

# 河 川 乱 流

余 越 正 一 郎

## まえがき

大気乱流や海洋乱流などにくらべて、河川乱流といえるほどのものはまだない。と言うのも、河川の特徴であるところの水面の存在、流路の蛇行、変形する河床、多くの浮遊物の存在といったようなことに関連した河川独自の乱流の研究がまだほとんどないからである。そんなわけで、本文のほとんどはどこにでも書いてあるようなことがらの切貼りのなものや、妄想的なものになるであろう。

乱流とは何かを厳密に定義せよと言われてもちょっと困るのである。お互、勝手に都合のいいことを考えているので、ひとを納得させるのがむずかしい。定義は逃げて、特徴を並べている人もいる。それでも「旅は道づれ………」と言えば、「人を見たら………」とケチをつけることもたやすい。

「不規則な運動である」といわれれば、乱流で一番重要と思われる大規模な乱れは規則的であり、また小規模な乱れ同志の間にはある統計的な規則（法則）があるといつてやつつけることもできる。風波は不規則な運動をしていても、あまり乱流的ではなさそうである。

「渦運動」に対しては、風呂の水を抜くときの渦はどうであろうか。「三次元性」や「非線型性」についても乱流の専売でないことは明白。「拡散性」、「逸散性」についても同様である。結局は「層流でないのが乱流」ということになる。層流の定義も必要になってくる。

川の流れは、高い所に降った雨が持っていたポテンシャルエネルギーが、平均流になって流れることから始まる。高さ 200 m の山のテッペンに降った雨は  $\sqrt{2gH}$  から計算すると、海へ出るときには「ひかり」よりも早くなるはずである。しかし現実是这样になっていない。それは分子粘性により運動エネルギーのほとんどが熱に変って逸散してしまうからであると言われる。これで間違いないのはあるが、川のような流れでは、平均流の運動エネルギーを直接分子粘性では消費しきれないのである。流れが先天的にそなえている非線型性によって、平均流をいったん小規模な運動（うず）に料理し直して消化しやすい形にしてから分子粘性で処理するのである。このようなエネルギー処理工場を稼働している流れが乱流である。ここに言う非線型性は N. S. 方程式で言えば  $\mathbf{u} \cdot \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$  で、これは渦の粉碎（倍音作製）装置である。（非線型とは、直線  $y = ax$  の性質をもっていないということ）。これに対し、粘性逸散  $\nu (\partial / \partial \mathbf{x})^2 \mathbf{u}$  の方は、振幅減衰、不均一解消装置である。（2 階微分は曲率）。この小規模運動をウズと言う人もいる。乱子とよぶ人もいる。

世の中のほとんどの流れは乱流であることから見て、自由度の大きい乱流が正常であって、ある状況下でのみ層流という特殊な単純流れが生じると考える方がよいような気になる。このへんのところを演出するのが、レイノルズ数である。乱流というのは、運動エネルギーを熱に変換（逸散）し、エントロピーを増大させるための能率のよい装置である。大体、自然は極値を好むのだが、流れはエネルギーの逸散を出来るだけ大きくしたいという意志を持っているのであろうか。

## 1. 渦 と 波

乱流の描像として、「渦の集まり」あるいは「かたまり（乱子）」と、「波のまざり合い」という二つの異ったものがある。表面上、なんとなく量子力学の粒子と波動の二重性を連想しないでもない。

「かたまり」の寸法はどうしてはかるか。これは暗闇に手探りで物の寸法を測ることを思い出せばよい。両手が同じ性質を感じる最大長さが物の長さである。両手の感じ方に相関があるのである。

「かたまり」とか渦の寸法を特徴づける性質としては速度をよく使うから、空間の二点で速度を同時に検出して、両者のうぎの相関をみればよい。もちろん統計的のである。ここにいう相関とは、直線相関  $y = ax + b$  のことであって、いくら  $x$  と  $y$  に密接な関係があっても、これ以外の関係は相手にしないのである。

距離  $\mathbf{r}$  離れた2点での速度の相関は  $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}), \mathbf{r}(\mathbf{x}) \rangle$  である。これが座標原点に関係なく、2点間距離  $\mathbf{r}$  だけに關係して（一樣という、時間のときには定常）、 $\mathbf{R}(\mathbf{r})$  だと取扱いになにかと都合である。 $\mathbf{R}$  が太字なのはテンソルの気持。かぎかっこ  $\langle, \rangle$  は平均（適当な積分）の意味である。 $\mathbf{R}(\mathbf{r})/\mathbf{R}(0)$  が1に近い範囲は、水が大体同一行動をとっている範囲で、かたまりとか渦の大きさを表わすと見るのである。これではあいまいで、なんとなくたよりないようであるが、このぐらいの方がいろいろと都合がよいのである。

「波の集り」と見る方は、いろんな波長の sin 波、 $\exp(i 2 \pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  が、それぞれの振幅で存在していて、それらの重ね合わさったもの、 $\sum \hat{\mathbf{u}} \cdot \exp(i 2 \pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  と見る数学的の便法的なものである。複雑なモノ（ベクトル  $\mathbf{u}$ ）を表わすのに、基準になるモノ（互に直交して、長さ1の  $\mathbf{e}_j$ ）をベースにえらんで、（簡単に言えば方眼紙を用意するのである） $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$  とする。

このとき成分の方は内積から  $u_j = \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{u} \rangle$  となっている。これはスペクトル合成とスペクトル分解である。波のときにも全く同様で、互に直交して長さ1のベース  $\exp(i 2 \pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  を用いて、 $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \exp(i 2 \pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  とし（フーリエスペクトル合成）、成分  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$  は内積  $\langle \exp(i 2 \pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$  から求まる（分析）。このへんのところが図-1である。この世  $\mathbf{x}$  と波数  $\mathbf{k}$  世界との間の変換という見方をする人は、 $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{x}$  の方を逆変換とよぶ。  $2 \pi$  はじゃまではあるが、辻つまをあわせるために、どこかで面倒を見なければならぬ。

