

密度流

栗谷陽一

1. はじめに

流体の内部に僅かでも密度の不均一があれば、重力差のために、均一流体には見られない種々の挙動が示される。これらをすべて密度流というならば、非常に広汎多岐な現象が含まれ、実際的にも重要なものが数知れない。

例えば冷却排水を放流すると密度差による浮力のため上昇し、いわゆる重力噴流（ブリューム）を形成し、次第に周囲の水と混合する。また貯水池などに温度の異なる水が上下二層を形成すると、微弱な攪乱では容易には境界面が破壊されず、強い安定性を示す。またこの安定性は、河川河口部において、重力差により下層から河川に侵入した海水が河川水と容易に混合せず、いわゆる塩水楔を形成したりする。

このような密度流に見られる諸現象を究明することは非常に重要であるが、現象が複雑であり、因果関係が互いに交錯することが多い。一般に流れの問題を取扱う場合に、厄介な問題の一つに乱れがある。均一流体の運動の取扱いを、とくにこの乱れに着目し、「平均流速の場」と「乱れ」との相互作用として見ると、平均流、とくに剪断流が乱れを引きおこし、これにエネルギーを供給する反面、乱れは運動量を輸送し、渦動粘性として流れの場に影響を戻すと見られる。密度流現象においては、「密度の配置がこれに加わり、それらの間の関係は、概念的には図-1のように模式化できるであろう。

もちろん、場合によっては、図-1のすべての因果関係を同時に考慮する必要はないが、因果関係が錯雑するために、一般的な取扱いは極めて困難であり、それだけに非常に多くの貴重な研究がなされてきた。

この稿では、密度流の一般について、今日までの研究の成果を述べる紙数も、筆者の能力も大幅に不足している上に、従来から多くの優れた解説もなされているので、主として河口密度流のような、水平に近い密度流に限定して、基礎的な平易な部分についてののみ、筆者なりの解説も試みてみたいと思う。(1)(2)

2. 層流の密度流

図-2に示すように、底面の勾配があまり大きくない水域に、2種の密度の水が存在する場合を考える。境界面は混合せずに明瞭に保たれて上下2層を形成し、各層ともにReynolds数が十分低く、層流状態に保たれているとする。このような水の運動を論ずることは、もちろん適当な境界条件のもとで連続の式とNavier-Stokesの運動方程式を解くことに帰する。

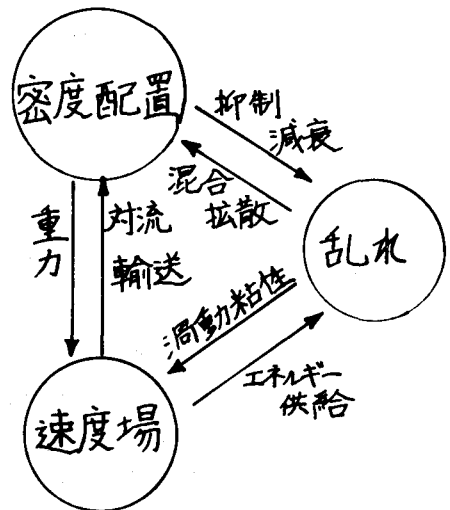


図-1

とくに流れが殆んど水平であれば、後者は境界層方程式を用いて十分である。ここでは図-2に示すような2次元の定常な流れを対象として

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

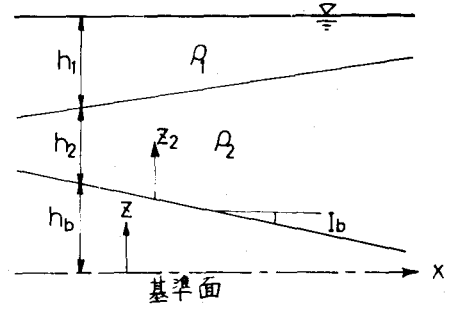


図-2

$$\rho_1 u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_1 w \frac{\partial u}{\partial z} = \rho_1 g i_s + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$〔上層 \quad h_b + h_2 < z < h_b + h_1 + h_2〕 \quad (2.2)$$

$$\rho_2 u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_2 w \frac{\partial u}{\partial z} = \rho_1 g i_s + (\rho_2 - \rho_1) g i_i + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$〔下層: \quad h_b < z < h_b + h_2〕$$

ここでは、このような式を一般的に取扱うことはやめて、簡単な場合について層流密度流の性質を検討する。

まず流れが水平に近く、 i_b , i_i , i_s が小さいときには(2.2)の左辺を無視することができる。このとき(2.2)は容易に積分できて、各層内の流速分布は

$$u = (g i_s / 2\nu) \{ 2(h_1 + h_2) z_2 - z_2^2 \} + (\epsilon g i_i / 2\nu) h_2^2 \quad [上層] \quad (2.3)$$

$$u = (g i_s / 2\nu) \{ 2(h_1 + h_2) z_2 - z_2^2 \} + (\epsilon g i_i / 2\nu) (2h_2 z_2 - z_2^2) \quad [下層]$$

となる。ここに $\epsilon = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_1 \simeq (\rho_2 - \rho_1) / \rho_2$, $z_2 = z - h_b$ である。これから、両層内の平均流速 $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ を求め、逆にそれらを用いて水面勾配 i_s および界面の勾配 i_i を計算すると

$$i_s = \frac{6\nu}{g} \frac{2\bar{u}_1 - 3\bar{u}_2}{h_1(4h_1 + 3h_2)}$$

$$i_i = \frac{6\nu}{\epsilon g} \frac{(2h_1^2 + 6h_1h_2 + 3h_2^2)\bar{u}_2 - h_2(3h_1 + 2h_2)\bar{u}_1}{h_1h_2^2(4h_1 + 3h_2)}$$

となる。 $\epsilon \ll 1$ とすれば、一般には $i_s \ll i_i$ となる。単位幅当りの上・下両層の流量を q_1 , q_2 とすると、 $q_1 = \bar{u}_1 h_1$, $q_2 = \bar{u}_2 h_2$ で、これは x によらないから、(2.6)とあわせて界面形状を計算することができる。その例を図-3に示す。

