

水中における微粒子の挙動

楠 田 哲 也

§ 1. 序

水質汚濁問題は、汚濁物質の発生、輸送、貯留および生物系への影響等、広汎な問題を包含しており、この問題の解決には多方面からのアプローチが必要になっている。水工学で取扱わねばならない問題に限定しても、沈降、凝集、沈積、再浮上、拡散・分散、輸送等があり、極めて複雑になっている。このため、この問題の全体を通して解決されるには至っていない。

汚濁物質は大きく分けて、溶解性物質と懸濁物質がある。後者は、粒子への重力の影響および粒子の大きさが流れの場に及ぼす効果を見捨てることが少なくないため、その取扱いは、流体とともに移動する前者に較べて若干複雑になる。ここでは懸濁物質に視点をあて、沈降、凝集、再浮上、分散等の問題を順次考えていくことにする。

§ 2. 単一粒子の挙動

2-1. Stokes 近似

Navier-Stokes の式において、粘性項に比べ非線形慣性項の影響が極めて小さく無視できる（レイノルズ数 $Re \ll 1$ ）とすれば、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (2-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2-2)$$

なる線形化された式を得る。この近似を Stokes 近似という。時間に関して定常状態であると (2-1) は

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (2-3)$$

(2-1) あるいは (2-3) の div をとり、div と Δ の演算順序を逆にしうること、および (2-2) から

$$\Delta p = 0 \quad (2-4)$$

を得る。つまり、おそい流れ (Creeping Flow という) の圧力場はポテンシャル場である。

軸対称流れの場合には (2-2) から流れ関数 ψ の導入が可能となる。(2-1) を流れ関数を用いて表わすと

$$D \left(D - \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0 \quad (2-5)$$

ただし、極座標 (r, θ, φ) のもとでは

$$D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (2-6)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ u_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

(2-3) を流れ関数を用いて表わすと

$$D^2 \Psi = 0. \quad (2-8)$$

2-2. 静水中に存在する単一粒子による流れの場合

$r \rightarrow \infty$ で $\mathbf{u} = 0$ となる流れの場に存在する球の中心に座標原点をとり、球の移動速度を $\mathbf{v}$ とするとき $\mathbf{v}$ の正の方向から角 θ をとることにすれば、境界条件は、

$$u_r = V \cos \theta, \quad u_\theta = -V \sin \theta \quad (2-9)$$

(2-5) を解くことはかなり複雑なので成書⁽¹⁾にゆずることにし、ここでは(2-8)を考えることにする。 $\Psi = f(r) \cdot \sin^2 \theta$ とおくことにより(2-8)を解くことができ、境界条件を満足する解は、次式のように得られる。

$$\Psi = \frac{1}{4} V a^2 \sin^2 \theta \left(-\frac{3r}{a} - \frac{a}{r} \right) \quad (2-10)$$

(2-7) と (2-10) から

$$u_r = V \cos \theta \left(\frac{3}{2} \frac{a}{r} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right) \quad (2-11)$$

$$u_\theta = -V \sin \theta \left(\frac{3}{4} \frac{a}{r} + \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \right). \quad (2-12)$$

(2-11), (2-12) をまとめると

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \left(\frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3} \right) + \mathbf{r} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r^2} \left(\frac{3a}{4r} - \frac{3a^3}{4r^3} \right). \quad (2-13)$$

圧力 P は (2-3), (2-11) と (2-12) から

$$P = P_0 + \frac{3\mu V a \cos \theta}{2r^2}. \quad P_0: \text{静圧} \quad (2-14)$$

(2-11), (2-12), (2-14)から解るように, 定常状態の流れの場合は球の前後で対称であり, まったく等しいが, P_θ を除いた圧力場は逆対称になっている。

球の抗力 D およびトルク T は, 応力テンソルを P として

$$D = \int_S P \cdot dS \quad (2-15)$$

$$T = \int_S r \times (P \cdot dS) \quad (2-16)$$

今の場合, $T = 0$ であり, 球の進行方向についての D の成分 D_S は (2-15) から

$$D_S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (-P \cos \theta + \tau_{r\theta} \sin \theta) a^2 \sin \theta d\theta. \quad (2-17)$$

(2-11), (2-12), (2-17) から

$$D_S = 6 \pi \mu a V \quad (2-18)$$

となる。この D_S の $1/3$ は (2-17) の右辺 () 内の第 1 項の圧力項に, $2/3$ は第 2 項の $\tau_{r\theta}$ の項に由来するものである。(2-13) により, $R_e \ll 1$ の場合, 球の運動による周囲への流速の影響の伝わり方は $O(r^{-1})$ であり, 極めて遠方まで伝わることを, および単位時間当りの流体を移動させる量は $O(R^2)$ となり, 発散することが解る。(2-18) と球の水中での見かけ重量が相等しいとおくことから Stokes の沈降速度式を得る。

$$V = \frac{2}{9} \frac{\rho_p - \rho_w}{\rho_w \nu} g a^2 \quad (2-19)$$

粒子の流体中での抵抗係数を C_D とすれば, 一般の場合の粒子の沈降速度式は

$$V = \left[\frac{4}{3} \frac{g}{C_D} \frac{\rho_p - \rho_w}{\rho_w} (2a) \right]^{1/2}. \quad (2-20)$$

粒子が球の場合には, $R_e \ll 1$ のとき $C_D = 24 R_e^{-1}$ となる。

$R_e \gg 1$ の場合には, $C_D = \text{const}$ となり, $10^3 < R_e < 2 \cdot 10^5$ で $C_D = 0.3 \sim 0.4$, $R_e > 2 \cdot 10^5$ で $C_D = 0.2$ となる。これは, $R_e = 2 \cdot 10^5$ 付近で, 球面上の境界層が層流から乱流に変わるため剥離点の後退することによる。 $R_e \gg 1$ の場合に球の運動にともない球についてともに移動する流体量を求めるため, 図-1 に示すような円筒形の検査面を考える。このとき, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ により円筒の側面から出る流量は単位時間当り $2\pi \int r (U_\infty - u) dr$ であり, この側面での流速を U_∞ と近似すると, この面から出ていく流れ方向の運動量は $2\pi \rho_w \int r U_\infty (U_\infty - u) dr$ となる。球の抗力は運動量保存則から

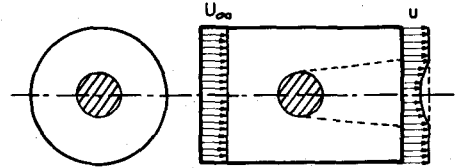


図-1 検査面

$$D = 2\pi \rho_w \int r u (U_\infty - u) dr. \quad (2-21)$$

後流の欠損流速を $u' = U_\infty - u$ とすれば、近似的に

$$D = 2\pi\rho_w U_\infty \int r u' dr \quad (2-22)$$

$C_D = 0.3$ とし、 $u' = \text{const.}$ とすれば

$$0.15 (U_\infty a^2) = u' r^2 \quad (2-23)$$

となり、欠損流量は15%程度となる。この値は $R_e \ll 1$ の場合と極めて異なっており、 $R_e \gg 1$ の場合には粒子の沈降による影響範囲の狭いことを示している。このことから干渉沈降に対する R_e 数の影響は、 R_e 数が大になるほど小になることが予想される。 R_e 数が中間の値の場合には

$$C_D = 24 R_e^{-1} + 3 R_e^{-1/2} + 0.34 \quad (2-24)$$

で近似的に表わされる。沈降速度と C_D の関係⁽²⁾および、粒子形状が球形からはずれる場合の影響については文献⁽³⁾を参照されたい。

2-3. 剪断流中に存在する単一粒子による流れの場合

剪断流として一様変形流を考え、この変形の主軸を座標軸とする適当な直交座標系にて表わすと

$$\mathbf{u} = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z) \quad (2-25)$$

となり、(2-2)から $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の間には

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (2-26)$$

なる関係がある。(2-25)を回転対称な2つの部分に分け

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ &= \left(-\frac{\alpha_1}{2}x, -\frac{\alpha_1}{2}y, \alpha_1 z\right) + \left(-\frac{\alpha_2}{2}x, \alpha_2 y, -\frac{\alpha_2}{2}z\right) \end{aligned} \quad (2-27)$$

