

柱状海洋構造物に作用する波力

山 口 正 隆

1. 緒 言

近年人類の活動の場が海岸から沿岸海洋へと拡大し、いわゆる海洋開発のための各種の大水深構造物が計画築造されようとしているが、こうした場合の重要な問題の1つは、沿岸海洋の気象および海象、とくに波浪特性の究明とそれに伴う波力の推定方法の確立であろう。沿岸海洋における波浪は、従来海岸近くで観測されたものに比べて、はるかに大きいことが明らかにされつつあり、海洋における波浪特性の究明のために、すでに北海における JONSWAP⁽¹⁾ と呼ばれる大規模かつ広域的な波浪観測が実施されたことは周知のとおりである。わが国においても、この観測に比べればかなり小規模であるが、京都大学防災研究所と舞鶴海洋気象台との協同観測⁽²⁾として、同様の観測が日本海沿岸において実施されており、また運輸省においても50m程度の水深での波浪観測が行われている。そしてこのような巨大な波浪は構造物に繰り返し強大な波力を及ぼし、そのため海洋構造物が損傷あるいは倒壊した例が少なくなく、とくにテキサスタワー T T - 4 の倒壊が有名である。

さて、海洋構造物の基本構造物として用いられるものは小口径の柱体、大口径の柱体および鉛直壁体などであると考えられるので、海洋構造物に作用する波力の適確な推定法の確立のためには、まず、これらの基本構造物が剛体と仮定される場合の波力の特性を解明しなければならない。

波力は波と構造物の相互作用として生ずるものであり、したがって、構造物の存在によって波動の場は多かれ少なかれ変形を余儀なくされる。構造物に作用する波力の特性を究明するにあたって、構造物による波動の変形の程度に立脚すれば、海岸水理学の立場から、前述の基本構造物に作用する波力の取り扱い方法はつぎのようになると考えられる。すなわち、小口径柱体に作用する波力は、構造物による波動の場の変形が実用上省略でき、波力の表現に入射波の諸量がそのまま適用できる場合であり、また柱体が大きくなって、波力に入射波のほか柱体による波の回折効果などを考慮しなければならない場合が大口径柱体の波力の問題である。さらに、鉛直壁体に作用する波力は、入射波と反射波の相互作用によって重複波が形成されるほど、波動の場が構造物によって変形される場合に相当する。かように、構造物に作用する波力の適切な推定法の確立にあたっては、構造物による波動の場の変形の程度を考慮した系統的な取り扱いが必要となるわけであるが、小口径柱体および鉛直壁体に作用する波力に関してはすでに本研修会で述べられているので、ここでは剛体と仮定される場合の水底から水面上まで単体として構成される大口径柱体とくに大口径円柱に非砕波の波によって作用する波力の特性について述べるつもりである。

2. 大口径円柱に作用する波力

円柱の直径が入射波の波長と比較しうる場合のいわゆる大口径円柱に作用する波力は、ポテンシャル流理論では円柱による波の回折問題として取り扱われ、Havelock⁽³⁾、MacCamy⁽⁴⁾およびFuchs⁽⁵⁾、Reid⁽⁶⁾、Laird⁽⁶⁾、Bonnefille⁽⁷⁾およびGermain⁽⁷⁾、さらに最近では永井⁽⁸⁾、中村⁽⁸⁾らおよび堀川⁽⁹⁾らにより計算や実験が行われてきた。しかしながら、これらの研究はすべて微小振幅波理論である線型回折理論に基

づくものであるので、波の非線型性の影響が考慮されておらず、大口径円柱に作用する波力をより適確に評価するためには、この影響を検討する必要がある。

こうした波の非線型性を回折理論に導入しようとする試みは最近⁽¹²⁾Chakrabartiによって行われている。彼は入射波を有限振幅波理論である Stokes 波の第 5 次近似解で表示し、それぞれの周波数成分に対して線型回折理論を適用して円柱壁での境界条件を満足する解を提案した。しかし、この近似理論は水面における非線型境界条件である運動学および力学的条件を微小振幅波理論に相当する 1 次項以外は全く満足していない。

一方、著者らはせつ動法を用いて非線型回折理論の第 2 次近似解を求めて、水位変動、波圧および全波力に関する表示式を導き、波圧および波力に及ぼす波の非線型性の影響を理論的に考察するとともに、実験結果との比較から理論の妥当性を検討して、大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線型性の影響を究明した。

ところで、両者の理論を比較してみると、Chakrabarti の方法による解は、水面における境界条件を第 1 次項以外満足していないけれども、入射波を有限振幅波理論の高次解で表示しているの、少なくとも円柱から離れた回折波の影響の少ないところでは波の非線型性をより適切に表わしている可能性があるし、表示式も簡単である。一方、著者らの理論は、円柱壁面において波形勾配に相当するパラメータの自乗を含む項まで水面における非線型境界条件を満足しているけれども、表示式はきわめて複雑であり、かつ第 2 次近似解であるので、入射波の非線型性の考慮の程度は Chakrabarti の用いた理論に比べて十分でない。

そこで、ここでは両者の理論の概要を述べるとともに、理論解と実験結果とを比較検討しながらそれぞれの理論の適合性と波圧・波力に及ぼす波の非線型性の影響について述べる。

(1) 非線型回折理論

いま、非粘性非回転の流体運動とし、図-1 のような極座標 (r, θ, z) を用い、次式による無次元量

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi} &= \frac{k^2 \phi}{\lambda \sqrt{kg}}, \quad \bar{r} = kr, \quad \bar{z} = kz, \quad \bar{\eta} = \frac{k\eta}{\lambda} \\ \bar{a} &= ka, \quad \bar{h} = kh, \quad \bar{t} = \sigma t, \quad \omega = \frac{\sigma}{\sqrt{kg}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

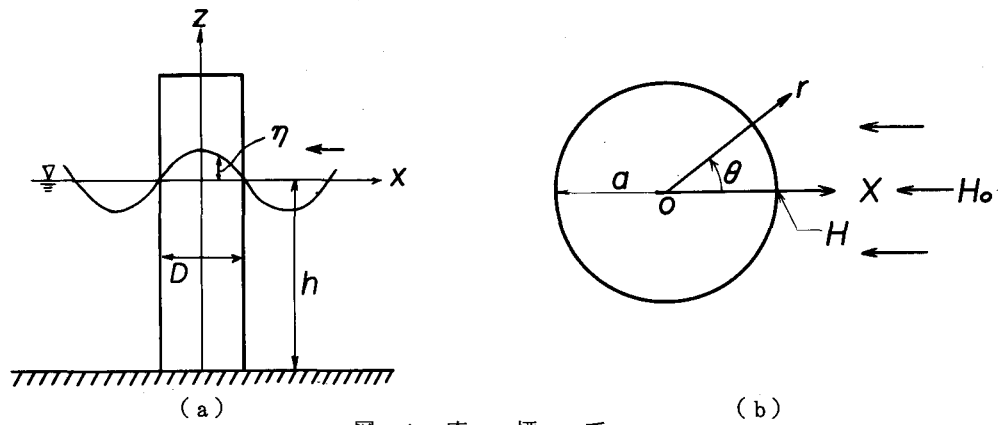


図-1 座 標 系

を定義すれば、一様水深における円柱周辺の波動運動を規定する基礎方程式および境界条件は次のように与えられる。ここに、 ϕ : 速度ポテンシャル、 $k = 2\pi/L$: 波数、 L : 波長、 η : 静水面からの水位変動、 h : 水深、 $\sigma = 2\pi/T$: 角振動数、 T : 周期、 a : 円柱の半径、 g : 重力の加速度、 λ : 微小なパラメーター、 z : 静水面より鉛直上方にとった座標および t : 時間である。

まず、基礎方程式である連続方程式は、

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

となり、水底および円柱壁面における境界条件はそれぞれ次式で表わされる。

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} = 0 ; \bar{z} = -h \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} = 0 ; \bar{r} = a \quad \dots\dots\dots (4)$$

また、水面における運動学的および力学的条件は、それぞれ次式となる。

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} - \omega \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{r}} - \frac{\lambda}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \theta} = 0 ; \bar{z} = \lambda \bar{\eta} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\omega \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} + \bar{\eta} + \frac{\lambda}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\} = 0 ; \bar{z} = \lambda \bar{\eta} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし、力学的条件に含まれる Bernoulli の定数項は式(6)の左辺第 1 項に含められている。

さらに、解の性質として、 $\bar{r}$ が無限大になるにつれて円柱による回折波が消滅することを示すいわゆる **radiation condition** が必要とされるが、円柱からの回折波を表わす無次元化された速度ポテンシャルを $\bar{\phi}$ とすれば、それは次式で与えられる。

$$\bar{\phi} = O(\bar{r}^{-1/2}), \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} + i \bar{\phi} = o(\bar{r}^{-1/2}) ; \bar{r} \rightarrow \infty \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $O(r^r)$ は $r \rightarrow \infty$ のとき x/r^r が有界であるような量 x を表わし、 $o(r^r)$ は $r \rightarrow \infty$ のとき $x/r^r \rightarrow 0$ となるような量 x を表わすものとする。

さて、以上の基礎方程式の厳密解を得ることはきわめて困難であるが、微小なパラメーター λ が含まれているので、近似解を求めるためにせつ動法が適用できる。すなわち、 $\bar{\phi}$, $\bar{\phi}_1$, $\bar{\eta}$ および ω が λ のべきで次式のように展開できるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi} &= \bar{\phi}_0 + \lambda \bar{\phi}_1 + \dots\dots\dots \\ \bar{\phi} &= \bar{\phi}_0 + \lambda \bar{\phi}_1 + \dots\dots\dots \\ \bar{\eta} &= \bar{\eta}_0 + \lambda \bar{\eta}_1 + \dots\dots\dots \\ \omega &= \omega_0 + \lambda \omega_1 + \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