(2.3)より界面および底面のせん断力を計算すると、

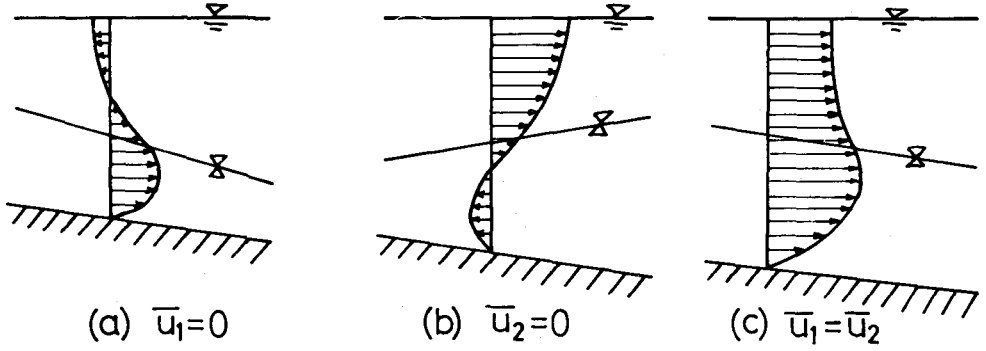


図-3

$$\tau_i = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial z_2} \right|_{z_2=h_2} = 6\mu \frac{2\bar{u}_1 - 3\bar{u}_2}{4h_1 + 3h_2} \quad (2.4)$$

$$\tau_b = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial z_2} \right|_{z_2=0} = 6\mu \frac{(2h_1 + 3h_2)\bar{u}_2 - h_2\bar{u}_1}{h_2(4h_1 + 3h_2)}$$

したがって $\bar{u}_2=0$ でも $\tau_b \neq 0$ であり (図-3b) また $\bar{u}_1=\bar{u}_2$ であっても $\tau_i \neq 0$ である (図-3c)。

以上の例とは逆に、等流の流速分布では近似し得ない極端なものとして、界面に沿って境界層が発達すると考えるべき場合がある。例えば一定の底勾配の上を下層流体が流下する場合を考える。上層は十分深くて、平均流速 $\bar{u}_1=0$ とすると、上層内では、界面上に境界層が発達するが、その上では $u=0$ である。したがって、 $i_s=0$ とおける。また、下層はあまり厚くなく、前の例のように等流と同じ流速分布をもつとすれば、界面の流速を u_i とすると、下層の流速分布は

$$u = \frac{u_i z_2}{h_2} + \frac{\epsilon g i_i}{2\nu} y_2 (h_2 - z_2) \quad (2.5)$$

したがって下層の平均流速は

$$\bar{u}_2 = \frac{u_i}{2} + \frac{\epsilon g i_i h_2^2}{12\nu} \quad (2.6)$$

となる。さらに界面および底面のせん断力は

$$\tau_i = \mu \frac{4u_i - 6\bar{u}_2}{h_2} \quad \tau_b = \mu \frac{4u_i + 6\bar{u}_2}{h_2} \quad (2.7)$$

となる。Ippen および Harleman⁽³⁾ は次式で与えられる無次元パラメータ

$$J = \nu \bar{u}_2 / \epsilon g i_i h_2^2 = F_{r2}^2 / i_i Re_2 \quad (2.8)$$

(ただし $Fr_2^2 = \bar{u}_2^2 / \epsilon g h_2$, $Re_2 = \bar{u}_2 h_2 / \nu$) によって下層の流況がきめられることを示したが、さらに下層流量 $q_2 = \bar{u}_2 h_2$ を用いると、

$$h_2 = J^{-1/3} (\nu q_2 / \epsilon g i_i)^{1/3}$$

したがって

$$\bar{u}_2 = J^{1/3} (\epsilon g i_i q_2^2 / \nu)^{1/3}$$

$$u_i = (2 - 1/6 J) \bar{u}_2 = J^{1/3} (2 - 1/6 J) (\epsilon g i_i q_2^2 / \nu) \quad (2 \cdot 9)$$

$$\tau_i / \rho = (\nu \bar{u}_2 / h_2) (2 - 2/3 J) = 2 J^{1/3} (J - 1/3) (\epsilon^2 g^2 i_i^2 \nu q_2)^{1/3} \quad (2 \cdot 10)$$

$$\tau_b / \rho = (\nu \bar{u}_2 / h_2) (2 + 1/3 J) = 2 J^{1/3} (J + 1/6) (\epsilon^2 g^2 i_i^2 \nu q_2)^{1/3}$$

となる。 $u_i > 0$, $\tau_i < 0$ であることから、 $1/12 < J < 1/3$ であることは明らかである。Ippen らは実測より J を求め、かなりの散乱が見られるが、 $\epsilon \ll 1$ の場合に対し $J = 0.138$ を与えている。

上層内部についてみれば、界面より境界層が発達しているはずである。それで、 $h_1 \rightarrow \infty$ と考え、 $z_1 = z - h_2 - h_b$ とおいて、(2・2) 第1式すなわち

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z_1} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} \quad (2 \cdot 11)$$

を解くことになる。境界条件を $z_1 = 0$ で $u = u_i$, $v = 0$, $z_1 \rightarrow \infty$ で $u = 0$ とし、 u_i を仮に一定とすると、解はLockの求めた二層平行流の解と同じで

$$u = u_i f(z_1 / \sqrt{\nu x / u_i}) \quad (2 \cdot 12)$$

の形で与えられる。これから τ_i を求めると

$$\tau_i / \rho = \sqrt{u_i^3 / \nu x} f'_0 \quad (2 \cdot 13)$$

の形となり、界面抵抗は漸減することになる。このことから、 J の値は $x = 0$ における値 $1/12$ より漸次増して $x \rightarrow \infty$ で $1/3$ となり、その間に h_2 は減少、 $\bar{u}_2$, $\bar{u}_i$ は増加、 τ_i の絶対値は減少し、最終的には $\bar{u}_2 = \bar{u}_i$, $\tau_i = 0$ になると考えられる。

3. 密度流の一次的扱い

上層および下層内の流れのReynolds数が大きくなると、層内の流れは乱流に移行する。界面には密度の不連続があるので、重力の差は界面附近の乱れを強く抑制する。このため渦動粘性は底面附近と同様に、各層内部にくらべて弱くなり、流れの速度勾配は界面と底面に集中する。このような場合に対しては、

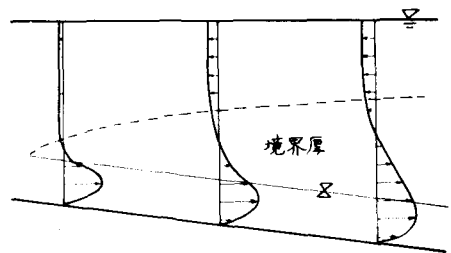


図-4

各層内の流速を平均流速で代表し、それぞれを開水路流れと同様な一次元的な取扱いをするのが実用上便利である。

簡単のため幅方向には一様な二次元問題として考えよう。上層の密度を ρ_1 、平均流速を u_1 、厚さを h_1 、下層のを ρ_2 、 u_2 、 h_2 とし、底面の勾配を i_b とする。