ここで、 $\alpha_1 = \frac{2}{3}(\lambda_2 - \lambda_1)$ 、 $\alpha_2 = \frac{2}{3}(\lambda_3 - \lambda_1)$ 。

(2-3)が線形であることから、(2-27)の右辺のどちらか一方を求めれば、座標変換の後、重畳することにより、任意の一様変形流の流速分布が求められる。(図-2参照)

境界条件として

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty \text{で、} & \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \\ r \rightarrow a \text{で} & \mathbf{u} = 0 \end{aligned} \quad (2-28)$$

のもとで、(2-8)を解くと

$$\psi = \frac{1}{2}\alpha_1 r^3 \left\{ 1 - \frac{5}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^5 \right\} \cos\theta \sin^2\theta \quad (2-29)$$

$$P = P_0 - \frac{5}{2}\alpha_1 \mu (2 \cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad (2-30)$$

一様剪断流は、(2-27)において $\alpha_1 = -\alpha_2$ とすることにより得られる。この解を $\phi = 0$ の回りに $-\pi/4$ だけ回転させた座標系から見ると図-7中の破線に示すように流れの閉じた領域が生じる。

§ 3. 二粒子の挙動

3-1. 二球が存在する場合の流れの場合

本節においても R_e 数は極めて小さく、粒子の慣性も小さく無視しようとする。運動方程式と連続の式としては(2-3)と(2-2)を用いる。これらの式が線形であることから、これらの式中の u は、粒子が流れの場に存在しない場合の流速 u_0 と圧力 P_0 を差し引いた残りの成分を示しているとしてもさしつかえない。各瞬間の粒子の速度を(2-2)、(2-3)を用いて求め、各粒子の軌跡を定めることができる。流体及び粒子の慣性を無視していることから、この軌跡は、瞬間瞬間で定められていくもので、ある時刻の速度は過去の運動の経過を含んでいない。このような解を準定常解という。

図-3に示すように2球の中心を結ぶ線を Z 軸とする円筒座標を、双極座標⁽⁴⁾で表わすと、 a_I, a_{II} を球 I, II の半径として

$$\begin{aligned} \omega &= c \sin \eta (\cosh \xi - \cos \eta)^{-1}, \\ Z &= c \sinh \xi (\cosh \xi - \cos \eta) \end{aligned} \quad (3-1)$$

ただし、

$$h_I^2 - a_I^2 = h_{II}^2 - a_{II}^2 = c^2 \quad (3-2)$$

この座標系によると、球 I, II の境界は $\xi = \alpha_I, -\alpha_{II}$ で与えられる。(2-2)、(2-3)を双極座標のもとで解くと

$$P = (\mu/c) \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{S}_k^0 \sin k \theta + \bar{S}_{-k}^0 \cos k \theta) \quad (3-3)$$

$$\begin{aligned} u_{\omega} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \{ (\omega/c) \bar{S}_k^0 + S_k^{+1} + S_k^{-1} \} \sin k \theta \\ &+ \{ (\omega/c) \bar{S}_{-k}^0 + S_{-k}^{+1} + S_{-k}^{-1} \} \cos k \theta \end{aligned} \quad (3-4)$$

となり、 u_{θ}, u_z についても類似の式が得られる。⁽⁵⁾

ここで、

$$S_m^i = (\cosh \xi - \cos \eta)^{1/2} \sum_{n=|m|+i}^{\infty} \{ A_{mn}^i \cosh(n + \frac{1}{2}) \xi + B_{mn}^i \sinh(n + \frac{1}{2}) \xi \} P_n^{|m|+i}(\cos \eta) \quad (3-5)$$

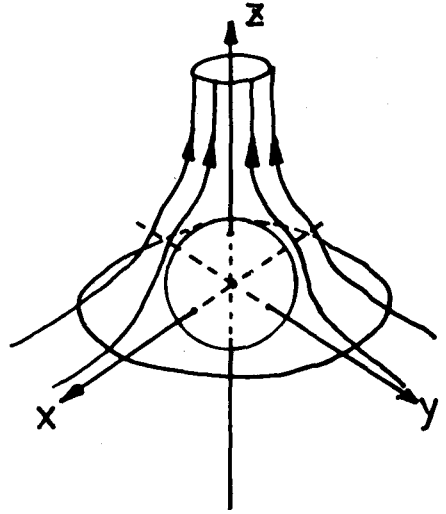


図-2 球の回りの一様変形流

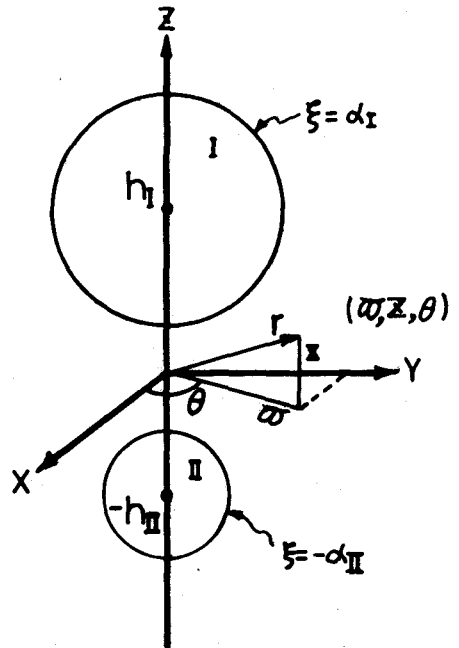


図-3 二球の双極座標表示

$-\infty < m < \infty$, $P_n^{|m|}(\cos \eta)$ は第一種の Legendre 陪関数, A_{mn}^i , B_{mn}^i は球面上で no-slip の境界条件と (2-2) から決められる定数。

各球に作用する応力とトルクは (2-15), (2-16) から求めることができる。この方法の欠点は, 2 球が接した場合に解としての級数の収束性が悪くなることである。なお, この欠点を補うために, 種々の手法が考えられている。(6)

3-2. 静水中における二球の沈降

静水中に沈降している球に作用するトルクは, 粒子の慣性を無視しうとしていることから, $T=0$ であり外力は重力によるもののみとなる。ある瞬間において二球の中心を結ぶ線が重力方向に関して角 θ をなしている場合, 二球の沈降は, 二球の中心を結ぶ線に平行な運動とこの線に垂直で, この線と重力の方向を含む面内の運動とに分離できる。(図-4 参照) 前者は, 球の移動方向に対して流れの場が軸対称であることから, 球は非回転となる。したがって, 重力の成分として $g \cos \theta$ を考えることにより解を求めることができる。(7) 後者の回転を伴う運動はさらに 2 種に分けられる。第 1 は, ある外力 F_i^t , $F_{\parallel}^t$ のもとで球の回転を止めるに必要なトルク T_i^t , $T_{\parallel}^t$ を加えて沈降させる場合であり, 第 2 は球を移動させないで Ω_i , $\Omega_{\parallel}$ なる角速度で回転させた場合である。この場合, 単位角速度を与えるに必要なトルクを T_i^r , $T_{\parallel}^r$ とし, このとき発生する応力を F_i^r , $F_{\parallel}^r$ とする。球, $i = I, II$ について

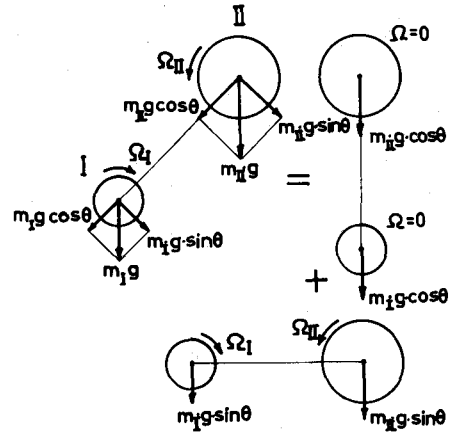


図-4 二球の沈降の力学的分割

$$F_i = F_i^t + F_i^r \Omega_i = \frac{4}{3} \pi a_i^3 (\rho_{pi} - \rho_w) g \sin \theta \quad (3-6)$$

$$T_i = T_i^t + T_i^r \Omega_i = 0 \quad (3-7)$$

が成立するように定めれば, 後者の回転を伴う沈降の解が得られる。これらをすべて合成すれば, 静水中における二球の沈降についての解が得られる。(8)

