner（1976-a）は、流体解析用の教科書として書かれている。近年国際会議もさかに行なわれるようになり、第 1 回がイギリスで第 2 回がイタリアで、“有限要素法の流体力学への応用”（Gallagher・Oden・Zienkiewicz・Taylor（1974）,（1976））と題する会議が行なわれている。このときの特別講演を集めた、集成論文集（Gallagher・Oden・Zienkiewicz・Taylor（1975））が第 1 巻、第 2 巻と発行され、第 3 巻が近く発行の予定である。また、アメリカにおいて、“水資源問題に関する有限要素法の応用”（Connor・Brebbia（1976-b））と題する国際会議が行なわれている。

浅海長波方程式に対する有限要素解析の個々の論文について概説すると次のようになる。Grothkop（1973）は、空間方向と同様に時間方向についても有限要素法を適用する方法を用いている。一方 Cullen（1973）は、時間に対して、中央差分を用いた Leap-Frog 法を用いる有限要素解析を提案している。また Cullen（1976）では、その他 2,3 の方法について安定と収束を論じている。Taylor・Davis（1975-a, b）では、アイソパラメトリック要素による解析が行なわれ、時間関数の積分に対しては、Runge-Kutta 法が良いとしている。Fix（1975）では、ポテンシャル関数を用いて有限要素法を展開し、その収束性に対する数学的議論を行なっている。

Kawachi・Minami（1975）では陰的解法による有限要素法が述べられ、Weare（1976）は、有限要素法と差分法の計算時間などの比較を述べている。

川原・竹内・首藤（1976）、Kawahara・Takeuchi・Yoshida（1977）では、二段階ラックス・ウェンドロフ有限要素法を検討している。潮汐流動のごとく、周期的な準定常運動に対しては、Kawahara・Hasegawa（1977）で周期的ガレルキン法による解析が、川原・川上・船越・長谷川（1976）・Kawahara・Hasegawa・Kawanago（1977）では、周期的摂動法による解析が、それぞれ提案されている。Sündermann（1976）は有限要素法の変形である support Method なる方法を検討し Wang・Connor（1975）、Wang（1976）では、近接要素の平均値を用いて時間積分を行う方法について述べられている。

さて、実際に有限要素法を用いて、シュミレーション解析が行なわれているものは、上記の文献の

他に、次のようなものがある。Brebba (1974) はイギリスの Solent 川における水質および水温の予測解析が行なわれている。Tanaka・Hirai・Katayama (1976) では琵琶湖の解析が、また Hambling (1976) では、カナダのウィニペグ湖の解析が報告されている。Loziuk・Anderson・Belytschko (1972) では、温排水の問題を検討している。Baca・Arnett (1976) では、湖沼の富栄養化に対する解析に有限要素法が応用されている。

このように、有限要素法は、きわめて多くの特徴をもち、また、その応用範囲も相当に広いものである。以上にみるように、有限要素法による流動水質解析は、世界的にその応用範囲を広げつつある解析方法であるといえることができる。

4. 有限要素法による予測解析例

有限要素法の実際問題への適用例として、運輸省第一港湾建設局で行なわれた、信濃川河口にある新潟西港の流動解析について述べることにする。ここは、河口港であるために、海水が河川水の下部に浸入する塩水くさび現象が生じている。このために、基礎方程式としては、二層流としての浅海長波方程式が用いられた。すなわち、

$$\begin{aligned} & (\dot{s} - \dot{d}) + \{(s - d)u_i\}_{,i} = 0 \\ & \dot{u}_i + u_j u_{i,j} + g s_{,i} = A_h^u (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} - \alpha (u_i - v_i) \\ & \dot{d} + \{(d - b)v_i\}_{,i} = 0 \\ & \dot{v}_i + v_j v_{i,j} + g s_{,i} + \Delta g d_{,i} = A_h^l (v_{i,j} + v_{j,i})_{,j} + \beta (u_i - v_i) - r v_i \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{上層} \\ \text{下層} \end{array} \right\}$$

