

確 率 過 程

室 田 明

1. は じ め に

確率過程 (stochastic process) の stochastic という言葉と, probabilistic,あるいは deterministic という言葉が正しく使い分けられていないことが多い。

Webster 辞典によると, stochastic なる語句はギリシャ語に由来し, contemplate (熟考する。もくろむ。), または conjecture (推測する。推量する。) の意であるという。deterministic はともかくとして, とりわけ probabilistic と stochastic の意味は明確にしておく必要がある。

不規則変量の確率分布を考えるときに, その分布が時間 (または空間) に関係しないとき, その変量で構成される母集団を probabilistic といい, 確率分布がある time scale の各点 (またはある空間のある時刻) 毎に変化する場合, これを stochastic process という。

すなわち, deterministic process と purely probabilistic process は stochastic process の両極端であって, 不規則変量の生起確率が 1 のとき, 現象は決定論的であり, 確率が時・空のいずれのパラメーターにも関係なく, 母集団からの標本抽出に関係しないときにその現象は purely probabilistic であるという。

従って, stochastic process を日本語で「確率過程」と書くのは正確ではなく, 「推計 (または推測) 過程」と書くべきであろう。筆者に与えられた表題が, たまたま「確率過程」ではあるが, この研修会を企画なさった方の意図はおそらく stochastic process であろうと想えるので, 以下ではそのようなつもりで講述することにしよう。

移動床水理学で不朽の業績を残されたカリフォルニア大学の故・アインシュタイン博士が, 実に感銘的な懐古談を残されているので, まずそれを紹介することから始めよう。⁽¹⁾ (完訳ではない。筆者による抄訳である。)

「今から半世紀も前, 私がまだ 10 才の頃, 年相応の数学の問題を解くことに興味をもっていました。ある日, 私は父に何か算術の問題を出してくれるようにねだりました。当時, 父は今から想えば量子力学のさきがけであるブラウン運動の仕事に一刻ぎりつけた頃でした。父はしばらく考えてから私にたずねました。

“時間雨量 10mm の雨が地表をぬらすのにどれぐらいかかるだろうね。”

しばらく考えはしましたが, とうとう父に助けを求めました。父はまずたずねました。

“雨はどのように降るかね。”

“雨滴になってです。”

“そんなに大事なことはないが, 雨滴の大きさはどれぐらいと思うかね。”

“2 mm ぐらいです。”

“ よろしい。ではその雨滴が地面で拡がると、どれぐらいのシミ跡が残るだろう？ ”

“ 10mm ぐらいです。 ”

私はなる程と思いました。一平方メートルの内に10mm径のシミが何箇所あって、その数だけの雨滴の数が、与えられた降雨強度で、その必要箇所数が地表に到達する時間がわかればよい。私はその答をいばって父に見せました。

“ 全部よろしい。しかし、それでは私の聞いていることとちがうよ。私はお前に、どれぐらいの時間がかかるかとたずねたが、どれぐらいの雨つぶが必要かとは聞いていないよ。わかるかね、ある面積の地面が半分ぬれた時刻を考えて、次の雨滴はどこに落ちるだろう。それがまだぬれてない部分に落ちるか、1cm径のシミの上に落ちるか、お前にわかるかね？ ”

これは私が確率という概念を学んだ初めての機会になりました。……………」

カリフォルニアのEinstein は周知のように掃流砂の運動機構について始めて stochastic modelを示し、それによって掃流砂量公式を導いたのであるが、そのような発想の萌芽が、上のエピソードに語られていることに深い感銘を受けるとともに、さすが近代物理学の始祖である父・Einstein の設問の卓抜さに目を見張る思いがするのである。地表をぬらす splashの面積が増えるにつれて、落下する雨滴が dry area に落ちる確率は時々刻々変化するのである。なんと見事な stochastic model であろう。

本講において、不規則変量の統計処理については予備的な知識があることを前提にして、水文学、あるいは水理学的な二、三の例を示すことによって、stochastic な現象のモデリングの方法論を示唆できれば幸いである。

筆者のかねがね感じていることは、いかほど複雑・精緻な解析・演算が展開されておっても、始めの modeling がスマートで、かつ適確な現象理解にもとづくのでなければ、その研究作業が人に感銘を与えないと思う。

2. 水文確率過程のモデリング

降水量、流量等の水文確率過程 $\{X(t)\}$ は、一般に次式で表現される。

$$X(t) = T_t + P_t + S_t + C_t \quad (2 \cdot 1)$$

ここに、
 T_t : transient 成分 (trend または vascillation)
 P_t : periodic 成分
 S_t : 持続性を含む非・純偶発性の成分、すなわち stochastic な成分
 C_t : catastrophic 成分