等密度, 等径の二球が鉛直あるいは水平にならんだ場合の沈降速度と球中心間距離の関係を図-5 に示す。鉛直にならんで沈降する場合は単調関数であるが, 水平にならんで沈降する場合には, 球が無限に離れた場合と接した場合に $\Omega = 0$ となることから, $(h_1 + h_2)/2a = 1.0050$ で極大値を有する。

次に球径および密度が異なる場合の例を図-6 に示す。(9)

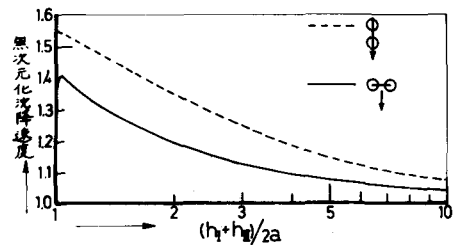


図-5 特別な場合の二球無次元化沈降速度

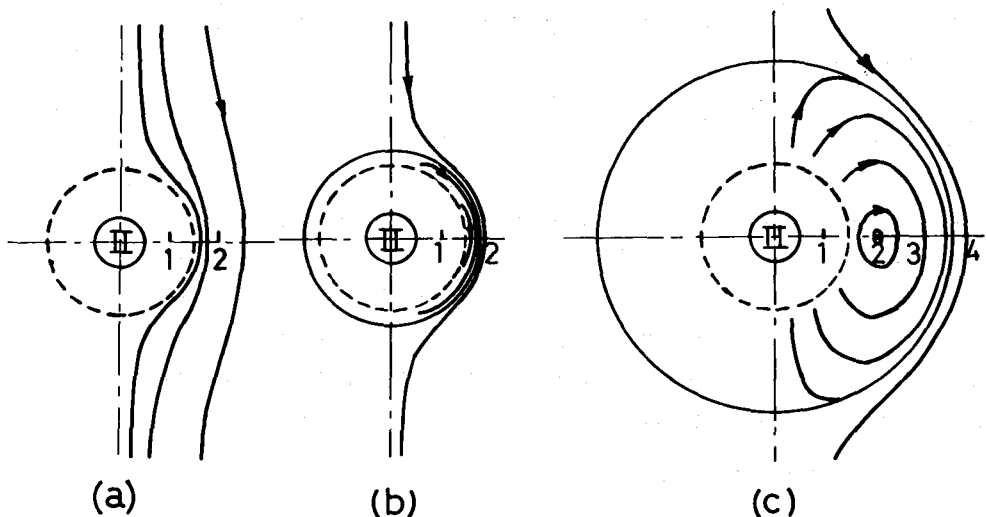


図-6 粒子間に密度差のある場合の二球の沈降

$$I = (\rho_{p1} - \rho_w) / (\rho_{p1} - \rho_w) \quad (3-8)$$

として、 $a_1/a_1 = 0.5$ のとき (a) $I = 1.5$, (b) $I = 2.0$, (c) $I = 3.0$ について球Ⅱの中心を原点にとって示す。球径と密度の値により、二球の中心間を結ぶ線に平行な速度 $\hat{V}_p$ と鉛直面内のこの線に垂直な速度 $\hat{V}_v$ が $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の間で正あるいは負となることがある。(a)は $\hat{V}_p, \hat{V}_v$ がともに負の場合、(b)は $\hat{V}_v$ が負で $\hat{V}_p$ が正になることがある場合、(c)は $\hat{V}_v, \hat{V}_p$ がともに正になることがある場合である。 $\hat{V}_p$ の負とは二球が近づく場合、 $\hat{V}_v$ が負とは球Ⅱの方が早く沈降する場合を意味する。

3-3. 剪断流中における二球の挙動

本節においては球の密度は流体の密度に相等しいとする。したがって球に作用するトルクおよび外力は常に

$$T_I = T_{II} = F_I = F_{II} = 0 \quad (3-9)$$

とおける。(3-9)により得られた解の一例を図-7⁽¹⁰⁾に示す。この場合、二球の径は相等しい。球の中心の軌跡が閉じる場合があり、この閉じた軌跡(実際は面をなしている)を通しての物質交換が起りえないことを示している。このことは図-6においても見られる。

§ 4. 有限個の粒子の挙動

$R_e \ll 1$ なる流れの場に粒子が三個以上存在し、これら粒子間の相互作用が無視できない場合には、各々の影響を重ね合せて近似解を求めることができる。(Method of Reflectionという)。ここでは

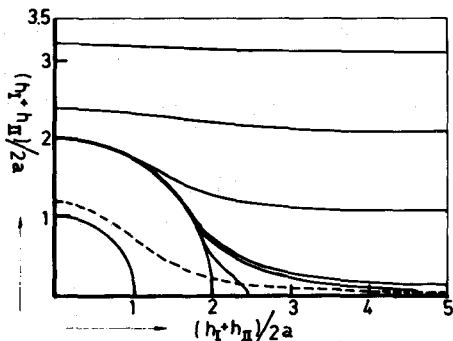


図-7 一様剪断流中の二球の軌跡

$r \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow 0$ となる流れの場における球の沈降の場合を例にとりて説明する。簡単のために球の回転運動は考えないことにし、さらに以下の二つの仮定をおく。

- (1) それぞれの球は、その半径に比較して球間が充分離れており、他の球による各球の移動速度は、それ自身の球がないときの中心流速としてもさしつかえない。
- (2) 他の球から着目している球に、流体の歪をとおして作用する応力は、着目している球を——他の球の位置関係はそのまま保持して——取り除いたときに、この着目している球の中心であった点での流体の応力テンソルが同一であるような **uniform** な流れの場のもとで求めうる。

(1) の仮定が適用可能であるためには球間が球径に比較して充分離れていなければならない。(2) の仮定では球が有限の大きさを有するため応力の二階微分のオーダーの項が無視されることになる。

(2-2), (2-3) および沈降による球面上での境界条件は線形であるから、境界条件をいくつかに分解し、それに応じて、粒子の移動速度 v も分解して考えることができる。

$$v = v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)} + \dots \quad (4-1)$$

第一次近似 $v^{(1)}$ としては各球の単粒子沈降によるものとなる。単粒子降速度を $V_{0I}, V_{0II}, V_{0III}, \dots$ とすれば、

$$v_I^{(1)} = V_{0I} \quad \text{球 I 上にて} \quad (4-2)$$

他の球 II, III, ……が存在することから、他の球では

$$\left. \begin{aligned} v_{II}^{(1)} &= V_{0II} && \text{球 II 上にて} \\ v_{III}^{(1)} &= V_{0III} && \text{球 III 上にて} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

第二次近似 $v^{(2)}$ としては、(4-3) の影響が球 I に伝わってくることから、

$$v_I^{(2)} = v_I^{(1)} + v_{III}^{(2)} + \dots \quad \text{球 I にて} \quad (4-4)$$

他の球についても同様である。

第三次近似 $v^{(3)}$ は、 $v_I^{(1)}$ の影響が他球に伝わり、他球の境界条件 (球面上にて **no-slip**) を満足させるために他球の境界で付加される歪の球 I への直接のはね返り分の和 $v_I^{(3)}$ となる。この $v_I^{(3)}$ が球 I での境界条件を満足するように付加される歪が他球に影響を及ぼし、直接球 I に返ってくる影響は第五次近似の一部を構成する。球 I についての第 n 次近似とは、球 I を含めた任意の球の影響が他の球へ伝わることを一本の矢で表わすとき球間を結ぶ矢の数が $(n-1)$ 本になる影響のすべての和となる。

この方法においては $v^{(2)}$ のオーダーが r^{-1} であるから球が無限個存在すれば $v^{(2)}$ は発散する。この発散防止法については次節にて述べる。

