

風波の発生機構

竹 松 正 樹

§1 ま え が き

風が水面を吹き渡ると表面が波立つ現象はきわめて日常的であるが、その物理機構の“説明”は相当な難題のようである。風波の生成のメカニズムを解き明し、風と波の間の定量的な関係を把握しようとする努力は長年月にわたって続けられてきたが、現在にいたるも満足な解答が得られていないというのが実状である。従って、ここに「風波の発生機構」と云っても、実験的検証の洗礼を経て確立された単一の物理機構を意味するものではない。

風波の生成の問題を解明するためには、変動する波面の上の乱流剪断流（風）というきわめて困難な問題に取組まねばならないのである。この問題が尋常な解析を受け付けないとなれば、問題を一举に解決する事を諦め、先ず、波を起し得るメカニズムとしてどのようなものが考えられるかを調べるのが妥当な手順ではなかろうか。風波の研究は、実際、そうした手順をふんで発展しているように思われる。

Kelvin-Helmholtz 理論に始まり、これまでにいくつかの興味ある理論（メカニズム）が提唱されてきた。ここでは、歴史的に重要な位置を占める四つの理論に焦点をあて、風波の研究の一端を紹介したいと思う。原論文の紹介が目的ではないので、解説に当っては、各々の理論にもられた基本的な考え方を理解するのに支障のない限り事柄を単純化することにした。料理の不手際のため、事柄の本質がかえって不透明になるような事がなければ幸である。

§2 水の運動

水と空気の二相流系の現象を考えているわけであるが、水の運動は比較的問題が少なく、それぞれの風波の理論の相違は、主として、気流の取扱い方如何によるのである。ここでは、先ず、流れの基礎方程式といくつかの基本的仮定について簡単に触れてから、水中の運動を論じ、後の説明に必要な水面の運動方程式を導いておく。

2.1 基礎方程式と仮定

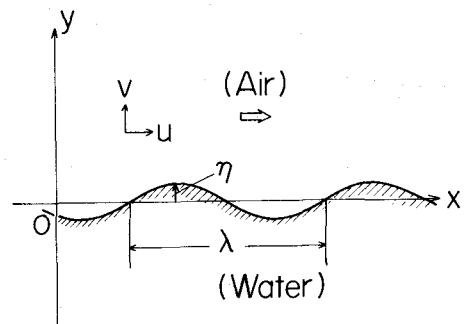
水、空気とも縮まない流体とし、原則として粘性は無視する。第一図の様に、気流の方向が x 軸（の正）と一致するように座標系を選び、事柄は純粹に 2 次元であるものとする（ z 方向には一様）。

この場合、運動方程式と連続の式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.2)$$

ここに $\mathbf{v} = (u, v, 0)$, $\mathbf{g} = (0, g, 0)$ 。



第1図

は渦度 ω , 総圧 P を使って次の様に書き換えておくと便利な場合がある ;

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\rho \omega v - \frac{\partial P}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \rho \omega u - \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

ここに

$$\left\{ \begin{aligned} \omega &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} , \\ P &= p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \rho g y . \end{aligned} \right.$$

これ等の式を水中で使う場合は $\rho = \rho_w$ とし, 空気中では $\rho = \rho_a$ としなければならない。

2.2 水表面の運動方程式

静止状態の水を考えると, 当然 $\omega = 0$ 。今, この水が表面に加えられた圧力によって運動を開始したとしても, 渦度は不変 (Helmholtz の渦定理) であるから, やはり $\omega = 0$ 。従って速度場は一つのスカラー函数 (ポテンシャル) ϕ を用いて次の様に表現される ;

$$u = \phi_x , \quad v = \phi_y . \quad (2.4)$$

$\omega = 0$ と (2.4) を用いると (2.3) は

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho \phi_t + P) = \frac{\partial}{\partial y} (\rho \phi_t + P) = 0 \quad (2.5)$$

となり, $(\rho \phi_t + P)$ なる量の保存される事を意味する。即ち

$$\phi_t + \frac{p}{\rho_w} + gy + \frac{1}{2} |v|^2 = 0 \quad (2.6)$$

(Bernoulli の定理)

一方, 連続の式 (2.2) からは

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.7)$$

が得られる。適当な境界条件のもとに (2.7) を解いて速度場 ϕ が求まると, 対応する圧力場は (2.6) からただちに計算できるという仕組である。

水中に生じた運動が充分弱く, 2 次以上の攪乱量が無視できるものとする (線型近似) 水表面の境界条件は次の様に表現される ;

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v (y=0) = \phi_y (y=0) \quad (2.8)$$