上記、4 成分の内、周期成分、トレンドはそれぞれ何等かの方法で検知されるので、問題はストカスティック成分のモデリングである。

水文時系列で用いられる定常・エルゴード性の基本モデルは、移動平均モデルと線形自己回帰モデル (線型マルコフモデル) である。

(i) 移動平均モデル

$$X_t = \sum_{i=1}^m b_i \cdot \varepsilon_{t-i} \quad (2 \cdot 2)$$

m 項移動平均は上式で求められ、

ε_t : probabilistic 成分, b_i : 移動平均係数。

(ii) 線形自己回帰モデル

$$X_t = \sum_{i=1}^m a_i \cdot X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2 \cdot 3)$$

m 次マルコフモデルは上式で与えられ、

a_i : 自己回帰係数

a_i を推定するのに、自己相関係数 ρ_i と a_i の関係を用いる Yule-Walker の方法がある。すなわち、

$$\begin{aligned} \rho_1 + a_1 + a_2 \rho_1 + a_3 \rho_2 + \dots + a_m \rho_{m-1} &= 0 \\ \rho_2 + a_1 \rho_1 + a_2 + a_3 \rho_1 + \dots + a_m \rho_{m-2} &= 0 \\ &\vdots \\ \rho_m + a_1 \rho_{m-1} + a_2 \rho_{m-2} + \dots + a_m &= 0 \end{aligned} \quad (2 \cdot 4)$$

ここに、 ρ_k : lag_k の自己相関係数 ($k = 1, 2, 3 \dots m$) で、これは標本自己相関係数 r_k によって推定する。

上の a_i に関する線形連立方程式を解いて a_i の推定値とする。

小標本では大きな lag time に対する ρ_k の精度が落ちるので、水文時系列ではたかだか 3 次までのマルコフモデルが用いられることが多い。

$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ の自己相関係数は次式で定義される。

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(X_i, X_{i+k})}{\text{Var}(X_i)} = \frac{E(X_i \cdot X_{i+k}) - E(X_i) \cdot E(X_{i+k})}{E(X_i^2) - \{E(X_i)\}^2} \quad (2 \cdot 5)$$

前述の二つの時系列モデルの自己相関係数は次のようになる。

(i) 移動平均モデル

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{\sum_{i=1}^{m-k} b_i \cdot b_{i+k}}{\sum_{i=1}^m b_i^2} & \text{for } k < m \\ &= 0 & \text{for } k \geq m \end{aligned} \quad (2 \cdot 6)$$

$b_i \equiv b$ のときには、

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{(m-k)b^2}{mb^2} = 1 - \frac{k}{m} & \text{for } k < m \\ &= 0 & \text{for } k \geq m \end{aligned} \quad (2 \cdot 7)$$

(ii) 線形自己回帰モデル

式(2・4)の解 ρ_k は一般に p^k の形の項と $q^k \cos \lambda k$ の形の項との和からなるという。⁽²⁾
一次マルコフモデルについては式(2・4)から

$$\rho_k = \rho_1^k \quad (2 \cdot 8)$$

二次マルコフモデルに対しては、

$$\rho_k = a_1 \rho_{k-1} + a_2 \rho_{k-2} \quad (2 \cdot 9)$$

上式で $k=1, k=2$ とおけばおのおの ρ_1, ρ_2 が得られ、さらに $k \geq 3$ に対する ρ_k は上式から逐次求められる。

式(2・9)の一般解は次式で与えられる。

$$\rho_k = \frac{p^k \sin(k\theta + \varphi)}{\sin \varphi} \quad (2 \cdot 10)$$

ここに $p = \sqrt{a_2}$,

$$\tan \varphi = \frac{1-p^2}{1+p^2} \tan \theta, \quad \cos \theta = \frac{-a_1}{2\sqrt{a_2}} \quad (2 \cdot 11)$$

定常確率過程の基本モデルの相関係数はこのようにして求められる。

3. 異質の流量母集団からなる流量時系列の simulation .

河川流量の流量時系列は、一般に偶発性の強い高水流量母集団と、持続性の強い低水流量母集団から構成される。ここでは、このような異質の母集団からなる時系列に対する階層分析の手法と、それにもとづく simulation 手法を示そう。

持続性に特長のある低水については次のようにしてその階層別標本抽出を行なう。(以下、月流量について考える。)

N 年間の N 組の i 月～($i+1$)月の月流量資料について相関係数を求める。次に、 i 月の最大流量と($i+1$)月の流量($i+1$)月の最大流量とその前月(i 月)の流量を除く残りの($N-2$)組の流量標本について相関係数を求める。以下、同様にして i 月の次位の流量とその翌月の流量、および($i+1$)月の次位の流量とその前月の資料を除く標本について相関係数を求める……という手続を繰り返せば逐次小流量で構成される流量母集団の相関係数が求まる。

図3-1に示すような異質の流量母集団で構成されるモデルを考えると、ある特定の流量以下の低水量集団の相関係数の値は、高水量集団のそれと異なって来ることが期待される。

一方、各集団毎の統計的性質が均質であれば抽出標本の層別相関係数は次のようにして求められる。

連続する月流量 X, Y が2次元正規母集団 $N(\bar{X}, \bar{Y}, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$ からの標本であるとき $X=X_0, Y=Y_0, X \rightarrow -\infty, Y \rightarrow -\infty$ を境界とする領域内の流量の相関係数 r は次式で与えられる。

$$r = \frac{1}{F} \cdot \frac{1}{2\pi \sigma_X \cdot \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{X_0} \int_{-\infty}^{Y_0} (X-\bar{X})(Y-\bar{Y}) e^T dX \cdot dY \quad (3 \cdot 1)$$

ここに、

$$\sigma_X = \sigma_Y = \left\{ \frac{1}{F} \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{X_0} \int_{-\infty}^{Y_0} (X-\bar{X})^2 e^T dX \cdot dY \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{X} = \bar{Y} = \frac{1}{F} \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{X_0} \int_{-\infty}^{Y_0} X e^T dX dY$$