(2-13) において球間が球径に比較して充分離れているとして $O(r^{-2})$ 以上を無視すると、

$$u = \frac{3a}{4r} \left[v + r \frac{r \cdot v}{r^2} \right] \quad (4-5)$$

第二次近似までを考え、球が n 個あるときのある球に作用する応力は、 $r_{ij} = r_i - r_j$ として、

$$F = -6\pi a\mu \left(\mathbf{v}_i - \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{3a}{4r_{ij}} \mathbf{v}_j - \frac{3a}{4r_{ij}^3} (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{r}_{ij} \right\} \right). \quad (4-6)$$

球が三個存在する場の相対運動を(4-6)を解いて求めた例を図-8に示す。⁽¹¹⁾ (4-6)ではFと $\mathbf{v}_j$ とは線形結合になっているのでFの値の変化は時間スケールのみを変えるだけで修正しうる。図-6の(b), (c)の例は、当初近づきあった二球が後には必ずしも早く落ちるとは限らない結果を示している。この計算結果は実験結果とは異なっており $O(r^{-2})$ 以上の項の省略が無理であることを物語っている。

§ 5. 干 渉 沈 降

5-1. 空間率関数

流体中に存在する粒子の濃度が大きくなるにしたがい粒子間の相互作用(干渉)が無視できなくなり、干渉沈降となる。無限の拡がりをもつ流体中に有限個の粒子しか存在しない場合にはある種の密度流となり粒子群の沈降速度は増加する。しかし、流体場の中に粒子が一様に分布している場合には、粒子の沈降速度は減少する。このため粒子濃度が充分大きいと粒子群は界面を形成して沈降することになり、これを界面沈降と称する。

R_e 数と干渉沈降速度の関係について考察することにする。粒子は球形で、径と密度は一定とする。懸濁液の見かけ密度 ρ_a は ϵ を空隙率として

$$\rho_a = \epsilon \rho_w + (1 - \epsilon) \rho_p. \quad (5-1)$$

懸濁液の流速を Q 、固相、液相の体積速度を Q_p 、 Q_w とすれば、

$$\left. \begin{aligned} Q_p &= (1 - \epsilon) v, & Q_w &= \epsilon u \\ Q &= Q_p + Q_w \end{aligned} \right\} \quad (5-2)$$

であり、しかも

$$\nabla \cdot Q = 0 \quad (5-3)$$

懸濁液に固定した座標から見た沈降速度 $\mathbf{v}_s$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s &= \mathbf{v} - Q \\ &= \epsilon (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (5-4)$$

粒子に作用する外力と坑力の関係は、場の密度を考慮して

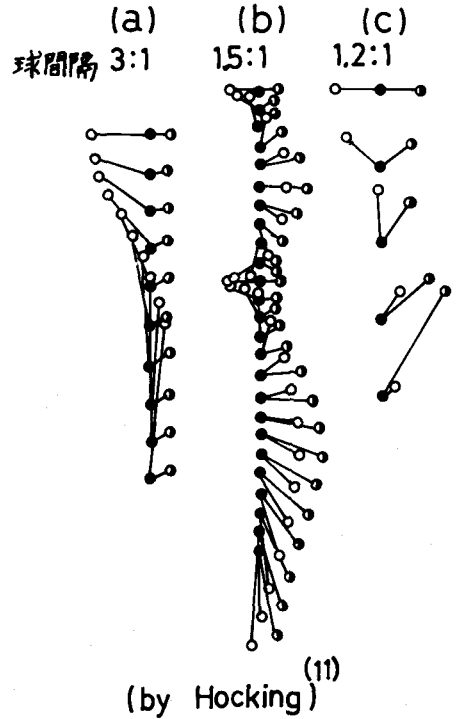


図-8 三球の沈降

$$(\rho_p - \rho_a) \frac{4}{3} \pi a^3 \vec{g} = \frac{1}{2} \rho_w C_D A (\mathbf{v} - \mathbf{u}) |\mathbf{v} - \mathbf{u}| \quad (5-5)$$

単粒子沈降速度を V_0 とし、(5-5) を整理すると、(2-20) を考慮して

$$\left. \begin{aligned} V_s / V_0 &= \varepsilon^2 & R_e &\ll 1 \\ V_s / V_0 &= \varepsilon^{3/2} & R_e &\gg 1 \end{aligned} \right\} \quad (5-6)$$

ここで、(5-6) の右辺は空間率関数と称されるものの逆数になっている。また、 R_e 数が大になるほど沈降速度が増すことを示しており前述の予測と一致する。しかしながら、ここで述べた考え方には粒子間の相互作用は懸濁液の平均密度を通してのみしか入っていない欠陥がある。干渉沈降についての解析的な研究は複雑なためほとんどなされていないので化学工学の分野では実験を中心として空間率関数が求められている。代表的なものには

$$\left. \begin{array}{ll} \varepsilon - 2.10^{1.82(1-\varepsilon)} & \text{Steinour} \\ \varepsilon - 4.5 & \text{Fair} \\ \varepsilon - 4.65 & \text{層流} \\ \varepsilon - 2.97 & \text{遷移領域} \\ \varepsilon - 2.32 & \text{乱流} \end{array} \right\} \text{Lewis \& Bowerman} \quad (5-7)$$

がある。詳細については文献^[12]を参照されたい。沈降による粒子の flux は $(1 - \varepsilon) V_s$ として求めることができ、 R_e 数が大きいくほど ε が小なるところに極大値が生ずる。

5-2. 濃度が希薄な場合の近似解

$R_e \ll 1$ で、かつ粒子濃度が希薄であるため § 4 で述べた第三次近似は着目している球の最近傍の球のみを考慮することで満足しうる場合を考える^[13]。球径および密度はすべて相等しいとする。

(イ) 第一次近似

$$\mathbf{v}^{(1)} = V_0 \quad \mathbf{v} \quad (5-8)$$

(ロ) 第二次近似

他の球から着目している球への影響は § 4 の仮定(1)とは異なり、場の歪までを考える。 A_0 を球の表面として、

$$\mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{A_0} \mathbf{u}(\mathbf{x}) dA \quad (5-9)$$

ここで、 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ は、 $\mathbf{x}_0$ に存在している球を他の球の配置を変化させずに取り除いたときの $\mathbf{x}$ での流速である。(5-9) を Taylor 展開すれば、

$$\mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{6} a^2 \{ \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (5-10)$$

(2-13) を原点に中心がある球殻について積分すると、 $V(a/r)$ となり、これを r について積分し、

粒子の個数濃度 n を乗ずると、(5-10) の右辺第一項の $u(x_0)$ を求めることができるが、前述のようにこの値は発散する。この発散を防止するため次のように考える。まず原点での球の有無の存在確率が $4/3 \pi a^3 n$ であるときの平均速度、換言すれば、任意の点での空間平均速度は

$$n \int_0^a v_0 \cdot 4\pi r^2 dr + n \int_a^\infty (a/r) v_0 \cdot 4\pi r^2 dr. \quad (5-11)$$

一方、原点に球が存在すれば、 $r \leq 2a$ には球が入り得ないので、第二次近似としての影響は

$$n \int_{2a}^\infty (a/r) v_0 \cdot 4\pi r^2 dr \quad (5-12)$$

でしかない。懸濁液の平均速度は 0 であるから、第二次近似は (5-12) から (5-11) を減じたものとなる。この結果は c を $(4/3) \pi a^3 n$ として、

$$v_1^{(2)} = -\frac{11}{2} c v_0 \quad (5-13)$$

さらに (5-10) の右辺第二項は、球が確率的に均一に分布した流れの場の静圧を差し引いた圧力の fluctuation の勾配は random で空間平均が 0 となるという考え方のもとで同様な計算により

$$v_2^{(2)} = -\frac{1}{2} c v_0. \quad (5-14)$$

(c) 第三近似

前述の仮定から、第三近似は二体問題として考えうる。§ 2 の結果から、等径、等密度の場合の沈降では球の configuration に変化がなく、二球の沈降速度は、球中心間を結ぶ線に平行な速度の係数を γ_1 、垂直なものの係数を γ_2 とすれば、

$$v(r) = \gamma_1 r \frac{r \cdot v_0}{r} + \gamma_2 \left(v_0 - r \frac{r \cdot v_0}{r^2} \right). \quad (5-15)$$