$\exp$  は円運動であるから、どんなに複雑なものでも、これの合成で表現できるというのは、ヒッパルコスの周転円の発想にはかならない。となるとフーリエ級数は思想的にはここまでさかのぼり、スペクトル分解は紀元前の原子論にまでいくわけであろうか。

ベクトル  $\mathbf{u}$  を、 $\exp$  をベースにとった座標系で成分表示したのが  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$  という見方をするなら、 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  の方はディラックの  $\delta$  測度をベースにとって同じベクトル  $\mathbf{u}$  を成分表示したものと考えておけばよいであろう。

$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$  の方は、物理空間  $\mathbf{x}$  での事柄を、微分が掛算になるなどと都合のいい波数空間  $\mathbf{k}$  の世界の言葉に、一時はん訳して考えていると見てもよい。両世界の往き来にはフーリエ変換という辞書が用意されている。

実際にスペクトルを求めるには、砂の粒度分析では、フルイを順番に重ねてふるって（バンドパス）粒径加積曲線（スペクトル分布）を描くように、波の場合には、波長のフルイで元の波をふるってやればよい。ふるって出てきた波を特に2乗検波してやるとエネルギースペクトル密度  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$  が求まる。2乗はエネルギーである。

エネルギースペクトル密度  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$  と相関  $\mathbf{R}(\mathbf{r})$  の間は、またフーリエ変換で結ばれている。

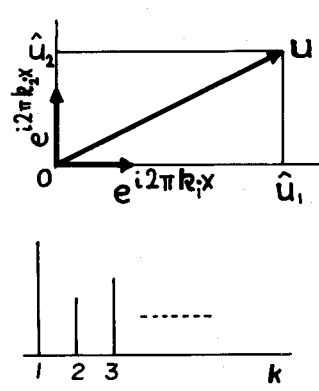


図-1 ベクトルの幾何学的スペクトル分解(上)も次元があがると書き方を工夫する(下)。無限次元では連続函数になる。

これは次のようにも考えられよう。乱流の統計的特性の1つである2次のモーメントに関する情報になったベクトルを座標成分表示するさいに、ディラックの $\delta$ 測度をベースにとった座標系でやると相関がえられ、座標変換して  $\exp(i 2 \pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  をベースにとった座標系でやればスペクトル密度が成分としてえられるのである。両座標系のベース

同志の間にはフーリエ変換  $\exp(i 2 \pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = \langle \exp(i 2 \pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}), \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle$ 。

同一のモノを別々の物指しではかっているだけである。どちらの物指しで測るかは好みの問題である。これでかたまりと波とが連絡するのである。

なお、波にはタテとヨコがあるが、連続方程式より  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}) = 0$  となるからヨコ波であろう。

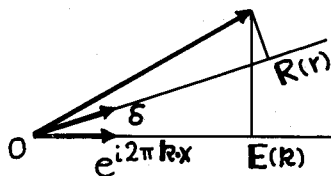


図-2 同一の乱流ベクトル(?)を別々の座標系で眺める。 $\delta$ 尺で測ると相関,  $\exp$ 尺で測るとスペクトル密度

## 2. 河川乱流場

川の流れは、鉛直的には河床の存在、水平的には兩岸の存在のために、平均流にひずみ（シア）が生じる。流れのレイノルズ数が大きくなり、そのひずみが増大すると渦度も増大し、ついにはそれがカルマン渦となって放出される。

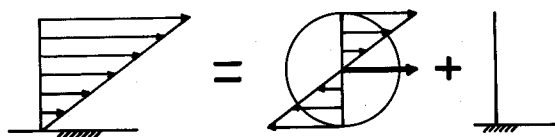


図-3 セン断流れ=流下する(転がる)渦管

境界層というのは実質的には渦層であり、自分自身の不安定のためにすぐ捲くれ上って孤立した渦管になるという性質がある。それは平均流の運動エネルギーが大きくなりすぎると、直接に層流逸散  $\nu \mathbf{D} : \mathbf{D}$  では処理能力不足になって（簡単には例えば  $\nu (\partial u / \partial z)^2$ ,  $\mathbf{D}$  は平均流の変形速度テンソル）、一度渦に形を変えて  $\nu \overline{\omega^2}$  で処理する方が能率よいからであろう。この処理手続きをするのが N. S. 方程式の非線型項の役目である。渦管として渦度を開放した直後には、平均流にはシアはほとんど無いはずであるが、流下していくにつれて再びシアがどんどん蓄積されていき、ついには持ちこたえることができなくなって、こらえきれず一気に渦管として開放される。この繰返しは、一定のストローハル数  $L / \mathbf{u} T = \text{const.}$  のもとに周期的に発生する自励振動である。（ $L$  は、川を水平的に見るときには川幅  $B$  で、鉛直的に見るときには水深  $H$  でやればよからう）。この  $\text{const.}$  は 0.1 程度の値ではないかと思う。これを単純化して示したのが図-5 である。一周期の間の流速分布を平均してやると、なぜか対数分布をしているのである。