(3 ・ 2)

$$F = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{X_0} \int_{-\infty}^{Y_0} e^T dX \cdot dY$$

$$T = - \frac{X^2 - 2\rho XY + Y^2}{2(1-\rho^2)}$$

図 3-2 は種々の ρ の値に対し、上式によって r を求めたものである。図の横軸は大流量の除去に伴う標本数の減少を全標本数に対する百分率で示してある。

sample size の減少によって標本相関係数が見掛上減少して行くのは興味深い。

さて、偶発性の強い高水集団の如く、 X , Y が 2 次元正規集団に属する場合は以上の標本相関解析の仮定を満足するので、特定の ρ の曲線に添って r の値は減少して行くが、低水集団に入って X , Y の相関関係がその各々の値によって異なってくる (X , Y が減少すると ρ が大きくなる) ようになると、特定の sample size : n_c から急に r が増加し、別の曲線に乗りうつるようになるだろう。(図 3-3)

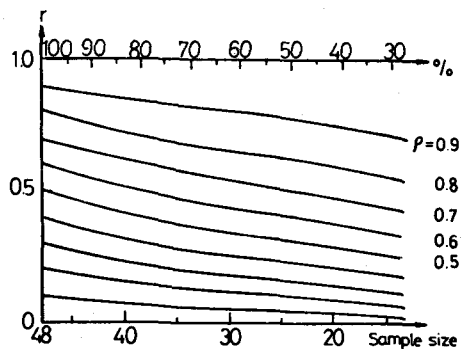


図 3-2 標本相関係数 r と標本数の関係

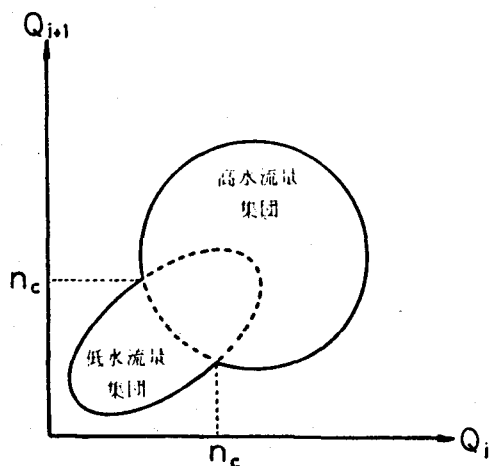


図 3-1 異質流量集団の集合

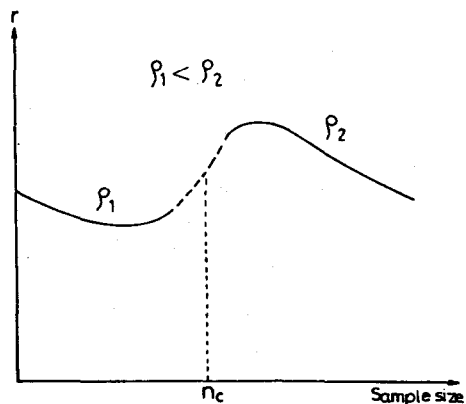


図 3-3 異質集団間の相関係数のジャンプ

このようにして、確率統計面から低水集団と高水集団を分離することが可能である。

淀川水系・木津川・高山ダムの月流量資料による計算例を示してみよう。

図3-2に対応する計算値を図3-4に示す。図には均質標本からなる11月～12月の例と、異質集団からなる9月～10月の例とを挙げる。図から見られるように、常識的にいっても7月～10月の期間を除くと、連続する月流量間の相関係数は一様と見なすことができ、敢えて高水・低水の集団に分離する必要はない。

ところが台風期である8月～9月、あるいは9月～10月では sample size が全標本の50～60%あたりから r が急増し、この n_c に対応する流量は $1000 \text{ m}^3/\text{sec} \cdot \text{day} \approx 30 \text{ m}^3/\text{sec} (\times 30 \text{ days})$ となった。

このような非等質標本からなる流量時系列の simulation 手法は次のようにすればよいだろう。

連続する月流量 X_{i-1} と X_i が2次元正規母集団

$$N(\mu_{i-1} = \mu_i \equiv 0, \sigma_{i-1}^2 = \sigma_i^2 \equiv 1, \rho)$$

に属するものとすれば、simulation model は式(2・3)から

$$X_i = \rho X_{i-1} + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i = t_i \sqrt{1 - \rho^2} \quad (3.3)$$

ここに、 t_i は正規・規準化変量、 $N(0, 1)$ である。

まず、低水集団のみからなる月は式(3.3)のままでよい。

低水と高水の混在する月については

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_{ic}}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \equiv p_i \quad (3.4)$$

(ただし、 p_i は i 月における高水の生起確率)

で定まる t_{ic} を用いて

$$t_{i-1} > t_{i-1 \cdot c} \text{ または } t_i > t_{ic} \text{ のとき}$$

$$X_i = t_i \quad (3.5)$$

$$t_{i-1} < t_{i-1 \cdot c} \text{ または } t_i < t_{ic} \text{ のとき}$$

$$X_i = \rho_L X_{i-1} + t_i \sqrt{1 - \rho_L^2} \quad (3.6)$$

(ρ_L : 低水の母相関係数。)