また、式(8)の $\bar{z} = \lambda \bar{\eta}$ における $\bar{\phi}$ を $\bar{z} = 0$ のまわりに

$$\bar{\phi}(\bar{r}, \theta, \lambda \bar{\eta}, \bar{z}) = \bar{\phi}_0(\bar{r}, \theta, 0, \bar{z}) + \lambda \left\{ \bar{\eta}_0 \frac{\partial \bar{\phi}_0(\bar{r}, \theta, 0, \bar{z})}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi}_1(\bar{r}, \theta, 0, \bar{z}) \right\} + \dots\dots\dots (9)$$

で展開できるものとする。

次に、式(8)および(9)を式(1)~(7)に代入し、 λ のべきについて整理すると、第1次および第2次近似解を求めるための基礎方程式および境界条件がそれぞれ得られる。第1次近似解はすでにMacCamy およびFuchsによって求められており、 $\bar{\phi}_0$ 、 $\bar{\eta}_0$ および ω_0 はそれぞれ次式で表わされる。

$$\bar{\phi}_0 = -\omega_0 \frac{\cosh(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh \bar{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n i^{n+1} \left\{ J_n(\bar{\tau}) - \frac{J_n'(\bar{a})}{H_n^{(2)'}(\bar{a})} H_n^{(2)}(\bar{\tau}) \right\} \cos n\theta e^{i\bar{z}} \quad (10)$$

$$\bar{\eta}_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n i^n \left\{ J_n(\bar{\tau}) - \frac{J_n'(\bar{a})}{H_n^{(2)'}(\bar{a})} H_n^{(2)}(\bar{\tau}) \right\} \cos n\theta e^{i\bar{z}} \quad (11)$$

$$\omega_0^2 = \tanh \bar{h} \quad (12)$$

ここに、 $i = \sqrt{-1}$ 、 δ_n : Neumann 数 ($n=0$ なら $\delta_0=1$ 、 $n \geq 1$ なら $\delta_n=2$)、 J_n : 第1種 Bessel 関数、 $H_n^{(2)}$: 第2種 Hankel 関数および $'$: $\bar{\tau}$ に関する微分を表わす。

式(10)および(11)の第1項は周知の微小振幅進行波の Bessel 関数表示であり、第2項は円柱からの回折波を示し、 $\bar{\tau} \rightarrow \infty$ につれて消滅する $\bar{\phi}_0$ に相当する項である。式(12)は通常の波の分散の関係と一致する。

また、微小なパラメーター λ は第1次近似解に対して H_0 を入射波高とすると、次式で表わされる。

$$\lambda = \frac{kH_0}{2} \quad (13)$$

さて、式(10)および(11)は複素表示であるが、第2次近似解を求める計算の都合上実数表示に変換し、円柱壁面での水位変動および波圧として表示すれば、次式のようになる。

$$\frac{\eta}{H_0} = -\frac{1}{\pi k a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta \sin \sigma t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\theta \cos \sigma t \right) \quad (14)$$

$$\frac{p}{\rho g H_0} = -\frac{\cosh k(h+z)}{\pi k a \cosh kh} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta \sin \sigma t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\theta \cos \sigma t \right) - \frac{z}{H_0} \quad (15)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} a_{2m} &= \frac{(-1)^{m+2} \delta_{2m} J_{2m}'(\bar{a})}{J_{2m}^{'2}(\bar{a}) + Y_{2m}^{'2}(\bar{a})} \\ a_{2m+1} &= \frac{(-1)^{m+1} \delta_{2m+1} Y_{2m+1}'(\bar{a})}{J_{2m+1}^{'2}(\bar{a}) + Y_{2m+1}^{'2}(\bar{a})} \\ b_{2m} &= \frac{(-1)^{m+2} \delta_{2m} Y_{2m}'(\bar{a})}{J_{2m}^{'2}(\bar{a}) + Y_{2m}^{'2}(\bar{a})} \\ b_{2m+1} &= \frac{(-1)^{m+2} \delta_{2m+1} J_{2m+1}'(\bar{a})}{J_{2m+1}^{'2}(\bar{a}) + Y_{2m+1}^{'2}(\bar{a})} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$m = 0, 1, 2, \dots$

であり、また Y_n : 第2種 Bessel 関数である。

つぎに第2次近似解として、式(2)~(4)と式(7)を満足する $\bar{\phi}_1$ を $\bar{\phi}_0$ と同様に次式で仮定する。

$$\bar{\phi}_1 = -\omega_0 \cosh 2(\bar{h} + \bar{z}) (L_2 \cos 2\bar{t} + M_2 \sin 2\bar{t}) + \omega_0 f(\bar{t}) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 L_2 および M_2 は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \{ Y_m'(2\bar{a}) J_m(2\bar{\tau}) - J_m'(2\bar{a}) Y_m(2\bar{\tau}) \} \cos m\theta \\ M_2 &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \{ Y_m'(2\bar{a}) J_m(2\bar{\tau}) - J_m'(2\bar{a}) Y_m(2\bar{\tau}) \} \cos m\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

一般に、式(5)および(6)から導かれる第2次近似に対する自由表面の境界条件式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{z}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial \bar{t}^2} &= \omega_1 \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}} - \omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}^2} \\ &- \bar{\eta}_0 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}^2} \right) \\ &- \omega_0 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\}; \bar{z} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

を $\bar{\tau} \geq \bar{a}$ において満たす解を見出すことは困難であるので、 $\bar{\eta}_0$ 、 $\bar{\phi}_0$ および $\bar{\phi}_1$ を $\bar{\tau} = \bar{a}$ のまわりでそれぞれ

$$f_i(\bar{\tau}, \theta, \bar{z}) = f_i(\bar{a}, \theta, \bar{z}) + \bar{\tau} \frac{\partial f_i(\bar{\tau}, \theta, \bar{z})}{\partial \bar{\tau}} \bigg|_{\bar{\tau}=\bar{a}} + \dots\dots \dots (20)$$

で Taylor 級数展開できるものとし、その第1項のみを式(19)に用いれば、式(17)の未定係数 c_m および d_m と $f(\bar{t})$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\pi \bar{a} \sinh^4 \bar{h}} \left\{ \frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n b_n + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) (a_0 b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n) \right\} \\ c_m &= \frac{1}{\pi \bar{a} \sinh^4 \bar{h}} \left\{ \frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i, j \geq 1}} i j a_i b_j + \frac{m^2}{4} a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i, j \geq 0}} a_i b_j - a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \right\} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= \frac{-1}{2\pi \bar{a} \sinh^4 \bar{h}} \left[\frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (b_n^2 - a_n^2) + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \left\{ (b_0^2 - a_0^2) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^2 - a_n^2) \right\} \right] \\ d_m &= \frac{-1}{2\pi \bar{a} \sinh^4 \bar{h}} \left[\frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i, j \geq 1}} i j (b_i b_j - a_i a_j) + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (b_n b_{n+m} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_n a_{n+m}) \right\} + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i, j \geq 0}} (b_i b_j - a_i a_j) - (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

$$f = \alpha \bar{t} + \beta \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 β は任意定数である。

つぎに、 α は、 $\tau \rightarrow \infty$ において入射波である Stokes 波の第2次近似解に相当した進行波だけが残るという条件から

$$\alpha = -\frac{1}{4 \sinh^2 \bar{h}} \quad \dots\dots\dots (24)$$

また、 λ も Stokes 波の第2次近似解に相当して

$$\lambda = \frac{kH_0}{2} \quad \dots\dots\dots (25)$$

になる。さらに分散を表わす関係式は第1次近似解である式(12)と同一である。したがって、円柱壁における非線型回折理論の第2次近似解は波圧に対して次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho g H_0} = & -\frac{\cosh k(h+z)}{\pi k a \cosh k h} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m \theta \sin \sigma t + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos m \theta \cos \sigma t \right) + \frac{1}{2} \frac{k h \tanh k h}{(h/H_0)} \\ & \left[\left\{ \frac{\cosh 2k(h+z)}{\pi k a} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \cos m \theta + \frac{1}{4(\pi k a)^2 \sinh^2 k h} \left(\frac{\cosh^2 k(h+z)}{(k a)^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (b_n^2 - a_n^2) \right. \right. \right. \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i, j \geq 1}} i j (b_i b_j - a_i a_j) + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (b_n b_{n+m} \right. \\ & \left. \left. \left. - a_n a_{n+m} \right) \right\} \cos m \theta \right] + \sinh^2 k(h+z) \left[(b_0^2 - a_0^2) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^2 - a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i, j \geq 0}} (b_i b_j - a_i a_j) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \right\} \cos m \theta \right] \right\} \cos 2 \sigma t \\ & + \left\{ -\frac{\cosh 2k(h+z)}{\pi k a} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m \theta + \frac{1}{2(\pi k a)^2 \sinh^2 k h} \left(\frac{\cosh^2 k(h+z)}{(k a)^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n b_n \right. \right. \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i, j \geq 1}} i j a_i b_j + \frac{m^2}{4} a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \right\} \cos m \theta \right] \\ & + \sinh^2 k(h+z) \left[a_0 b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i, j \geq 0}} a_i b_j - a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+m} \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + a_{n+m} b_n) \right\} \cos m \theta \right] \right\} \sin 2 \sigma t + \left\{ -\frac{1}{4(\pi k a)^2 \sinh^2 k h} \left(\frac{\cosh^2 k(h+z)}{(k a)^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (b_n^2 + a_n^2) \right. \right. \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i, j \geq 1}} i j (b_i b_j + a_i a_j) + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 + a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (b_n b_{n+m} + a_n a_{n+m}) \right\} \\ & \cos m \theta \right] + \sinh^2 k(h+z) \left[(b_0^2 + a_0^2) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 + a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i, j \geq 0}} (b_i b_j + a_i a_j) \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (b_{m/2}^2 + a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} + a_n a_{n+m}) \right\} \cos m \theta \right] \right\} + \frac{1}{8 \sinh^2 k h} \left. \right] - \frac{z}{H_0} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

(2) Chakrabarti の方法

Chakrabarti は入射波の表現に Skjelbreia および Hendrickson による Stokes 波の第5次近似解を用い、それぞれの周波数成分に対して線型回折理論を適用して式(2), (3), (4)および(7)を満足する解とし