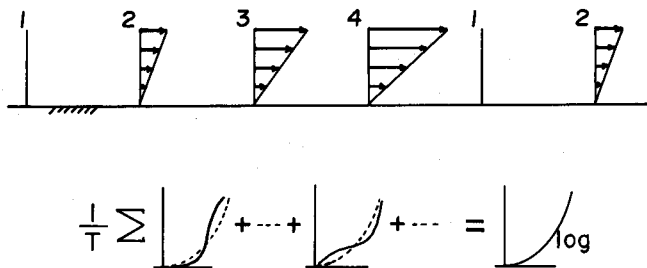


図-4 単純化しすぎた，渦度蓄積・渦管開放プロセス。対数則。

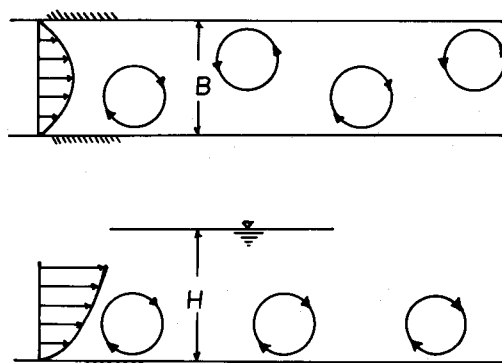


図-5 水平も鉛直もカルマン渦からスタート

水平カルマン渦を代表とする渦の場は，鉛直軸を持った薄いセンベイのような渦の集りで，これは鉛直方向にはほぼ一定の性質を持った2次元的なものである。性質は水平的にのみ分布している。これを水平乱流場とよびたい。これに対して，河床の影響を受けている方を鉛直乱流場とよぶ。種々の特性が鉛直分布しているからである。こちらは3次元적이다。

川の大きさもいろいろであろうが，例えば水深  $H = 1\text{ m}$ ，川幅  $B = 100\text{ m}$  の程度とすると，水平乱流場でも鉛直乱流場でも発生するカルマン渦の基本機構には大差がなくても，その渦の寸法には大きな違いがある。鉛直的には水深で制約されているが，水平には川幅いっぱいまでの渦が存在しえる。水平乱流場と鉛直乱流場とは，このように次元的，寸法的差異があるが，それよりもっと根本的に違うのは渦が生れた時よりもその後の過程である。それは渦度方程式を見ればわかる。

$$(D/Dt) \omega = \omega \cdot \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x} + \nu (\partial / \partial \mathbf{x})^2 \omega$$

$(D/Dt) = \partial / \partial t + \mathbf{u} \cdot \partial / \partial \mathbf{x}$  は俗にラグランジュ微分と言われるもので，非定常勾配場を水と共に  $\mathbf{u}$  で動きながら感じる時間的変化である。 $\mathbf{u} \cdot \partial p / \partial \mathbf{x}$  で潜水病になったら，減圧タンクに入って

$\partial p / \partial t$  で治すのは、人間が大きな  $Dp / Dt$  に弱いから。定常不等流の天竜舟下りでは速度は2役をして、 $D\mathbf{u} / Dt = \mathbf{u} \cdot \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$ 。右辺第2項に注目。この、渦度ベクトルと速度勾配テンソルの積である非線型項 ( $\boldsymbol{\omega} = (\partial / \partial \mathbf{x}) \times \mathbf{u}$  であるから、いわば  $\mathbf{u}$  の2次式) はどんな役割をしているのか。(この項に実際に関与しているのは速度勾配テンソル  $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$  のうちの対称部分の変形速度テンソル  $\mathbf{D}$  だけで、 $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{D}$  ではあるが)。これは渦度ベクトルが変形速度場にさらされているために、渦管が伸び縮みして渦度ベクトルが大きくなったり小さくなったり、あるいは傾いたりすることを表わしている。特殊な成分についての例を図-6に示す。

$\omega_1 (\partial u_1 / \partial x_1)$  なら渦管は伸びて断面が小さくなり、渦度は大きくなる。(ヘルムホルツの渦定理)。

$\omega_3 (\partial u_1 / \partial x_3)$  なら渦管は傾いて、新たに渦度の  $\omega_1$  成分も生じてくる。ところが水平乱流では、渦の軸は鉛直であって、速度にも速度勾配の方向にも直交していて、 $\boldsymbol{\omega} \cdot \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$  は常に0である。すなわち渦は伸び縮みしえないのである。

以上のような理由から、水平乱流場と鉛直乱流場とに分けて考えるということが発生した。

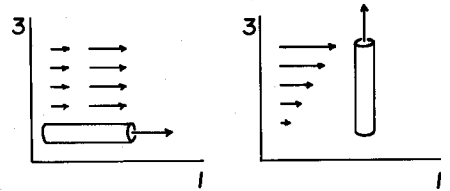


図-6 左は  $\omega_1 (\partial u_1 / \partial x_1)$  で伸び、右は  $\omega_3 (\partial u_1 / \partial x_3)$  で傾き

### 3. 鉛直乱流場

#### (1) カルマン渦管のその後

河床近くに形成された横断方向の軸を持つカルマン渦管は、その占める位置における速度  $\mathbf{u}$  によって  $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$  なる揚力を受けて(マグナス効果)渦管の一部が河床から持ち上る。渦管が部分的にわん曲して持ち上るということは、 $\mathbf{u}$  か  $\boldsymbol{\omega}$  の横断方向の分布がなぜか一様でないためである。持ち上った部分は河床から離れた速度の大きい領域に入るので下流に流されて、傾いた馬蹄形 ( $\Omega$  形) の渦管に変形してゆくであろう。馬蹄形渦管の両足は  $\boldsymbol{\omega} \cdot \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$  なる非線型項の作用で平均流の変形速度の主軸の方向に並んでずんずん伸びて大きな渦度を持ってくる。結局、馬蹄形渦管は下流にだいたい  $45^\circ$  傾いて流下していることになる。渦管はこのように速度場の影響をうけて変形していくが、渦管はまた逆にそのまわりの速度場に影響を与える(ビオ・サバールの法則に従った速度を誘発する)。馬蹄形渦管は渦輪に近い形をしていて、自分自身の他の部分との相互誘導によって、渦管の中央をくぐりぬけて上流へ斜め上向きの強力なジェット流を誘発するとともに、渦管自身も平均流に逆ってジェット流の方向へ移動しようとする。これはタバコの煙の輪が前へ進むのと同じ理由からである。このため、渦管の流下速度は平均流より少し遅い(8割程度)速度で両足をひきずりながら流下する。このへんのところを図-7に示す。