とすればよい。

前と同様、淀川水系高山ダムの月流量資料を用いて、200年間の月流量時系列を作成し、

(A) 高水・低水の両集団からなるモデル

$$(\bar{Q} = \bar{Q}_H, \bar{Q}_L, \sigma = \sigma_H, \sigma_L, \rho = \rho_H, \rho_L)$$

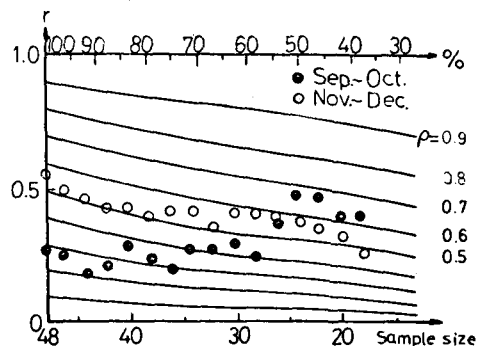


図3-4 図3-2の計算例
(淀川水系高山ダム月流量時系列)

(B) 両集団に分離しないモデル

($\bar{Q} : \text{const}$ $\sigma : \text{const}$ $\rho : \text{const}$)

の両モデルによって simulation を行った例を表 3-1, 及び図 3-5, 図 3-6 に示す。

表 3-1 A, B-model による simulation 結果の比較

月	平 均 値 ($m^3/s \cdot \text{day}$)			標 準 偏 差 ($m^3/s \cdot \text{day}$)		
	観測流量	B-model	A-model	観測流量	B-model	A-model
1	348.1	338.0	331.6	132.5	128.7	126.0
2	372.1	366.1	362.2	180.7	173.1	166.9
3	456.3	462.6	450.7	170.6	184.3	182.9
4	511.4	507.7	517.5	169.2	158.5	158.5
5	515.3	493.8	493.9	246.8	227.8	226.3
6	751.5	767.9	768.2	414.4	430.7	431.3
7	811.6	831.8	819.9	437.8	530.5	529.8
8	712.7	723.5	678.4	561.6	646.4	636.3
9	1120.9	1090.2	1129.7	686.5	735.4	734.8
10	861.7	797.9	798.3	479.1	453.6	464.5
11	503.8	490.6	478.0	192.0	187.6	175.0
12	383.9	386.2	370.5	135.3	141.4	135.1

図 3-5 によると当然のことながら、高水生起頻度の高い月では、A モデルが低水流量の相関係数の再現性にすぐれている。

流量生起の連続性に重点をおいたこのようなモデルは 2 ケ月以上の累積流量についてその特性がより明瞭に現われるはずである。その意味で、図 3-5, 図 3-6 は高水生起頻度の高い 6 ~ 9 月の 4 ケ月間の総流量の確率分布を示したもので、B モデルでは流量分布の両極端で観測流量よりかなり大きい流量を与える。これは採用した相関係数が高水に対し過大、低水に対し過小なためである。

これに対し A モデルはとくに低水側で再現性がよいのが認められよう。

4. 渴水の評価モデル (連の理論の応用)

河川流量の時系列 $X_i(t)$ を考えて、ある基準値 X_0 (たとえば必要供給量、河川維持用水量等) を定め

$X_i < X_0$ なる状態が N_j 個続いたとき、

N_j を不足継続期間 (deficit run-length),

$S_j = \sum_{i=1}^{N_j} (X_0 - X_i)$ を不足総和 (deficit run-sum)