(5-15) を原点に中心をもつ球殻に関して積分すると

$$v(r) = \frac{1}{3} \gamma_1 v_0 + \frac{2}{3} \gamma_2 v_0 \quad (5-16)$$

ここで、 $v^{(3)} = v - v^{(1)} - v^{(2)}$ として $v^{(3)}$ を求めると

$$v^{(3)} = 1.55 c v_0. \quad (5-17)$$

(5-8)、(5-13)、(5-14)、(5-17) の和を求めると

$$v = v_0 (1 - 6.55 c). \quad (5-18)$$

前述の (5-7) の Lewis らの結果では $c = 1 - \epsilon$ として

$$v = v_0 (1 - 4.65 c) \quad (5-19)$$

一方、球を規則正しく配列し、体積濃度が0なるようにした場合について、重ね合せの方法で計算を行なうと

$$V \sim c^{1/3}$$

となり、指数のまったく異なった結果を得る。

5-3. 濃度分布がある場合の干渉

Navier-Stokes 式に相当する混相流の式は粒径を基準とする長さのスケールをどの程度として着目するかにより大幅に変化する。ここでは、(1)粒子は局所的に均等に分布し、互の衝突は無視できる、(2)速度、圧力は粒径より大きなスケールで変化する、(3)粒子に作用する応力は粒子濃度の関数と、粒子と流体の平均相対速度の関数の積で決まる、(4) R_0 数は小さいので混相流全体は密度流として振舞い、固相と液相の相対運動は準定常である、とすれば連続の式、運動方程式は、 μ_s 、 ϵ_0 を懸濁液の分子粘性係数および平均空隙率として

$$\nabla \cdot Q = 0$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \nabla \cdot Q_w = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (Q \cdot \nabla) Q = -\frac{1}{\rho_m} \nabla p - (\epsilon_0 - \epsilon)(\rho_p - \rho_w)g + \mu_s \nabla Q$$

$$\nabla p + \epsilon_0 (\rho_p - \rho_w) \vec{g} - \frac{\rho_p - \rho_w}{1 - \epsilon} \left| \frac{g}{V_0} \right| \{ (1 - \epsilon) \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_w \}$$

$$\times \epsilon^{-4.65} = 0 \quad (5-20)$$

(5-20)を二次元として扱い, $R_e = 1.0$, $V_o = 0.38 c m / s e c$ として

$$\epsilon = 0.70 + 0.01 \sin(2\pi x/l) \sin(2\pi y/l) \quad (5-21)$$

の初期条件のもとで数値計算を行なうと、1.25 秒後に図 9 の結果を得る。二次元の最密充填は $\epsilon = 0.093$ となる。初期における濃度 fluctuation は $\epsilon = 0.69 \sim 0.71$ であったものが、 $\epsilon = 0.9 \sim 1.0$ と増大している。この増大速度は、現象の非線形性により ϵ の小なる方が大なる方より大きくなっている。

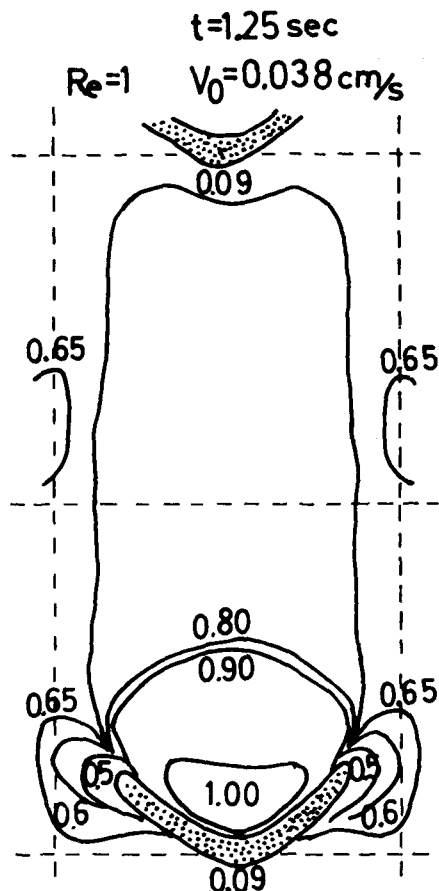


図-9 濃度分布のある干渉沈降

§ 6. 塩水による粒子の凝集

6-1. 凝集機構

流域から河川に流入した懸濁物質が河口感潮部に到達すると海水中に存在している N_a^{+} , M_g^{++} 等の陽イオンの作用を強く受け凝集が促進され沈降し易くなる。水中に存在する微粒子に作用する応力には次のものが挙げられる。

(1) Van der Waals 力 分子間の静電気力により dipole が生じ、この dipole 間の相互作用に起因する応力で r^{-7} に比例する引力である。

(2) Coulomb 力 粒子の電荷による静電力で r^{-2} に比例する。微粒子は通常負に帯電しているので斥力となる。

二粒子間の距離に対する位置のエネルギーは(1)と(2)の和になる。図-10のように、この和は極大値を有し、これより大きな運動エネルギーで粒子が接近するとき凝集が生じる。粒子周辺のイオン量およびイオン強度が増すほど、この極大値は小さくなる。

粒子を接近させ凝集を促進させるエネルギー源としては次のものが挙げられる。

(1) Brown 運動

熱運動による水分子の粒子への衝突の不均一性により生じる粒子の運動エネルギーである。粒子間の衝突頻度 N は、分子拡散係数を D とすれば、

$$N = 16 \pi D a n^2. \quad (6-1)$$

水中では、 $D \approx 10^{-13} (2a)^{-1}$ として

$$N \approx 8 \pi \cdot 10^{-13} n^2. \quad (6-2)$$

(2) 流体の運動

粒子が流体によって運動している場合に、粒子を接近させる相対運動は、一様変形流として与えられる。Camp⁽¹⁴⁾らは半径が a_1 , a_2 , 個数濃度が n_1 , n_2 である二種の球の混合液において粒子間に相互作用がないとした上で一様剪断流の場合の衝突頻度を導いている。

$$N = n_1 n_2 \frac{4}{3} G (a_1 + a_2)^3 \quad (6-3)$$

粒径が乱流の Micro-Scale より充分小さいとすれば、 W を単位時間、単位体積当りのエネルギー散逸量として、

$$G^2 = W / \nu. \quad (6-4)$$

一様剪断流の場合には

$$G = du/dy. \quad (6-4')$$

粒子間に相互作用がある場合には § 2 で述べたように粒子は互に迂回するため a_1/a_2 の関数の係数 α

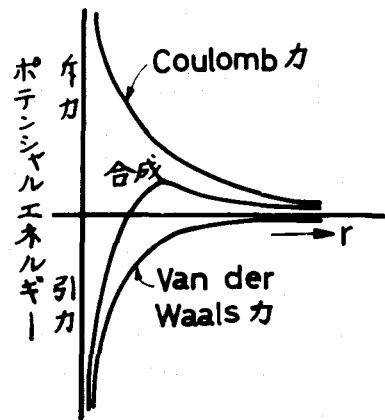


図-10 ポテンシャルの合成

を(6-3)に付け加える。

$$N = \alpha \cdot n_1 n_2 \frac{4}{3} G (a_1 + a_2)^3. \quad (6-5)$$

(3) 粒子間の沈降速度差

各粒子は単粒子沈降を行ない、しかも粒子間に相互作用がないとする。二種の球を考えると(6-3)に相当する式は

$$N = n_1 \cdot n_2 \pi (a_1 + a_2)^2 |V_1 - V_2|. \quad (6-6)$$

§2で述べたように、二球の沈降の場合には、(3-8)の I および球径比により粒子のfluxが0となる面が生じることもあり、(6-6)のように一般には表わせない。しかしながら実用上では粒子形は球とはかなり異なっていること、および粒子が若干の透水性を有していること⁽¹⁵⁾等の理由により(6-5)のように係数を付して使用されている。