て次式を提示した。

$$\bar{\phi} = -\frac{\omega}{\lambda} \sum_{\alpha=1}^5 (-1)^{\alpha+1} \lambda_{\alpha} \cosh \alpha (\bar{h} + \bar{z}) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n\ell} n+1 \left\{ J_n(\alpha \bar{r}) - \frac{J_n'(\alpha \bar{a})}{H_n^{(2)}(\alpha \bar{a})} H_n^{(2)}(\alpha \bar{r}) \right\} \cos n\theta \right] e^{i\alpha \bar{t}} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\omega^2 = \tanh \bar{h} (1 + C_1 \lambda^2 + C_2 \lambda^4) \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda A_{11} + \lambda^3 A_{13} + \lambda^5 A_{15}, & \lambda_2 &= \lambda^2 A_{22} + \lambda^4 A_{24} \\ \lambda_3 &= \lambda^3 A_{33} + \lambda^5 A_{35}, & \lambda_4 &= \lambda^4 A_{44}, & \lambda_5 &= \lambda^5 A_{55} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

であり、 A_{ij} および C_i は Skjelbreia らによって与えられている $\bar{h}$ のみの関数である。ただし、Chakrabarti の用いた Stokes 波の第 5 次近似解は Skjelbreia らのものと位相関係が異っている。したがって係数 A_{ij} などの符号がおかしくなっており、また著者の用いた座標系で統一するうえからも、式(27)の第 1 項のような表示を用いた。

また λ を求める式は次元をもとにもどせば次式になる。

$$\frac{\pi H_0}{h} = \frac{2\pi}{kh} \left\{ \lambda + \lambda^3 B_{33} + \lambda^5 (B_{35} + B_{55}) \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここに、 B_{ij} は $\bar{h}$ のみの関数である。

ところで、式(27)は λ に関してかなり高次の項まで考慮されているけれども、前述のように、自由表面の境界条件、式(5)および(6)を微小振幅波理論に相当する $\alpha=1$ の項以外全く満足していない。

さて、Chakrabarti は Bernoulli の定理における速度項および定数項を無視して円柱壁面における波圧を次式で与えた。

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho g H_0} &= -\frac{2 \tanh kh (1 + C_1 \lambda^2 + C_2 \lambda^4)}{\pi kh ka} \left(\frac{h}{H_0} \right) \sum_{\alpha=1}^5 (-1)^{\alpha+1} \lambda_{\alpha} \cosh \alpha k(h+z) \\ &\left\{ \left\{ \frac{Y_0'(aka)}{J_0'^2(aka) + Y_0'^2(aka)} + \frac{2J_1'(aka)}{J_1'^2(aka) + Y_1'^2(aka)} \cos \theta - \frac{2Y_2'(aka)}{J_2'^2(aka) + Y_2'^2(aka)} \cos 2\theta \right. \right. \\ &- \frac{2J_3'(aka)}{J_3'^2(aka) + Y_3'^2(aka)} \cos 3\theta + \frac{2Y_4'(aka)}{J_4'^2(aka) + Y_4'^2(aka)} \cos 4\theta \\ &+ \left. \frac{2J_5'(aka)}{J_5'^2(aka) + Y_5'^2(aka)} \cos 5\theta + \dots \right\} \cos \alpha \sigma t + \left\{ \frac{J_0'(aka)}{J_0'^2(aka) + Y_0'^2(aka)} \right. \\ &- \frac{2Y_1'(aka)}{J_1'^2(aka) + Y_1'^2(aka)} \cos \theta - \frac{2J_2'(aka)}{J_2'^2(aka) + Y_2'^2(aka)} \cos 2\theta + \frac{2Y_3'(aka)}{J_3'^2(aka) + Y_3'^2(aka)} \cos 3\theta \\ &+ \left. \frac{2J_4'(aka)}{J_4'^2(aka) + Y_4'^2(aka)} \cos 4\theta - \frac{2Y_5'(aka)}{J_5'^2(aka) + Y_5'^2(aka)} \cos 5\theta + \dots \right\} \sin \alpha \sigma t \Big\} \\ &- \frac{z}{H_0} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

(3) 全 波 力 式

円柱に作用する全波力 F は流体の粘性を無視すれば、一般に次式で与えられる。

$$F = \int_{-h}^{\eta} \int_0^{2\pi} p a \cos \theta d\theta dz \quad \dots\dots\dots (32)$$

さて、回折理論の第 1 次近似解による全波力は $\eta=0$ として式(32)に式(15)を代入し、三角関数の直交関

係に注目して若干の計算を行えば、次式になる。

$$\frac{F}{\rho g H_0 D^2} = -\frac{1}{4} \frac{\tanh kh}{(ka)^2} (a_1 \sin \sigma t + b_1 \cos \sigma t) = \frac{\tanh kh}{2(ka)^2 \sqrt{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)}} \cos(\sigma t - \xi_1) \left. \vphantom{\frac{F}{\rho g H_0 D^2}} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

$$\xi_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{Y_1'(ka)}{J_1'(ka)} \right\}$$

次に、回折理論の第2次近似解による全波力式は式(32)に式(33)を代入し、式中の双曲線関数を kh に関して展開して λ^2 まで考慮すれば、次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{F}{\rho g H_0 D^2} = & -\frac{1}{4} \frac{\tanh kh}{(ka)^2} (a_1 \sin \sigma t + b_1 \cos \sigma t) + \frac{1}{32} \frac{kh}{\pi(ka)^3 (h/H_0)} \left\{ \left(2 \left\{ (b_0 b_1 - a_0 a_1) \right. \right. \right. \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) \left. \right\} - \frac{4}{\sinh^2 kh} \left[\frac{\cosh^2 kh}{(ka)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) \right. \\ & + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 kh - 3) \left\{ (b_0 b_1 - a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) \right\} \left. \right] + \left[\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left(\frac{1}{ka} \right)^2 \right. \\ & \left. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) + \left(1 - \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left\{ (b_0 b_1 - a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) \right\} \right] \right\} \\ & \cos 2\sigma t + \left(2 \left\{ (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) \right\} - \frac{4}{\sinh^2 kh} \left[\frac{\cosh^2 kh}{(ka)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \right. \right. \\ & \left. \left. (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 kh - 3) \left\{ (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) \right\} \right] \right. \\ & + \left[\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left(\frac{1}{ka} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) + \left(1 - \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right. \\ & \left. \left\{ (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) \right\} \right] \right) \sin 2\sigma t + \left(2 \left\{ (b_0 b_1 + a_0 a_1) \right. \right. \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} + a_n a_{n+1}) \left. \right\} - \left[\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left(\frac{1}{ka} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (b_n b_{n+1} + a_n a_{n+1}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(1 - \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left\{ (b_0 b_1 + a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} + a_n a_{n+1}) \right\} \right] \right) \left. \vphantom{\frac{F}{\rho g H_0 D^2}} \right\} \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

式(34)の第1項はもちろん第1次近似解と一致する。第2項が波の非線型効果に対応するものである。特に第2項から内第3項は時間に関係しない、いわゆる steady wave force を表わしており、その前半分は水面の存在によって生じた波力であり、後半分は速度項から生じたものである。また、式(34)から無次元全波力 $F/\rho g H_0 D^2$ は波圧と同様に ka および kh ばかりでなく、波の非線型効果を表わす h/H_0 の関数となり、その時間波形も非対称になることがわかる。

一方、Chakrabarti は式(32)に式(31)を代入し、 z に関する積分の上限を $\eta=0$ として次のような全波力の表示式を得ている。

$$\frac{F}{\rho g H_0 D^2} = \frac{\tanh kh (1 + C_1 \lambda^2 + C_2 \lambda^4)}{kh(ka)^2} \left(\frac{h}{H_0} \right) \sum_{\alpha=1}^5 (-1)^{\alpha+1} \frac{\lambda_{\alpha}}{\alpha} \sinh \alpha kh \left\{ -\frac{J_1'(aka)}{J_1'^2(aka) + Y_1'^2(aka)} \cos \alpha \sigma t + \frac{Y_1'(aka)}{J_1'^2(aka) + Y_1'^2(aka)} \sin \alpha \sigma t \right\}$$

$$= \frac{\pi \tanh kh(1+C_1\lambda^2+C_2\lambda^4)}{4kh} \left(\frac{h}{H_0}\right) \sum_{\alpha=1}^5 (-1)^{\alpha+1} \alpha \lambda_{\alpha} C_{Ma} \sinh \alpha kh \cos(\alpha \sigma t - \xi_{\alpha}) \quad (35)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} C_{Ma} &= \frac{4 A_{\alpha}}{\pi (\alpha ka)^2}, & A_{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{J_1'^2(\alpha ka) + Y_1'^2(\alpha ka)}} \\ \xi_{\alpha} &= \tan^{-1} \left(-\frac{Y_1'(\alpha ka)}{J_1'(\alpha ka)} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

この場合の波力の時間波形は式34)と同様に非対称になるけれども、いわゆる steady wave force は現れない。

また、より正確な波力の表現が必要なきには、静水面上の波圧分布は水面で零となる三角形分布を仮定し、式35)に次式を付加する方法を提案している。

$$\frac{F_c}{\rho g H_0 D^2} = \frac{\int_0^{2\pi} (k\eta)^2 \cos \theta d\theta}{8kh ka} \left(\frac{h}{H_0}\right) ; \quad k\eta = \frac{kh p_{z=0}}{\rho gh} \quad \dots\dots\dots (37)$$

式37)は静水面上の波圧分布が静水圧であるとの仮定のもとに導かれたものであるのかあるいは水面が時間的に変動する影響まで含めて計算されたものは原論文において明確でないけれども、式32)の z に関する積分領域を η まで考慮し、 $k\eta$ に関する展開式の最低次の項のみを考慮すれば導かれる。以下の Chakrabarti の表示式の数値計算にあたっては、全波力の表示式として式35)に式37)を加えた式を用いることにする。

