

開水路流れの乱れ特性

今本博健

1 はじめに

流体運動の一形態である乱流現象はわれわれの周囲にみられるきわめて日常的な現象であって、その存在についても相当古くから認識されていたようであるが、¹⁾具体的に研究の対象とされるようになったのは層流から乱流への遷移に関する Reynolds²⁾の研究以降である。

乱流現象に関する研究は、一般に、遷移 Reynolds 数に関する研究、乱流の平均場に関する研究、および変動場に関する研究に大別され、それぞれについて簡単に振り返るとつぎのようである。

遷移 Reynolds 数に関する研究は主として数学者および物理学者によって進められ、微小な擾乱に対する層流の安定性を対象とした線型層流安定理論(上限臨界 Reynolds 数)から任意の大きさ・波形の擾乱を対象とした非線型層流安定理論(下限臨界 Reynolds 数)へと発展されており、とくに前者についてはほぼ完成の域に近づいている。³⁾ただし、線型理論では Reynolds 数の大きな十分発達した乱流において重要な役割を果す運動方程式の非線型項(慣性項)の線型化がなされており、この手法を一般的な乱流現象の解明に適用することは許されず、また非線型理論については現在のところ明確な結論が得られるには至っていないようである。なお、安定理論では、通常、擾乱として大きさ・波形の既知のものが対象とされるが、層流に加えられた擾乱が不安定状態を経て偶然的なものへと遷移する過程についても検討されるようになってきており、遷移理論として安定理論から区別されている。⁴⁾

つぎに速度平均場に関する研究についてみると、まず Boussinesq⁵⁾は Reynolds 応力と平均速度勾配とを渦動粘性係数によって結びつけることを提案し、層流解法を用いて運動方程式から乱流の平均速度分布を得ようと試みたが、渦動粘性係数を得ること自体が困難なため基本的な解決とはならず、Prandtl⁶⁾らによる輸送理論へと引き継がれることになる。輸送理論は気体分子運動論における平均自由行路より類推された混合距離の概念を基本としており、気体分子の衝突という不連続過程と同じ取扱いを渦の混合という実体の不明確な連続過程に適用しているという問題が残されるものの、この理論より導かれた平均速度分布は実際のものときわめてよく類似しており、実用的見地からは現在においても高く評価されている。なお、混合距離としては Prandtl⁶⁾あるいは Karman⁷⁾による仮定がよく用いられるが、Zagustin⁸⁾は乱れエネルギーの平衡条件より混合距離を導いている。

一方、速度変動場については流体運動を偶然的な連続過程として取り扱った Taylor^{9), 10)}により本格的な検討が始められ、統計的乱流理論の端緒が開かれた。すなわち、Taylorは相関関数、スペクトルなどの統計量による変動速度(乱れ)の特性の記述を提唱するとともに、等方性乱れの仮定が用いられる場合には取扱いがかなり簡単化されることを示した。Taylorの統計理論が発表されたのちしばらくは上記の統計量を運動方程式に基づいて解明しようとする努力が重ねられたが、¹¹⁾運動方程式に含まれる慣性項の存在のため不成功に終り、慣性項の物理的意義を明らかにすることにより乱流現象を解明しようとする試みがなされるようになった。

これが Kolmogorov^{12)~14)}に始まる相似理論といわれるものであって、局所的等方性の概念の導入により相関関数やスペクトルの具体的な関数形の決定が可能となり、その後の乱流理論の中心的存在を

占めるようになっているが、相似理論では統計量を規定する特性量（乱れ特性量）の大きさは決定されず、乱流現象の具体的な解明は乱れ特性量の計測を目的とした実験的研究に委ねられている。このため、現在、実際の乱流現象を対象とした乱れ計測が大気、河川、海洋といった種々の分野で活発に行なわれており、最近における計算技術の向上を背景としたシミュレーションモデルによるアプローチとともに乱流現象の解明に大きな役割を果たしている。

図-1は以上の乱流理論の変遷を模式的に表わしたものであるが、代表例として示された研究の発展段階は互いに密接に関連し合っていることはいうまでもない。

水工学の分野において対象とする流れはほとんど例外なく乱流状態にあり、乱流現象の解明は重要な課題の一つとなっている。当研修会においてもすでに「河川の乱流現象」と題して東工大・日野教授による広範囲の解説がなされているが、¹⁵⁾ここでは開水路流れにおける乱れ速度の特性に関する実験的検討に焦点を絞り、従来の研究成果をふまえつつ若干の解説を行なう。

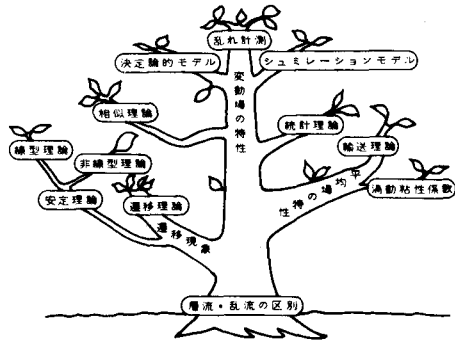


図-1 乱流理論の変遷

2 乱流現象の統計的記述

乱流状態の流れにおける速度は時間的・空間的にきわめて不規則な変動をしているため、その特性を記述するには統計的方法がもっとも有効である。

乱流現象の統計的記述においては、一般に、乱流場内の任意の点におけるいくつかの乱れ速度の生起確率密度関数を求めることが基本となるが、実際にこの関数を求めることはかなり困難であり、これを特性づける相関関数（乗積能率）あるいは相関関数と Fourier 変換の関係にあるスペクトルによって取り扱われることが多い。

乱れ速度に関する相関関数は、乱流場内の固定点における乱れ速度を対象とするか、着目した流体粒子の不規則運動を対象とするかによって Euler 的相関関数と Lagrange 的相関関数とに分けられる。ここではもっとも基本的な2次の Euler 的相関関数について述べるが、固定点ということに着目した流体粒子に置き換えると Lagrange 的相関関数にも適用される。

いま、点Aにおける*i*方向の乱れ速度を $[U_i(t)]_A$ 、点Bにおける*j*方向の乱れ速度を $[U_j(t)]_B$ とすると、これらの速度間の相関関数 $R(\mathbf{r}, \tau)$ は

$$R(\mathbf{r}, \tau) = \overline{[U_i(t)]_A [U_j(t+\tau)]_B} \quad (1)$$

と定義される。ここに、 \mathbf{r} は2点間の距離、 τ は遅れ時間を表わし、 $\overline{\quad}$ は無限時間にわたる平均操作を意味する。

(1)式の相関関数は(*i*, *j*)および(A, B)の組合せにより表-1に示されるような種々のものに分類される。すなわち、同一方向の乱れ速度を対象とした自己相関関数には同一点における時間的変動特性を示す時間相関関数 $R(\tau)$ と同時刻における空間的変動特性を示す空間相関関数 $R(\mathbf{r})$ とがあり、相互相関関数では、同一点における2方向の乱れ速度を対象とした Reynolds 応力相関関数