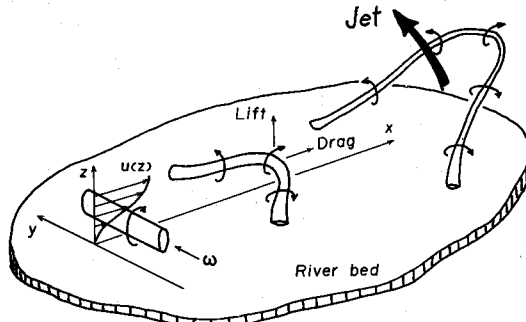


図-7 カルマン渦発生とその後(馬蹄形渦管)

こう書いてくると、見て来たような話しになるが、大体のところはこんなものであろう。この斜め上向きの強いジェットはそんなに長くは続かないが、河床近くの速度の遅い部分を上層の高速部分に急激に運び、強いレイノルズ応力（非線型運動量輸送）を生じる。これが乱流エネルギー生成の機構であって、このような馬蹄形カルマン渦が境界層乱流の基本構造と考えられる。この渦管のいろんな側面をわれわれは乱流特性として測定しているのである。乱流速度の大きさは渦管の強さに関係し、速度成分  $u$ ,  $w$  の比は渦管の傾斜角に、乱れのスケールは渦管の発生ストローハル数あるいは配列間隔に関係している。

河川の水面に見られる、いわゆるボイル（局所的湧昇流）はここに述べたジェットが水面に達した結果であって、その後は渦管頭部は水面にさえぎられて放射状に広がり、じょじょに弱まってその一生を終える。図-8。

あるいは、伸びすぎた馬蹄形の渦管の頭の方がちぎれて、渦輪となって水面まで昇ってきたと見る方がよいような気がしないでもない。それをかけると渦がまのあたりに見えるといった魔法のメガネがほしいところである。時間的には、短時間の強力ジェットと、それに続く長い余勢で寿命が終る。空間的には狭い範囲の上昇ジェットと、広くひろがったゆるやかな降下領域からなっている。

河床上には、 $2H$  の幅で人間には見えないコースが何本も引いてあって、馬蹄形カルマン渦にはあたかもそれが見えるかのようである。

そのコースからはみ出さずに  $10H$  の間隔で平均流より少し遅く次々と流下していつているのである。規則正しく整理して流下する馬蹄形カルマン渦を、少しおおらかに眺めると2次流とも見えよう（図-9）。数式にのせるのもその方が便利である。

ヨーロッパの方の船頭は、昔から漂流する舟は流れより速く進むといっているそうだが、その理由は上に述べたことから簡単にわかる。比較のおだやかな海面、湖面に風下に向うスジが見られる（ラングミュア回転流）が、この機構も似たようなものではなからうか。

馬蹄形カルマン渦の水深方向の直接的なわ張りは水深の半分とか  $\frac{1}{2}$  程度の下層であって、それより上層の水面に近い部分はジェットによる余勢の範囲であらう。このため、平均流速分布も、下層は対数分布だが、上層は後流（伴流）的性格をもったものになっている。対数グラフは曲者で、測定値をプロットするとかなり上層まで対数分布にのっているような錯覚をおこすものである。

(2) いわゆる乱れ

渦度方程式によると、 $\omega \cdot \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$  なる項は、渦管を伸ばす役目をする。渦管の伸びは必然的にエネルギーの交換をとまなう。なぜなら、変形速度は伸びた渦に変形仕事を行うから。渦管が伸びると、断面（ $r$ ）が小さくなってスケールは小さくなるが、角運動量（ $\omega r^2$ ）を保存しておれば渦度は大きくなり、渦管の回転の運動エネルギー（ $\omega^2 r^2$ ）は増加する。このようにして大渦度の小さな

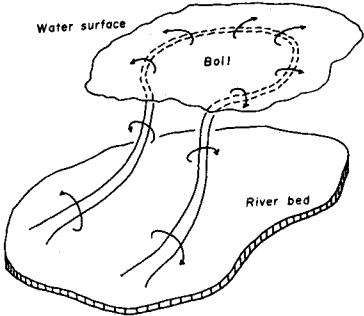


図-8 ボイルの考え方の一つ

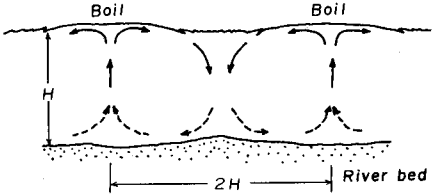


図-9 馬蹄形カルマン渦が演出した2次流  
(主流はこの紙の中へ)

渦管を作るように働くので、平均流の変形速度場（シア）からエネルギーは順次小さな渦管へ伝達される。他方  $\nu (\partial/\partial \mathbf{x})^2 \omega$  の方は渦度が空間的に集中していればいるほど、すなわち小さな強い渦管に対するほど効果が強く、渦度の空間分布を一様化しようとするものである。この2つの差は渦度の時間的变化  $(D/Dt) \omega$  を決める。なお、変形速度の負の主軸の方向には渦管は縮まって断面を大きくするのであるが、平均としては正の主軸の方向に伸びて  $\omega$  が大きくなる方が優勢なのである。これは乱流の拡散性というかエントロピー増大性からでも保障されているのであろう。計算からでもできそうでもある。

平均流の変形速度の効果は、まずカルマン渦のような大きな渦管にあらわれ、これが次々と小さな渦管へと波及していく。小さい渦管は大きな渦管の変形速度場にさらされているから、渦度は増し、大きな渦管のエネルギーを消費して自分のエネルギーをふやす。このような渦管の伸びによるその直径の減少はどこまで続くかといえば、粘性がきいて  $\nu (\partial/\partial \mathbf{x})^2 \omega$  による渦度の逸散と同じ程度になるところまで、すなわち、分子粘性応力により熱エネルギーに変えられるところまで続くのである。