図-2 は全波力に及ぼす波の非線型効果を検討するために、著者らの非線型回折理論の第2次近似解および Chakrabarti の表示式による無次元全波力の最大値 $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ と D/L_A (L_A : 微小振幅波

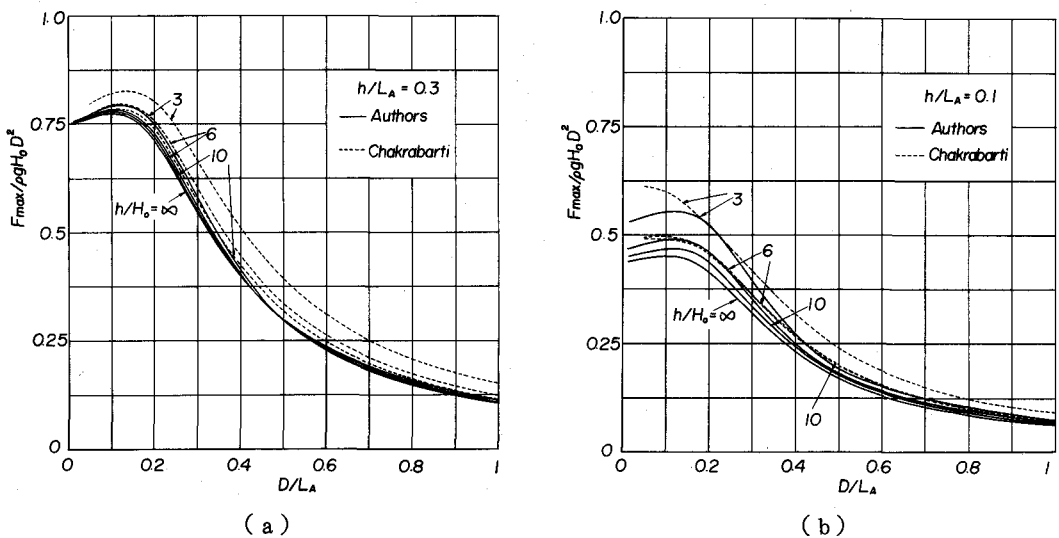


図-2 $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ の D/L_A による変化

理論による波長)との関係を h/L_A および h/H_0 をパラメーターにして示したものであり、図中の $h/H_0 = \infty$ が第1次近似解に相当する。著者らの理論によれば、 $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ は D/L_A の増加とともに、いったん増加して極大値をとったのち、急激に減少することおよび波の非線型性が $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ に及ぼす影響は h/L_A の値が大きい場合にはそれほど顕著でないが、 h/L_A の値の小さい場合にはかなり大きいことがわかる。したがって、浅海域における大口径円柱の波力の推定には、波の非線型性の影響を考慮する必要があるといわねばならない。

一方、Chakrabartiの表示式によれば、 $h/L_A = 0.3$ の場合には著者らの理論による結果と同様の傾向があるけれども、波の非線型性の影響を表わす h/H_0 に対する $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ の変化が著者らの結果に比べてはるかに著しく、その値もかなり大きい。また、 $h/L_A = 0.1$ の場合、 $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ の値は $6 \leq h/H_0 \leq 10$ ではほとんど変化しないのに対して、 $h/H_0 = 3$ になると、その値は急増している。このように、それぞれの解に基づく全波力の特性にはかなりの相違が見られるが、その傾向は D/L_A の大きい場合に特に著しい。

(4) 質量係数に関する考察

ここでは、主として非線型回折理論の第2次近似解による全波力式を用いて円柱の質量係数を理論的に求め、質量係数に及ぼす波の特性や円柱径の影響、特に波の非線型効果を検討する。この場合、質量係数の算出方法には、基本的な問題も少なくないが、いま、Reid にならって抗力を無視した Morison らの微小振幅波に基づく波力算定式における慣性力の表示式と式(33)を位相の相違を無視して等置すれば、線型回折理論による円柱の質量係数は周知のように、

$$C_M = \frac{4}{\pi(ka)^2 \sqrt{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)}} \dots\dots\dots (38)$$

で与えられる。これは Reid の求めた結果であり、このような方法で決定された微小振幅波理論による円柱の質量係数は ka すなわち円柱径と波長との比 D/L_A のみに依存し、しかも位相によって変化しないことがわかる。

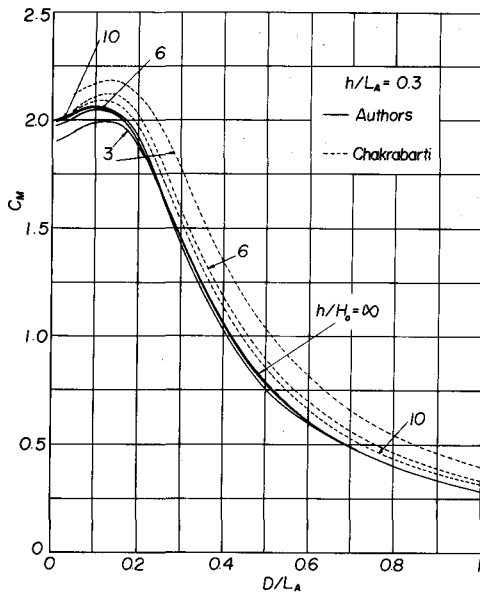
次に、波の非線型性を考慮した場合の円柱の質量係数の特性について考察する。Stokes 波の第2次近似解を用いれば、Morison の波力算定式中の慣性力 F_M は次式のようになる。

$$\frac{F_M}{\rho g H_0 D^2} = -\frac{\pi}{8} C_M \tanh kh \left\{ \sin \sigma t - \frac{1}{8} \frac{kh}{(h/H_0) \sinh^2 kh} (6 \coth kh + \sinh 2kh - 2kh) \sin 2\sigma t \right\} \dots\dots\dots (39)$$

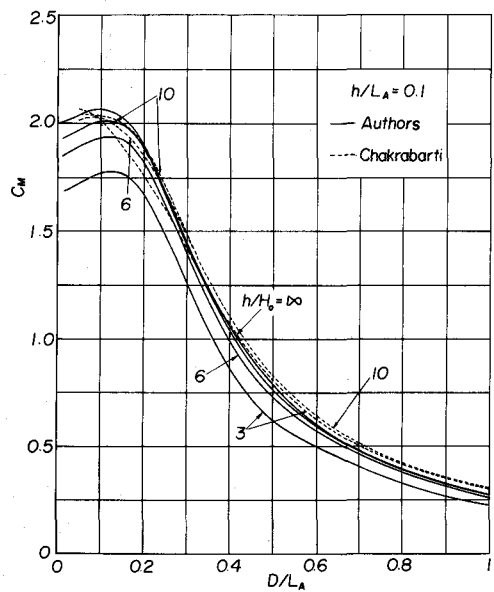
前述した Reid の方法と同様に、波の非線型性を考慮した場合も式(34)および(39)が最大値をとるように位相を一致させれば、全波力の最大値の位相における質量係数が求められる。この場合の質量係数は解析的に求められないが、式(34)および(39)から明らかなように、 D/L_A のみでなく、 h/L_A および h/H_0 の関数となる。

また、Chakrabartiの表示式による場合も同様であるが、波力の計算に際して省略した Bernoulli の定理における速度項に対応して、水粒子加速度における convective term を無視し、慣性力として次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_M}{\rho g H_0 D^2} &= -\frac{\pi}{4} C_M \frac{\tanh kh(1+C_1\lambda^2+C_2\lambda^4)}{kh} \left(\frac{h}{H_0}\right) \sum_{\alpha=1}^5 (-1)^{\alpha+1} \sinh \alpha k(h+\eta_I) \sin \alpha \sigma t \\ k\eta_I &= -\lambda \cos \sigma t + (\lambda^2 B_{22} + \lambda^4 B_{24}) \cos 2\sigma t - (\lambda^3 B_{33} + \lambda^5 B_{35}) \cos 3\sigma t \\ &\quad + \lambda^4 B_{44} \cos 4\sigma t - \lambda^5 B_{55} \cos 5\sigma t \end{aligned} \right\} \dots (40)$$



(a)



(b)

図-3 質量係数に及ぼす波の非線型効果(1)

図-3は全波力の最大値の位相における質量係数の D/L_A による変化を h/L_A および h/H_0 をパラメーターにして示したものである。図から明らかなように著者らの理論による質量係数は、一般に第1次近似解による結果より小さくなり、その傾向は h/H_0 、および h/L_A の値が小さいときほど著しい。これは波の非線型性を示す h/H_0 や h/L_A の式39に及ぼす影響が式34のそれに比べて大きいためである。

一方、Chakrabartiの表示式による質量係数は $h/L_A=0.3$ の場合著者らの結果と逆に h/H_0 の値の減少とともに増加する。また、 $h/L_A=0.1$ の場合には質量係数はほぼ著者らの結果と同様の傾向を示すけれども、 h/H_0 に伴う質量係数の変化の割合ははるかに小さい。

(5) 波圧および全波力に対する実験結果との比較

図-4は $\theta=0^\circ$ に波の峯がきたときの $\theta=0^\circ$ での無次元波圧強度 $p/\rho g H_0$ の h/H_0 による変化を示したもので、図中の実線、点線および1点鎖線はそれぞれ非線型回折理論の第1次近似解、第2次近似解およびChakrabartiの表示式を表す。これらの図をみると、 h/H_0 の値の大きいところでは実験結果はほぼ一定値をとり、第1次近似解と比較的よく対応しているが、 h/H_0 の値が小さくなるにつれて、 $p/\rho g H_0$ の値が減少し、その傾向は第1次近似解を離れて第2次近似解と一致するようになる。しかし、Chakrabartiの表示式による結果は実験結果や著者らの解と相違して h/H_0 の値の減少とともに増加し、波の非線型性の影響が逆の方向に現われている。この傾向は式31において無視されている速度項および