である。ここに、 s 、 d は上層、下層の潮位変化、 u_i 、 v_i は上層、下層の流速、 g は重力加速度、 A_h^u 、 A_h^l は、それぞれ、上層、下層の渦動粘性係数、 α 、 β 、 r 、 Δ はそれぞれ、上層、下層、海底の摩擦力、上層と下層の密度差の比である。なお、上式は、くり返えて表われる添字については、総和をとるとする総和規約に従って表示している。

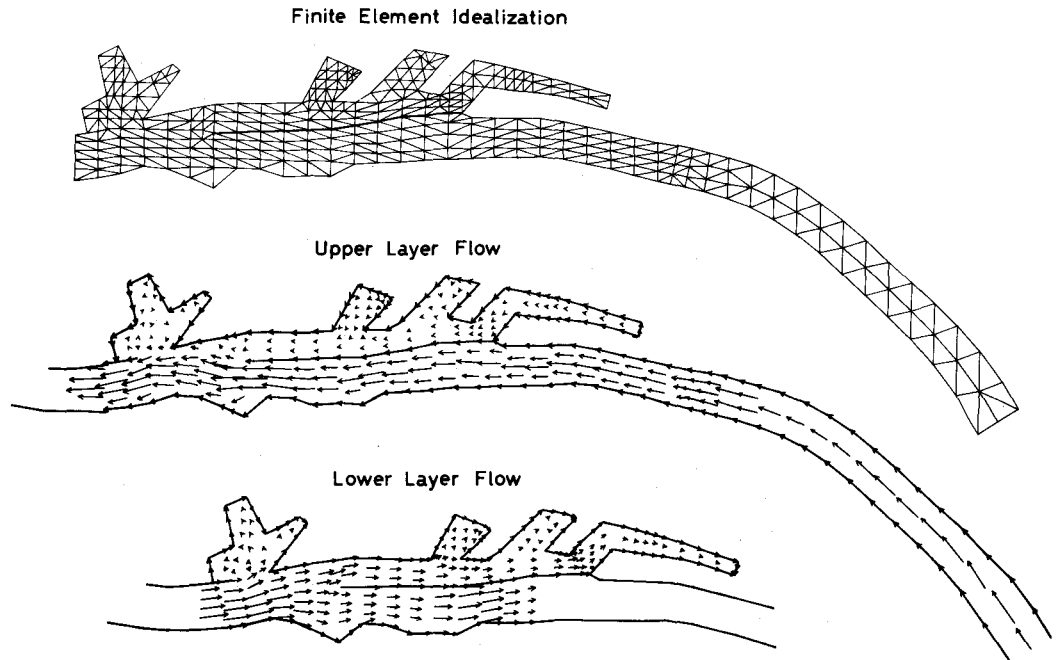


図-5 有限要素分割と計算された流速

図-5に、有限要素分割と計算された流速を示す。港湾形状や導流堤の形状が、きわめて良く近似されていることがわかる。矢印で、上層と下層の計算された、流速分布が示されている。この計算は、埋立て、航路しゅんせつによる港湾内の流速の変化や、導流堤の撤去による水質の変化などに対する予測解析として、有効に利用されている。