このようにエネルギーカスケードは、それが熱に変る最終段階を除いては粘性とは無関係である。したがって、最小の渦管（粘性に直接支配されていて、エネルギーを熱に変換する渦管）へのエネルギー伝達率は粘性には無関係なのである。粘性がエネルギー逸散の原因ではあるが、逸散の量までは支配できないのである。最小渦管というものは、自分より大きな渦管から送られて来るエネルギーをすべて逸散できるように自身の直径と渦度を自己調整している受動的な渦管なのである。すべては、平均場やカルマン渦次第なのである。だから平均流のレイノルズ数が大きくて、粘性  $\nu$  が小さい場合には、逸散  $\epsilon = 2 \nu \mathbf{D} : \mathbf{D} = \nu \overline{\omega^2}$  を大きくするために、渦度が大きくて直径の小さい最小渦管ができる。このエネルギー逸散はエントロピー増大則からして常に正である。

レイノルズ数が大きくて、渦度の分子粘性拡散がきかないときには、 $\omega \cdot \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$  なる項は、はじめはカルマン渦のように簡単な形をしていたものでも、次第に複雑な渦度・速度分布に変えてしまう。渦管が伸びると、直径が小さくなり回転速度が大きくなる。ある方向へ渦管が伸びると（例えば  $z$  方向）、それに直交する方向（ $x, y$  方向）の長さのスケールが減少し、速度成分は増す。この増した速度により、その方向（ $x, y$ ）の渦度成分を持つ周囲の渦管が伸びる（ $x, y$  方向へ）。

これをどんどん続けていくと図-10 のようになり、はじめは一方方向への伸びであったのが数階段であらゆる方向（ $x, y, z$ ）へ均等な伸びを生じさせることがわかる。したがって、小さな渦管群は、平均流の変形速度の支配からは全く解放されて自由であり、一つのユニバーサルな構造をしているのである。これが、いわゆる局所等方性といわれる状態である。特定の方向性をもたないのである。

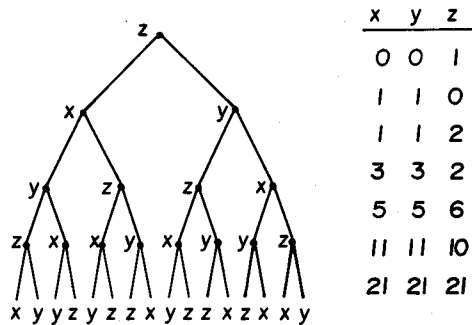


図-10 渦管の伸びによる局所等方性のなりたち

ここに述べたような状況は、半世紀以上も昔に、すでに考えられており、リチャードソンはそれを次のように表現している。

Big whorls have little whorls,  
Which feed on their velocity;  
And little whorls have lesser whorls,  
And so on to viscosity.

すべてを渦として見ることでできるメガネをかけて乱流場を眺めるとどうであろうか。ナマズのよう大きな渦があるかと思えば、糸くずのような渦糸がからみあったミミズのような渦や、ミミズがまたからみあってウナギのような……といったのが平均流となって流下しているのであろう。そして、周期的に大ナマズが自然発生する。これは糸くずのような渦が数多く集まって大ナマズに変身するのである。

### (3) 乱子理論

いろいろな乱流現象が生じている背景には、水流の中に大小さまざまな塊のような、渦のような、また見方によっては波動のようなものがある、それらが不規則な運動をしているためであると考えられる。このどうともとれる不明瞭な実体を新たに乱子（うず）と呼ぶのである。乱子は乱流場を記述するために抽象された実体概念に過ぎないのであって、これが実在すると主張しているのではなく、その存在を仮定すると現象が合理的に記述できるというものである。

最大乱子の大きさを  $A_0$ 、その速度を  $V_0$ 、また最小乱子のそれらを  $A_\infty$ 、 $V_\infty$  と表わし、その中間の  $n$  乱子では  $A_n$ 、 $V_n$  とする。 $n$  乱子の乱子速度  $V_n$  とは、 $n$  乱子を取り囲む一階級大きな  $(n-1)$  乱子に相対的な速度であって、平均流の場に対する  $n$  乱子の運動の速度ではないことに注意しなければならない。 $V_0$  が親ガメの速度、 $V_1$  がその背に乗った子ガメの速度といった具合で、孫ガメが地面に対する速度は  $V_0 + V_1 + V_2$  である。

このように乱流場は模型的に平均流の上に分布した各階級の乱子によって構成されるものと仮定し、夫々の乱子はその運動にあたって相互作用の結果として乱子エネルギーの伝達を行っているものと仮定する。

乱子動粘性係数  $K_n = A_n V_n$  を考える。乱子動粘性係数は乱子の階級に応じて異なるが、乱子はその運動にさいして夫々の階級に対応する乱子動粘性係数を媒介として乱子摩擦力  $K_n (V_n/A_n)$  を受け、その力に抗して運動することによって乱子エネルギー  $\epsilon_n = K_n (V_n/A_n)^2$  の乱子逸散（一階級小さな乱子へのエネルギー伝達）を生ずるものと考えられる。このへんのところは、すべて分子動粘性係数  $\nu$  による記述からの類推である。