ただし、 $|\rho_2 - \rho_1| \ll \rho_1, \rho_2$ として、

$$\epsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \simeq \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \quad (3.1)$$

とおく。また底面および両層の境界面に働くせん断力 τ_b および τ_i を開水路底面の抵抗になぞらえて抵抗係数 f_b 、 f_i を用いて

$$\tau_b = (f_b/2) \rho_2 |u_2| u_2, \quad (3.2)$$

$$\tau_i = (f_i/2) \rho_1 |u_1 - u_2| (u_1 - u_2) = (f_i/2) \rho_2 |u_1 - u_2| (u_1 - u_2) \quad (3.3)$$

とおく。このような平均的取扱いの表現は、前述の層流の場合の(2.4)にくらべて、単純な形になっているが、各層内の Reynolds 数が大きい場合には速度勾配が界面および底面近傍に集中し、そこでの速度差には、その反対側の流況があまり影響しないからであるはずである。各層の連続の式および運動方程式はつぎのようになる。

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_1 h_1) = 0, \quad \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_2 h_2) = 0 \quad (3.4, 5)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = g \left(i_b - \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) - \frac{\tau_i}{\rho_1 h_1} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = g \left(i_b - \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) - (1 - \epsilon) g \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\tau_b - \tau_i}{\rho_2 h_2} \quad (3.7)$$

f_b および f_i が与えられれば、これらの諸式から2層密度流の解を求めることができる。とくに定常流を考えると、

$$u_1 h_1 = \text{const}_1 = q_1, \quad u_2 h_2 = \text{const}_1 = q_2$$

したがって(3.6)、(3.7)は

$$(1 - \epsilon F_{i1}^2) \frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} = i_b - \frac{\tau_i}{\rho_1 g h_1} \quad (3.8)$$

$$(1 - \epsilon) \frac{dh_1}{dx} + (1 - \epsilon F_{i2}^2) \frac{dh_2}{dx} = i_b - \frac{\tau_b - \tau_i}{\rho_2 g h_2} \quad (3.9)$$

ここに $F_{i1} = q_1 / (\epsilon g h_1^3)^{1/2} = u_1 / (\epsilon g h_1)^{1/2}$, $F_{i2} = q_2 / (\epsilon g h_2^3)^{1/2} = u_2 / (\epsilon g h_2)^{1/2}$ は上

層および下層の内部フルード数である。これらより dh_1/dx , dh_2/dx を逆算すれば、界面の形状などを求めることができる。とくに

$$1 - F_{i1}^2 - F_{i2}^2 + \epsilon F_{i1}^2 F_{i2}^2 = 1 - F_{i1}^2 - F_{i2}^2 = 0$$

であれば、界面勾配が無限大となる。これは開水路流れの1次元的計算で、フルード数 $F_r=1$ のとき水面勾配が無限大になることに当る。

4. 内部波と界面の安定性

二層密度流では、前節でも述べた通り、たとえ各層内の流れが乱流状態であっても、界面は強い安定性をもつ。しかし上下層の流速の差がある程度以上大きくなると、界面にいわゆる内部波を生じ、これが界面抵抗係数 f_i に影響を及ぼし、さらに波が激しくなると砕波して両層が混合するにいたる。

内部波発生については、Kelvin-Helmholtzの理論として、摂動論を用いて論じられている。基礎式として連続の式、物質保存の式および運動方程式

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (4.2)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (4.3)$$

を用いる。流速 $\vec{v}$ 、密度 ρ 、圧力 p として、鉛直方向 z (上向きを正とする) のみの関数である定常項と、平面波の形の摂動項との和の形を与える。

$$u = U_0(z) + \hat{u}(z) e^{i\chi}, \quad v = \hat{v}(z) e^{i\chi}, \quad w = \hat{w}(z) e^{i\chi} \quad (4.4)$$

$$\rho = \rho_0(z) + \hat{\rho}(z) e^{i\chi}, \quad p = p_0(z) + \hat{p}(z) e^{i\chi}$$

但し $\chi = k_x x + k_y y - \sigma t$ これらを(4.1)～(4.3)に代入し、摂動項について1次の項だけを取ると

$$\begin{aligned} i(k_x \hat{u} + k_y \hat{v}) + \frac{d\hat{w}}{dz} &= 0 \\ i(k_x U_0 - \sigma) \hat{\rho} + \frac{d\rho_0}{dz} \hat{w} &= 0 \\ i\rho_0(k_x U_0 - \sigma) \hat{u} + \rho_0 \frac{dU_0}{dz} \hat{w} &= i k_x \hat{p} + \mu \left\{ \frac{d^2 \hat{u}}{dz^2} - k^2 \hat{u} \right\} \\ i\rho_0(k_x U_0 - \sigma) \hat{v} &= -i k_y \hat{p} + \mu \left\{ \frac{d^2 \hat{v}}{dz^2} - k^2 \hat{v} \right\} \\ i\rho_0(k_x U_0 - \sigma) \hat{w} &= -\hat{\rho} g - \frac{d\hat{p}}{dz} + \mu \left\{ \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} - k^2 \hat{w} \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

が得られる。(4・5)の諸式から、摂動項について $\hat{w}$ 以外を消去すると、 $\hat{w}$ に関する微分方程式として

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} = & \left\{ k^2 + \frac{k_x}{\sigma - k_x U_0} \frac{d^2 U_0}{dz^2} + \frac{gk^2}{(\sigma - k_x U_0)^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right\} \hat{w} \\ & + \frac{i\nu}{\sigma - k_x U_0} \left\{ \frac{d^4 \hat{w}}{dz^4} - 2k^2 \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + k^4 \hat{w} \right\} \quad (4 \cdot 5) \end{aligned}$$

ただし $k^2 = k_x^2 + k_y^2$

を得る。ただし、密度の変化は小さいものとして、 $d\rho/dz$ を含むが g を含まない項は省略した。

この式で $k_x = k$, $k_y = 0$, $d\rho_0/dz = 0$ とおいたものは Orr-Sommerfeld の式として知られているもので、境界層の安定性を論じるのに用いられている。

(4・5)を自由表面、界面および底面の条件を用いて解けば、固有値問題として k_x , k_y と δ との関係が求められる。ある与えられた $U_0(z)$, $\rho_0(z)$ に対して、 k_x , k_y の実数値に対する δ の虚数部が負であれば減衰波を表わすが、正であれば時間とともに増大する波を示す。そこで、あらゆる k_x , k_y について σ の虚部が負であれば、界面は安定であるがある k_x , k_y の値に対して正であれば、不安定となる。しかし、任意の $U_0(z)$, $\rho_0(z)$ を与えて固有値問題の解を求めることは容易でない。