6-2. 塩水による粘土の凝集

河口感潮部あるいは海域における無機質の微粒子、特に粘土としては、ベントナント、カオリナイト、イライト等が考えられる。懸濁質としてベントナントを用い、所定の塩水密度、濁質濃度、攪拌強度のもとで凝集成長させ、平均粒径 d_{50} の時間変化を求めた結果を図-11に示す。塩水密度が大なるほど成長が早くしかも最大径が大きく、最大径への到達所要時間も短くなっている。塩水密度が10025でもほぼ200分で最大粒径に到達していることから干満の時間の $1/2$ の約3時間で流体の剪断運動に起因するフロックの成長が起り得ることが推察される。淡水中では、攪拌強度、濁質濃度を同一にとってもフロック形成がほとんど行なわれない。このため、微粒子が河口において塩水に出会うことにより、初期の平均径 $10\mu m$ 程度から、 $0.5 \sim 1.0mm$ 程度まで径で約100倍近く成長することになる。この場合のフロック径と沈降速度との関係は図-12に示すように、

$$V = V_0 (a/a_0) \quad (6-7)$$

ここで、 V_0 は径が a_0 のフロックの沈降速度、なる注目すべき結果となる。本例では直径 $0.1mm$ のフロックの沈降速度は約 $0.1mm/sec$ 、 $1mm$ のものは $1mm/sec$ 程度となる。したがって粒子の沈降速度も当初の約100倍程度になることになる。このような関係が生じる理由は、フロックの場合にはフロック径が大になるほど内部構造が粗になりみかけ密度が減少することによる。通常の固体粒子の沈降速度は $R_g \ll 1$ の場合(2-19)に示すように $V \sim a^2$ になるのとは、か

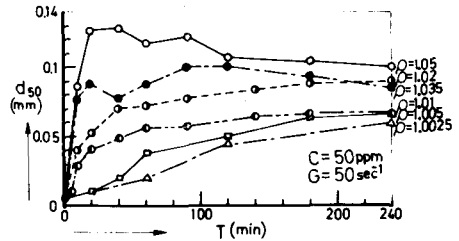


図-11 成長フロックの平均径

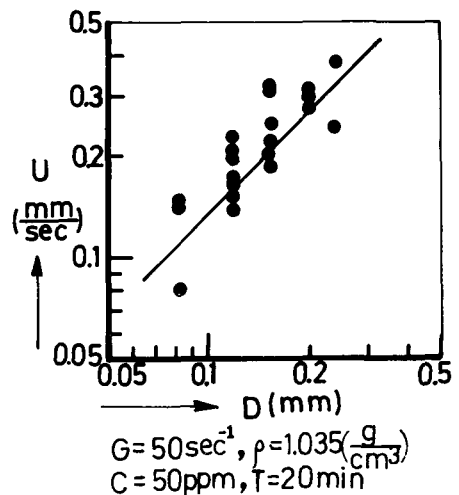


図-12 フロックの沈降速度

なりの相違を有する。河口感潮部における粒子の沈降速度は上述のように大幅に変化するので、沈降性を有する微粒子の拡散、分散には、かなり注意を払わねばならない。通常の河川水中には、藻類等も含まれるため、生物体内でのガス発生による浮上等、現象は極めて複雑になっているので注意を要する。

§ 7. 沈降によるフロックの成長

流れが極めて遅く、剪断速度も小さい海域でのフロックの成長はフロック間の沈降速度の差により支配される。(1)凝集沈降にともないフロックは破壊しない、(2)フロック密度は径によらず一定である、(3)フロック間の流体力学的相互作用はない、(4)フロックの沈降はStokes式にしたがう、という仮定のもとで(6-6)を一般化する。 v 、 $\tilde{v}$ をフロックの体積、 $n(v, t)$ を時刻 t における v なる体積を有するフロックの個数濃度、 V_v を体積 v なるフロックの沈降速度とし、拡散を無視すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \{ (u + V_v i) \cdot \nabla \} n \\ = \frac{1}{2} \int_0^v \alpha_0 n(\tilde{v}) n(v - \tilde{v}) \{ \tilde{v}^{1/3} + (v - \tilde{v})^{1/3} \}^2 | \tilde{v}^{2/3} - (v - \tilde{v})^{2/3} | d\tilde{v} \\ - n(v) \int_0^\infty \alpha_0 n(\tilde{v}) \{ v^{1/3} + \tilde{v}^{1/3} \}^2 | v^{2/3} - \tilde{v}^{2/3} | d\tilde{v} \end{aligned} \quad (7-1)$$

$$\alpha_0 = (\rho_p - \rho_w) g \cdot \pi / (32\mu) \cdot (6/\pi)^{4/3} \quad (7-2)$$

原理的には、(7-1)を与えられた境界条件と初期条件のもとで解けば、水域におけるフロックの粒度分布、濃度分布が明らかになる。しかしながら、現在のところ、粒子間の流体力学的相互作用、粒子間の衝突付着係数等、未知の要因が数多く残されており、厳密に解かれる迄に至っていない。

ここでは、(7-1)の左辺の第二項を無視しうように流れの場は静止しており、しかも濁質濃度は空間的に一様とした場合の数値計算例を示すにとどめる。

フロックの濃度は空間的に一定であり、フロック密度も一定であるから単位体積中に存在するフロックの全体積は常に一定となる。

$$\int_0^\infty n(v, t) v dv = \phi \quad (7-3)$$

流体単位体積当りのフロックの総個数 $N(t)$ は

$$\int_0^\infty n(v, t) dv = N(t) \quad (7-4)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \psi(\eta) &= \frac{n\phi}{N^2} \\ \eta &= \frac{vN}{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (7-5)$$

とおくと、(7-1)は常微積分方程式に変換され、

$$\left. \begin{aligned} C_1 (2\Psi + \eta \frac{d\Psi}{d\eta}) &= \int_0^\eta \Psi(\tilde{\eta}) \Psi(\eta - \tilde{\eta}) \cdot \beta(\eta, \eta - \tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \\ &\quad - 2\Psi(\eta) \int_0^\infty \Psi(\tilde{\eta}) \beta(\eta, \tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \\ C_1 &= - \iint_0^\infty \Psi(\eta) \Psi(\tilde{\eta}) \beta(\eta, \tilde{\eta}) d\eta d\tilde{\eta} \\ \beta(\eta, \tilde{\eta}) &= \{ \eta^{1/3} + \tilde{\eta}^{1/3} \}^2 | \eta^{2/3} - \tilde{\eta}^{2/3} |. \end{aligned} \right\} \quad (7-6)$$

(7-6)式の解は未だ得られていない。したがって(7-1)を離散化して数値計算を行うことにする。このためすべてのブロック体積は1倍粒子の整数倍で表わされるとする。そして、1倍粒子濃度を0.5，2倍粒子濃度を0.25，他の粒子濃度を0とする初期条件のもとで解き、(7-5)を用いて整理した結果を図-13に示す。これによると、沈降時間の経過とともに相似解に収束する傾向を示している。離散化して基本の最小粒径を定めているため、これより小なる粒子については、この結果とかなり異なる可能性が残されているが、粒度分布にほぼ相似性が存在するので、実用面への適用が容易になることが予想される。

§ 8. 難沈降性微粒子の挙動⁽¹⁶⁾

(7-1)において、流体の場は静止しているが重力方向(z方向とする)に濃度の変化があるとする。初期の流体単位体積当りのブロック総個数を N_0 とすれば、(7-1)を積分した後、無次元化できるとして、

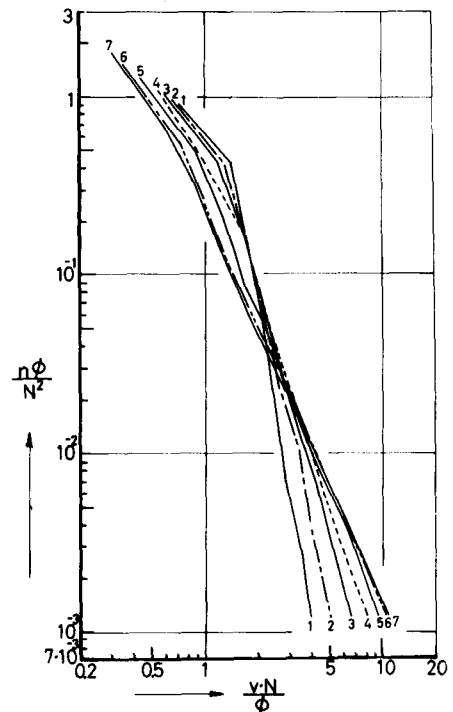
$$\frac{n(v, t, z)}{N_0} = f_1(N_0 t, \frac{N_0 z}{V_v}, v) \quad (8-1)$$