さて、各階級の乱子運動に関する乱子レイノルズ数は  $A_n V_n / K_n = 1$  であるから層流運動と考えてよい。単位時間、単位質量当りについて逸散されるエネルギーは  $\epsilon_n = K_n (V_n/A_n)^2$  であるが、乱子動粘性係数  $K_n = A_n V_n$  を使うと  $\epsilon_n = V_n^3 / A_n$  となる。この量が乱子の階級  $n$  に無関係、すなわち乱子間を流れるエネルギーが特定の階級の乱子に停滞することなく、分子に至ってその流れが止んですべて熱エネルギーに転化すると仮定すると、乱子の大きさとその速度の間には普遍的な関係として、 $V^3/A = \epsilon = \text{const.}$  がえられる。乱子エネルギー  $V^2$  と乱子波数  $k = 1/A$  との関係は  $V^2 = \epsilon^{2/3} k^{-2/3}$  となるので、乱子スペクトルは  $E(k) = \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$  となる。この関係は色々なモデルからも別個に導かれており、普通、コルモゴロフの  $-5/3$  乗則といい、多くの実験や観測からも広く認められているものである。これは前項の考え方、エネルギー逸散は究極的には粘性  $\nu$  により生じ、小さな渦で起るのであるが、 $\epsilon$  という量は大きな渦の性質によって決められ、乱れの局所的な性質は平均流の場の影響を受けないという考え方から、 $V_n$  は  $\rho$ 、 $\epsilon$ 、 $A_n$  のみから求められるとして次元を考えてもえら

れる。

一方乱子拡散係数については  $K = AV = \varepsilon^{1/3} A^{1/3}$  となり、リチャードソンの経験則がえられる。乱子が小さくなると乱子拡散係数  $K$  は小さくなるけれども、水の分子拡散係数  $\nu$  よりも小さくなりえないとして  $K_\infty = A_\infty V_\infty = \nu$  となるときの乱子が最小であるとすれば、最小乱子の大きさと速度は、 $A_\infty = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ 、 $V_\infty = (\nu\varepsilon)^{1/4}$  で与えられる。スペクトルの  $-5/3$  乗則は、最大乱子の寸法  $A_0$  と最小乱子の寸法  $A_\infty$  に相当する波数間で成立するのである。ところが前項でも述べたように最小乱子の寸法は  $\varepsilon$  次第である。その  $\varepsilon$  は最大乱子によって決まり  $\varepsilon = V_0^3/A_0$  である。最大乱子の乱子レイノルズ数は大体流れのレイノルズ数  $R_e$  とすると、 $A_\infty = A_0/R_e^{3/4}$  となっているレイノルズ数が大きい程、スペクトルの幅は広くなるのである。

最大乱子より大きな乱子域のスペクトルに関しては、 $A_0$  より大きな乱子を補助的に考えて、それらについては  $K = AV$  によって与えられる乱子拡散係数が、すべて最大乱子の拡散係数  $K_0 = A_0 V_0$  に等しく保たれると仮定すると、 $V^2 = K_0^2/A^2 = K_0^2 k^2$  からスペクトル  $E(k) = K_0^2 k$  となる。

次に最小乱子以下のスケールについて考えると、そこにも運動はあるが、それは乱流ではなく層流である。層流逸散によって最小乱子からつがれた  $\varepsilon$  が、その実体を通じて輸送されるというモデルを考えると、 $\varepsilon = \nu (V/A)^2$  から  $V^2 = (\varepsilon/\nu) A^2$  となり、スペクトルは  $E(k) = (\varepsilon/\nu) k^{-5}$  がえられる。中間乱子領域ではこの  $\nu$  に乱子動粘性係数  $K$  をあてたのである。

このようにしてえられた各乱子領域のスペクトルの形をまとめると、図-11 のようになる。最小乱子域の  $-3$  乗に関しては他にも説があるが、 $\exp(-k^\alpha)$  といった形の方がよさそうである。

図-11 のスペクトルは構造的には図-12 に示した人口構成スペクトルとよく似ている。

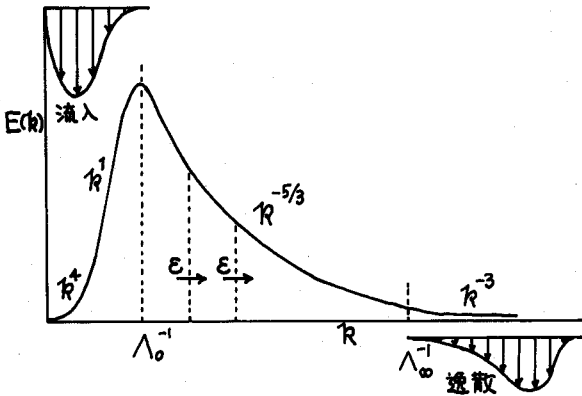


図-11 乱れのエネルギーのスペクトル密度モデル

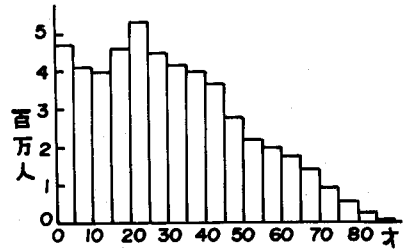


図-12 年齢別人口構成(昭45年, 男)

いろいろな年令の渦が、その寿命時間  $A_n/V_n = \varepsilon^{-1/3} A_n^{2/3}$  を使いきりながら消滅していつている動的な様相を統計的にとらえたものである。

乱子理論はこの他にも数多くの有用な成果をえており、それは平均流速の対数分布則にも及んでいる。

#### 4. 水平乱流場

水平乱流場に発生する2次元カルマン渦は、安定理論からしてその長さは  $10B$  程度であろう。この水平最大乱子の寸法を  $A_0$ 、その乱子速度を  $V_0$  とすると、当然  $A_0 V_0 \gg \nu$  であろうからこの乱子は不安定で、非線型項の倍音製造機能によって次々と高次の水平乱子が作られていくであろう。この

とき、これらの各階級の乱子の寸法と、その乱子速度の間にはいかなる関係があるのか。そのためには乱子同志の相互作用について考えて見なければならない。

空間的（平面的）に一樣な2次元乱流について考える。単位質量あたりの運動エネルギーの平均値の変化はN. S方式より、

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\overline{\mathbf{u}^2}}{2} \right) = \overline{\nu \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \mathbf{u}} = -\nu \overline{\omega^2}$$