という。

逆に、 $X_i > X_0$ なる状態が続く場合を各々

充足継続期間 (surplus run-length), 及び

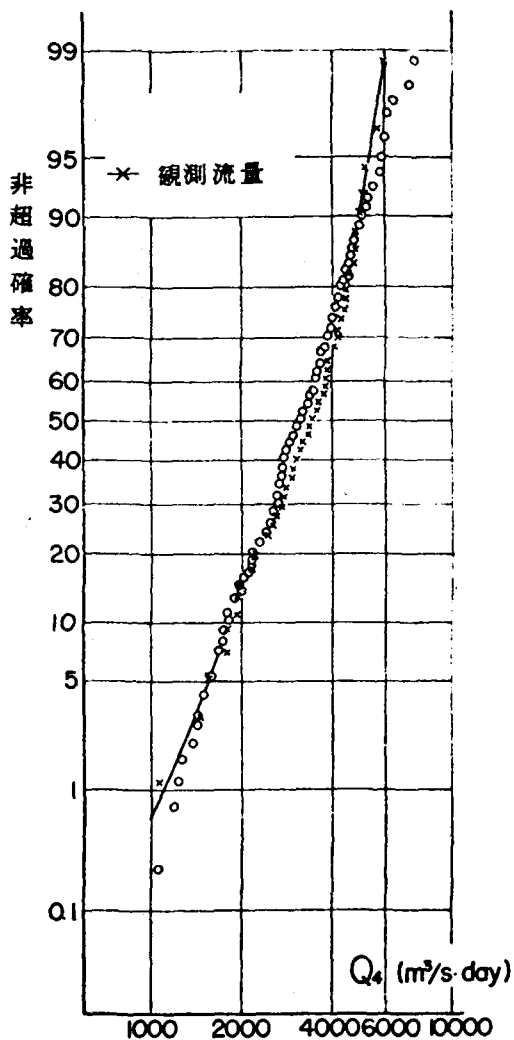


図3-5 A-modelによる
simulationと実
測値の比較

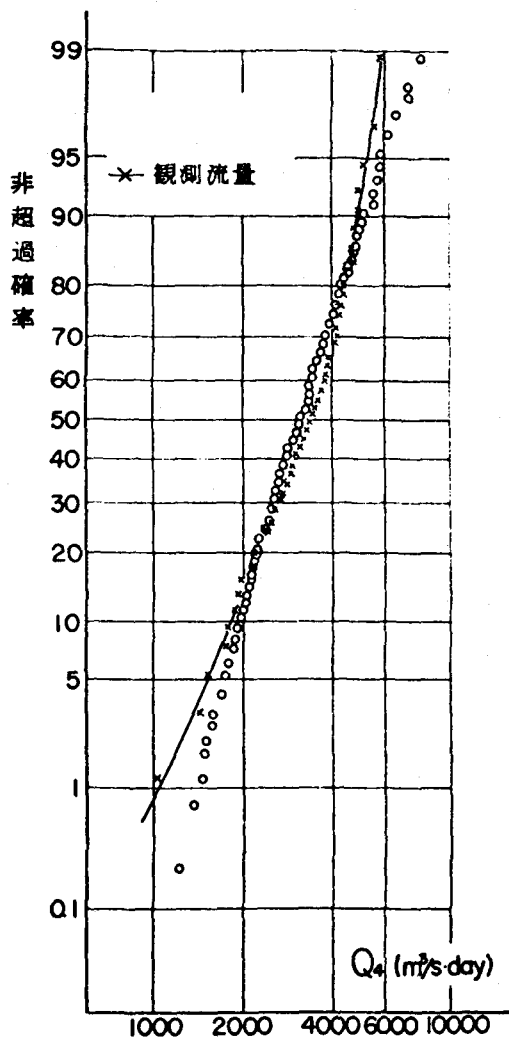


図3-6 B-modelによる
simulationと実
測値の比較

充足総和 (surplus run-sum)
という。

Yevjevich⁽³⁾等は確率変量 X_i が独立定常な時系列の場合について、 N_j 、 S_j の確率分布、 N_j と S_j の相関等を解析しているのでまずそれから紹介しよう。

X_i の確率分布関数を $F(X)$ とすれば、 $X_i < X_0$ の生起確率 q は

$$q = F(X_0) \quad (4.1)$$

k 個の不足が連続する確率を $P(N = k)$ とすれば

$$P(N = k) = p \cdot q^{k-1} \quad (4 \cdot 2)$$

ここに $p = 1 - q = P(X \geq X_0)$

ここで次式で定義されるような新たな確率変数 X_i^* を考え、 X_i^* の確立分布を $F^*(X)$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} F^*(X) &= P(X_i \geq X | X_i < X_0) = 0 & \text{for } X \geq X_0 \\ &= \frac{F(X) - p}{q} & \text{for } X < X_0 \end{aligned} \right\} \quad (4 \cdot 3)$$

X_i^* の確率密度関数 $f^*(X)$ と X_i の密度関数 $f(X)$ の関係は図 4-1 の如くである。

従って j 番目の deficit run-sum: S_j は次のようになる。

$$S_{N_j} = \sum_{i=1}^{N_j} (X_0 - X_i^*) \quad (4 \cdot 4)$$

N_j, S_{N_j} の平均値まわりの各次数のモーメントおよび両者の相関は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E(N) &= \frac{1}{p}, \quad Var(N) = \frac{q}{p^2} \\ E(S_N) &= \frac{1}{p} (X_0 - \kappa_1^*) \\ Var(S_N) &= \frac{q}{p^2} (X_0 - \kappa_1^*)^2 + \frac{1}{p} \kappa_1^* \\ Cov.(N, S_N) &= \frac{q}{p^2} (X_0 - \kappa_1^*) \\ \rho(N, S_N) &= \left[1 + \frac{p}{q} \frac{\kappa_2^*}{(\kappa_1^* - X_0)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (4 \cdot 5)$$

ここに、 E : 期待値, $Var.$: 分散

$Cov.$, ρ は各々 N と S_N の共分散, 及び相関係数

$\kappa_1^* = E(X^*), \quad \kappa_2^* = Var(X^*)$

前述したように、とくに水資源計画の対象となる低水時系列は前節で述べたように持続性をもつことが多く、定常・独立の仮定を満たさないのが普通である。

それで、ここでは、一次マルコフモデルに対し、上の連の理論を拡張してみよう。

図 4-2 のように遷移確率を定義する。すなわち、

p_s : surplus から surplus への trans. prob.

q_s : surplus から deficit への trans. prob.

q_D : deficit から deficit への trans. prob.

p_D : deficit から surplus への trans. prob.