表-1 Eulerの相関関数の分類

2次相関関数 $R(r, \tau) = \overline{[U_i(t)]_A [U_j(t+\tau)]_B}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{自己相関関数} \left\{ \begin{array}{l} \text{時間相関関数 } R(\tau) \cdots \cdots A=B, i=j \\ \text{空間相関関数 } R(x) \cdots \cdots i=j, \tau=0 \end{array} \right. \\ \text{相互相関関数} \left\{ \begin{array}{l} \text{Reynolds応力相関関数 } R_{uv} \cdots \cdots \begin{matrix} A=B, \\ i \neq j \end{matrix} \\ \text{時空間相関関数 } R(r, \tau) \cdots \cdots A \neq B, i=j \end{array} \right. \end{array} \right.$
--	---

$R_{uv}(\tau)$ と同一方向軸上の2点における同一方向の乱れ速度を対象とした時空間相関関数 $R(r, \tau)$ とがよく用いられる。

スペクトルは相関関数と互いに Fourier 変換の関係にあり、たとえば2種の乱れ速度 u_m および u_n に関する時間的相関関数 $R_{mn}(\tau)$ に対応する周波数スペクトル $S_{mn}(f)$ はつぎのように表わされる。

$$S_{mn}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{mn}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (2)$$

ここで、 $R_{mn}(\tau)$ の一般的特性、すなわち

$$R_{mn}(\tau) = R_{nm}(-\tau) \quad (3)$$

を用いると、自己スペクトル $S_{mm}(f)$ および相互スペクトル $S_{mn}(f)$ はつぎようになる。

$$S_{mm}(f) = 4 \int_0^{\infty} R_{mm}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau \quad (4)$$

$$\begin{aligned} S_{mn}(f) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{mn}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau - i \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{mn}(\tau) \sin 2\pi f\tau d\tau \\ &= P_{mn}(f) - i Q_{mn}(f) \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式より知れるように、 $S_{mn}(f)$ は実数部 (co-spectrum) および虚数部 (quadrature-spectrum) より成るが、これらより u_m, u_n 間の周波数成分ごとの相関度を表わすコヒーレンシ $\text{Coh}_{mn}(f)$ および位相差 $\phi_{mn}(f)$ がつぎのように表わされる。

$$\text{Coh}_{mn}^2(f) = \frac{P_{mn}^2(f) + Q_{mn}^2(f)}{S_{mn}(f) \cdot S_{nn}(f)} \quad (6)$$

$$\phi_{mn}(f) = \tan^{-1} \frac{Q_{mn}(f)}{P_{mn}(f)} \quad (7)$$

以上は乱れ速度の時間的変動を対象としたものであるが、同様の手法により空間的変動を対象とした波数スペクトル $S_{mn}(k)$ が定義される。

相関関数を乱れ速度の標準偏差で基準化したものは相関係数といわれ、その特性はつぎの量によって規定される。すなわち、空間相関係数 $R(x)$ の特性は (以下においては流れ方向 (x) の乱れ速度 (u) を対象とし、また混同の恐れがない限り相関関数と同じ記号を用いる) 次式によって定義される積分スケール L および微視スケール λ によって規定される。¹⁰⁾

$$L_x = \int_0^{\infty} R(x) dx \quad (8)$$

$$\frac{1}{\lambda_x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-R(x)}{x^2} \quad (9)$$

L_x は乱流場を構成する乱れの平均的な大きさを意味することから平均スケールともいわれ、また λ_x は乱れエネルギーの逸散に関係することから逸散スケールといわれる。

一方、時空間相関係数 $R(x, \tau)$ は、 x が一定のとき $\tau = \tau_x$ において最大値をとり、 τ が τ_x より離れるにしたがって $R(\tau)$ に類似した減衰特性を示すため、つぎのように近似される。¹⁶⁾

$$R(x, \tau) = R(x) R(\tau - \tau_x) \quad (10)$$

ここに、 $R(x) = R(x, \tau_x)$ であって、乱れ速度が平均速度に比し小さい場合には Lagrange 的相関係数に類似したものとなる。¹⁷⁾ 流れ方向に垂直な方向に離れた2点での乱れ速度に関する時空間相関係数たとえば $R(z, \tau)$ についても(10)式と同様に近似することができるが、 $R(x)$ の積分スケールが移流に伴う乱れの変形を示す量であるのに対し、 $R(z)$ のそれは乱れの広がりを示し、また τ_x は移流速度に関係するのに対し τ_z は乱れの歪みを表わしている。

なお、Taylor¹⁰⁾ の凍結乱流の仮定が適用される場合、 $x = U \tau$ のとき

$$R(x) = R(\tau) \quad (11)$$

となり、乱流場の時間構造と空間構造とは1次的な関係で結びつけられることになる。

また、等方性の乱れについては、連続の条件より

$$R(z) = R(x) + \frac{x}{2} \frac{dR(x)}{dx} \quad (12)$$

となり、空間相関係数に関する特性量の間には

$$L_x = 2 L_z, \quad \lambda_x^2 = \frac{1}{2} \lambda_z^2 \quad (13)$$

の関係が成立し、一方向の空間構造によって他方向のものも決定されることが知られる。

3 乱れの相似性

3.1 乱流構造の相似性

一般に、乱流場は種々のスケールの乱れより構成されているが、スケールの大きさにより乱れは生成領域、慣性領域および粘性領域の3領域のものに分類される。

生成領域は Reynolds 応力の効果によって平均流のエネルギーが乱れエネルギーへと変換される領域であって、スケールの大きな乱れが対応する。慣性領域は、流れの運動方程式における慣性項の存在より推測されるように、あるスケールの乱れからより小さなスケールのものへと乱れエネルギーが伝播される領域であって、中間スケールの乱れが対応する。また粘性領域は流体の粘性の効果により乱れエネルギーが熱エネルギーへと逸散される領域であって、きわめて小さなスケールの乱れが対応する。

Kolmogorov^{12)~14)} は、非等方性乱れにおいても小さなスケールの乱れのみを対象とすれば等方性乱れとしての取扱いが可能であるといういわゆる局所的等方性の概念を導入することにより、つぎの

ような相似仮定を提案した。すなわち、慣性領域に属するような中間スケールの乱れの特性はエネルギー逸散率のみによって、また粘性領域に属するような小さな乱れの特性はエネルギー逸散率と動粘性係数によって記述されるというもので、同様な考え方はKolmogorov とほぼ時を同じくして数人の研究者により発表されている。^{18)~21)}

このような相似仮定を用いるとスペクトルはつぎのように表わせることが知れる。

いま、空間相関係数 $R(x)$ に対応する1次元波数スペクトル $S(k)$ について考えると、 $S(k)$ は

$$S(k) = \frac{2 \overline{u^2}}{\pi} \int_0^\infty R(x) \cos kx dx \quad (14)$$

と表わされる。

(14式において $R(x)$ は x が大きくなると 0 に漸近するから、波数 k が小さな生成領域ではつぎのように近似される。

$$\text{生成領域: } S(k) = \frac{2}{\pi} \overline{u^2} L \quad (15)$$

ここに、 L は $R(x)$ に関する積分スケールを表わす。

Kolmogorov の相似仮定によれば、慣性領域での $S(k)$ はエネルギー逸散率 ϵ および k によって決定されるから、次元解析より $S(k)$ はつぎのような $-5/3$ 乗則で表わせることが知れる。

$$\text{慣性領域: } S(k) = S_\epsilon \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (16)$$