Orr-Sommerfeld の式の解については、平板に沿う層流境界層の安定条件を求めるために、古くから非常に多くの研究がなされた。⁽⁴⁾ まず粘性項を省略した場合について、不安定を生ずるのは、流速分布に変曲点のある場合であることが知られた。それで、変曲点のある流速分布について、粘性を考慮することで、Reynolds 数に対する安定限界を求めようとした。しかし粘性の影響を、最も顕著だと思われる壁面近傍でのみ考慮に入れた結果は全く予想に反するものであった。すなわち変曲点のある流速分布に対しては、あらゆる波数に対して波が増幅され、さらに非粘性では安定であった変曲点のない流速分布に対しても同様に不安定となった。しかし最後に、非粘性の解では、波の伝播速度 σ/k_x と流速 U_0 とが等しくなる z の位置(臨界層)では $d^2 U/dz^2 \neq 0$ のとき u が無限大となることに着目し、壁面附近と共にこの臨界層近傍にも粘性を考慮することで、はじめて境界層の遷移 Reynolds 数が説明された。⁽⁵⁾

二層密度流の安定性についても、同様に非粘性の場合から検討されている。(4・5)で $\nu = 0$ とおけば

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} = \left\{ k^2 - \frac{k_x}{\sigma - k_x U_0} \frac{d^2 U_0}{dz^2} + \frac{gk^2}{(\sigma - k_x U_0)^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right\} \hat{w} \quad (4 \cdot 6)$$

となる。(4・6)に境界条件を導入して σ の固有値を求めることになる。(4・6)は虚数の係数を含まないため、得られる σ の固有値は実数か共役複素数となる。複素数の固有値をもつときは、共役数の一方は必ず増大する波を表わすので、界面は不安定と判断される。固有値が実数であれば、減衰も増大もしない安定な波が存在することを示す。非粘性の取扱いでは、この場合を安定と考えている。すべての波が減衰することを安定と判断するならば、僅かの粘性を考慮したときに安定不安定の何れになるか、その事情は境界層の場合と似た事柄であろう。しかし、粘性の影響が顕著でなければ、非粘性の場合の σ が実数の場合には波の増幅も僅かの筈であり、したがって著しい碎波により上層下層が混合することはないであろう。実用的な意味での界面の安定性は、むしろ後者について多く論じられているようである。

つぎに非粘性の場合の(4・6)の解について述べる。非粘性であるから U_0 の不連続が許される。
(4・5)より

$$\hat{p} = \frac{\rho_0}{ik^2} \{ (k_x U_0 - \sigma) \frac{dw}{dz} - k_x \frac{dU_0}{dz} \hat{w} \}$$

また摂動項による z 方向の変位を $\zeta = \hat{\zeta} e^{ix}$ とすると

$$\zeta = \frac{\hat{w}}{i(k_x U_0 - \sigma)} \quad (4 \cdot 7)$$

したがって、 $z + \zeta$ における圧力を $p_\zeta = \hat{p}_\zeta e^{ix}$ とおくと、 w の2次の項を省略して

$$\hat{p}_\zeta = \frac{\rho_0}{ik^2} \{ (k_x U_0 - \sigma) \frac{dw}{dz} - k_x \frac{dU_0}{dz} \hat{w} \} - \frac{\rho_0 g}{i(k_x U_0 - \sigma)} \hat{w} \quad (4 \cdot 8)$$

である。これから境界条件を求める。自由表面では $\hat{p}_\zeta = 0$ とすべきであるが、密度差が小さく密度流速がおそいとなれば、

$$\text{自由表面で} \quad \hat{w} = 0 \quad (4 \cdot 9)$$

として十分である。

$$\text{底面で} \quad \hat{w} = 0$$

また速度、密度の不連続面では、上層にⅠ、下層にⅡをつけて表わすと、 $\hat{\zeta}$ と $\hat{p}_\zeta$ が連続なことから

$$\frac{\hat{w}_I}{k_x U_{0I} - \sigma} = \frac{\hat{w}_{II}}{k_x U_{0II} - \sigma} \quad (4 \cdot 11)$$

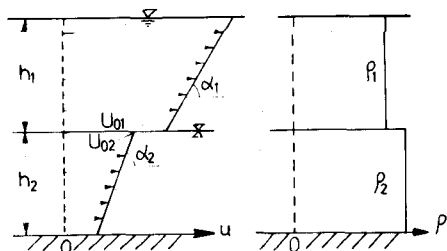
$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{0I}}{k^2} \{ (k_x U_{0I} - \sigma) \frac{d\hat{w}_I}{dz} - k_x \frac{dU_{0I}}{dz} \hat{w}_I \} - \frac{\rho_{0I} g}{k_x U_{0I} - \sigma} \hat{w}_I \\ &= \frac{\rho_{0II}}{k^2} \{ (k_x U_{0II} - \sigma) \frac{d\hat{w}_{II}}{dz} - k_x \frac{dU_{0II}}{dz} \hat{w}_{II} \} - \frac{\rho_{0II} g}{k_x U_{0II} - \sigma} \hat{w}_{II} \end{aligned}$$

となる。密度差が小さいとすれば、この式の各辺の第1項の ρ_{0I} と ρ_{0II} との相違は考慮する必要がないので、基準の密度を ρ_{00} と定めれば、 $\epsilon = (\rho_0 - \rho_{00})/\rho_{00}$ とすると

$$\begin{aligned} & \{ (k_x U_{0I} - \sigma) \frac{d\hat{w}_I}{dz} - k_x \frac{dU_{0I}}{dz} \hat{w}_I \} - \{ (k_x U_{0II} - \sigma) \frac{d\hat{w}_{II}}{dz} - k_x \frac{dU_{0II}}{dz} \hat{w}_{II} \} \\ &= -(\epsilon_{II} - \epsilon_I) g k^2 \frac{\hat{w}_I}{k_x U_{0I} - \sigma} \quad \text{又は} \quad = -(\epsilon_{II} - \epsilon_I) g k^2 \frac{\hat{w}_{II}}{k_x U_{0II} - \sigma} \end{aligned} \quad (4 \cdot 12)$$

(4・9)~(4・12)を用いて(4・6)を解いた例を挙げる。 d^2U_0/dz^2 , $d\rho_0/dz$ が共に 0 の場合は、(4・6)は非常に簡単になり、一般解として