波長 $\lambda = 2\pi/k$ なる一つの Fourier 成分に着目し, 水表面の変位を

$$\eta(x, t) = \hat{\eta}(t) e^{ikx} \quad (2.9)$$

の形 (正弦波) に限定する。(2.7) が $e^{ikx} e^{\pm ky}$ なる基本解を持つ事, そして水中深く ($y \rightarrow -\infty$) で ϕ は有界でなければならない事を考慮すると, 水面変位 (2.9) に対応する水中の速度場

は

$$\phi = \frac{1}{k} \left(\frac{d\hat{\eta}}{dt} \right) \cdot e^{ikx} e^{iky} = \frac{1}{k} \dot{\eta} e^{iky} \quad (2 \cdot 10)$$

となる事がわかる。(2・6)から圧力場を計算する際、線型近似のもとでは $\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$ の項は無視される。特に、水表面 $y = \eta$ での圧力は

$$-p \doteq \rho_w (\phi_t + g\eta) = \frac{\rho_w}{k} (\ddot{\eta} + gk\eta)$$

と書ける。簡単のために表面張力が効かないものとする(表面張力の補正は容易である)、この圧力は、同様に正弦的な変動空気圧 $\hat{p}_a = p_a(t) e^{ikx}$ と等しくなければならない。即ち

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta} + \omega_o^2 \eta &= -\frac{k}{\rho_w} p_a \\ \text{または } \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \omega_o^2 \eta &= -\frac{k}{\rho_w} p_a \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 11)$$

ここに、

$$\omega_o^2 = gk + [(\gamma / \rho_w) k^3] \quad \text{で、} [\] \text{は表面張力による補正項である。} \quad (2 \cdot 11)$$

は固有円振動数 ω_o (復元力 ω_o^2) を持つ一次元振動子の強制振動の方程式にほかならず、変動空気圧 p_a さえわかれば水表面の応答 η を予測するのは容易である。(2・11)は後の議論で主要な役割を演ずることになるので、本題に入る前に、この方程式の良く知られた性質を復習しておこうと思う。

2・3 二種類の不安定

変位と速度に比例する強制力が働く場合を考える。即ち、(2・11)において

$$-\frac{k}{\rho_w} \hat{p}_a = a \hat{\eta} + 2b \frac{d\hat{\eta}}{dt} \quad (2 \cdot 12)$$

とする。ここで、 a 、 b は定数。この場合、(2・11)の解は

$$\hat{\eta} \propto \exp \{ (b \pm \sqrt{b^2 + a - \omega_o^2}) t \} \quad (2 \cdot 13)$$

と求められる。これから、A) $a > \omega_o^2$ (b は任意)、B) $\omega_o^2 > a + b^2$ で $b > 0$ 、の二つの場合に $\hat{\eta}$ は時間と共に増大する(不安定になる)事がわかる。A)の場合は、系固有の復元力よりも大きな外力が働いて実質的な復元力が負になってしまうのである。通常、Static な不安定と呼ばれる。B)の場合はStaticには安定($\omega_o^2 > a$)であるが、一周期の間に正味の仕事が行なわれるため限りなく振幅が増大するのである。Dynamic な不安定と呼ばれる。即ち、(2・11)には性質の異なる二種類の不安定が生じ得るのである。この事は風波の理論を理解するのに特に重要な意味を持つ。

§3 風波の生成機構

比較的取扱い易い水の運動については、形式的にはあるが一応けりがついた。それは簡単な方程式(2・11)に集約されていると考えれば良いわけである。それでは、波面の上を風が吹き渡る時、波

面にはどのような変動空気圧 p_a が働くのであろうか。この量 p_a は、(2・11) に端的に示されているように、気流と水の運動とを結びつける重要な力学的きずなともいえるべきものである。

風は乱流剪断流であるから、常に、乱流成分と呼ばれる不規則な速度・圧力変動を担っている。風の境界面である水表面が規則的な波動運動をしているような場合には、さらに、規則的な変動成分を考えなければならない。波に呼応するこの規則的な変動成分は不規則な乱流成分とは無関係ではないであろう。乱流成分の方も波の影響を受け、その統計的性質は波が無い場合の性質と同じではない。また、乱れの構造が変化する以上、乱れを適当に均して得られる平均速度場も何らかの変化を受けるであろう。波面の上の風の一面をスケッチすると以上ようになる。従って、最も厳密に考えるならば、規則的な変動・乱流成分(の統計的性質)、および平均場を同時に決定しなければならないのである。風波の理論を完成させるためには、結局、この困難な作業に直接取組まねばならないのではなかろうか。完成された風波の理論を解説し得るのはまだ先の話であろう。以上の事を念頭において、既存の風波の理論がこの複雑な現象をどのように単純化して扱ったかを見る事にする。