ここに、 S_ϵ はスペクトル定数といわれる普遍定数であって、 $S_\epsilon \sim 0.5$ である。²²⁾

また、逸散領域における $S(k)$ には ϵ 、 k のほかに動粘性係数 ν が関係するため、次元解析のみによって $S(k)$ を一義的に決定することはできず、つぎのような普遍関数 f_ν を含んだものとして表わされる。

$$\text{粘性領域: } S(k) = \epsilon^{2/3} k^{-5/3} f_\nu(\epsilon^{1/3} k^{-4/3} / \nu) \quad (17)$$

$f_\nu(\epsilon^{1/3} k^{-4/3} / \nu)$ は因数 $\epsilon^{1/3} k^{-4/3} / \nu$ がきわめて小さいとき 0 に近い値となることを考慮し、その関数形をつぎのように仮定する。

$$f_\nu(\epsilon^{1/3} k^{-4/3} / \nu) \sim (\epsilon^{1/3} k^{-4/3} / \nu)^a \quad (18)$$

(18式において $a=1$ とすると井上²³⁾による -3 乗則に、また $a=4$ とすると Heisenberg¹⁹⁾による -7 乗則に一致する。

以上に示された $S(k)$ の特性のうち慣性領域のものについては実験的にもすでに多くの分野でその妥当性が確かめられているが、他の領域のものについてはかなりの不明確さが残されているため、以下においては慣性領域を対象とし、Lagrange 的乱れ速度、Reynolds 応力および乱れの移流速度と寿命時間のスペクトル特性について検討することとする。

Lagrange 的スペクトル $S_L(f)$ については、上述の Euler 的な場合と異なり、 k の代りに周波数 f が基本となるため、慣性領域における $S_L(f)$ は ϵ と f によって定められることになり、次元解析より

$$S_L(f) = S_{\epsilon L} \epsilon f^{-2} \quad (19)$$

が導かれる。ここに $S_{\epsilon L}$ は普遍定数を表わし、 $S_{\epsilon L} \approx 0.2$ という値が提案されているが、²⁴⁾ 詳細についてはさらに検討を要する。

慣性領域における Reynolds 応力のスペクトル特性はつぎのように表わされる。いま、流れ方向および鉛直方向の乱れ速度 u 、 w 間のコスペクトル $P_{uw}(k)$ は ϵ 、 k および速度勾配 $\partial U / \partial z$ によって定められるとすると、やはり次元解析により

$$P_{uw}(k) = \epsilon^{2/3} k^{-5/3} f_P\left(\frac{\partial U / \partial z}{\epsilon^{1/3} k^{2/3}}\right) \quad (20)$$

が得られる。(18)式と同様に

$$f_P\left(\frac{\partial U / \partial z}{\epsilon^{1/3} k^{2/3}}\right) \sim \left(\frac{\partial U / \partial z}{\epsilon^{1/3} k^{2/3}}\right)^b \quad (21)$$

と仮定し、Reynolds 応力は $\partial U / \partial z$ に比例するという Boussinesq の表示にしたがって $b=1$ とすると

$$P_{uw}(k) \sim \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) \epsilon^{1/3} k^{-7/3} \quad (22)$$

となり、Lumley²⁵⁾ による $-7/3$ 乗則が導かれる。また Reynolds 応力は $(\partial U / \partial z)^2$ に比例するという Prandtl の運動量輸送理論にしたがって $b=2$ とすると

$$P_{uw}(k) \sim \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 k^{-3} \quad (23)$$

となる。(22)および(23)式のうちいずれがより妥当であるかについては別の観点から検討されねばならない。

つぎに、平均流による乱れの移流過程を特性づける移流速度および寿命時間のスペクトル特性について考えてみよう。

慣性領域に属する乱れについての空間相関係数 $R(x)$ および時間相関係数 $R(t)$ は、それぞれ、つぎのように表わされる。

$$1 - R(x) \sim (x/x_0)^c, \quad 1 - R(t) \sim (t/t_0)^d \quad (24)$$

ここに、 x_0 および t_0 は最大スケールの乱れの大きさおよび通過時間を表わす。移流速度 U_c は x/t であるから(24)式を用いて波数表示するとつぎようになる。

$$U_c(k) \sim \frac{x_0^{c/d}}{t_0} k^{c/d-1} \quad (25)$$

小倉²⁶⁾あるいは Gifford²⁷⁾によると、 c は乱れ速度の大きさ u' に関係なく $c=2/3$ となるのに対し、 d は $u'/U \ll 1$ のとき $d=2/3$ 、 $u'/U \gg 1$ のとき $d=1$ となるから、(25)式より

$$U_c(k) \sim \begin{cases} x_0/t_0 & \text{for } u'/U \ll 1 \\ (x_0^{2/3}/t_0) k^{-1/3} & \text{for } u'/U \gg 1 \end{cases} \quad (26)$$

が導かれる。開水路流れでは、一般に、 $u'/U \ll 1$ であるから、 U_c は k に関係しないと考えられる。

また、寿命時間については、Taylor¹⁰⁾ によって提案された $\overline{u^2}$ 、 ϵ および寿命時間 T_L の間の関係式

$$\epsilon \sim \frac{\overline{u^2}}{T_L} \quad (27)$$

が波数成分ごとについても成立すると仮定し、乱れエネルギーの波数成分は $k S(k)$ と表わされ、慣性領域における ϵ は k に関係しないことを考慮すると、波数成分ごとの寿命時間 $T_L(k)$ はつぎのように表わせることになる。

$$T_L(k) \sim \frac{u^2(k)}{\epsilon(k)} = \frac{k S(k)}{\epsilon} = S \epsilon^{-1/3} k^{-2/3} \quad (28)$$

(28)式より流れ方向に x だけ離れた2点における乱れ速度間のコヒーレンシ $\text{Coh}(x, k)$ はつぎのように表わされる。

$$\text{Coh}(x, k) \sim U_c \epsilon^{-1/3} k^{-2/3} x^{-1} \quad (29)$$

3.2 乱流場の相似性

Reynolds 数が十分大きい場合、幾何的形狀の相似な場における流れの相似性は境界面の特性のみに支配されるということは Reynolds 数相似則としてよく知られている。²⁸⁾たとえば、定常等流状態の2次元開水路流れの平均速度分布および Reynolds 応力分布は、それぞれ、路床面近傍を除くと

$$\frac{U_h - U}{U_f} = \phi_U \left(\frac{z}{H} \right) \quad (30)$$

$$\frac{-\overline{uw}}{U_f^2} = \phi_{uw} \left(\frac{z}{H} \right) \quad (31)$$

と表わされるが、²⁹⁾これらは乱流場の相似性が幾何的形狀を代表する水深 H と境界面の特性を代表する摩擦速度 U_f という2種の基本的物理量によって規定され、Reynolds 数相似則の適用性を示すものと考えられる。ここに、 U および U_h は路床面からの高さ z および H における平均速度、 ϕ は z/H のみの普遍関数を表わす。なお、(30)式より知れるように、 U/U_f は z/H のみによって表わされず、 U_h/U_f のような摩擦抵抗係数に関係した量がパラメーターとして入ってくることに注意せねばならない。