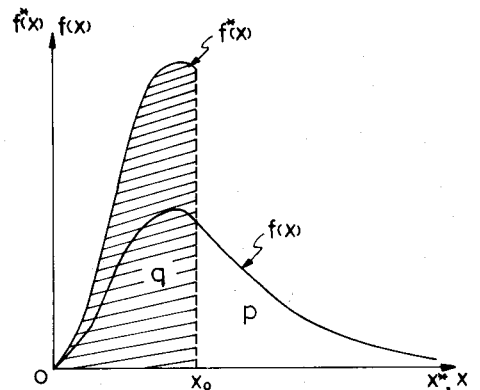


図 4-1 確率密度とその truncated distribution

標本数 n 個の系列において, surplus $\rightarrow$ deficit の期待値は nq_s , この内 k 個について deficit の起る回数の期待値は $nq_s q_D^{k-1}$ 。

この内 $(k+1)$ 回目に surplus へ移る連の個数の期待値は $nq_s q_D^{k-1} p_D$ 。

したがって

$$P(N=k) = \frac{nq_s q_D^{k-1} p_D}{nq_s} = q_D^{k-1} p_D \quad (4.6)$$

probabilistic な系列のときは式 (4.6) は式 (4.2) に一致するのは勿論である。
 前述の理論を再び淀川水系高山ダムの半月, 旬, 半月流量資料に応用して見よう。
 基準値 X_0 を

$$X_0 = \mu + \alpha \sigma \quad (4.7)$$

とおく。その意味は, 水需要の変動が各 time scale 毎の流量変動に相関があると考えたからである。

$\alpha = 0$ の場合の run-length の確率分布の一例を図 4-3 に, deficit-run-length と deficit-run-sum の相関の一例を図 4-4 に示す。(図中の実線は正規分布のときの理論曲線である。)
 図から見られるように, run-length と run-sum は X_0 の設定の如何にかかわらず高い相関があることは水需給計画をたてる上で極めて注目すべき事実である。

水文量の確率分布は一般にガンマ分布に従うといわれるから, run-length, run-sum についてもガンマ分布表示が一般性をもつ。

実測資料から, ガンマ分布の形状母数, 尺度母数を求め, X_0 を設定することによって式 (4.5) 中の $p, q, \kappa_1^*, \kappa_2^*$ が定まり, 各次モーメントの理論値が計算される。

5. 貯水池堆砂過程の stochastic モデル

洪水調節のための貯水池はいうまでもなく, 大容量水力発電のための貯水池のように, 水実質の貯留調節機能が期待される貯水池において堆砂のためにその有効容量が減少することはのぞましいことではない。

貯水池および水路の法定耐用年数は 57 年とされており, その根拠は明らかではないが主として構築材料の ageing の面から決められておるようで, 堆砂による貯水池機能の喪失については配慮されていない。また, 通常ダム設計における設計堆砂面は 100 年の累積貯砂量を対象とするが, これも必ずしも堆砂進行過程についての予測を前提としない。

わが国の mountain reservoir に相当する約 260 個の貯水池堆砂の実績から, 年間平均して当初

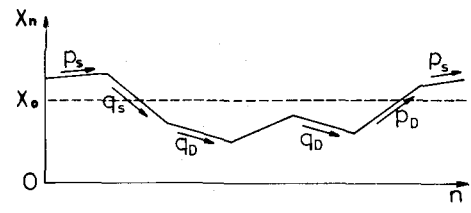


図 4-2 連における遷移確率の定義

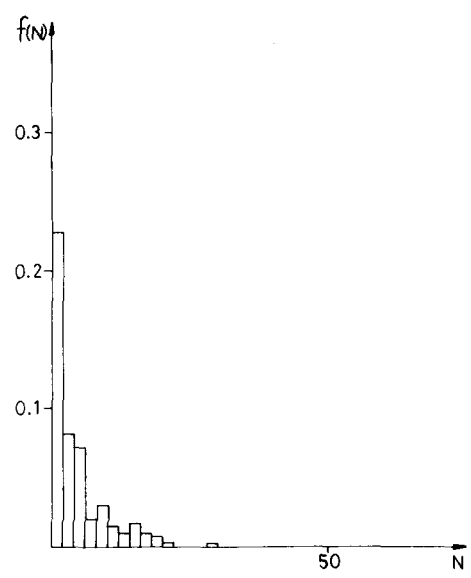


図 4-3 run-length の確率分布
 (淀川水系高山ダム半月流量資料)