気流が層流であっても波は生ずるのであるから、先ず、やっかいな乱流成分をいっさい無視してしまう。すると、変動としては規則的な波動場だけを考えればよく、変動空気圧は(2・12)の様に η の函数として表現されるであろう。そうした変動圧力に対して2種類の(不安定)波が生じ得る事にすでに述べた。こうした考えに基づくのが Kelvin-Helmholtz, Jeffreys, Miles 等の理論である。また、水面に息を吹きかけると波立つように、風が担う不規則変動圧力によっても波は生ずるのである(田畑や草原を吹き渡る風を見よ)。波動場から乱流成分への“はねかえり”は考えず、不規則圧力変動は波に独立に存在するものとする。つまり、(2・11)の p_a として η に無関係な不規則函数を考えるのである。これが Phillips の理論の特徴である。前口上が長くなったが、これから、上に言及した四つの理論の解説に移ろう。

3.1 Kelvin-Helmholtz の理論

風を乱れの無い、流速 U_0 一定の一樣流と考える最も単純なモデルである。この場合も流れは非回転的($\omega=0$)であるから、ポテンシャル ϕ を使って速度場は

$$u = U_0 + \phi_x, \quad v = \phi_y \quad (3.1)$$

と表現される。 ϕ は(2・7)を満足する。(2・8)に対応する条件は、一樣流があるので

$$\eta_t + U_0 \eta_x = \phi_y (y=0) \quad (3.2)$$

となる。水面変位が(2・9)の形の時、(3・2)を満足し、 $y \rightarrow \infty$ で有界な(2・7)の解は、水中と同様にして次の様に求められる。

$$\phi = -\frac{1}{k} (\dot{\eta} + i k U_0 \eta) e^{-k y} \quad (3.3)$$

対応する圧力場は、(2・6)に(3・1)を使うと線型近似のもとでは

$$-p/\rho_a = \phi_t + U_0 \phi_x + g y \quad (3.4)$$

と計算される。ここで $y = \eta$ とし、(2・9)、(3・3)を用いると

$$-p_a = \frac{k}{\rho_a} \{ \ddot{\eta} + 2ikU_0 \dot{\eta} - (k^2 U_0^2 + \omega_0^2) \eta \} \quad (3.5)$$

を得る。このような外力に対して、(2.11)は次の様な解を持つ；

$$\left. \begin{aligned} \hat{\eta} &\propto \exp(-ikct) , \\ c &\doteq mU_0 \pm \sqrt{c_0^2 - mU_0^2} . \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

ここに、 $m \equiv \rho_a / \rho_w \ll 1$ 、 $c_0 \equiv \omega_0 / k$ 、 $c_0^2 > mU_0^2$ であれば c は実数で $\hat{\eta}$ は純粹に振動的である。しかし、 U_0 が大きく

$$mU_0^2 > c_0^2 \quad (3.7)$$

となると、 c は虚数部を持ち (3.6) の $\hat{\eta}$ は発散する。即ち、(3.7) の条件のもとでは水面は不安定 (波の発生) を起す事を示す。 $\eta = \hat{\eta} e^{ikx} = e^{ik(x-ct)}$ とすると (3.5) は

$$-p_a = \frac{\rho_a}{k} \{ k^2 (U_0 - c)^2 + \omega_0^2 \} \eta \quad (3.5)'$$

と書くことができる。即ち、 p_a は、 $-\eta$ に比例し、波の谷で最大になり、山の部分で最小になる (吸引力が働く) 事がわかる。(3.5)' と (2.12) を比較すると、係数 a 、 b はそれぞれ

$$a = m \{ k^2 (U_0 - c)^2 + \omega_0^2 \} , \quad b = 0$$

となる。 $c_0^2 = mU_0^2$ の場合を考えると、(3.6) から $c = mU_0$ 。従って、 $m \ll 1$ である事を考慮すると、 $a \doteq m k^2 U_0^2 + m \omega_0^2 = k^2 c_0^2 + m \omega_0^2 \doteq \omega_0^2$ 。即ち、 $c_0^2 = mU_0^2$ は $a \doteq \omega_0^2$ を意味する。(3.7) の条件が $a > \omega_0^2$ に対応する事も容易にわかるであろう。こうして、ここに論じた不安定は、2.3節で述べた A) のタイプの不安定である事がわかるのである。