以下においては、乱れ特性を規定する基本量として、乱れの強さ u' 、Euler 的平均スケール L およびエネルギー逸散率 ϵ の3種を取り上げ、それぞれの鉛直分布に関する普遍関数表示式について検討することにする。³⁰⁾

まず、 u' については大気乱流における鉛直方向の乱れ速度に関する Monin-Obukhov³¹⁾ の相似則よりつぎの普遍関数表示式が類推される。

$$\frac{u'}{U_f} = \phi_{u'} \left(\frac{z}{H} \right) \quad (32)$$

Lについては、これとUとの比で表わされる時間的平均スケール $T_E (=L/U)$ をすでに述べた2種の基本的物理量Hおよび U_f より構成される時間の次元をもつ量 H/U_f で無次元化したものは z/H のみの普遍関数になるという Englund³²⁾ の表示式を用いると

$$\frac{T_E}{H/U_f} = \frac{L}{H(U/U_f)} = \phi_L\left(\frac{z}{H}\right) \quad (33)$$

が得られる。

また、 ϵ については乱れエネルギー生成率についての普遍関数表示よりつぎの表示式が類推される。

$$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} = \phi_\epsilon\left(\frac{z}{H}\right) = \phi_\epsilon\left(\frac{z}{H}\right) \quad (34)$$

一方、乱れ特性量間の関係として Taylor が示した(27)式に Hay-Pasquill³³⁾ によって提案された Euler-Lagrange 特性間の関係式

$$\frac{T_L}{T_E} = \alpha \frac{U}{u'} \quad (35)$$

ここに α は普遍定数、を用いると

$$\epsilon = C \frac{u'^3}{L} \quad (36)$$

が得られる (C : 普遍定数)。したがって、(36)式に(32)~(34)式を用いると

$$\phi_\epsilon\left(\frac{z}{H}\right) \sim \frac{\phi_{u'}^3(z/H)}{(U/U_f) \cdot \phi_L(z/H)} \quad (37)$$

となるが、(30)式より知れるように U/U_f は z/H のみの関数ではないため、(36)式を正しいとするかぎり(32)~(34)式のうち少なくとも一つには成立性に疑問のあることが知れる。

以上の関係式のうち(34)式は(30)および(31)式より導かれ、また(36)式はすでに述べた Kolmogorov の相似則からも導かれるものであって、いずれもかなり信頼性の高いものと考えられる。したがって、これらの2式と u' あるいはLの一方に対する普遍関数表示式より他方に対するものを得るという方法を用いることにすると、つぎようになる。すなわち、 u' に関する(32)式を正しいとすると、これと(34)および(36)式より、Lに関する普遍関数表示式として

$$\frac{L}{H} = \frac{T_E}{H/U} = \phi_L\left(\frac{z}{H}\right) \quad (38)$$

が得られ、同様にしてLに関する(33)式を正しいとすると、 u' に関する普遍関数表示式は

$$\frac{u'}{U_f (U/U_f)^{1/3}} = \phi_{u'}\left(\frac{z}{H}\right) \quad (39)$$

となる。

以上に示した2種の普遍関数表示式を区別する要素は U/U_f であって、両者間の優位性を論ずるには U/U_f を大幅に変化させた実験的検討が必要である。

表-2はその他の乱れ特性量の普遍関数表示式を上述の2種の表示式に基づいて示したものであって、普遍関数形については別の観点から究明されねばならない。

表-2 乱れ特性量の普遍関数表示式

乱れ特性量	ケース A	ケース B
乱れの強さ	$\frac{u'}{U_f (U/U_f)^{1/3}} = \phi_{u'} \left(\frac{z}{H} \right)$	$\frac{u'}{U_f} = \phi_{u'} \left(\frac{z}{H} \right)$
Euler 的 平均スケール	$\frac{L}{H (U/U_f)} = \frac{T_E}{H/U_f} = \phi_L \left(\frac{z}{H} \right)$	$\frac{L}{H} = \frac{T_E}{H/U} = \phi_L \left(\frac{z}{H} \right)$
エネルギー 逸散率	$\frac{\epsilon}{U_f^3 / H} = \phi_\epsilon \left(\frac{z}{H} \right)$	$\frac{\epsilon}{U_f^3 / H} = \phi_\epsilon \left(\frac{z}{H} \right)$
Taylor の 逸散スケール	$\frac{\lambda}{H (U_f H / \nu)^{-1/2} (U/U_f)^{1/3}} = \phi_\lambda \left(\frac{z}{H} \right)$	$\frac{\lambda}{H (U_f H / \nu)^{-1/2}} = \phi_\lambda \left(\frac{z}{H} \right)$
Kolmogorov の局所スケール	$\frac{\ell}{H (U_f H / \nu)^{-3/4}} = \phi_\ell \left(\frac{z}{H} \right)$	$\frac{\ell}{H (U_f H / \nu)^{-3/4}} = \phi_\ell \left(\frac{z}{H} \right)$
Euler- Lagrange 関係	$T_L = \frac{L_L}{U} \sim \frac{U}{u'} T_E = \frac{L}{u'}$	
Lagrange 的 平均スケール	$\frac{L_L}{H (U/U_f)^{5/3}} = \phi_{LL} \left(\frac{z}{H} \right)$	$\frac{L_L}{H (U/U_f)} = \phi_{LL} \left(\frac{z}{H} \right)$
拡散係数	$\frac{D}{U_f H (U/U_f)^{4/3}} = \phi_D \left(\frac{z}{H} \right)$	$\frac{D}{U_f H} = \phi_D \left(\frac{z}{H} \right)$

4 実験的検討

4.1 乱れ計測

乱流現象の解明における乱れ計測の重要性についてはいまさら指摘するまでもないが、乱流現象は本質的に3次元的不規則性という特性を有しているため、これを完全に計測することはほとんど不可能である。このため従来より種々の乱れ計測法が提案・実施されているにもかかわらず、理想的な計測法は未だ確立されるに至っていない。とくに水流については気流の場合に比しさらに困難な技術的要素が加

わり、詳細な実験的検討が加えられるようになったのは比較的最近である。

乱れ計測法は、一般に、固定点における乱れ速度を対象とする Euler 的計測法と、着目した流体粒子の運動を追跡する Lagrange 的計測法とに大別される。水流を対象とした前者の方法としては、回転式流速計、総圧管式流速計、熱式流速計、超音波式流速計、電位差式流速計、レーザー・ドプラー式流速計など各種の方法が用いられているが、計測器として要求される点計測性、鋭敏性、指向性、安定性、経済性などの条件を十分満足するに至っていない。また、後者の方法では、水素気泡、染料、固体粒子などをトレーサーとした写真観測がよく用いられているが、データ処理にかなりの煩わしさが伴われる。

一方、乱れ計測において注意せねばならないこととして、計測された瞬間値あるいは平均値は必ずしも真のものと一致するとは限らないということが挙げられる。たとえば、瞬間速度の計測値は計測器の受感部から記録・解析部にいたる計測システム全体に含まれる慣性の効果などにより真の瞬間速度にある評価時間にわたる平均化がなされたものとみなす必要があり、また平均速度のような平均量は、通常、瞬間量の無限時間にわたる時間的平均値として定義されているが、実用上における平均操作は適当な有限時間内に限定されているため、平均量の計測値はその評価時間の関数とみなさなければならない。