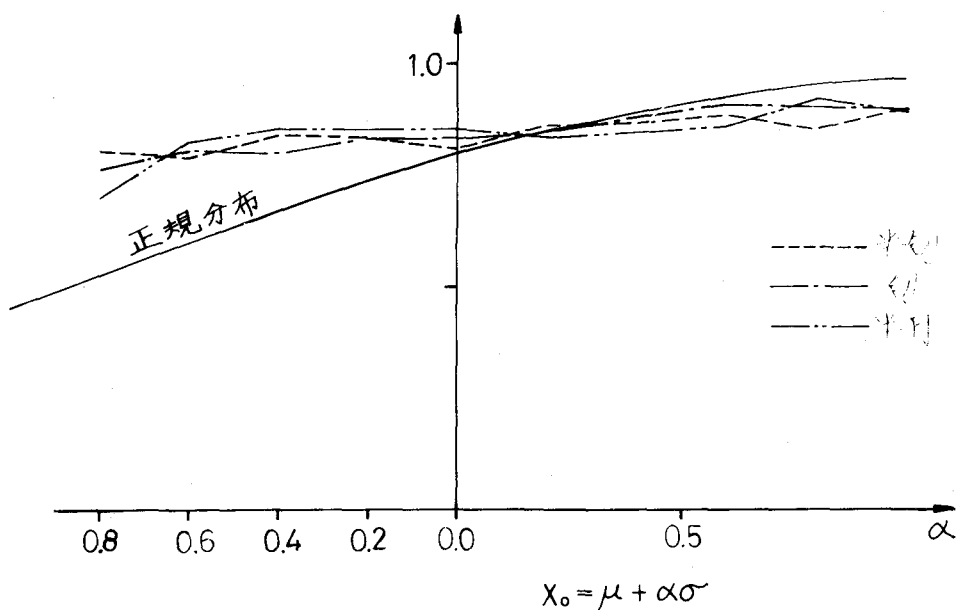


図4-4 run-lengthとrun-sumの相関

貯水池容量の2%程度が堆砂のために失われておるので、全国平均で満砂に達する貯水池の寿命時間は50年と見積もられる。

しかしながら、貯水池堆砂の進行は、決して年平均的な形で行われるものでない。主として豪雨にもとづく流域山腹の崩壊によって流送土砂が生産され、これが貯水池に流達して貯水池堆砂となるのであるから、崩壊による土砂生産、及び大量土砂を流送するに足る大流量の生起そのものが完全にstochastic processであるから、その結果として見られる堆砂進行過程も当然stochastic processとみなさねばならない。

さて、このような堆砂過程が一次マルコフ過程としてmodelingしうる根拠についてしらべてみよう。

いま、単位時間として年をとり、ある年の始めの堆砂量を S_{t-1} 、年の終りのそれを S_t とする。

連続条件から

$$S_t = S_{t-1} + I_s - D_s \quad (5.1)$$

I_s 、 D_s は各々貯入池への年間流入土砂量、及び年間排出土砂量である。

サービス関数 D_s は水理学的知見から一般に次のようにおくことができる。

$$D_s = F(S_{t-1}, Q_w, I_s, d, i, \dots) \quad (5.2)$$

ここに、 Q_w : 年間放流流量、 d : 堆砂の代表径、 i : 堆砂面勾配

式(5.2)の内、支配的要素は、 S_{t-1} 、 Q_w 、と I_s と考えられるので堆砂過程は単純マルコフ

過程と見なすことができ、かつ $(t-1)$ から t への遷移確率は、 $(I_S - D_S)$ の確率密度によって定まる。

いま、ダム築造後 n 年における堆砂量の期待値を $E^{(n)}$ とすれば式 (5・1) から、

$$E^{(n)} = \rho^{(n)} \cdot E^{(n-1)} + a^{(n)} \quad (5 \cdot 3)$$

式中 $\rho^{(n)}$ は、式 (2・5) から計算され、その内に含まれる $E^{(n)}(S_t)$, $E^{(n)}(S_t^2)$, $E^{(n)}(S_t \cdot S_{t-1})$ 等はすべて遷移確率 (p_{ij}) で次のように表現される。

$$E^{(n)}(S_t) = 1 \cdot p_{1 \cdot 1}^{(n)} + 2 \cdot p_{1 \cdot 2}^{(n)} + \dots + j \cdot p_{1 \cdot j}^{(n)} + \dots + M \cdot p_{1 \cdot M}^{(n)}$$

$$E^{(n)}(S_t^2) = 1^2 \cdot p_{1 \cdot 1}^{(n)} + 2^2 \cdot p_{1 \cdot 2}^{(n)} + \dots + j^2 \cdot p_{1 \cdot j}^{(n)} + \dots + M^2 \cdot p_{1 \cdot M}^{(n)}$$

(5・4)

$$E^{(n)}(S_t \cdot S_{t-1}) = 1 \cdot p_{1 \cdot 1}^{(n-1)} (1 \cdot p_{1 \cdot 1} + 2 \cdot p_{1 \cdot 2} + \dots + M \cdot p_{1 \cdot M}) + \dots \\ + M \cdot p_{1 \cdot M}^{(n-1)} (1 \cdot p_{M \cdot 1} + 2 \cdot p_{M \cdot 2} + \dots + M \cdot p_{H \cdot M})$$

遷移確率 p は、流入土砂量 I と、排出土砂量 D の生起確率で定まるのでその各々については次のように評価すればよい。

貯水池流入土砂は、豪雨による山腹崩壊によって生産された土砂、ならびに側岸浸蝕等、河道で供給される土砂が、それ等を流送しうるに足る流量で貯水池に流達したものであるから、堆砂現象の素因は、豪雨に帰着される。従って、流入土砂量の確率分布形は、高水流量の生起確率分布関数に等しいとおくことができる。

具体的には、現地資料にもとづいて、山腹崩壊が発生する降雨強度の閾値を設定し、これを超える降雨強度の確率分布形を求め、さらに既往資料から1回の単位降雨（閾値降雨強度の雨）によって生起する単位流域面積当りの流送土砂量の期待値を定めればよい。

一方、排出土砂量 D については、ダムの放水形式、堆砂面の高さ、堆砂の粒径分布等の変換過程の諸要素のみならず、流入土砂量の関数でもかるから、これも確率変量である。サービス関数 D の設定はこのような throughput 特性を勘案して、水理学的に妥当で可及的 simple なモデルによればよい。