水-空気系の場合、表面張力を考慮すると、波長 $\lambda \doteq 1.7$ cm の波に対して $c_0 / \sqrt{m}$ の値は最小になり、その大きさはおよそ 650 cm/sec。従って、Kelvin-Helmholtz の理論 (条件 (3.7)) は、風速 U_0 が 650 cm/sec に達すると、先ず最初に 1.7 cm 程度の波が生ずる事、そして風速がそれ以下では波立たないであろう事を予測するのである。ところが、実際には 100 cm/sec 以下の風速でも波は生ずるのである。このような低速で発生する波は明らかに K-H モデルでは説明できない。

要するに、K-H 理論が主張するメカニズムは、確かに波を生ぜしめ得るメカニズムの一つではあるが、水面に最初に発生する風波の説明には使えそうもないのである。

3.2 Jeffreys の理論

球や円柱等の「鈍頭」物体のまわりの流れを考えてみる。前面 (風上側) では物体表面に沿って流れるが、背面では流れは表面からはがれ (剝離現象) て、Wake (伴流) を形成する。圧力は前面と背面で非対称になり、物体には正味の抗力が働く。Jeffreys は波面に沿う流れの場合も同様な事が起ると考えた。即ち、波の山を越えた気流は風下側のどこかではがれ、谷の部分の“上空”を通過し、次の山の前面に衝突するというのである。この様な流れの場を解析し変動圧力 p_a を計算する事は不可能に近い。計算できなければ仮定するより仕方がない。Jeffreys はこれを次のように仮定した；

$$p_a = s \rho_a U_r^2 \eta_x (= i s \rho_a U_r^2 k \eta). \quad (3 \cdot 8)$$

ここに、 $U_r = U_0 - c$ で、速度 c で進む波から見た気流の相対速度である s は実験的に決められるべき正の定数係数で、Sheltering coefficient と呼ばれる。この圧力による力の水平成分 $p_a \times \eta_x$ を一波長 $\lambda = 2\pi/k$ にわたって積分すると、確かに $D = \pi s \rho_a k |\eta|^2 (U_0 - c)^2$ なる正味の抗力を受ける事がわかる。波は波速 c で動くから、風は波に対して単位時間に一波長当り

$$\dot{E} = c D = \pi s \rho_a k c |\eta|^2 (U_0 - c)^2 > 0 \quad (3 \cdot 9)$$

だけの仕事をする。従って、もし粘性によるエネルギーの散逸がなければ波は成長を続けるのである。

$\eta \propto \exp \{ i (kx - ct) \}$ のような正弦波の場合、 $\eta_x = -\dot{\eta}/c$ なる関係があるから、(3・8) は

$$-p_a = s \rho_a \frac{(U_0 - c)^2}{c} \cdot \dot{\eta} \quad (3 \cdot 8)'$$

となり、(2・12) と比較すると、 $a=0$ 、 $b>0$ である事がわかる。即ち、今考えている波の発達のメカニズムは、2・3節で指摘した B) のタイプの不安定である事がわかる。実際、(3・8)' を (2・11) に入れて c に関する二次方程式を解くと $c \doteq c_0$ で、

$$c_i = \frac{1}{2} s m (U_0 - c)^2 / c^2 \quad (3 \cdot 10)$$

なる正の虚数部を持ち、系が不安定である事を示す ($\exp(k c_i t)$ のように振幅は増大する)。

(3・9)、あるいは(3・10)によると、水面は常に不安定ということになり、波の発生が始まる最小風速のごときものが決められない。しかし、これは水の粘性によるエネルギーの散逸 ($\dot{E}_D$) を無視したためであって、波が成長し得るためには

$$\dot{E} - \dot{E}_D > 0 \quad (3 \cdot 11)$$

でなければならないと Jeffreys は考えた。簡単な計算によつて (Lamb 参照)、一波長当りの散逸量は

$$\dot{E}_D = 4 \pi k \mu_w g |\eta|^2$$

と求められる。従って、(3・9) と (3・11) から次のような条件が得られる；

$$s c (U_0 - c)^2 > 4 \mu_w g / \rho_a. \quad (3 \cdot 12)$$

この左辺は $c = \frac{1}{3} U_0$ のとき最小になる事から、波を起し得る最小の風速 U_{min} が、

$$U_{min} = 3 \left(\frac{\mu_w g}{s \rho_a} \right)^{1/3} \doteq 73 \text{ s}^{-1/3} \quad (3 \cdot 13)$$