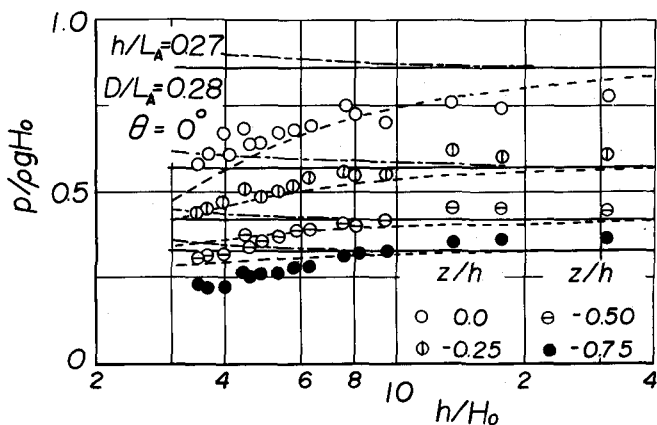


図-4 $p/\rho g H_0$ の h/H_0 による変化

Bernoulliの定数項を考慮しても変らない。

図-5は $\theta=0^\circ$ に波の峰がきたときの水平波圧分布の時間的变化を示したものであり、実験結果は波形の非対称性を含めて第2次近似解による理論曲線とよく一致している。特に、第2次近似解によれば、 $\theta=0^\circ$ では波圧波形の非対称性はほとんど現われないうが、実験結果は最大値付近で第1次近似解より小さくなり、最小値付近では逆に大きくなることや波圧波形の非対称性は $\theta=90^\circ$ 付近でもっとも著しく、 $\theta=90^\circ$ で波圧の最大値をとる位相が第1次近似解やChakrabartiの表示式によるものよりずれること、さらに波圧波形の非対称性の程度が $\theta=90^\circ$ を中心として、円柱前面および後面に近づくにつれて小さくなることを定性的に説明することができる。ただし、この場合の h/H_0 の値がかなり小さいために、第2次近似解による $\theta=90^\circ$ および 135° での理論結果と実験結果の対応は若干悪い。

つぎに、抗力の影響がほぼ無視される場合の全波力の実験結果との比較を行う。

図-6は波力測定系の動特性を考慮して補正した全波力の最大値の実験結果とそれぞれの理論曲線とを比較したものであり、実験結果の D/L_A の範囲は $0.16 < D/L_A < 0.89$ で、かなり広範囲にわたっている。図によれば、ばらつきは大きいけれどもいずれの実験結果も h/H_0 によってそれほど変化せず、著

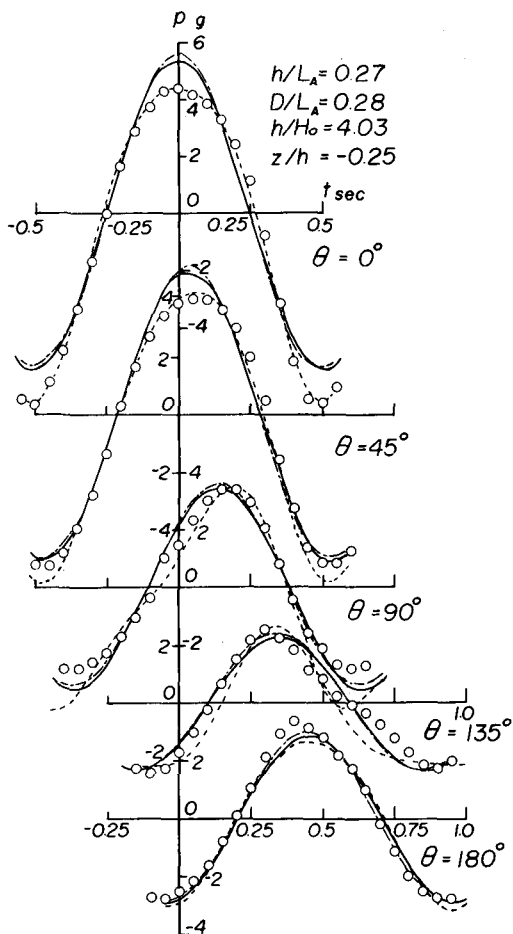


図-5 水平波圧分布の時間的变化

者らの理論結果の傾向と比較的よく一致している。一方、Chakrabartiの表示式では h/L_A および D/L_A の値が小さい場合には実験結果や第2次近似解より若干過大な値を与えるだけであるが、 h/L_A および D/L_A の値が大きくなるにつれて h/H_0 の減少に伴う増加率がそれらよりはるかに大きい。

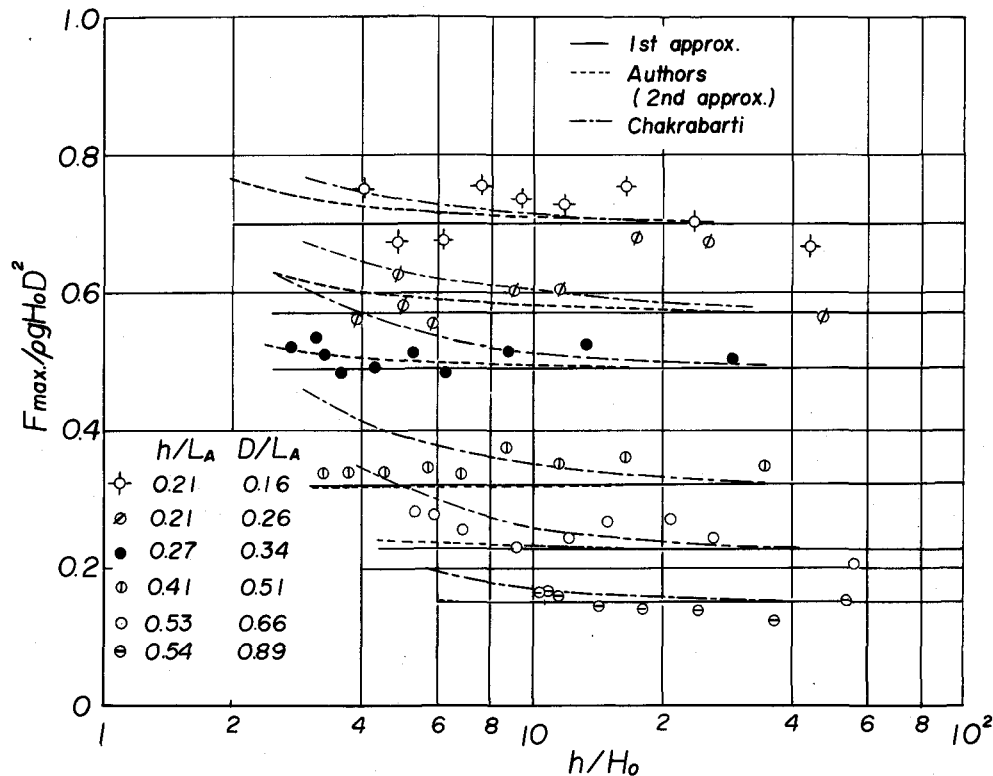


図-6 $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ の h/H_0 による変化

図-7 は全波力の最大値に対する実験結果に Stokes 波の第2次近似解および Stokes 波の第5次近似解による慣性力の表示式、式(39)および(40)をそれぞれ適用して求めた C_M の h/H_0 による変化を示したものであり、図中の実線は著者らの非線型回折理論および Stokes 波の第2次近似解より算出した質量係数の理論曲線を、点線は Chakrabarti の全波力式および Stokes 波の第5次近似解より算出した質量係数の理論曲線を表す。また ○印および ●印はそれぞれに対応して推定した質量係数の実験結果である。この図より C_M の値が D/L_A の値の増加に伴って急激に減少するという線型回折理論の妥当性のほか、

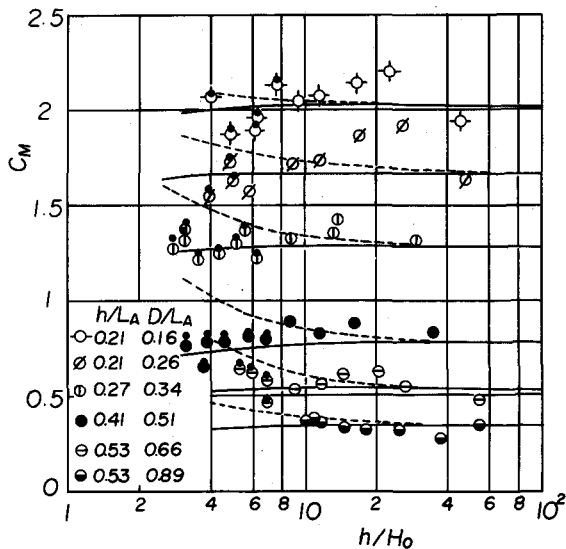


図-7 質量係数に及ぼす波の非線型効果(2)

波の非線型性を考慮した場合には、 C_M の値は同一の D/L_A および h/L_A の値に対して h/H_0 の値の減少とともに若干減少するという著者らの非線型回折理論の適合性をある程度確かめることができる。これに対して、Chakrabartiの表示式は h/H_0 の値の小さい場合に実験結果との対応が悪く、その適合性には問題がある。

以上要するに、著者らの非線型回折理論によれば、波の非線型性の影響は波圧については比較的大きいが、波圧の円周および水深方向についての積分である全波力については、水深・波長比の小さい場合を除いてあまり大きくないと結論される。したがって、上述の結果は以下で述べる線型回折理論に基づく種々の解析結果の妥当性をある程度理論的に保証するものといえよう。

またChakrabartiの解においては微小パラメーター λ の自乗以上の項が水面における非線型境界条件を満足していないため、実験結果との比較から明らかなように、その適合性にかなりの問題があると結論せざるをえない。

3. 楕円柱に作用する波力

ここでは、特殊な場合として円柱をも包含するより一般的形状である楕円柱に作用する波力の特性を合田および吉村らの研究^{(15), (16), (17)}に従って述べる。

(1) 楕円柱に作用する波力に関する理論

いま、速度ポテンシャル ϕ を

$$\phi = \frac{gH_0}{2\sigma \cosh kh} \cosh k(h+z) \phi_1(x, y) e^{i\sigma t} \dots\dots\dots(41)$$