例を、黒部川・小屋平貯水池にとって具体例を示そう。

過去の経験観測から閾値降雨強度は 100 mm/day とし、これをこえる降雨量の確率分布を例えば Hazen plot で求めておく。一方、単位崩壊量の期待値は、航空写真、及びその ground truth から $1.531 \text{ m}^3/\text{km}^2/\text{year}$ 、従って $260 \text{ m}^3/\text{km}^2/100 \text{ mm}$ となるので崩壊土砂、ひいては流入土砂量の確率分布関数が定まる。

overtopping型の放水形式であることを考慮してサービス関数 D を設定し、上述の手続で遷移確率を計算したのが表5-1である。

例えば、ある年の初めに貯水容量の57.5%の堆砂がある年について、すなわち $S_{t-1} (0.575)$ から、その年の終りに72.5%の堆砂状態 $S_t (0.725)$ に推移する確率は表から0.114と読み取られ、 $S_{t-1} (0.575)$ から $S_t (0.625)$ へ推移する確率が最大で0.279であることがわかる。

図5-1に縦軸に V_t/V_0 、横軸に V_{t-1}/V_0 をとり、表で得られた遷移確率の代表的なものを図

表 5-1 貯水池堆砂過程の遷移確率の計算結果

ξ_{t-1}																						
	.025	.075	.125	.175	.225	.275	.325	.375	.425	.475	.525	.575	.625	.675	.725	.775	.825	.875	.925	.975	1.000	
ξ_t	.025	.009																				
	.075	.179	.010																			
	.125	.233	.181	.010																		
	.175	.177	.233	.183	.011																	
	.225	.124	.178	.233	.186	.012																
	.275	.083	.123	.178	.234	.189	.014															
	.325	.056	.083	.123	.178	.235	.194	.016														
	.375	.039	.056	.083	.123	.178	.233	.201	.016													
	.425	.027	.039	.056	.083	.123	.181	.238	.211	.026												
	.475	.020	.028	.040	.057	.084	.124	.181	.243	.228	.040											
	.525	.016	.021	.030	.042	.060	.088	.129	.188	.256	.261	.076									.000	
	.575	.016	.021	.028	.038	.054	.076	.109	.159	.230	.319	.373	.251	.080							.305	
	.625	.006	.007	.010	.014	.020	.028	.041	.061	.092	.140	.206	.279	.320	.138	.001					.442	
	.675	.004	.005	.007	.010	.014	.019	.027	.040	.058	.087	.130	.185	.246	.328	.249	.021			.009	.158	
	.725	.003	.004	.005	.007	.010	.014	.019	.027	.038	.056	.082	.114	.150	.231	.320	.333	.137	.029	.005	.436	.060
	.775	.002	.003	.004	.005	.007	.010	.013	.018	.025	.036	.051	.069	.077	.134	.197	.297	.377	.355	.401	.316	.020
.825	.002	.003	.003	.004	.005	.007	.009	.013	.018	.024	.034	.044	.053	.079	.113	.174	.250	.323	.312	.143	.010	
.875	.002	.002	.003	.003	.004	.005	.007	.009	.013	.017	.023	.029	.033	.048	.066	.098	.137	.175	.175	.063	.004	
.925	.001	.002	.002	.003	.003	.004	.006	.007	.010	.013	.016	.019	.021	.029	.038	.055	.072	.088	.082	.027	.001	
.975	.001	.001	.002	.002	.002	.003	.004	.004	.006	.007	.009	.010	.010	.013	.016	.022	.026	.030	.025	.006	.000	
1.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.000	.000	.000	.000	

示するとともに、ほとんど生起しえない範囲
範囲 ($p < 5\%$) と、実測値との比較を図示
する。

以上、stochastic processのmode-
lingの例として、水文学的应用、水資源工
学的应用、河川工学的应用の三例を示したが、
これ等はいずれも大阪大学河川研究室で挙げ
られた研究成果の中から選んだものであるこ
とを付記する。

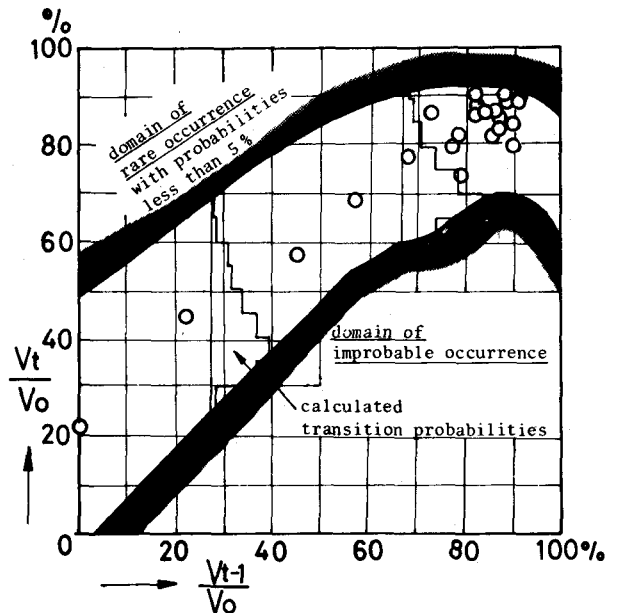


図 5-1 堆砂過程の計算結果と実測の比較

参 考 文 献

- (1) Einstein, H. A. : Probability, Statistic and Stochastic Solutions, STOCHASTIC HYDRAULICS edited by C. L. CHIU , 1971
- (2) 例えば, 小河原正己: 時系列論とその応用, 応用統計学(日本応用力学会編) 克誠堂, 昭和24年
- (3) Yevjevich, V, et al : Application of runs to hydrologic draughts, the 1st International Hydrologic Symposium, Fort Collins, Sept. 1967