と与えられる。観測結果を参考にして、 $U_{min} \doteq 110 \text{ cm/sec}$ とすると、(3・13) から $s \doteq 0.3$ となる。そして、この臨界条件のもとでは

$$c = U_0 / 3 \doteq 37 \text{ cm/sec},$$

$$\lambda = 2 \pi c^2 / g \doteq 8 \text{ cm}.$$

水面に最初に現れる風波の波長、波速がほぼ上記の値に近いことから、Jeffreys は自分の理論の妥当性を主張するのである。

波面に沿って剝離が生ずるか否か、 s の値が妥当であるか否か。これ等の点を調べるために、Stanton, Motzfeld等は固体の波形を作り実験した。その結果、剝離は存在しない事、そして観測される s の値はJeffreys が主張する値より一桁ほど小さい事を示した。まさにこの二点の不一致によりJeffreys の理論は決定的に信用を失うのである。(Ursell, Lighthill, Longuet-Higgins等の偉大な学者が見捨てるのだから無理もない)。しかしながら、実際は、 s は c の関数と考えねばならないのである。^{*} $c=0$ であるような固体波形の実験で s が小さかったからといって、 $c \neq 0$ の水面波の場合もそうであるとは云えない。又、剝離の存在を仮定しなくとも(次節で示すように)(3・8)のような圧力分布は生じ得るのである。今から考えると、Jeffreys の理論に対する非難は全く不当なものであったのである。それよりも、この様な粗っぽい理論を波の発生条件というきわめて微妙な問題に適用した事が最大の誤りではなからうかというのが筆者の見解である。波面の上の乱流剪断流の性質がよくわかっていない現状では、Jeffreys の様な半実験的な手法も充分意味があるのではなからうか。少し改良を加えれば、風波の発達率(発生条件ではない)の研究に使えるものと思う。

3・3 Miles理論

この理論はJeffreys の理論とは対蹠的に最大級の賛辞をもって受入れられ、長い間風波の理論の主役の座にあった。Miles 理論の意義は剝離の存在を仮定しなくとも(3・8)の様な圧力分布が生じ得る事を示したところにある。現実との対比の問題は後に述べることにし、先ずこの魅惑的な理論の概略を示そう。

乱流変動成分は無視するが、平均流速分布 U の y 方向の変化は重要で、一般に $U'(y) \neq 0$ とする。流れは回転的($\omega \neq 0$)であるからポテンシャルは使えない。(2・1), (2・2)において $u \rightarrow U(y) + u$, $v \rightarrow v$ として、攪乱量について一次の項のみをとると次の様になる；

$$\begin{aligned} \rho_a (u_t + U u_x + U' v) &= -p_x, & (3 \cdot 14)_1 \\ \rho_a (u_t + U u_x) &= -p_y, & (3 \cdot 14)_2 \\ u_x + v_y &= 0. & (3 \cdot 14)_3 \end{aligned}$$

$u = \phi_y$, $v = -\phi_x$ なる流れ函数 ϕ を使うと(3・14)₃は自動的に満足される。正弦的な進行波攪乱を考えるものとし、速度場、圧力、水面変位を次の形に仮定する；

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi(y) e^{ik(x-ct)}, & p &= \hat{p}(y) e^{ik(x-ct)}, \\ \eta &= \bar{\eta} e^{ik(x-ct)}, & (\bar{\eta}, \text{const.}) \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 15)$$

(3・15)を使うと(3・14)_{1, 2}はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \rho_a \{ (U-c) \phi' - U' \phi \} &= -\hat{p}, \\ \rho_a k^2 (U-c) \phi &= -\hat{p}' \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 16)$$

となる。これから p を消去すると

^{*} Jeffreys 自身ばかりでなく、後の批評家もこの事に気がついていない。

$$(U-c)(\phi'' - k^2 \phi) - U'' \phi = 0 \quad (3 \cdot 17)$$

ϕ に対する水面での境界条件は、 $\eta_t = v(y=0)$ から

$$c \bar{\eta} = \phi(0) \quad (3 \cdot 18)$$

となる。 $U(y)$ が境界層型の速度分布の場合、 $y \rightarrow \infty$ で U は一定になり $U'' \rightarrow 0$ 。従って、(3・17)から、 y が大きい所では(ϕ は有界でなければならないから) $\phi \sim e^{-ky}$ である事がわかる；即ち

$$\phi'(\infty) + k \phi(\infty) = 0 \quad (3 \cdot 19)$$

なる一つの条件式が導かれる。

さて、(2・11)で必要とするのは表面の圧力 $p_a = p(0')$ の値である。(3・16)の第一式で $y=0$ とすると($U(0) = 0$ に注意)

$$p_a = \rho_a \{ c \phi'(0) + U'(0) \phi(0) \}$$

を得る。(3・18)の関係を使って書きかえると

$$p_a = \rho_a c \left\{ U'(0) + c \cdot \frac{\phi'(0)}{\phi(0)} \right\} \eta \quad (3 \cdot 20)$$