とおけば、 ϕ は第1次近似の範囲内で境界条件(3)、(5)および(6)を満たし、かつ ϕ_1 に対する方程式として連続方程式から周知の Helmholtz の方程式が得られる。つぎに直交座標 (x, y) で表示された Helmholtz の方程式を

$$x = \frac{B}{2} \cosh \xi \cos \theta, \quad y = \frac{B}{2} \sinh \xi \sin \theta \dots\dots\dots(42)$$

によって楕円座標 (ξ, θ) に変換し、 ϕ_1 に対して変数分離形の解を仮定すれば、Mathieuの微分方程式および変形されたMathieuの微分方程式が得られる。ここに、 B ：楕円の焦点距離である。

つぎに、入射波の速度ポテンシャル ϕ_{1I} を楕円座標で表示し、さらにMathieu関数で展開すれば、次式になる。

$$\phi_{1I} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2}{p_{2n}} \text{Ce}_{2n}(\xi) \text{ce}_{2n}(\theta) \text{ce}_{2n}(\alpha) + \frac{2}{s_{2n}} \text{Se}_{2n+2}(\xi) \text{se}_{2n+2}(\theta) \text{se}_{2n+2}(\alpha) \right. \\ \left. + i \left\{ \frac{2}{p_{2n+1}} \text{Ce}_{2n+1}(\xi) \text{ce}_{2n+1}(\theta) \text{ce}_{2n+1}(\alpha) + \frac{2}{s_{2n+2}} \text{Se}_{2n+2}(\xi) \text{se}_{2n+2}(\theta) \text{se}_{2n+2}(\alpha) \right\} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

ここに、 α ：波の入射角、 ce_n ：偶関数のMathieu関数、 se_n ：奇関数のMathieu関数、 Ce_n 、 Se_n ：変形されたMathieu方程式の独立解および p_n 、 s_n ：入射波をMathieu関数で展開する場合の係数、である。

一方、境界条件(7)の radiation condition を満足する回折波の速度ポテンシャル ϕ_{1D} は次式で与えられる。

$$\phi_{1D} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{2n} \text{Me}_{2n}^{(2)}(\xi) \text{ce}_{2n}(\theta) \text{ce}_{2n}(\alpha) \right. \\ \left. + S_{2n+2} \text{Ne}_{2n+2}^{(2)}(\xi) \text{se}_{2n+2}(\theta) \text{se}_{2n+2}(\alpha) \right. \\ \left. + C_{2n+1} \text{Me}_{2n+1}^{(2)}(\xi) \text{ce}_{2n+1}(\theta) \text{ce}_{2n+1}(\alpha) \right. \\ \left. + S_{2n+1} \text{Ne}_{2n+1}^{(2)}(\xi) \text{se}_{2n+1}(\theta) \text{se}_{2n+1}(\alpha) \right] \quad \dots\dots\dots (44)$$

ここに、 $\text{Me}_n^{(2)}$ および $\text{Ne}_n^{(2)}$ は変形された Mathieu 方程式の解である。また未定係数 C_{2n} 、 S_{2n+2} 、 C_{2n+1} および S_{2n+1} は式(4)に相当する楕円柱面 $\xi = \xi_0$ での境界条件より決定されるので、結局速度ポテンシャル ϕ は入射波および回折波の速度ポテンシャルの和として次式で表わされる。

$$\phi = \frac{gH_0}{2\sigma \cosh kh} \cosh k(h+z) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2}{p_{2n}} \left(C_{2n}(\xi) - \frac{C_{2n}'(\xi_0)}{\text{Me}_{2n}^{(2)'}(\xi_0)} \text{Me}_{2n}^{(2)}(\xi) \right) \text{ce}_{2n}(\theta) \text{ce}_{2n}(\alpha) \right. \\ \left. + \frac{2}{s_{2n+2}} \left(S_{2n+2}(\xi) - \frac{S_{2n+2}'(\xi_0)}{\text{Ne}_{2n+2}^{(2)'}(\xi_0)} \text{Ne}_{2n+2}^{(2)}(\xi) \right) \text{se}_{2n+2}(\theta) \text{se}_{2n+2}(\alpha) + i \left\{ \frac{2}{p_{2n+1}} \right. \right. \\ \left. \left(C_{2n+1}(\xi) - \frac{C_{2n+1}'(\xi_0)}{\text{Me}_{2n+1}^{(2)'}(\xi_0)} \text{Me}_{2n+1}^{(2)}(\xi) \right) \text{ce}_{2n+1}(\theta) \text{ce}_{2n+1}(\alpha) \right. \\ \left. + \frac{2}{s_{2n+1}} \left(S_{2n+1}(\xi) - \frac{S_{2n+1}'(\xi_0)}{\text{Ne}_{2n+1}^{(2)'}(\xi_0)} \text{Ne}_{2n+1}^{(2)}(\xi) \right) \text{se}_{2n+1}(\theta) \text{se}_{2n+1}(\alpha) \right\} \right\} e^{i\alpha t} \quad \dots\dots\dots (45)$$

楕円柱に作用する x 軸および y 軸方向の全波力は、式(45)を用いて Bernoulli 式から計算した波圧を θ および z について積分することによりそれぞれ次式のように得られる。

$$\frac{F_x}{\rho g H_0 l_2 h} = -\frac{\tanh kh}{4kh} \sum_{n=0}^{\infty} A_1^{(2n+1)} R_{2n+1}(\xi_0) \text{ce}_{2n+1}(\alpha) e^{i\beta_{2n+1}} e^{i\alpha t} \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$\frac{F_y}{\rho g H_0 l_1 h} = -\frac{\tanh kh}{4kh} \sum_{n=0}^{\infty} B_1^{(2n+1)} T_{2n+1}(\xi_0) \text{se}_{2n+1}(\alpha) e^{i\gamma_{2n+1}} e^{i\alpha t} \quad \dots\dots\dots (47)$$

ここに、 $A_1^{(n)}$ ：偶関数を示す Mathieu 関数の係数および $B_1^{(n)}$ ：奇関数を示す Mathieu 関数の係数であり、また

$$R_{2n+1}(\xi_0) e^{i\beta_{2n+1}} = \frac{2}{p_{2n+1}} \left\{ C_{2n+1}(\xi_0) - \frac{C_{2n+1}'(\xi_0)}{\text{Me}_{2n+1}^{(2)'}(\xi_0)} \text{Me}_{2n+1}^{(2)}(\xi_0) \right\} \\ T_{2n+1}(\xi_0) e^{i\gamma_{2n+1}} = \frac{2}{s_{2n+1}} \left\{ S_{2n+1}(\xi_0) - \frac{S_{2n+1}'(\xi_0)}{\text{Ne}_{2n+1}^{(2)'}(\xi_0)} \text{Ne}_{2n+1}^{(2)}(\xi_0) \right\} \quad \dots\dots\dots (48)$$

である。

(2) 全波力の計算結果および実験値との比較

図-8 は楕円の長軸と α の角度で波が入射する場合の長軸方向の全波力の最大値 $F_{maxx} / (\rho g H_0 l_2 h \tanh kh)$ の長軸方向の長さ l_1 と入射波の波長 L_A との比 l_1 / L_A による変化を示したものであり、 F_{maxx} に関する無次元量は、楕円柱の短軸の長さ l_2 に作用する微小振幅波理論としての完全重複波の全波力を基準値としてこれに対する全波力の比を示すものである。ただし、記号の重複をさけるため、原論文の記号をかえている。この図によれば、 $F_{maxx} / (\rho g H_0 l_2 h \tanh kh)$ は $l_1 / L_A = 0$ 付近において入射角 α が小さいほど大きな増加率を示して最大値に達したあと、振動しながら減少している。この減少の割合は α が小さいほど大きい。また原論文の $l_2 / l_1 = 0.5$ の場合との比較から明らかなように、 l_2 / l_1 の値が増大するにつれて振動性を示さなくなる傾向がある。

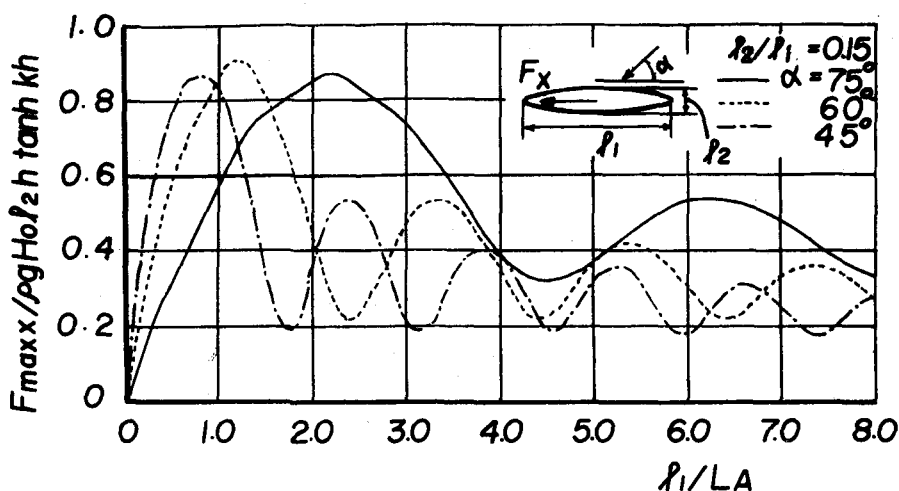


図-8 $F_{maxx}/(\rho g H_0 l_2 h \tanh kh)$ の l_1 / L_A による変化 (合田・吉村による)