このような瞬間値評価時間 s および平均値評価時間 T の効果をスペクトル的に表現すると、計測された乱れ速度のエネルギースペクトルは真のものに

$$G(T, s; f) = \frac{\sin^2 \pi f s}{(\pi f s)^2} \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \pi f T}{(\pi f T)^2} \right\} \quad (40)$$

というファクターが乗せられたものとなり、³⁴⁾ (40)式を図示した図-2にみられるように、計測の対象となる乱れ速度は種々の周波数成分より構成されている真の乱れ速度のうち s による高周波数切断と T による低周波数切断を免れたものであることが知れる。

したがって、実際の乱れ計測においてはできるだけ s を小さくかつ T を大きくする、すなわち、鋭敏性に富む計測器を使用して長時間にわたる計測を行なうことが望まれるが、これは乱流構造が単一スケールのみ支配されているいわゆる“単一構造的な乱れ”に適用されることであって、“多重構造的な乱れ”については対象とする現象を支配する乱れのスケールに対応した評価時間の選定が必要である。

たとえば、開水路流れの乱流構造は水深、水路幅などの種々のスケールによって支配される多重構造的な特性を有し、図-3に示されるように、乱れ速度のエネルギースペクトルにはいくつかのピークとそれにつづく慣性領域(この領域のスペクトルはすでに述べたように $-5/3$ 乗則にしたがうが、図では縦軸に $kS(k)$ が用いられているため勾配 $-2/3$ の領域が相当する)の存在が認められる。したがって、実際の開水路流れでの乱れ計測により2次元開水路流れの乱れ特性を知るには、 T を過大に選定することはほとんど無意味であり、水理条件の選定ならびに乱れ特性量の評価に関してつぎの点に留意しなければならない。

まず水理条件としては種々の波数成分より構成される乱れ速度のうち水深に支配される波数成分の特

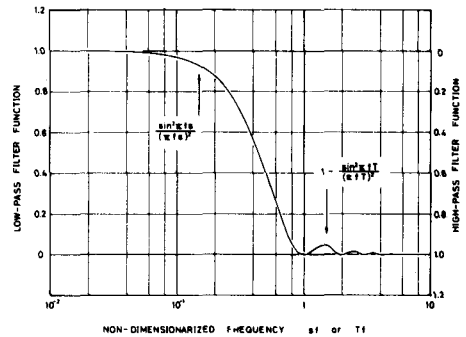


図-2 評価時間の効果

性が分離・抽出されるよう水路幅・水深比を大きく選定することが肝要であり、乱れ特性量の評価は評価時間の効果が比較的軽減と考えられるつぎの方法によることが望ましい。すなわち、主として平均スケールに相当する波数付近の成分に支配される乱れの強さ u' については、評価時間の選定が極端に不適正でないかぎり、計測された乱れ速度の *r.m.s.* によるという通常の評価法が十分適用されるものと考えられる。しかしながら、平均スケール L の評価で基本となる相関係数は評価時間によって大きく変化されるため、一般に L の評価はかなり困難である。このため 4.2 に述べられるような相関係数に認められる second mild maximum の発生遅れ時間 T_d に基づく評価法が提案されているが³⁵⁾ 路床面近傍から間欠的に発生される burst 現象³⁶⁾ の発生周期に相当すると考えられる T_d の判定はつねに容易であるとは限らず、この方法の適用性についてはさらに詳細な検討が必要である。また、エネルギー逸散率 ϵ の評価は、通常、等方性近似をした Dryden³⁷⁾ の表示式、すなわち

$$\epsilon = 15 \nu \int_0^{\infty} k^2 S(k) dk \quad (41)$$

において積分領域を有限化したものに基づくことが多いが、この方法にはスペクトルの収束条件としてかなり高波数までの計測が要求されるとともに、多種構造型に対する考慮がなされていないという欠点がある。このため、Kolmogorov の相似則にもとづき計測されたスペクトルの水深に支配された慣性領域に(40)式を適用した評価法が有効と考えられる。

以上のように、乱れ計測には計測器に関する問題のほかにデータ処理上の問題など多くの困難が付随し、これらの困難を克服してはじめて有効な実験的検討が可能となる。以下においては、これらの問題に十分留意しつつ水理条件を系統的に変化させた室内実験にもとづき、開水路流れにおける乱れの基本的特性について若干の検討を行なう。なお、乱れ計測器としてはホットフィルム流速計が使用されているが、この流速計の使用に際して問題となる流水の温度変化ならびに流水中に含まれる微細粒子の付着による応答特性の変化の効果については軽減・除去されるよう努めるとともに、流速計の応答特性についての綿密な検定がなされている。また計測精度の向上をはかるため平均値評価時間を一定に保った計測を繰り返し、その平均値を計測値として採用する方法が用いられている。

4.2 相関およびスペクトル特性

すでに述べたように、一般に相関係数は評価時間によって大きく変化し、多重構造型乱れについての自己相関係数 $R(t)$ は平均値評価時間 T を大きくするに伴って大きくなるとともに、 t の増加に伴う $R(t)$ の特性は t の小さな領域と大きな領域とで異なり、前者では急激な減少を示すのに対し後者での減少度合いは緩やかとなる。図-4 はある水理条件の流れで計測された $R(t)$ を示したものであって、計測点の路床面からの相対高さ z/H として5種のものが選ばれている。図にみられるように、多重構造型の特性は自由表面近傍での $R(t)$ に顕著に現われ、路床面近傍では不明瞭となっているが、これは路床面近傍では水深に支配される乱れエネルギーの発生が著しく、水路幅の支配性が隠されてしまった

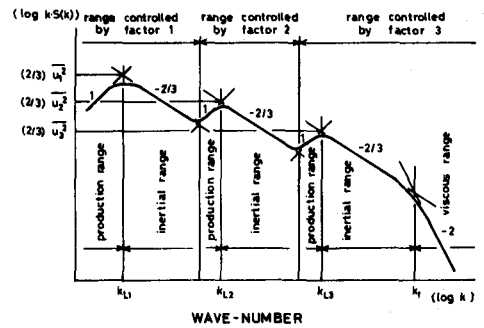


図-3 多重構造型乱れのスペクトル特性(模式図)

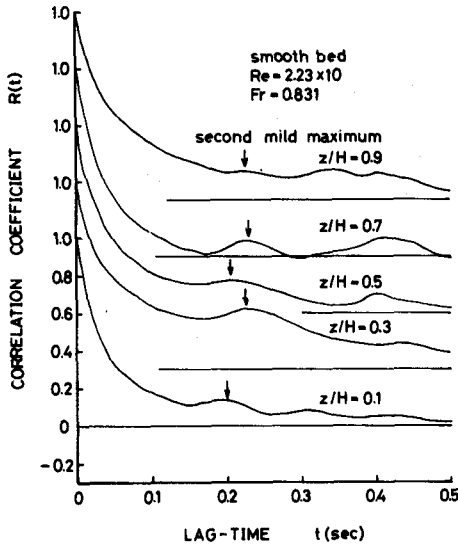


図-4 自己相関係数の計測例 (相対水深との関係)