ここで次の様な変換を導入すると便利である；

$$G(y) \equiv - \frac{\phi'(y)}{k \phi(y)} \quad (3 \cdot 21)$$

この G を用いると圧力の表現は結局

$$\begin{aligned} p_a &= \rho_a c \{ U'(0) - k c G(0) \} \\ &= \rho_a c \{ (U'(0) - k c G_r) \eta - c G_i \eta_x \} \end{aligned} \quad (3 \cdot 22)$$

となる。ここでは $G(0) \equiv G_r + i G_i$ とおいた。(3・22)で η_x に比例する項だけに着目すると、Jeffreysの表現(3・8)において $s U_r^2$ の項を $(-c^2 G_i)$ で置きかえた形になっている。 η に比例する項は正味の仕事はしないから、(3・22)の圧力のなす仕事量は、あらためて計算するまでもなく、(3・9)で $s(U_0 - c)^2$ を $-c^2 G_i$ で置き換えればよい；即ち

$$\dot{E} = \frac{1}{2} \rho_a (k |\eta|)^2 (-G_i) c^3 \quad (3 \cdot 23)$$

但し、 $\dot{E} \equiv \dot{E} / \lambda$ としてある。後は、 $G(0)$ を具体的に求めて、その虚数部 G_i が負である事を示せばよい。

(3・17)と(3・19)に(3・21)の変換を用いると、 G に関する次の様な方程式と境界条件を得る；

$$G' + k(1 - G^2) + \frac{U''}{k(U-c)} = 0, \quad (3 \cdot 24)$$

$$G(\infty) = 1$$

(3・25)

$U(y_c) = c$ なる点 y_c が特異点になっている事に注意。これは一階の方程式で、特に数値解法には便利な表現である。 $U(y)$ が与えられると、(3・25)に従って境界層の外側の点で $G=1$ とし、(3・24)を $y=0$ まで数値積分すれば簡単に $G(0)$ の値が求められる。 k が小さい場合には、 k -展開の形の解析解を使うのが便利である。 $G(0)$ の値は

$$G(0) = \frac{U'(0)}{kc} + \frac{(U_\infty - c)^3}{c^3} + k \frac{(U_\infty - c)^3}{c^3} \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{U-c}{U_\infty - c} \right)^3 - \left(\frac{U_\infty - c}{U-c} \right)^3 \right\} dy + o(k^2) \quad (3 \cdot 26)$$

となる。問題の虚数部 G_i は第三項の積分 $\int_0^\infty dy / (U-c)^2$ から生ずる。この積分を実行すると(詳細は省略)

$$\{G(0)\}_i \equiv G_i \div \pi k \frac{(U_\infty - c)^4}{c^2} \cdot \frac{U_c''}{U_c'^3} \quad (3 \cdot 27)$$

となる。ここに、 $U_c' \equiv U'(y_c)$ 、 $U_c'' \equiv U''(y_c)$ 、 $U_\infty \equiv U(\infty)$ 。一般に $U_c'' < 0$ であるから、確かに G_i は負となる事がわかる。(3・27)を(3・23)に入れると、風から波へのエネルギー伝達率は次の形に書かれる；

$$\dot{\epsilon} = \frac{\pi}{2} \rho_a (k|\eta|)^2 kc (U_\infty - c)^4 \left(- \frac{U_c''}{U_c'^3} \right) \quad (3 \cdot 28)$$

$y=y_c$ で $G(y)$ は対数的多価性を示すから、 $y=0 \sim \infty$ の積分を実行する際、積分路のとり方に注意を要する。粘性を考慮した厳密な解析によって、積分路は第2図に示すように特異点 y_c の下側(複素 y 平面で)を通るように選ばねばならない事が知られている。

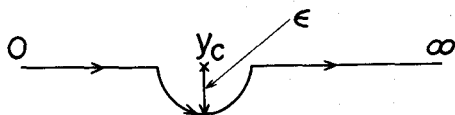
(3・28)の表現を見ると、ここで考えている風から波へのエネルギーの供給は $U(y_c) = c$ なる