3次元乱流の場合には、レイノルズ数が非常に大きく、いいかえると $\nu$ が非常に小さくなくても、最小乱子に相当する渦管が $\omega \cdot \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$ の助けで、伸びによる自己調整をして、直径をへらす代りに $\overline{\omega^2}$ を大きくするので、エネルギー逸散 $\varepsilon = \nu \overline{\omega^2}$ は $\nu \rightarrow 0$ でも0にはならない。これはコルモゴロフの仮説に対応している。しかし、2次元乱流では、先に述べたようにかんじんの $\omega \cdot \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$ は0で、渦管は伸びることができないために $\overline{\omega^2}$ の増大は期待できない。したがって、 $\nu \rightarrow 0$ で $\varepsilon \rightarrow 0$ になってしまふであろう。鉛直軸を持った渦が伸びれば水面が盛りあがることになって、おかしいことになってしまふ。

2次元乱流の場合には、3次元乱流とちがって、2次の不変量（保存量）にはエネルギー $\overline{\mathbf{u}^2}/2$ のかわりにエンストロフィー $\overline{\omega^2}/2$ を考えた方がよさそうである。エンストロフィーは渦度の2乗値の半分、ストロフィーはギリシャで回転の意味。エンストロフィーの時間的变化は渦度方程式により

$$\frac{D}{Dt} \frac{\overline{\omega^2}}{2} = \overline{\nu \omega \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \omega} = -\nu \overline{\left( \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{x}} \right)^2}$$

であるから、 $\overline{\omega^2}$ は粘性以外では変化しない。そのため、 $\nu = 0$ では、水とともに動いて眺めれば $\overline{\omega^2}$ は不変量である。この場合、小数の強い弧立した渦が形成されるならば、この式の右辺で $\nu \rightarrow 0$ となっても渦度の水平方向勾配 $\partial \omega / \partial \mathbf{x}$ が増大してそれを埋めあわせる可能性がある。すなわち

$$\nu \left( \partial \omega / \partial \mathbf{x} \right)^2 \rightarrow \eta \neq 0 \quad (\nu \rightarrow 0)$$

と期待するわけである。要するに3次元乱流のエネルギーと2次元乱流のエンストロフィーの間に形式的な対応関係を期待するのである。 $\varepsilon$ がエネルギー逸散率、あるいはエネルギーカスケードにおけるエネルギー伝達率であったのに対応して、 $\eta$ をエンストロフィー逸散率、あるいはエンストロフィーカスケードにおけるエンストロフィー伝達率と考えるのである。3次元乱流の場合に、最大乱子 $A_0$ より小さく、最小乱子 $A_\infty = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ より大きい中間乱子領域においてエネルギー逸散率 $\varepsilon$ が演じた役割を、2次元乱流の場合には、河幅 $B$ より小さく、形式的なエンストロフィー逸散スケール $(\nu^3/\eta)^{1/6}$ より大きい領域においてエンストロフィー伝達率 $\eta$ に演じさせるものである。そうすると、この領域ではエンストロフィーのスペクトル $\mathcal{Q}(k)$ は $\eta$ と $k$ のみによって表わされるであろうから、次元を考えて、 $\mathcal{Q}(k) \sim \eta^{2/3} k^{-1}$ となる。 $(\mathcal{Q} = [\text{m}^2/\text{s}^2], \eta = [1/\text{s}^3], k = [1/\text{m}])$

エネルギースペクトルは $\mathcal{Q}(k) = k^2 E(k)$ から直ちに

$$E(k) \sim \eta^{2/3} k^{-3}, \quad B^{-1} \ll k \ll (\eta/\nu^3)^{1/6}$$

このときエネルギーカスケディングは存在しないのである。

この関係は、現在のところ数値実験と、大規模な大気の運動とにおいてはその存在が認められているように思う。このことが河川の水平2次元乱流においても言えるのであろうか。大気の場合、移動性の高、低気圧のスケールは水平に1000km、鉛直に10kmのオーダーであり、水平方向に100倍程度大きい。河川の場合には、水平100m、鉛直1m程度とすると、スケールだけから考えると、大体同じような感じの流れになっていると期待できる。

エンストロフィーが小乱子へ向ってカスケディングする中間乱子領域が存在すると同時に、エネルギーが大乱子に向って伝播する中間乱子領域も存在するそうである。同じ2次元流でも、エネルギー

を用いて中間乱子領域を論ずると、3次元の場合と同様に $k^{-5/3}$ のスペクトルが得られる。しかし、この領域ではエnstロフィーは伝達しないのである。

河川の場合、例えば大きな橋脚とか中洲があると、その直径がエnstロフィー生成のスケールでもあり、同時にエネルギー流入のスケールでもある。そうして高波数へ向ってはエnstロフィー伝達域、低波数へ向ってはエネルギー伝達域が同時に存在するであろうと言われている。しかし普通の河川では、水平乱流場への擾乱流入源の寸法は河幅のみであるから、エnstロフィーカスケーディングで説明できそうである。

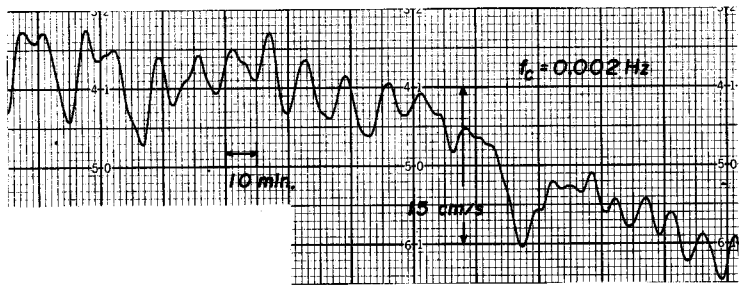


図-13 水平カルマン渦の流下

図-13は千曲川（河幅130 m、水深1.7 m）で水面近の流速を4時間強連続観測した結果に、時定数約8.3分のフィルターを用いて短い波長（小さい渦）をカットしたものである。前2/3の規則変動の平均周期は12分で、これは乱子の長さにすると約1 kmで、河幅の約10倍に相当している。これはすでに述べた水平カルマン渦と考えられる。この値が河川の蛇行波長と同じなのが気になるところである。