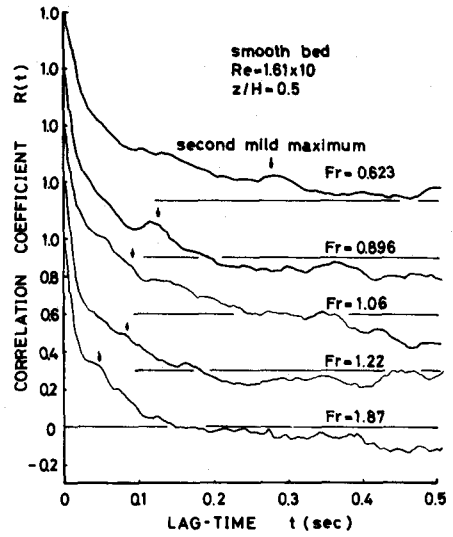


図-5 自己相関係数の計測例 (フルード数との関係)

ことによると考えられる。また、 $R(t)$ の積分スケール T_E は z/H が大きなものほど増大しているようであるが、 T_E が T に依存していることを考慮すると速断は許されない。

図-4 に示された $R(t)$ を詳細に観察すると、 $t = 0.2 \text{ sec}$ 付近に小さな盛り上がり (second mild maximum) の発生が見い出され、その発生遅れ時間 T_d は z/H にほとんど関係しないことが知れる。このような second mild maximum の発生は、図-5 に示されるように、水理条件に関係なく認められるようであり、乱れエネルギーの発生を特性づける burst の発生周期に一致するものと考えられる。

また、 T_E と T_d との関係について検討するため、平均値評価時間 T を T_d の 10^2 倍程度に選び、水路幅・水深比が 10 以上の開水路流れについて比較すると図-6 のようであり、両者はほぼ一致として差し支えないものと考えられる。したがって、 T_E の評価は T に依存した相関係数によるよりは T_d に基づいてなされるのがより妥当と考えられる。なお、 T_d の評価は相関係数における second mild maximum によるほか、速度記録に含まれる卓越変動周期の読み取りより直接行なうことも可能である。

つぎに乱れ速度のスペクトル特性について検討してみよう。

図-7 はすでに示した相関係数と同じ 5 種の水理条件のもとで計測された流れ方向の乱れ速度のエネルギースペクトル $S(f)$ を示したものであって、サンプリング周波数としては 3 種のものを用いられている。図より知れるように、いずれの場合についても $-5/3$ 乗則の成立する慣性領域についで -3 乗則さらには

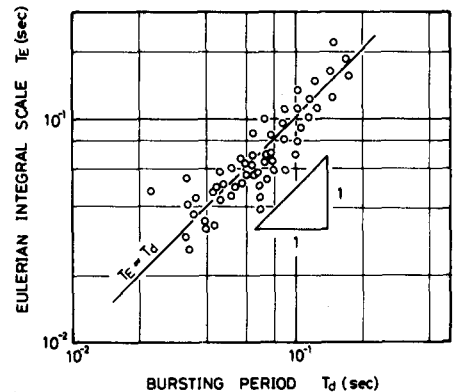


図-6 T_E と T_d の関係

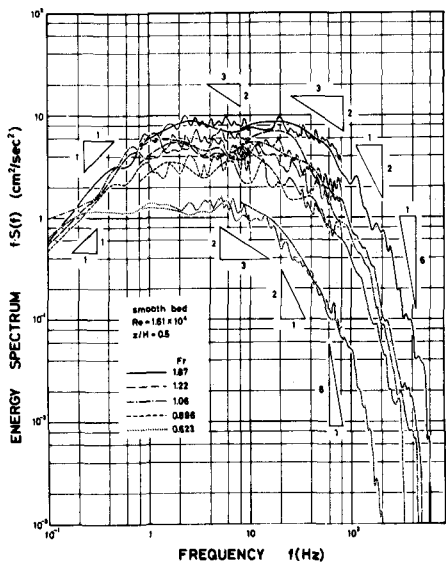


図-7 流れ方向の乱れ速度のエネルギースペクトル

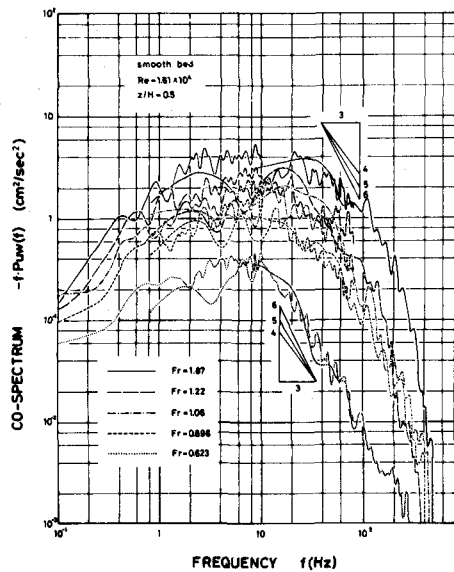


図-9 Reynolds 応力のスペクトル

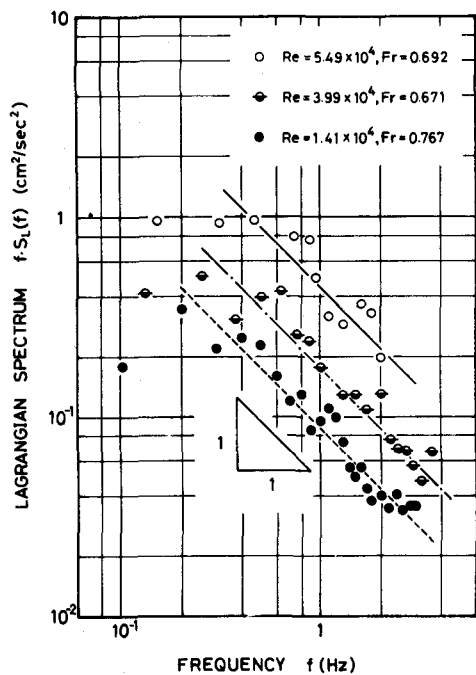


図-8 流れ方向の乱れ速度の Lagrange 的スペクトル

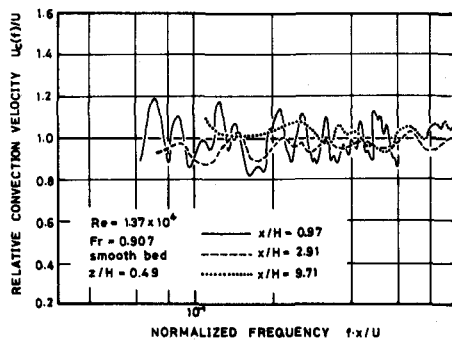


図-10 移流速度

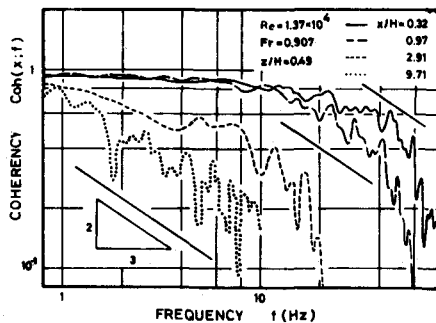


図-11 コヒーレンシ

—7乗則の成立する粘性領域の存在が認められ、Kolmogorovの相似則の適用性が確かめられる。また、Froude数の小さな場合にはやや不明瞭であるが、ここに示された $S(f)$ には2種の慣性領域、一つは低周波数側で水路幅に支配され、他は高周波数側で水深に支配されるものと考えられる、の存在が認められ、開水路流れにおける乱流構造は多重性として取り扱われねばならないことが知れる。