5. 参 考 文 献

- 1) Baca, R. C. (1976): "A Finite Element Water Quality Model for Eutrophic Lakes," Finite Elements in Water Resources, Princeton University
- 2) Brebbia, C. A. (1974): "Circulation and Dispersion Problems by Finite Elements," Discrete Methods in Engineering, C. I. S. E., Milan
- 3) Connor, J. J. and C. A. Brebbia (1976-a): "Finite Element Techniques for Fluid Flow," Newns-Butterworth
- 4) Connor, J. J. and C. A. Brebbia (1976-b): "International Conference on Finite Elements in Water Resources," Princeton University
- 5) Cullen, M. J. P. (1973): "A Simple Finite Element Method for Meteorological Problems," J. Inst. Math, Appl. Vol. 11, pp 15~31
- 6) Cullen, M. J. P. (1976): "The Application of Finite Element Methods to the Primitive Equations of Fluid Motion," Finite Elements in Water Resources, Princeton University
- 7) Gallagher, R. H., J. A. Liggett, and S. T. K. Chang (1973): "Finite Element Shallow Lake Circulation Analysis," Proc. A. S. C. E., Vol 99, No. Hy 7, pp 1083~1096
- 8) Gallagher, R. H. and S. T. K. Chang (1973): "Higher Order Finite Element Analysis of Lake Circulation," Comp. Fluid., Vol. 1, pp 119~132
- 9) Gallagher, R. H., J. T. Oden, O. C. Zienkiewicz and C. Taylor (1974): "Finite Element Methods in Flow Problems," University of Wales, Swansea,
- 10) Gallagher, R. H., J. T. Oden, O. C. Zienkiewicz and C. Taylor (1976): "Finite Element Methods in Flow Problems," I. C. C. A. D., St. Margherita
- 11) Gallagher, R. H., J. T. Oden, O. C. Zienkiewicz and C. Taylor (1975) "Finite Elements in Fluids," John Wiley & Sons,
- 12) Fix, G. J. (1975): "Finite Element Models for Ocean Circulation," S. I. A. M. J. Appl. Math. Vol. 29, No. 3, pp 371~387
- 13) Hambling, P. F. (1976): "Finite Element Methods Applied to the Modelling of the Circulation, Seiches, Tides and Storm Surges in Large Lakes," Finite Element Methods in Flow Problems, St. Margherita
- 14) Huebner, K. H. (1975): "The Finite Element Method for Engineers," John Wiley & Sons
- 15) 川原睦人・川上俊雄・船越晴世・長谷川賢一 (1976): "有限要素法と摂動法を用いた流動および拡散計算手法の開発," 第23回土木学会海岸工学講演会
- 16) 川原睦人 (1976): "粘性流体の有限要素法解析," 日本造船学会誌 第560号
- 17) 川原睦人・竹内則雄・首藤伸夫 (1976): "2段階ラックスウェンドロック有限要素法による潮汐流解析," 第23回土木学会海岸工学講演会
- 18) Kawahara, M., N. Takeuchi and Y. Yoshida (1977): "Two Step Explicit Finite Element

- Method for Tsunami Wave Propagation Analysis," Int. J. Num. Meth. Engng. (to be published)
- 19) Kawahara, M., and K. Hasegawa (1977): "Periodic Galerkin Finite Element Method for Tidal Flow Analysis Int. J. Num. Meth. Engng. (to be published)
 - 20) Kawahara, M., K. Hasegawa and Y. Kawanago (1977): "Periodic Tidal Flow Analysis by Finite Element Perturbation Method," Comp. Fluid. (to be published)
 - 21) Kawachi, T. and I. Minami (1975): "Finite Element Modelling of Two Dimensional Unsteady Current," 農業土木学会論文集, 第60号, pp 40~48
 - 22) Loziuk, L. A., J. C. Anderson and T. Belytschko (1972): "Hydrothermal Analysis by Finite Element Method," proc. ASCE, Vol. 98, No. Hy 11, pp 1983~1998
 - 23) Norton, W. R., I. P. King and G. T. Orlob (1973): "A Finite Element Model For Lower Granite Reservoir," Water Resources Engineers, Walnut Creek, Ca.,
 - 24) Sündermann, J. (1976): "Computation of Barotropic Tides by the Finite Element Method," Finite Elements in Water Resources, Princeton University
 - 25) Tanaka, T., T. Hirai and T. Katayama (1976): "Finite Element Applications to Lake Circulation and Diffusion Problems in Lake Biwa," Finite Element Methods in Flow Problems, St. Margherita,
 - 26) Taylor, C. and J. M. Davis (1975-a): "Tidal and Long Wave Propagation - A Finite Element Approach," Comp. Fluid., Vol. 3, pp 125~148
 - 27) Taylor, C. and J. M. Davis (1975-b): "Tidal Propagation and Dispersion in Estuaries," Finite Elements in Fluids, Vol. 1, John Wiley & Sons, pp 95~118
 - 28) Wang, H. P. (1976): "Multi-leveled Finite Element Hydrodynamic Model of Block Island Sound," Finite Elements in Water Resources, Princeton University
 - 29) Wang, J. D. and J. J. Connor (1975): "Mathematical Modelling of Near Coastal Circulation," MIT Report, No MITSG 75 - 13.
 - 30) Weare, T. J. (1976): "Finite Element or Finite Difference Methods for the Two Dimensional Shallow Water Equations," Comp. Meth, Appl. Mech. Engng. Vol. 7, pp 351~357