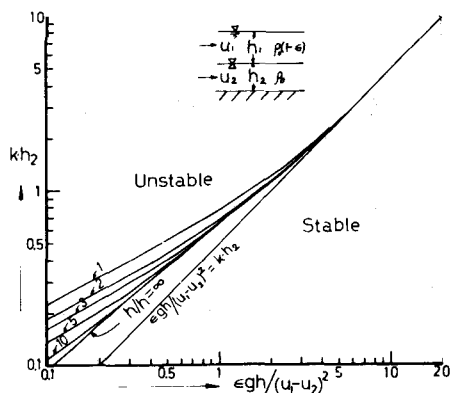
を得る。そのような一例として、⁽⁶⁾図-5のような流速分布および密度分布の場合を検討する。この場合に対する永年方程式はつぎのようになる。


$$\begin{aligned}
 & (k_x U_{01} - \sigma) \{ (k_x U_{01} - \sigma) k \coth k h_1 + \alpha_1 k_x \} \\
 & + (k_x U_{02} - \sigma) \{ (k_x U_{02} - \sigma) k \coth k h_2 - d_2 k_x \} - \epsilon q k^2 = 0 \quad (4.14)
 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
& -4k^2 k_x^2 \coth kh_1 \coth kh_2 (U_{01} - U_{02})^2 \\
& -4k k_x^2 (\alpha_1 \coth kh_2 + \alpha_2 \coth kh_1) (U_{01} - U_{02}) \\
& + k_x^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\epsilon g k^3 (\coth kh_1 + \coth kh_2) \geq 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

特別な場合として, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ とする。 $U_{01} = U_1$ $U_{02} = U_2$ と書けば (4.15) は

となり、 k の大きい値に対して常に不安定であることが示される。(Kelvin-Helmholtz の波)

(図-6)

$$\sigma = kU_0 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\epsilon g k (\coth k h_1 + \coth k h_2)}}{2(\coth k h_1 + \coth k h_2)} \quad (4 \cdot 17)$$


となる。これは塩水楔の実測結果にかなり一致するこ

とがたしかめられている。(7)

Taylor⁽⁸⁾は図-7に示す条件で安定条件を求め、(a)の場合については $\epsilon gh / (u_1 - u_2)^2$ のどのような値に対しても、波数が大きくても小さくても安定であるが中間に不安定な範囲があり、結局常に不安定なことを示した。また(b)の場合には $\epsilon g / \alpha^2 h > 1/2$ で安定であり、(c)の場合には $R_i \equiv \beta g / \alpha^2 > 1/4$ で安定であることを示した。 $\epsilon gh / (u_1 - u_2)^2$, $\epsilon g / \alpha^2 h$ も Richardson 数 Ri と類似の性格のものであるから、安定性は Richardson 数で論じられることになる。

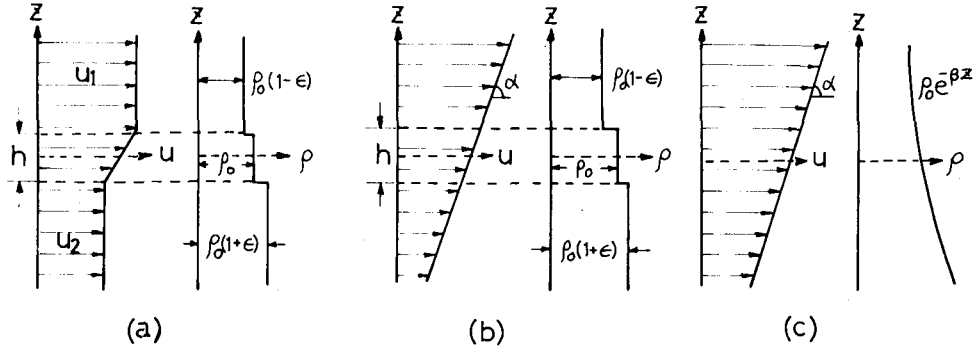


図-7

これらの結果は、流速分布および密度分布の仮定によって、結果が定性的にも異っている。この問題については非常に多くの研究があり、安定限界が Richardson 数で与えられるにしても、十分解決されていない。

界面の安定性あるいは内部波に対する粘性の影響に関しても多くの研究がなされている。Keulegan⁽⁹⁾は上層流の場合について、風波の発生と同様に上層流が下層に内部波を発生させ、そのエネルギーが下層内で粘性により消費されると考え、種々の仮定を用いて検討を行った。そして彼の実験観察の結果と合うように常数を定め、碎波混合にいたる限界が Keulegan 数

$$\theta = 3 \sqrt{\nu g \epsilon} / u_1 = Re_1^{-1/3} Fi_1^{-2/3} \quad (4.18)$$

の値で定められ、

層流 ($Re_1 < 450$) に対して $\theta = 0.127$

乱流 ($Re_1 > 450$) に対して $\theta = 0.178$

を与えた。彼の実験は、しかし界面に境界層が発達すると思われる形でなされており、境界層の発達途中段階で安定性が観察されたとするならば、水路端から x のところで観察したとすると、そこで境界層の厚さ δ は

$$\delta \propto \sqrt{\nu x / u_1}$$

となるから、(4.18) より ν を消去すると

$$\theta \propto (\sigma / x)^{-1/3} Ri_1^{1/3}$$

となるので、前述の非粘性としての安定性の考察と類似の結果ともいわれる。⁽¹⁰⁾

粘性の影響を見るのに、内部波の発生に対しては境界層の安定理論におけると同様に界面における流速の連続性と臨界層などが問題であろうし、碎破限界に対しては有限振幅の取扱いによる粘性損失も問題となろう。いずれも非常に複雑な問題である。

一方界面の安定性（後者のいみ）に関する実験的研究は多くなされている。実測結果は中間層（境界層）の厚さに依存するはずであるが、安定限界は主として内部Froude数で与えられ、研究者によっておよそ0.4～1の範囲の値が与えられている。⁽¹¹⁾

5. 界面抵抗

2層密度流を3節で述べたように一次的に取扱うためには、底面の抵抗係数 f_b とともに界面の抵抗係数 f_i が与えられなければならない。しかし界面抵抗係数を与える手法はまだ確立しておらず、また種々の複雑な要因が関連するはずである。

層流の場合の界面抵抗は2節で述べたので、上下両層の内部は乱流状態とする、前節にもふれたように、界面では密度の不連続あるいは密度勾配があるため、重力の作用で界面を貫ぬく乱れは強く抑えられるので、界面近傍は、両層内部にくらべて著しく静穏に保たれる。

SchijfとSchönfeld⁽¹²⁾は、界面近傍の流れを固体壁面に沿う流れになぞらえて考えている。定量的には満足な結論を必ずしも得ていないが、モデルを通じて界面近傍の様子が伺われるので、まずこれについて述べる。