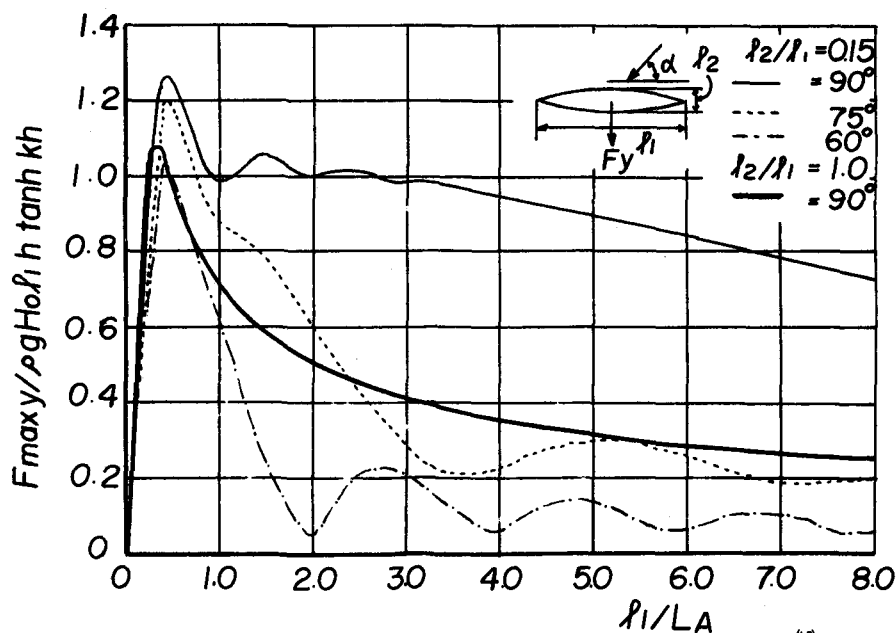


図-9 $F_{maxy}/(\rho g H_0 l_1 h \tanh kh)$ の l_1 / L_A による変化 (合田・吉村による)

図-9は楕円の短軸方向の全波力の最大値 $F_{maxy}/(\rho g H_0 l_1 h \tanh kh)$ の l_1 / L_A による変化を示したものであって、図中の太い実線は $l_2 / l_1 = 1$ すなわち円柱の場合に相当する。 $F_{maxy}/(\rho g H_0 l_1 h \tanh kh)$ の l_1 / L_A に対する変化にも振動性が現われ、その α および l_1 / L_A に対する挙動は図-8の場合と同様であるが、一方、 l_2 / l_1 に対する挙動は逆になる。またこの場合の大きな特徴として l_2 / l_1 および α の値にかかわらず、 $l_1 / L_A = 0.4$ 付近で最大値となる傾向がある。

図-10はこの $F_{maxy}/(\rho g H_0 l_1 h \tanh kh)$ の l_1 / L_A に対する最大値と α との関係を示したものである。図から明らかなように、 $F_{maxy}/(\rho g H_0 l_1 h \tanh kh)$ の最大値は l_2 / l_1 に関係なく、 α とともに増大し、

$\alpha=90^\circ$ で最大となっており、そのときの値は l_2/l_1 の値が小さいほど大きい。また円柱の場合 $\alpha \leq 30^\circ$ では $l_2/l_1=0.15$ の場合の値と一致するが、 α が 30° 以後 $l_2/l_1=0.15$ の場合より、さらに α が 50° 付近からは $l_2/l_1=0.5$ の場合より小さくなる。

つぎに、図-11は $\alpha=90^\circ$ および $l_2/l_1=0.2$ の場合の $F_{maxy}/\rho g H_0 l_1 h$ の計算結果と実験結果を l_1/L_A の変化として示し、両者を比較したもの1例である。図中の+印は水位変動の影響を静水圧の変化としてのみ考慮した補正計算結果であり、また実験結果は測定装置の動特性を考慮して1自由度質点系としての補正を行っている。さて、図によれば、実験結果は計算結果と同様の傾向を示すけれども、絶対値において実験結果の方が最大値付近において40%程度大きく、その差は l_1/L_A の値が増大するにつれて小さくなっている。また、それは水位変動の影響を静水圧としてのみ考慮しても十分に説明できない。合田らはこの原因として i) 有限振幅の影響、ii) 楕円柱の長径端より発生する2次じょう乱波の影響、iii) 一様水深を仮定して導かれた理論結果と1/50の一樣斜面上での実験結果を比較したための影響の3つをあげ、とくにiii)については実験の都合上水底と楕円柱の底との間隔が最大1cm程度あるので、流況が変化させられたためと考えているようである。また著者らの研究から類推すると、合田らが用いた水深・波高比 h/H_0 の値は最大8程度であるので、i)の影響は無視しうると考えられる。

4. 大口径円柱群に作用する波力

現実の海洋構造物は2.で述べた円柱を何本か組み合わせたものが多く、この場合それに作用する波力の推定には条件によっては円柱間の相互干渉効果を考慮しなければならない。抗力が卓越するような小口径円柱に作用する波力の場合にはその理論解析は現在のところほとんど不可能であ

って、もっぱら実験的検討によらざるを得ないけれども、一方慣性力が卓越する場合にはポテンシャル流理論としての取り扱いが可能であり、すでに Chappellear,⁽¹⁸⁾ Lebreton および Cormault⁽¹⁹⁾ さらに最近では大楠⁽²⁰⁾ によって解が求められているので、ここでは大楠の線型理論に基づく研究の概要を述べることにする。

(1) 大口径円柱群に作用する波力の理論

いま、図-12に示す2本の円柱RおよびLに x 軸の正の方向から入射する波による波力を計算する。その場合の基礎方程式および境界条件は線型近似の範囲内で式(2)~(7)と同一である。ただし、円柱壁面での境界条件、式(4)は両方の円柱に対してそれぞれ成立しなければならない。

さて、まず入射波の速度ポテンシャルを、極座標系 (r_R, θ_R) および (r_L, θ_L) を用いて円柱RおよびLに対して書きかえ、それぞれ ϕ_0^R および ϕ_0^L とすれば、これらは式(10)の第1項と同様に Bessel 関数

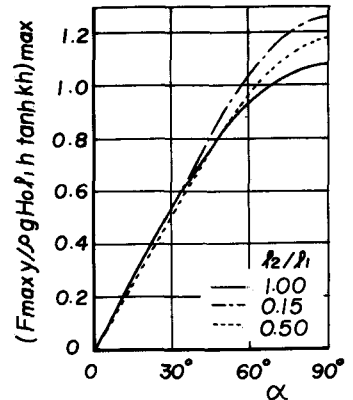


図-10 $F_{maxy}/(\rho g H_0 l_1 h \tanh kh)$ の最大値の α による変化⁽¹⁸⁾
(合田・吉村による)

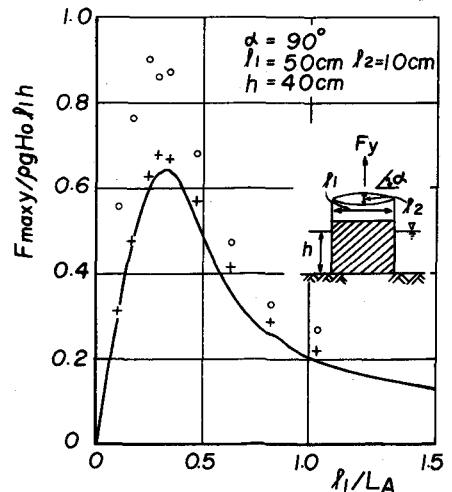


図-11 $F_{maxy}/\rho g H_0 l_1 h$ に対する計算結果と実験結果との比較⁽¹⁷⁾
(合田・吉村・笹田による)

表示できる。いま、 ϕ_0^R が円柱 R に入射したときの回折波のポテンシャルを ϕ_1^R 、 ϕ_1^L が円柱 L に入射したときの回折波のポテンシャルを ϕ_2^L 、 ϕ_2^R が円柱 R に入射したときの回折波のポテンシャルを ϕ_3^R というように、円柱からの回折波のポテンシャルを求めていくと、円柱 R および L からの回折波のポテンシャルの総和 ϕ_D^R および ϕ_D^L はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \phi_D^R &= \phi_1^R + \phi_3^R + \phi_5^R + \dots \\ \phi_D^L &= \phi_2^L + \phi_4^L + \phi_6^L + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (49)$$

となり、また入射波のポテンシャルの総和 ϕ_I^R および ϕ_I^L は

$$\left. \begin{aligned} \phi_I^R &= \phi_0^R + \phi_2^R + \phi_4^R + \dots \\ \phi_I^L &= \phi_1^L + \phi_3^L + \phi_5^L + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

となる。 ϕ_0^L についても同様に考えると、円柱 L および R からの回折波のポテンシャルの総和 ϕ_D^L および ϕ_D^R と入射波のポテンシャルの総和 ϕ_I^L および ϕ_I^R もそれぞれ式(49)および(50)と同様に表わされる。

ϕ_D^R および ϕ_D^L などは具体的に次のようにして求められる。まず ϕ_0^R による円柱 R からの回折波のポテンシャルは式(10)の第 2 項と同様に第 2 種 Hankel 関数の級数として与えられる。つぎに ϕ_1^R は Bessel 関数の加法定理

$$H_n^{(2)}(kr_R) e^{in\theta_R} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{n+m}^{(2)}(2kp) J_m(kr_L) e^{im\theta_L}; \quad r_L < p \quad \dots \dots \dots (51)$$

により円柱 L の近傍においては

$$\begin{aligned} \phi_1^R &= -i\sigma \frac{\cosh k(h+z)}{k \sinh kh} e^{ikp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr_L) e^{im\theta_L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{n+m}^{(2)}(2kp) \\ &\quad (-i)^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} e^{i\sigma t} \quad \dots \dots \dots (52) \end{aligned}$$

となる。ここに、 p : 円柱中心間の距離の半分である。この ϕ_1^R による円柱 L からの回折波のポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi_2^L &= i\sigma \frac{\cosh k(h+z)}{k \sinh kh} e^{ikp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m'(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} H_m^{(2)}(kr_L) e^{im\theta_L} \\ &\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n H_{n+m}^{(2)}(2kp) \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} e^{i\sigma t} \quad \dots \dots \dots (53) \end{aligned}$$