一方、図-8は自由表面上を浮流させた固体粒子トレーサーの運動をストロボ撮影により追跡して得られたLagrange的スペクトル $S_L(f)$ を示したものであるが、慣性領域における—2乗則の成立性が確かめられる。また、図-9は流れ方向と鉛直方向の乱れ速度間の相関すなわちReynolds応力に関するコ・スペクトル $P_{uw}(f)$ を示したものであるが、慣性領域のスペクトル相似則としてすでに示された—7/3乗則あるいは—3乗則のいずれがより妥当であるかはこの図から判定されず、さらに詳細な検討が必要である。さらに、図-10および図-11は流れ方向に x だけ離れた2点における乱れ速度の同時計測より得られた移流速度 $U_c(f)$ およびコヒーレンシ $Coh(x, f)$ を示したものであるが、 $U_c(f)$ は f に関係なく局所的平均速度 U にほぼ等しいとみなされることが知れるとともに、慣性領域の $Coh(x, f)$ には—2/3乗則が適用されるようである。

4.3 乱れ特性量の鉛直分布

すでに述べたように、乱れの強さ u' および時間的平均スケール T_E の鉛直分布則としては2種の普遍関数表示法が示されているが、 u'/U_f および $T_E/(H/U)$ が相対水深 z/H のみの普遍関数となるという(32)および(33)式が従来より多くの研究者に慣用されてきている。いま、これらの表示法の妥当性について検討するため、種々の水理条件の開水路流れの半水深で計測された u'/U_f および $T_E/(H/U)$ と平均・摩擦速度比 U/U_f との関係を示すと図-12および図-13のようになる。これらの図より

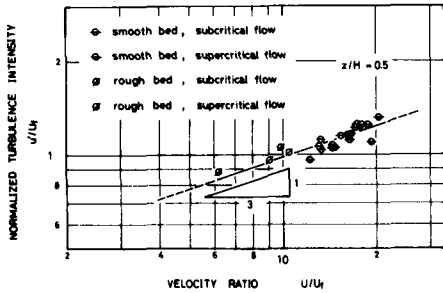


図-12 乱れの強さと平均・摩擦速度比との関係

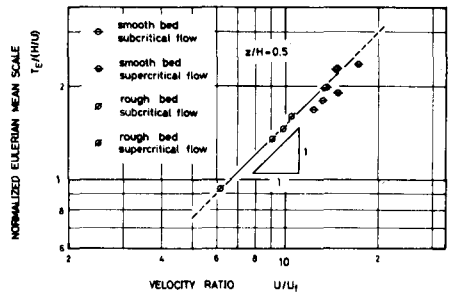


図-13 時間的平均スケールと平均・摩擦速度比との関係

知れるように、 z/H が一定のもとでの u'/U_f は z/H の1/3乗に、また $T_E/(H/U)$ は z/H の1乗に比例して増加する傾向が認められ、 u' については(39)式、 T_E については(33)式による表示法の優位性がうかがわれる。このため以下では乱れ特性量の普遍関数表示法として表-2に示されたうちのケースAにもとづくこととし、その関数形について実験的検討を加える。

なお、乱れ特性量の評価には多重構造性を考慮してつぎの方法が用いられている。すなわち、 T_E については試行的に選ばれた平均値評価時間のもとで計算された相関係数のsecond mild maximumの発生遅れ時間 T_d に基づくとともに、 u' についてはすでに得られた T_E の約10倍の平均値評価時

間のもとで計算された *r.m.s.* 値を採用し、また ϵ については慣性領域のスペクトルに $-5/3$ 乗則を適用して算定されている。

図-14, 図-15 および図-16 は種々の水理条件のもとで計測された乱れ特性量を表-2 のケー

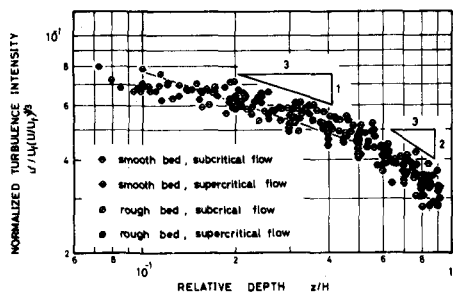


図-14 乱れの強さの鉛直分布

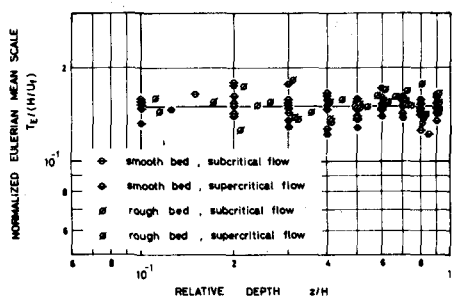


図-15 時間的平均スケールの鉛直分布

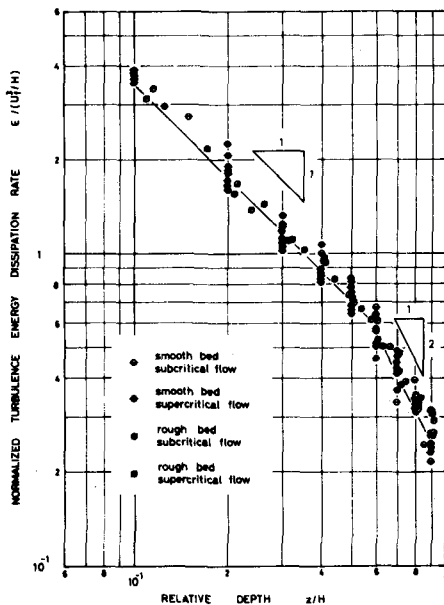


図-16 エネルギー逸散率の鉛直分布

ス A にもとづいて無次元化表示したものであるが、これらより乱れ特性量の鉛直分布則としてつぎのものが得られる。すなわち、

1) $0.1 < z/H < 0.6$ については

$$\frac{u'}{U_f(U/U_f)^{1/3}} = (0.36 \pm 0.03) \cdot \left(\frac{z}{H}\right)^{-1/3} \quad (42)$$

$$\frac{L}{H(U/U_f)} = \frac{T_E}{H/U_f} = 0.15 \pm 0.03 \quad (43)$$

$$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} = (0.35 \pm 0.05) \cdot \left(\frac{z}{H}\right)^{-5/3} \quad (44)$$