界面が安定で、内部波も発生していないとする。このとき界面には極めて薄い層流の部分が存在する。この層内では分子拡散により一定の濃度勾配が保たれ、安定である。界面近傍の流れを、この層部（厚さを Δz とする）の中央に滑らかな壁面があるときの、これに沿う流れで置きかえられるとする。普通の滑面上の乱流では、粘性底層の厚さ δ は、同じ摩擦速度 u_* に対し対数分布と層流分布と同じ流速を与える点として

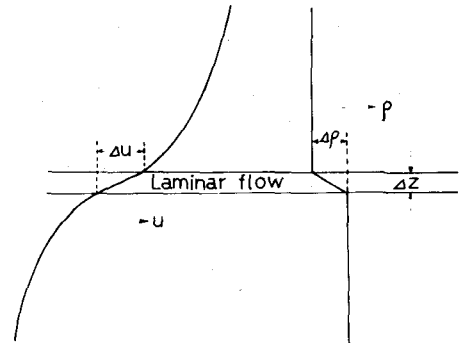


図-8

$$u_* \delta / \nu = A + (1/\kappa) \ln(u_* \delta / \nu) \quad (5.1)$$

で与え、 $A = 5.5$ より $u_* \delta / \nu = 11.6$ である。

面の場合は δ に変えて層流部分の厚さの半分 $\Delta z / 2$ が粘性底層と同様になるものとすれば、

$$A = u_* \Delta z / 2\nu - (1/\kappa) \ln(u_* \Delta z / 2\nu)$$

となり、界面中央（ $z = 0$ ）における流速を u_i とすれば、界面近傍の流速分布は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u/u_* &= u_i/u_* \pm \{ u_* \Delta z / 2\nu + (1/\kappa) \ln(|z| / (\Delta z / 2)) \} \\ &= u_i/u_* \pm (1/\kappa) \ln(N|z| / (\Delta z / 2)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

ここに±の複号は界面の上側と下側とに対応する。また

$$N = \exp(\kappa u_* \Delta z / 2\nu)$$

となるはずであるが、Schijfらは、 N を実測から求めるべき常数として、むしろ壁面乱流に対する値 $\exp(0.4 \times 11.6) \approx 105$ を一応予想している。

上層の厚さを h_1 、下層の厚さを h_2 とし、(5.2)を積分して各層内の平均流速を求め、その差をとると

$$\frac{|\bar{u}_1 - \bar{u}_2|}{u_*} = \frac{2}{\kappa} \ln \frac{2N\sqrt{h_1 h_2}}{e \Delta z} \quad (5.3)$$

となる。それで、 Δz がきめられるならば、界面抵抗係数は $f_i = 2 u_*^2 / (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2$ より求められる。

一方、 Δz がKeuleganの与えた安定条件

$$Re_i F_{ri} \alpha = A \quad \alpha = 1.5 \quad A = 77000$$

に従うものとする。ただし $Re_i = \Delta u \cdot \Delta z / \nu$ 、 $F_{ri} = \Delta u / \sqrt{\epsilon g \Delta z}$ で、 Δu は層流部両端の速度差で、 $u_*^2 = \nu \Delta u / \Delta z$ である。これから Δz を求めると次式を得る。

$$\Delta z = A^{\frac{2}{4+\alpha}} \cdot u_*^{\frac{4(1+\alpha)}{4+\alpha}} \cdot \nu^{\frac{4+2\alpha}{4+\alpha}} \cdot (\epsilon g)^{\frac{\alpha}{4+\alpha}} \quad (5.4)$$

(5.3)を(5.4)に代入すると次式のように表わされる。

$$\sqrt{\frac{2}{f_i}} = \frac{2\gamma}{\kappa} \ln \frac{2\lambda B \sqrt{\frac{f_i}{2}}}{\quad} \quad (5.5)$$

ここで

$$\gamma = \frac{4+4\alpha}{4+\alpha}, \quad \lambda = \left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{4+\alpha}{4+4\alpha}} \frac{3\alpha}{2} \frac{1}{A^{\frac{1}{2+2\alpha}}}$$

$$B = R^\beta F^{1-\beta}, \quad \beta = \frac{2+\alpha}{2+2\alpha}, \quad N = \exp\left(\kappa \frac{u_*^\delta}{\nu}\right)$$

$$R = \frac{|\bar{u}_1 - \bar{u}_2| \sqrt{h_1 h_2}}{\nu} \quad F = \frac{|\bar{u}_1 - \bar{u}_2|}{\sqrt{\epsilon g \sqrt{h_1 h_2}}}$$

である。

界面に内部波が発生する場合には、当然抵抗係数は増すことになる。前述のSchijfとSchönfeldは内部波をもつ界面近傍の流れを、粗面に沿う流れと同様に考えて

$$\sqrt{\frac{2}{f_i}} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{11 \sqrt{h_1 h_2}}{k} \quad (5.6)$$

を与えている。粗度 k は内部 Froude 数に依存するだろうと述べているが、関係は与えていない。

Keulegan⁽⁹⁾ は内部波のエネルギー損失を水面の表面波における粘性損失と等しいと仮定し、これを界面の摩擦損失 $\tau_i u = f_i \rho u^3 / 2$ に等しいとして

$$2 \mu k^3 c^2 a^2 = \frac{1}{2} f_i \rho u^3$$

とした。ここで c は伝播速度、 a は振幅、 u は流速（この場合は上層流）である。観測結果にもとづいて $c = u / 2$ とおき、波長 $\lambda = 2\pi / k$ を用いて表わせば

$$f_i = 8\pi^3 \frac{\nu}{\lambda u} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 \quad (5.7)$$

となる。 u を増して碎波した場合にも、 a^2 が u に比例し λ は変らないとして、これらの値には僅かに碎波したときの値を用いてよいとしている。

椎貝⁽¹³⁾ は、(5.7) において波長の短い波ほど f_i に寄与をもつことに着目し、(4.16) より安定に存在しうる波の波長の最小限を、 $kh_1, kh_2 \gg 1$ として

$$\lambda_{min} = \frac{2\pi}{k_{max}} = \pi u^2 / \epsilon g$$

を用い、(5.7) に代入して

$$f_i = 8\pi^2 \frac{\epsilon g \nu}{u^3} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 = 8\pi^2 R_{e1}^{-1} F_{i1}^{-2} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 \quad (5.8)$$

を与えている。

一方実験あるいは実測結果により f_i を求める式を与えている研究は多く、それらはほとんど

$$f_i = a \Psi^{-n} \quad (5.9)$$

の形で示している。ここに Ψ は、上層流の場合には

$$\Psi = R_{e1} F_{i1}^2 = \frac{u_1 h_1}{\nu} \cdot \frac{u_1^2}{\epsilon g h_1} = \frac{u_1^3}{\epsilon g \nu} \quad (5.10)$$