Critical point y_c の存在と重要なかわり

がある事が想像されよう。また、(3・27)に至る

計算手順からも、 $G(0)$ の虚数部(即ち、 η_x に比

例する圧力成分)の出現が Critical point の存在に決定的に依存している事が見てとれるであろう。



第2図

Miles理論を重視した Lighthill(1962) は、この理論の物理的解釈を発表している。そこには、実際、 $y=y_c$ なる層で集中的に平均流が(3・28)に相当するエネルギーを失う事がわかり易く説明されている。(取扱いが全く違うが、Lighthillの表現と(3・28)は k が小さい時一致する事を確かめられたい)。波と共に動く座標系から見ると(第3図参照)、 $U(y_c) = c$ であるから、 $y=y_c$ にある流体だけは静止しているように見える($y \neq y_c$ では流体は波に対して相対速度を持つ)。Lighthillの説明の紹介は省略するが、 y_c にある層の流体と波との間のそうした特別な関係が Miles機構の要である、とだけ述べておこう。

Milesの原論文では、“主流”の速度分布 $U(y)$ として乱流境界層に普遍的に見られる対数速度

分布を用いている。風波の発生条件を求めるには、Jeffreys 理論と同様に、気流から得るエネルギーと水や空気の性質による散逸率とを比較するのである。

Milesが提唱するこの美しいメカニズムの妥当性を検証するため沢山の実験が行なわれた。Miles理論の信用は絶大であったため、実験と理論の一致がおもわしくない場合は、むしろ実験の方が疑われるくらいであった。しかし、実験が進むに従って、Miles理論と現実とのくい違いが次第に明白になった。特に問題にされるのは発達率に関するくい違いである。実測される風波の発達率はMiles理論が予測する値より一桁近く大きいのである。

波が逆風を受けると減衰する事は良く知られている。この場合、 $U=c$ になる層は存在しないからMiles機構は働かない。しかし、その減衰率を測定してみると、Miles機構が効く筈の順風の場合の発達率と同程度の値を示す。この事実は非常に意味がある。それは、実際に現象を支配しているメカニズムは、風向によって気流一波、波一気流へとエネルギーの流れは逆になるが、やりとりするエネルギーの量そのものは風の順・逆によらないようなものである事を示しているように思われる。妥当な風波の理論というものは、順風を受ける波の生成ばかりでなく、逆風を受ける波の減衰率をも同時に説明できるようなものでなくてはならないのではなかろうか。順風の場合と逆風の場合とで別の機構を考えるとというのは不自然である。

3・4 Phillips 理論

この理論では気流が運ぶ不規則な乱流変動圧力が主役である。そうした気流中の乱雑な圧力波形がどのような速度で運ばれてくるかが重要であって、気流の平均流速分布 $U(y)$ そのものは本質的でない。気流と水面運動の関係は一方的で、水面は全く受け身にまわる。即ち、 p_a は時間・空間の乱雑な函数として系外から与えられるものと考えるのである。勿論、現実の風の変動は x 方向ばかりでなく、 z 方向にも構造を持っている。ここでは、原論文の忠実な紹介が目的ではないから、これまで通り z 方向の依存性は考えないことにし、この理論の基本的な考え方のみを紹介することにする。尚、以下の説明だけは、他人 (Stern ; 1975) の流儀に従った事をお断りしておく。

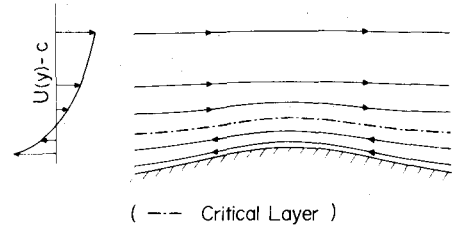
事柄は x 、 t に関して全く乱雑であるが、 x に関する変化を Fourier 成分に分解し、その一つの波数成分にだけ着目するものとする、先に導いた (2・11) 式がそのまま使える。後の都合を考えて、右辺の圧力項を次の形に書き換えておく

$$-\frac{k}{\rho_w} \hat{p}_a(t) = f(t) e^{-ikUt} \quad (3 \cdot 29)$$

従って、我々が取扱う式は

$$\frac{d^2 \hat{\eta}}{dt^2} + \omega_o^2 \hat{\eta} = f(t) e^{-ikUt} \quad (2 \cdot 11)'$$

となる。 p_a と同様 $f(t)$ は t の不規則函数である。 $f(t)$ が何であれ、(2・11)' の解は次



第3図

の形に求められる（外力の作用は無限の過去から続いているとしていることに注意）；

$$\hat{\eta}(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^t f(\tau) e^{-ikU\tau} \sin \omega_0(t-\tau) d\tau \quad (3 \cdot 30)$$

次に、(3・29)の様な不規則外力による系のエネルギー変化率に対する表現を求めてみよう。
(2・11)'の両辺に $d\hat{\eta}^*/dt$ (*印は共役複素数を示す)をかけて、恒等的な関係式