2) $0.6 < z/H < 1$ については

$$\frac{u'}{U_f(U/U_f)^{1/3}} = (0.30 \pm 0.03) \cdot \left(\frac{z}{H}\right)^{-2/3} \quad (45)$$

$$\frac{L}{H(U/U_f)} = \frac{T_E}{H/U_f} = 0.15 \pm 0.03 \quad (46)$$

$$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} = (0.20 \pm 0.05) \cdot \left(\frac{z}{H}\right)^{-2} \quad (47)$$

また、(36)式における普遍定数 c を以上の関係式より求めると

$$c = 1.1 \pm 0.3 \quad (48)$$

となる。

5 おわりに

最近の計測技術の進歩に伴い水流についても気流を対象とした場合に比肩しうる乱れ計測の実施が可能となり、開水路流れの乱れ特性についての有効なデータが次第に蓄積されるようになってきている。本文は室内実験用としてもっとも一般に使用されているホットフィルム流速計による乱れ計測を基礎とし、主として慣性領域におけるスペクトル特性ならびに基本的乱れ特性量の鉛直分布特性について記述したものである。

開水路流れを対象とした乱れ計測は、現在、室内実験水路のほか実河川についても数多く実施されているが、評価時間の選定あるいは乱れ特性量の評価法は統一されていず、他研究によるデータ間の直接的な比較は困難な状態にある。このため本文では筆者らの計測結果のみによる検討をなすことになってしまっており、流速計の応答性についての検定ならびにデータ処理における種々の問題を含めた乱れ計測法の必要性が痛感される。

最近の乱流現象に関する研究には、ここで取り上げた乱れ計測による実験的検討のほか、乱れの発生・発達機構に関する決定論的検討、乱流モデルによるシミュレーション的検討など種々の観点からの検討がなされており、それぞれの成果に大きな期待が寄せられている。

参考文献

- 1) Rouse, H. and S. Ince: History of Hydraulics, Iowa Institute of Hydraulic Research, State University of Iowa, 1957.
- 2) Reynolds, O.: An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels, Phil. Trans. Roy. Soc., A-174, pp.55~105, 1883.
- 3) Dryden, H.L.: Transition from laminar to turbulent flow (Turbulent Flows and Heat Transfer, edited by C.C. Lin), Princeton University Press,

pp.3~74, 1959.

- 4) 巽友正:乱流, 新物理学進歩シリーズ6, 槇書店, 1962.
- 5) Boussinesq, J.: Essai sur la théorie des eaux courantes, Mémoires Présenté par Divers Savants à l'Académie des Sciences, **23**, 1877.
- 6) Prandtl, L.: Bericht über untersuhungen zur ausgebildeten turbulenz, Z.a.M.M., **5**, pp.62~74, 1925.
- 7) Kármán, Th.von: Mechanische ähnlichkeit und turbulenz, Venh.3, Intern. Kongr.für Techn.Mech., Stokholm .Teil I, pp.85~93, 1930.
- 8) Zagustin, A. and K. Zagustin: Analytical solution for turbulent flow in Pipes, La Houille Blanche, **1969-2**, pp.113~118, 1969.
- 9) Taylor, G.I.: Diffusion by continuous movements, Proc. Lond. Math. Soc. **2**, **20**, pp.196~211, 1921.
- 10) Taylor, G.I.: Statistical theory of turbulence, Parts I~IV, Proc. Poy. Soc., A-**151**, pp.421~478, 1935.
- 11) Kármán, Th. von and L.Howarth: On the statistical theory of isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc., A-**164**, pp.192~215, 1938.
- 12) Kolmogorov, A.N.: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S., **30**, pp.301~305, 1941.
- 13) Kolmogorov, A.N.: On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid, Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'U.S.S., **31**, pp.538~540, 1941.
- 14) Kolmogorov, A.N.: Dissipation of energy in locally isotropic turbulence, Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S., **32**, pp.16~18, 1941.
- 15) 日野幹雄: 河川の乱流現象, 1966年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会, **66-07**, 1966.
- 16) 今本博健, 上野鉄男, 浅野富夫: 開水路流れにおける乱れの空間構造について(3), 京都大学防災研究所年報, 第16号B, pp.505~519, 1973.
- 17) Hinze, J.O.: Turbulence, An Introduction to Its Mechanism and Theory, McGraw-Hill, New York, 1959.
- 18) Obukhov, A.M.: On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow, Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'U. R.S.S., **32**, 1941.
- 19) Heisenberg, W.: Zur statistischen theorie der turbulenz, Zeit. Phys., **124**, 1948.
- 20) Weizsäcker, F.C.von: Das spectrum der turbulenz bei grossen Reynold-schen zahlen, Zeits, Phys., **24**, 1948.
- 21) Kovaszny, L.S.G.: Spectrum of locally isotropic turbulence, Jour.

Aero. Sci., **16**, 1948.

- 22) Lumley, J.L. and H.A. Panofsky: The Structure of Atmospheric Turbulence, Interscience Publishers, Division of John Wiley & Sons, New York, 1964.
- 23) 井上栄一: 乱れの最小乱子について, 東大理工研報告, **4**, pp.194~200, 1950.
- 24) 今本博健: 開水路流れの乱れに関する水理学的研究, 京都大学学位論文, 1971.
- 25) Lumley, J.L.: Theoretical aspects of research on turbulence in stratified flows, Proc. Int. Coll. Atmos. Turbulence and Radio Wave Propagation (Yaglom, A.M., Tatarsky, V.L., Eds., Nauka, Moscow) pp.105~110, 1967.
- 26) Ogura, Y.: The relation between the space-and time-correlation functions in a turbulent flow, Jour. Meteor. Soc. Japan, **31**, pp.355~369, 1953.
- 27) Gifford, F.Jr.: The relation between space and time correlations in the atmosphere, Jour. Meteor. **13**, pp.289~294, 1956.
- 28) Townsend, A.A.: The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge Univ. Press, 1956.
- 29) Goldstein, S.: Modern Developments in Fluid Dynamics, Vol.1, Oxford at the Clarendon Press, 1938.
- 30) 今本博健: 開水路流れにおける乱れの基本的特性について, 土木学会論文報告集, 第197号, pp.83~91, 1972.
- 31) Monin, A.S. and A.M. Obukhov: Basic regularity in turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere, Trudy Geophy. Inst. ANSSSR, **24**, 1954.
- 32) Engelund, F.: Dispersion of floating particles in uniform channel flow, Jour. Hydr. Div., Proc. ASCE, **95**, HY4, pp.1149~1162, 1969.
- 33) Hay, J.S. and F. Pasquill: Diffusion from a fixed source at a height of a few hundred feet in the atmosphere, Jour. Fluid Mech., **2**, pp.229~310, 1957.
- 34) Smith, F.B.: The effect of sampling and averaging on the spectrum of turbulence, Quart. Jour. Roy. Met. Soc., **88**, pp.177~180, 1962.
- 35) 今本博健, 浅野富夫: 開水路流れにおける乱れの普遍的特性について, 第19回水理講演会論文集, 土木学会水理委員会, pp.161~166, 1975.
- 36) Kim, H.T., S.J. Kline and W.C. Reynolds: The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer, Jour. Fluid Mech. **50**, pp.133~160, 1971.
- 37) Dryden, H.L.: A review of the statistical theory of turbulence, Quat. Appl. Math., Providence, R.I., **1**, pp.7~42, 1943.