ブロックの個数濃度 n と単位体積中のブロックの総重量 W_f の関係は、

$$W_f(t, z) = \int_0^\infty \rho_p v n(v, t, z) dv. \quad (8-2)$$

(8-1)，(8-2)から

$$\frac{W_f(t, z)}{N_0} = f_2(N_0 t, \frac{N_0 z}{V_1(t, z)}) \quad (8-3)$$



NO.	T	φ	N	V50
1	0.10	1.00	0.70	1.09
2	0.20	1.00	0.66	1.22
3	0.31	1.00	0.60	1.44
4	0.40	1.00	0.54	1.69
5	0.53	1.00	0.44	2.43
6	0.64	1.00	0.35	4.14
7	0.69	0.99	0.30	6.42

図-13 フロックの沈降成長の数値計算

ここで、 $\bar{V}_1$ は V_v を v で積分したことに由来するある速度。
したがって、残留フロック重量は、水深を H として

$$\begin{aligned}\bar{W}_f(t) &= \int_0^H W_f(t, z) dz \\ &= F' \left(N_o t, \frac{N_o H}{\bar{V}(t)} \right) \\ &= F \left(\frac{t \bar{V}(t)}{H}, \frac{N_o H}{V(t)} \right).\end{aligned}\quad (8-4)$$

ここで、 $\bar{V}$ は $\bar{V}_1$ を z で積分したことに由来するある速度。

実験結果を $\bar{W}_f$ と t/H で整理した結果を図-14に示す。凝集時間とも考えられる、平均残留濃度がほとんど変化しない時間の経過後は、いかなる初期条件のもとでも両対数紙上で $-2/3$ の勾配に近づく傾向を有している。

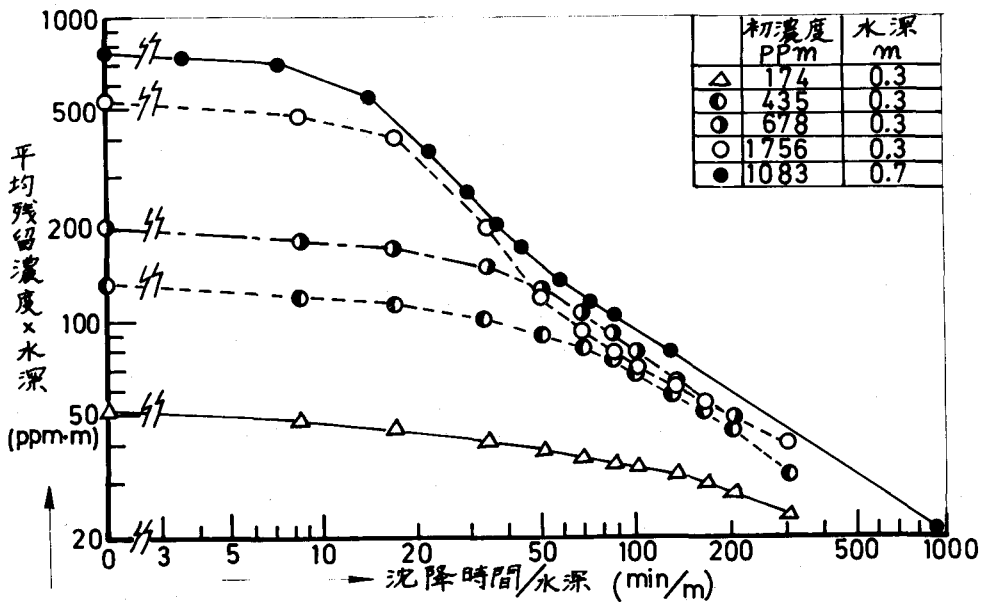


図-14 残留濁度総量の時間変化

§ 9. 沈澱物の再浮上

流路床に堆積した非凝集性土としての砂粒の限界掃流力 τ_c は、砂粒からなる底面に作用する剪断応力と砂粒の水中重量との平衡の考え方に基いて、代表速度を摩擦速度 u_* とする R_θ 数の関数として求められており、一般に Shields の式と称されている。一方河口感潮部、海域に堆積した凝集性土 (Flocculent Material) は砂粒のように明確に一個体として沈澱しているのではなく、凝集作

用により連続体に近い形で流路床に存在している。このため凝集性土の Scouring は非凝集性土の場合とは異なり、物理化学的な要因についての検討も必要とされる。

凝集性土が、再浮上あるいは掃流状態になる原因は、流路床に沿っての平均剪断応力が限界剪断応力より充分小さい場合の Turbulent Eddy による一撃 (Puff) により生じた凹みを起点とする Scouring である。凝集性土の見かけ密度が流体の密度に極めて近い場合には、密度流に近い挙動を示すこともある。一般的に凝集性土は比重が砂粒に比較して1に近いこと、成分が一定しないこと、凝集性が条件により大幅に変化すること、応力に対する履歴性があること、圧密が生じること、ガスの発生を見ることがある等、現象は極めて複雑で、その解析を試みた例は数少ない。 V を粒子の沈降速度とし、Scouring を受ける、おおよそその流速を

$$\frac{V}{(\tau/\rho)^{1/2}} = 1 \sim 2 \tag{9-1}$$

とした例⁽¹⁷⁾や、流路床に作用する剪断応力の分布は Gauss 分布であるとして単位時間当りに、erode される確率を求めた例⁽¹⁸⁾があるが、凝集性あるいは緩和時間についての考慮がなされていない不充分さが残されている。竹松⁽¹⁹⁾は界面を Flexible Boundary として、界面にて no-slip の境界条件および、 M , K , L を相対的な質量、粘性、弾性のパラメータ、 F を界面に垂直な応力、 η を振幅として、

$$M \ddot{\eta} + K \dot{\eta} + L \eta = F \tag{9-2}$$

を与え、 $z \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow 0$ なる流れの場で Orr – Sommerfeld の式を用いて線形安定性問題としての固有値問題を解いている。この結果として、界面においては、Kelvin – Helmholtz と Tollmien – Schlichting の不安定が存在することを確めている。凝集性土の場合、界面の移動も考慮しなければならず、また線形安定論としての限界もあるため、凝集性土の Scouring の解析はほとんど行なわれていない現状にある。

実験により求められた限界掃流力としては、寝屋川の汚泥 (比重 2.52 ~ 2.68, 強熱減量比 11.1 ~ 20.5 %) についての例⁽²⁰⁾ (図-15 参照) や活性汚泥 (比重 1.01 ~ 1.04, 強熱減量比 56 ~ 70 %) の例 (図-16 参照) がある。汚泥により τ_c が約10倍近く異なることが解る。図-14 に示した汚泥をコーンプレート型粘度計を用いて層流下で測定した τ_c として 0.8 dyne/cm^2 の値を得ており、この値は乱流下で

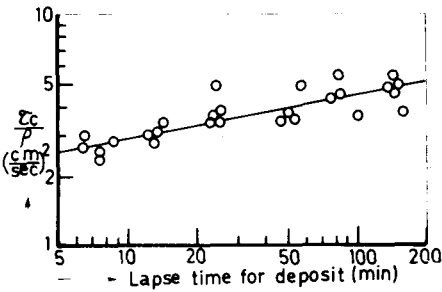


図-15 寝屋川の汚泥の限界掃流力 (村岡⁽²⁰⁾による)

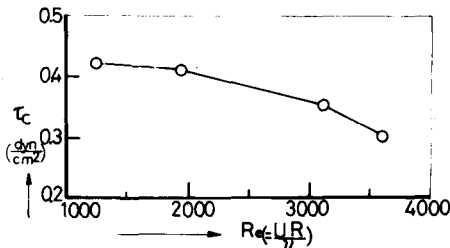


図-16 活性汚泥の限界掃流力

の τ_c の 2 倍になっている。このことは、Scouring の際には Puff の影響を無視できないことを物語っている。

実際河川の堆積汚泥は多量の有機成分を含有しているため嫌気性になり易く、水温上昇期の春には嫌気性分解によるガス発生のため、汚泥が浮上することがあるので注意を要する。