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\hat{\eta} \frac{d\hat{\eta}^*}{dt} \right] &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\hat{\eta} \hat{\eta}^*), \\ \operatorname{Re} \left[\frac{d\hat{\eta}^*}{dt} \cdot \frac{d^2 \hat{\eta}}{dt^2} \right] &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\hat{\eta}}{dt} \cdot \frac{d\hat{\eta}^*}{dt} \right) \end{aligned}$$

を考慮すると次の表現を得る；

$$\dot{E} \equiv \frac{dE}{dt} = \operatorname{Re} \left[\frac{d\hat{\eta}^*}{dt} \cdot f(t) e^{-ikUt} \right] \quad (3 \cdot 31)$$

ここに、 $E = \frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{d\hat{\eta}}{dt} \right|^2 + \omega_0^2 |\hat{\eta}|^2 \right\}$ で運動エネルギーと位置エネルギーの和を示す。なお、

$\operatorname{Re} [\]$ は $[\]$ 中の表現の実数部を意味する。(3・31)に(3・30)を入れて、簡単な書き換えを行うと、結局、時刻 t におけるエネルギー変化率として

$$\dot{E} = \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty f^*(t-\tau) f(t) e^{-ikU\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau \right] \quad (3 \cdot 32)$$

を得る。

$f(t)$ がわかれば(3・32)によってエネルギー変化率は容易に計算できる。しかしながら、ここで考えているような乱雑な過程にあっては、 $f(t)$ そのものは(もし測定できたとしても)殆ど意味がない。起り得る無数の事象のうち偶々実現したほんの一例にすぎないのである。実際に意味があるのは多数の事象についての算術平均(所謂“集団平均”)である。(3・32)の集団平均($\langle \ \rangle$ で表わす)をとると

$$\langle \dot{E} \rangle = \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \langle f^*(t-\tau) f(t) \rangle e^{-ikU\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau \right] \quad (3 \cdot 33)$$

積分の中にあられる $\langle f^*(t-\tau) f(t) \rangle$ は時間 τ だけ離れた信号の間の相関関係を表わす。これを規格化したものは相関係数と呼ばれる；

$$\gamma \equiv \frac{\langle f^*(t-\tau) f(t) \rangle}{\langle f^*(t) f(t) \rangle} \quad (3 \cdot 34)$$

一般に γ は t と τ の函数である。しかし、風が長時間一様に吹き続け、その統計的性質が時間によらないような場合には γ は時間差 τ のみの函数になる。なお、このような簡単な場合には $\gamma(\tau) = \gamma^*(\tau)$ 、即ち γ が実数である事も容易にわかる。これ等を考慮すると(3・33)は、結局

$$\langle \dot{E} \rangle = \langle f^*(t) f(t) \rangle \int_0^\infty \gamma(\tau) \cos(kU\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau \quad (3 \cdot 35)$$

を得る。ここで、 $\langle f^*(t) f(t) \rangle$ は変動圧力の二乗平均であるが、風の場合が上に述べたような意味で定常的である場合には、時間によらない一定値と考えられる。従って、(3・35) から、 $\langle \dot{E} \rangle$ は時間に無関係になり、波の平均エネルギー $\langle E \rangle$ は時間 t に比例して一定の割合で増大する事がわかる。しかしここで注意しなければならないのは、(3・35) の右辺の積分は k の値に依存する事である。一般に $\cos(kU\tau) \cos(\omega_0 \tau)$ の値は ± 1 の間を周期的に変動するから、もし $\gamma(\tau)$ をゆっくり変化する函数とすると、 $+$ が打消し合って (3・35) の積分は殆どゼロになってしまう。しかし

$$kU = \omega_0 \quad (\equiv \sqrt{gk}) \quad (3 \cdot 36)$$

の場合は例外である。この場合に限り

$\cos(kU\tau) \cos(\omega_0 \tau) = \cos^2 \omega_0 \tau \geq 0$ となり、(3・35) の積分は相当な値を取り得るのである。即ち、(3・36) の“共鳴条件”を満足するような波数 k の波のみが際立った成長を示すのである。

先に述べた三種の理論は何れも波の成長が時間に関して指数函数的である事を予測するが、ここに述べたメカニズムからは時間 t に比例する成長が結論される事に注目すべきである。室内実験や海上観測で測定される風波の成長はほぼ指数函数で記述されるようである。しかし、風波の発達初期の段階では Phillips のメカニズムが重要であると考えられている。

風が吹き始めると、まず、乱流変動圧力との共鳴によって波が生じて時間に比例して発達する。ある程度発達が進むと、今度は Miles 機構(?) が主となって、波の振巾は非線型的な自律作用が働くまで指数函数的な増大を続ける。これが、風波の生成に関する一般的な描像である。