である。なお $\Psi = \theta^{-3}$ (4.18) 参照。

提案されている諸式およびそれらの基礎となっている測定値には相当の散乱が見られる。⁽¹⁴⁾ これは、 f_i を Ψ のみの関数と見ることに無理があり、他の多くの要因が関連すること、実測に誤差がともないやすいことなどによると思われる。しかし(5.9)の表現は、実用的には有効なものであろう。示された式を二三挙げると、岩崎⁽¹⁵⁾ ははじめて(5.9)の形の式を提案し、 $a = 7.880$ 、 $n = 0.8356$ としている。また金子⁽¹⁶⁾ は $a = 0.2$ 、 $n = 0.5$ としたが、多くの実測データにかなりよく適合している。椎貝⁽¹⁷⁾ は $a = 12$ 、 $n = 1$ としている。 $n = 1$ は(5.8)に相当する。

6. 二層の混合と混合形密度流

上下両層間の流速の差が大きくなると内部波は砕波し混合がはじまるが、混合すれば両層の密度差が減り、安定性はますます失われ、加速的に混合が進むことになる。

4節にも述べた通り、Keulegan は砕波の限界を Keulegan 数 θ を用いて (4・18) のように表わしたが、さらに混合量 (連行速度) u_m についても検討している。実測結果を整理した結果、混合開始流速 u_c より僅か大きい流速を $u_o = 1.15 u_c$ とすると、 u_m は $u - u_o$ に比例するとして

$$u_m = 3 \times 10^{-4} (u - 1.15 u_c) \quad (6 \cdot 1)$$

を与えている。また Ellison と Turner⁽¹⁸⁾ は実測結果から、連行係数 $E \equiv u_m / u$ は Richardson 数 $R_i \equiv \varepsilon g h_1 / u^2 = 1 / F_{i1}^2$ によってきめられるとしている。(図-9)

このような連行現象による運動量の運送は $\rho u_m u$ であるから、連行による界面抵抗係数の増分を f_{ia} とすると、

$$f_{ia} = 2 u_m / u = 2 E \quad (6 \cdot 2)$$

とも書けるであろう。しかし上層および下層について質量保存が成り立たないから、界面抵抗の定義は不明確なものとならざるを得ない。

さらに混合が進めば、ついには界面が消えて、単に濃度勾配を残すだけとなる。しかしこの場合にも濃度勾配による密度流が存在する。いわゆる混合形の密度流である。混合形密度流を取扱う前提として、密度流とは異なるが移流分散の問題について簡単に述べる。

移流分散の理論は、Taylor⁽¹⁹⁾ の円管内の流れに関する研究からはじまるが、ここでは Elder⁽²⁰⁾ の2次元開水路流れの取扱いを述べる。流速分布を対数則

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{h} + u_s \quad (6 \cdot 3)$$

で与える。せん断力は

$$\tau = \rho u_*^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

であるから渦動粘性係数 ν_t は

$$\nu_t = \frac{\tau}{\rho} \bigg/ \frac{du}{dz} = \frac{u_*}{\kappa} z \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (6 \cdot 4)$$

である。

流水中に拡散分質があり、その濃度 c が x (流下) 方向に一樣の濃度勾配をもつとして

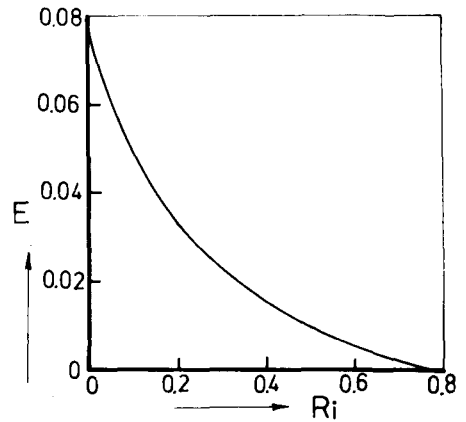


図-9

$$c = c_0 + \frac{\partial c}{\partial x} x + \frac{\partial c}{\partial t} t + c_1(z) \quad (6.5)$$

とおく。z方向の渦動拡散係数を D_t とすれば、物質保存則は

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_t \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (6.6)$$

である。これをzで積分すると

$$h \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \int u dz = \left[D_t \frac{\partial c}{\partial z} \right]_{z=0}^h = 0$$

平均流速を $\bar{u}$ とすると

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (6.7)$$

(6.6) より (6.7) を差引いて、(6.5) を代入すると

$$(u - \bar{u}) \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{d}{dz} \left(D_t \frac{dc_1}{dz} \right) \quad (6.8)$$

したがってこれをzで2回積分すると

$$c_1(z) = \frac{\partial c}{\partial x} \int_0^z \frac{1}{D_t(z')} \int_0^{z'} u(z'') - \bar{u} dz'' dz' \quad (6.9)$$

によって濃度の鉛直分布が与えられる。

平均流速で移動する系から見て、x方向の物質輸送量を、一次元の拡散にならって

$$\int_0^h c_1 (u - \bar{u}) dz = -D_L h \frac{\partial c}{\partial x}$$

とおけば、

$$\begin{aligned} D_L &= \frac{1}{h} \int_0^h (u(z) - \bar{u}) \int_0^z \frac{1}{D_t(z')} \int_0^{z'} (u(z'') - \bar{u}) dz'' dz' dz \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{D_t(z)} \left\{ \int_0^z (u(z') - \bar{u}) dz' \right\}^2 dz \end{aligned} \quad (6.10)$$

となる。 D_L は移流分散係数である。Reynolds の相似則に従って $D_t = \nu t$ とおき (6.3), (6.4) を代入すると

$$D_L = 5.86 h u_* \quad (6.11)$$

が得られる。

濃度 c の代りに密度 ρ を用いるとき、密度流効果がなければ (6・9) を (6・5) に代入すれば、密度分布が与えられることになる。密度勾配の影響としては、 x 方向の勾配による交換流の発生と、 z 方向勾配による交換流の発生と、 z 方向勾配による乱れの減少とである。

密度勾配を有する場合も、(6・5) の c を ρ と書いた分布形を仮定する。これより圧力の分布は

$$p = \rho_0 g(h-z) + g \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot x(h-z) + g \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot t(h-z) - g \int_z^h \rho_1(z) dz$$

したがって

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial \rho}{\partial x} (h-z)$$

したがって水面勾配を i_s とすると、定常な等流の運動方程式は

$$-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} (h-z) + \frac{d}{dz} \left(\nu_t \frac{du}{dz} \right) + g i_s = 0 \quad (6 \cdot 12)$$