図-14は上と同じ観測のエnstロフィースペクトル密度である。高周波測に見られるのは鉛直乱流場でおなじみの $-5/3$ 乗分布である。この分布はもう疑う余地はない。問題は幅広いメソスケールの低周波測に見られる $-3$ 乗分布ともとれぬことはない分布である。図のようにいったん直線をあてはめて見るとなんとなくそれらしく思えるだけのこともわからない。まだ観測例が少ないので、エnstロフィー伝達中間乱子領域の存在についてはなんとも言えない。それでも、この図からエnstロフィー伝達率を算定してみると、 $\eta = 10^{-11} (1/s^3)$ 程度の値がえられた。参考までに記すと、3次元域でのエネルギー逸散率は $\epsilon = 0.8 (cm^3/s^3)$ であった。

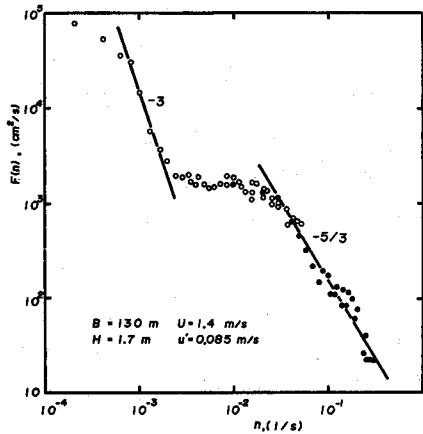


図-14 エnstロフィー、エネルギー伝達域の共存

なお、ここに示したスペクトルは、平均流という名のベルトコンベアに乗って渦のパターンが変形せずに流下してくるのを、測点で待ちかまえていて検出したものであり、横軸には乱子が測点を通過するに要する時間（通過時間）の逆数をとっている。

これは3次元鉛直乱流場と2次元水平乱流場を一直線でつらぬいて、その線上での分布を見る1次元スペクトルに相当している。

エンストロフィーカスケーディングが卓越する乱子領域では、いろいろな統計的特性はエンストロフィー伝達率 $\eta$ という一つのパラメーターで決定されると考えられる。そうすると水平拡散係数は、現象のスケールを $\ell$ として $K_H = \eta^{1/3} \ell^2$ となるはずであるが、これについてはまだ確証がない。3次元乱流場での $K_V = \varepsilon^{1/3} \ell^{4/3}$ に相当するものである。

速水教授は、有名な洪水流の理論に水平混合による水深の拡散という概念を導入され、

$$Dh/Dt = K(\partial^2 h / \partial x^2), \quad K = K_H + hu/2(i - \partial h / \partial x)$$

とされている。この $K_H$ は上述の $K_H$ と同じではなからうか。(論文によると、必ずしも水平拡散係数のみのように思えないところもあるが)。 $K_H$ の影響があることは疑う余地のないところであるが、問題はその値の大きさである。結局は、水面勾配と $K_V/K_H$ の値の比較の問題であろう。洪水波形の拡散に、鉛直乱流場と水平乱流場が同時にかかわっているのである。

水平カルマン渦と重力振動(セイシュ等)や断面平均流量の変動などの関係については、まだ全くわかっていない。

## 5. おわりに

本文のように速度などを場 $(\mathbf{x}, t)$ の量としてとらえる方法(オイラー)の他に、個々の水の粒子を追跡して、その歴史を調らべるラグランジュ流の方法がある。橋脚に対する水の作用を考えるとときには、その水がどの経路を通ってきたものかというようなことは関係ないが、水道の水を取水する立場の人にとっては大問題である。ラグランジュ流の考え方は乱流拡散を考える際に威力を発揮する。

ついでであるが、車を例にとって言えば、ラグランジュ流の速度とは乗っている車の速度計の示す速度である。それに対してオイラー流の速度は、目の前を次々と通過する車の速度計を一つずつ覗き見たものである。同じ警察官でも、刑事はラグランジュ流、交通整理のおまわりさんはオイラー的な立場であろう。2つの表現方法の間には一定の関連があってお互に往き来ができるはずのものであるが、今のところそれがあまりスムーズにはいっていない。刑事の方が普通はむずかしそうだ。

最後に参考書について。本文を書くのに参考にしたわけではないが、乱流一般については、岩波からでている大路教授訳のロッタの「乱流」が手頃かも。統計理論にくわしすぎるのは、その名の通り、モーニン・ヤグロムの「統計流体力学」(山田訳、総合図書)。拡散に重点をおき、しかも簡潔なものに、この研修会1971年度・林泰造先生の「流水中における物質の移流と拡散」がある。統計的開水路乱流の現状に関しては、研修会1976年度、今本教授の「開水路流れの乱れ特性」。最近のブームであるorderedともorganizedともcoherentとも言われ、本文ではいい訳語も思いつかず、めんどうだからその発生原因にのみ着目してカルマン渦と言ったものに関しては、京大防災研年報(昭51.4)にある、宇民・上野両君の「可視化法による大スケール乱れに関する研究」が参考になるかも。(このモデルが正しいとか、そうでないとかという意味からではない)。乱子理論に関しては、もちろん井上栄一博士の「地表風の構造」農業技術研究所報告A2号(1952)だが、1/4世紀にもなる。河川乱流の研究の名にふさわしいものとしては、木下良作博士の一連の研究(本研修会1968年度他)が一番であろう。