§10. 沈降性を有する粒子の移流分散

移流分散係数とは、移流にともない形成される濃度分布に乱流拡散による均一化の作用を与えた結果決まる濃度分布を、一次元拡散とみなしたときの拡散係数に相当するものであり、このような機構で決まる拡散を移流分散という。移流分散の研究は Taylor に始まり Elder⁽²¹⁾ により用水路における一次元移流分散係数 D_1 は

$$D_1 = 5.93 u_* h \quad (10-1)$$

として求められている。

沈降性を有する粒子の移流分散の場合、前述の溶解性物質の移流分散の場合と異なり、沈澱した粒子の底層からの再浮上の現象を考慮しなければならない。しかしながら、再浮上の現象が未だ不明確なことから、この現象は、常に沈澱物の一定割合が再浮上を受けるという形でしか考慮されていない。ここでは底層が極めてなめらかであり、粒径も粘性底層に比較して大きいので、底層に粒子が沈積しないとして移流分散係数を求めた例を示す⁽²²⁾。拡散方程式は、 $U(y)$ を x 方向の流速、 V を粒子の沈降速度、 $\varepsilon(y)$ を渦動拡散係数として

$$-\frac{\partial c}{\partial t} + U(y) \frac{\partial c}{\partial x} - V \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varepsilon(y) \frac{\partial c}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \varepsilon(y) \frac{\partial c}{\partial y} \right\} \quad (10-2)$$

さらに、 $\eta = y/h$, $\zeta = (x - U_s t)/h$, U_s を $t \rightarrow \infty$ での粒子の平均移動速度として

$$m_p = \int_0^1 d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^p c d\zeta \quad (10-3)$$

と定義する。 m_0 は粒子の保存式で常に一定であり、 m_1 は粒子群の重心位置、 m_2 は粒子群の分散を示すことになる。一次元移流拡散係数 D_1 は、分散を $\bar{X}^2$ として

$$D_1 = \frac{1}{2} \frac{d\bar{X}^2}{dt} \quad (10-4)$$

で示されるから、粒子の無次元化沈降速度を $\beta (=V/\kappa u_*)$, κ はカルマン定数, $\bar{\varepsilon}$ を $\varepsilon(y)$ の断面平均値として

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{\kappa u_*} &= \frac{1}{6} \kappa \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{dm_2}{dt} \right] \\ &= \frac{\kappa}{6} (1 - \beta^2) - \frac{\kappa}{36} \frac{\sin \pi \beta}{\pi \beta} \int_0^1 \frac{h}{\bar{\varepsilon}} (U - U_s) \left(\frac{1 - \eta}{\eta} \right)^\beta d\eta \\ &\quad \times \int_0^\eta \left(\frac{1 - \eta}{\eta} \right)^{-\beta} \frac{1}{\eta(1 - \eta)} d\eta \int_0^\eta \frac{h}{\bar{\varepsilon}} (U - U_s) \left(\frac{1 - \eta}{\eta} \right)^\beta d\eta \quad (10-5) \end{aligned}$$

(10-5) の計算結果を Elder の $\beta = 0$ に相当する解を基準にして図-17 に示す。粒子の無次元化沈降速度 β が大になるほど D_1 も増大していることが解る。河川の平均流速 U を $0.3m/sec$, $U/u_* = 15$, $\kappa = 0.4$ として $\beta \sim V$ となる。 $\beta = 0.1$ として D_1 は 7 % 程度, 溶解性物質の場合に比べて増加することになる。

§11 お わ り に

前半 § 5 までが流体力学として確立されている部分であり後半が極めて工学的色彩の強い部分になっている。その間のギャップが余りにも大きい, このギャップこそ埋めていかねばならないもののように思える。

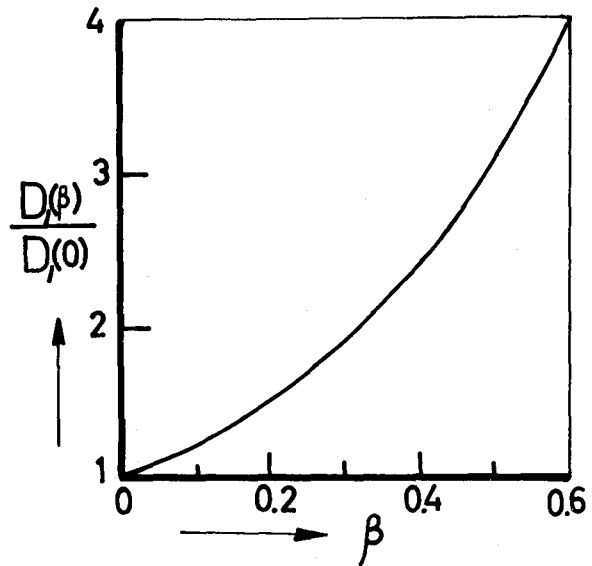


図-17 無次元化沈降速度と移流分散係数の関係

参 考 文 献

- (1) Basset, A. B. : A treatise on hydrodynamics, Vol 2, 1888, pp 285-303.
- (2) 水理公式集: 土木学会編, 昭 46, pp. 411~412.
- (3) 栗谷陽一: 沈降分離法; 廃水処理工学講習会テキスト, 化学工学協会関西支部, S 46.8 pp. 91-114
- (4) マージナウ, マーフィ: 物理と化学のための数学 I, 共立全書, S47, pp. 201-204.
- (5) Lin, C. J. : Doctoral thesis Univ. of Washington, Seattle, 1968.
- (6) Cooley, M.D.A. & O'Neill, M E. : On the slow motion generated in a viscous fluid by the approach of a sphere to a plate wall or stationary sphere; Mathematika, Vol 16, 1969, pp. 37-49.
- (7) Stimson, M & Jeffery, G. B. : The motion of two spheres in a viscous fluid, Proc. Roy. Soc. A. London, Vol 111, 1926, pp. 110-116.
- (8) Goldman, A. J. et al : The slow motion of two identical arbitrarily oriented spheres through a viscous fluid, Chem. Eng. Sci., Vol 21, 1966, pp. 1151-1170
- (9) Wacholder, E. & Sather, N.F. : The hydrodynamic interaction of two unequal spheres moving under gravity through quiescent viscous fluid, J. Fluid Mech., Vol 65, part 3, 1974, pp. 417-437.
- (10) Batchelor, G. K. & Green, J.T. : The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field. J. Fluid Mech., Vol 56, part 2, 1972, pp. 375-400.
- (11) Hocking L.M : The behaviour of clusters of spheres falling in a visco-

- us fluid, J. Fluid Mech., Vol 20, part 1, 1964, pp129-139.
- (12) 石井勉：固液系流動層の挙動，化学工学，Vol 29, No11, 1965, pp.915-921.
 - (13) Batchelor, G.K. : Sedimentation in a dilute Dispersion of spheres, J. Fluid Mech., Vol 52, part 2, 1972, pp245-268.
 - (14) Camp, T.R. & Stein, P.C. : Velocity gradients and internal work in fluid motion, J. Boston Soc. Civil Engrg., Vol 30, 1943, pp218-237.
 - (15) 楠田哲也：フロックの透水性と衝突効率に及ぼす影響，水道協会雑誌，No 462, 昭 48.3, pp 2-10.
 - (16) 栗谷陽一：未発表
 - (17) Ingersol, A.C. et al : Fundamental concepts of rectangular Settling tanks, Trans. ASCE, Vol 121, 1956, pp1179-1218.
 - (18) Partheniades, E : Erosion and deposition of cohesive solids, ASCE, HY1, 1965, pp.105-139.
 - (19) Takematsu, M. : Stability of a laminar flow along a flexible boundary (Ⅲ), Rep. Research Inst. for Applied Mech. Vol XVⅢ, No61, 1970, pp87-100.
 - (20) 村岡浩爾：流れによる底泥浮上と水質の関連，第18回水理講演会講演集，1974.2, pp181-186.
 - (21) Elder, J.W. : The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow, J. Fluid Mech., Vol 5, part 4, 1959, pp.544-560.
 - (22) Sumer, B.M. : Mean velocity and longitudinal dispersion of heavy particles in turbulent open-channel flow, J. Fluid Mech., Vol 65, part 1, 1974, pp.11-28.