これから

$$u = \int_0^z \frac{g}{\nu_t} \left\{ i_s (h-z') - \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} (h-z')^2 \right\} dz' \quad (6 \cdot 13)$$

したがって ν_t が与えられれば、流速分布が求められる。

まず層流の場合を考える。 ν_t の代りに分子動粘性係数 ν を用いれば、

$$u = \frac{g}{\nu} \left[\frac{i_s}{2} \{ h^2 - (h-z)^2 \} - \frac{1}{6\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \{ h^3 - (h-z)^3 \} \right] \quad (6 \cdot 14)$$

水面勾配の代りに平均流速を用いれば

$$u = \frac{3}{2} \bar{u} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2 \right\} + \frac{h^3}{48\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left\{ 1 - 9 \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2 + 8 \left(1 - \frac{z}{h} \right)^3 \right\} \quad (6 \cdot 14)$$

とも書くことが出来る。(図-10)

乱流の場合には、(6・6) で c の代りに ρ を代入した式 (6・12) とを連立させて解くことになるが、この場合 D_t および ν_t は、流速分布のほかに密度の鉛直勾配の影響も受けることになる。それで、密度勾配の乱れに及ぼす影響を検討する。

せん断流中の乱れのエネルギーは、平均流エネルギーのせん断による消費 $(\tau/\rho) (\partial u/\partial z)$ によって供給される一方、そのエネルギーは次第に小さな渦成分に移り、最終的に分子粘性により熱に変わる。この粘

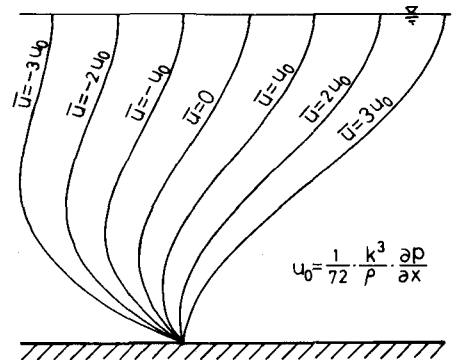


図-10

性消散率は、乱れの代表尺度を l 、乱れの強さを v' とするとき v'^3/l に比例することが知られている。一方、渦動粘性は $v'l$ で与えられるから $\tau/\rho = v'l \partial u/\partial z$ 。したがって密度勾配のないときには、比例定数を β として

$$v'l \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = \beta \frac{v'^3}{l}$$

となる。ここで $v = l (\partial u/\partial z)$ とおけば混合距離の理論と同様の式が得られる。

鉛直方向に密度勾配があるときには、渦動拡散係数も $v'l$ で与えられるなら $-v'l \, d\rho/dz$ だけの質量輸送がおこる。このため単位質量当りでは、 $-(g/\rho) v'l (\partial \rho/\partial z)$ だけ重力に抗して仕事がかかることになる。したがって乱れのエネルギーの平衡は

$$v'l \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = \beta \frac{v'^3}{l} + \left(-\frac{g}{\rho} v'l \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \quad (6 \cdot 15)$$

となる。この左辺の発生に対する右辺第2項の仕事の比第4節第5節で用いた Richardson 数

$$R_i = -g \frac{\partial \rho}{\partial z} / \rho \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (6 \cdot 16)$$

であり、密度勾配が乱れを抑えて流れの様子を変化させる程度を表わすパラメーターである。

さて、(6・6) および (6・12) を連立させて解くには、 l および v' を z の関数として与えなければならない。その条件の1つは (6・15) であるが、さらに別の1つの条件と連立させなければならない。この点についても種々研究されているが、困難な問題である。密度勾配の影響により l 、 v' ともに小さくなることが知られている。密度勾配があれば、このように D_t は減少するが、(6・9) によれば、このとき密度勾配はさらに増すと同時に、 v_t が減少するので (6・13) より流速の不均一も増し、一層密度勾配を大きくすることになる。図-11は (6・15) のほかにもう一つ仮定を設けて、 $\partial \rho/\partial x$ を変えたときに D_L が変化する様子を理論的に推定したものである。⁽²⁾

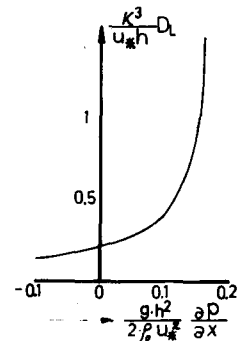


図-11

参 考 文 献

- (1) 嶋 祐之：密度流 土木学会水理委員会 水工学シリーズ 65-11 (1965)
- (2) 文部省科学研究費・試験研究 (1) 「成層密度流の界面現象に関する水工学的研究」最終報告書 (1974)
- (3) Ippen, A. T. and Harleman, D. R. F: Nat. Bur. of Stands. Circulation, 521 (1951)
- (4) Schlichting, H. : Boundary-Layer Theory, 6th. ed. pp. 447~452.

- (5) Tollmien, W. : Mitteilung, Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math. Phys. Klasse 21-44 (1929)
- (6) 浜田徳一, 加藤始 : 第9回海岸工学講演会講演集, (1962)
- (7) Tsubaki, T. et al. : Proc. 13 th. Cong. IAHR, vol. 3 (1969)
- (8) Taylor, G. I. : Proc. Roy. Soc. London, Aug. (1931)
- (9) Keulegan, G. H. : Nat. Bur. of Stands. 43. (1949)
- (10) Turner, J. S. : Buoyancy Effects in Fluids, Camb. Univ. Press, (1973)
- (11) 前出 (2)の書 p. 10
- (12) Schijf, J. B. and Schönfeld, J. C. : Int. Hyd. Convention, IAHR (1953)
- (13) 椎貝博美 : 塩水楔の研究 (1964) ; (1)の書 pp. 21~24.
- (14) 前出 (2)の書 p. 16.
- (15) 岩崎敏夫ほか : 第17回年次学術講演会概要集, 第Ⅱ部 pp. 23~24. (1963)
- (16) 金子安雄 : 第13回海岸工学講演会講演集, pp. 263~267 (1966)
- (17) Shiigai, H. : Trans. JSCE, 123, pp. 27~31, (1965)
- (18) Ellison, T. H. and Turner, J. S. : J. Fluid Mech. 6. pp. 423~448 (1959)
- (19) Taylor, G. I. : Proc. Roy. Soc., A. 223. (1954)
- (20) Elder, J. W. : J. Fluid Mech. 5(1954)
- (21) 栗谷・古本 : 第28回年次学術講演会概要集, 第Ⅱ部 p p. 349~350. (1973)