と表わされる。このような計算を繰り返せば、円柱 R への入射波のポテンシャル ϕ_I^R および円柱 R からの回折波のポテンシャル ϕ_D^R はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_I^R &= i\sigma \frac{\cosh k(h+z)}{k \sinh kh} e^{ikp} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(kr_R) e^{in\theta_R} + \right. \\ &\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \frac{J_{m_2}'(ka)}{H_{m_2}^{(2)}(ka)} \\ &\quad \left. H_{n+m_1}^{(2)}(2kp) H_{m_1+m_2}^{(2)}(2kp) J_{m_2}(kr_R) e^{im_2\theta_R} + \dots \right\} e^{i\sigma t} \quad \dots \dots \dots (54) \end{aligned}$$

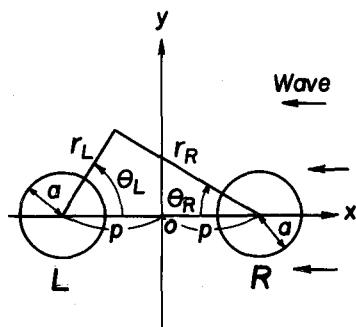


図-12 座標系 (2本の円柱)

$$\phi_D^R = -i\sigma \frac{\cosh k(h+z)}{k \sinh kh} e^{ikp} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(kr_R) e^{in\theta_R} \right. \\ \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \frac{J_{m_1}(ka)}{H_{m_1}^{(2)}(ka)} \frac{J_{m_2}(ka)}{H_{m_2}^{(2)}(ka)} \right. \\ \left. H_{n+m_1}^{(2)}(2kp) H_{m_1+m_2}^{(2)}(2kp) H_{m_2}^{(2)}(kr_R) e^{im_2\theta_R} + \dots \right\} e^{i\sigma t} \quad (55)$$

全く同様に ϕ_L^L , ϕ_D^L , ϕ_L^L , ϕ_D^L , ϕ_L^R および ϕ_D^R が求められる。

つぎに、円柱Rに注目すると、円柱Rに入射する波の速度ポテンシャルは $\phi_L^R + \phi_D^R$ であり、また回折波のポテンシャルは $\phi_D^R + \phi_D^R$ であるので、Bernoulli の定理から第1次近似解としての円柱周囲の波圧分布が求められる。これを式(32)に代入し、 $\eta = 0$ として積分すれば、円柱Rに作用する全波力 F_R は次式になる。

$$\frac{F_R}{\rho g H_0 D^2} = \frac{\tanh kh}{2(ka)^2 H_1^{(2)}(ka)} \left\{ -e^{-ikp} + e^{-ikp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n-1} \right. \\ \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(2kp) - e^{ikp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} (-i)^{n+1} \\ \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \frac{J_{m_1}(ka)}{H_{m_1}^{(2)}(ka)} H_{n+m_1}^{(2)}(2kp) H_{m_1}^{(2)}(2kp) \\ \left. + e^{-ikp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} i^{n-1} \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \frac{J_{m_1}(ka)}{H_{m_1}^{(2)}(ka)} \frac{J_{m_2}(ka)}{H_{m_2}^{(2)}(ka)} \right. \\ \left. H_{n+m_1}^{(2)}(2kp) H_{m_1+m_2}^{(2)}(2kp) H_{m_2}^{(2)}(2kp) - \dots \right\} e^{i\sigma t} \quad (56)$$

また、円柱Lに作用する全波力 F_L も同様に計算され、

$$\frac{F_L}{\rho g H_0 D^2} = \frac{\tanh kh}{2(ka)^2 H_1^{(2)}(ka)} \left\{ e^{-ikp} + e^{ikp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{n+1} \right. \\ \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(2kp) - e^{-ikp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} i^{n-1} \\ \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \frac{J_{m_1}(ka)}{H_{m_1}^{(2)}(ka)} H_{n+m_1}^{(2)}(2kp) H_{m_1}^{(2)}(2kp) \\ \left. + e^{ikp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} (-i)^{n+1} \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \frac{J_{m_1}(ka)}{H_{m_1}^{(2)}(ka)} \right. \\ \left. \frac{J_{m_2}(ka)}{H_{m_2}^{(2)}(ka)} H_{n+m_1}^{(2)}(2kp) H_{m_1+m_2}^{(2)}(2kp) H_{m_2}^{(2)}(2kp) - \dots \right\} e^{i\sigma t} \quad (57)$$

になる。式(56)および(57)の第1項はもちろん1本の円柱に作用する全波力と一致し、また第2項以下が2本の円柱の相互干渉効果を表す。

(2) 全波力の数値計算結果

図-13は $2p/a = 5$ および10の場合の質量係数 C_M の D/L_A による変化を示したものであり、図中には1本の円柱の場合の式(38)による結果も示されている。これらの図によれば、質量係数に及ぼす円柱間の相互干渉効果はかなり大きいことがわかる。とくに上手側の円柱Rに対してその影響は著しく、1本の円柱の場合の理論曲線を中心に振動する傾向が見られる。その振動の周期は $2p/a$ の値の小さいとき

ほど大きくなる傾向がある。

図-14は図中に示す3本の円柱の配置の場合に、質量係数に及ぼす円柱間の相互干渉効果を示したものであり、図-13との比較から明らかなように、前述の振動の振幅が増大し、円柱間の相互干渉効果がより大きくなること
 がわかる。したがって、円柱間の距離によ
 りけれども2本以上の円柱で構成される海洋構
 造物に作用する波力の推定にはその相互干渉
 効果を考慮する必要があるといえるであろう。

5. 大口径円柱に作用する不規則波の波力
 海の波は一見して明らかなように不規則な
 形をしている。この不規則な海面の変動が
 Gauss分布に従うとすれば、この不規則な
 変動量に対してスペクトル理論が適用できる。
 そしてこのスペクトルから変動量
 の特性やその統計量とスペクトルとの関係を得ることが
 できる。

一方、2における考察から大口径円柱に作
 用する全波力に及ぼす波の非線型性の影響は
 水深・波長比の値が大きい場合には実用上無
 視できることが理論的にも実験的にも確認さ
 れたので、全波力の表示式として式(33)を用い
 ることができる。この関係式は位相のずれは

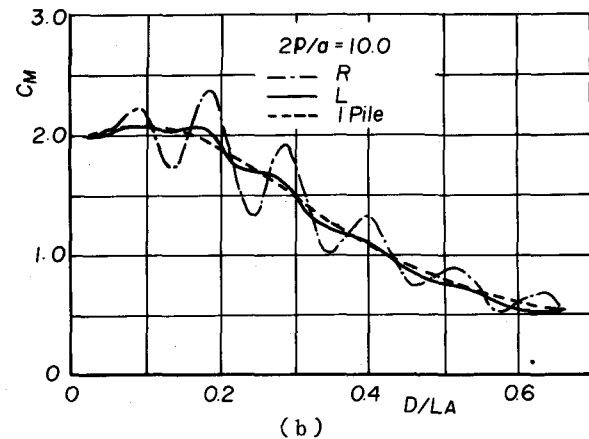
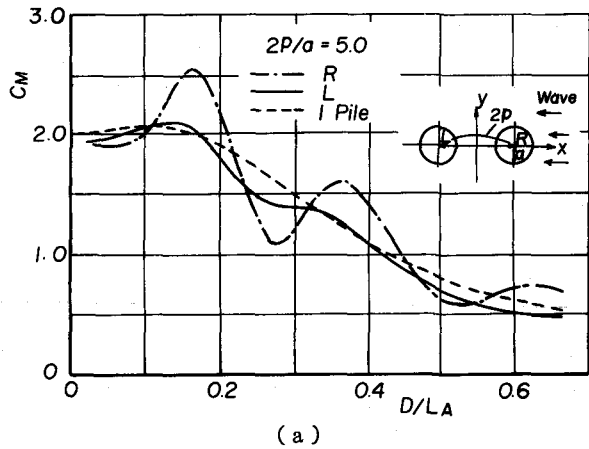


図-13 質量係数に及ぼす円柱間の相互干渉効果(1)(2本の円柱、大橋による)

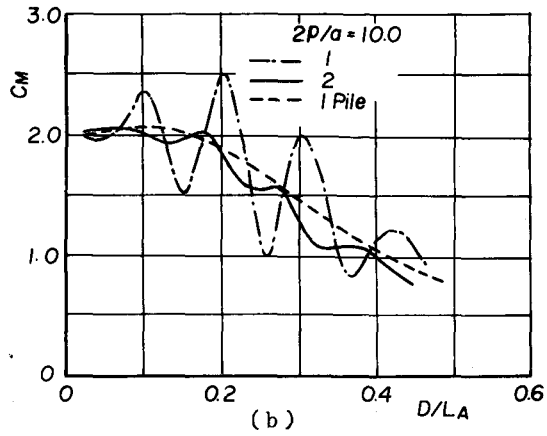
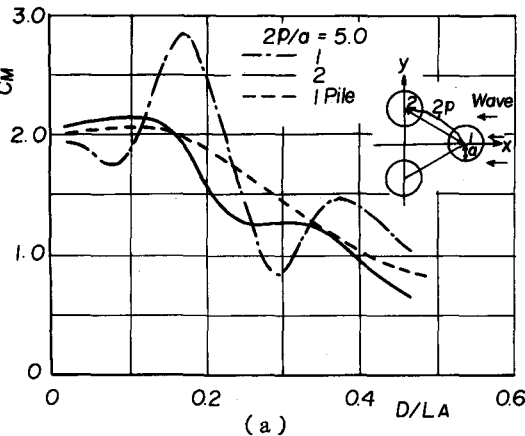


図-14 質量係数に及ぼす円柱間の相互干渉効果(2)
 (3本の円柱、大橋による)

あるけれども、入射波の水位変動と波高に関して線型関係で結ばれているので、不規則波が作用する場合の全波力のスペクトルは入射波のスペクトルが与えられれば、線型応答系の理論をそのまま適用して求めることができる。そこで以下ではその方法について簡単に述べることにする。

(1) 入射波の方向スペクトル

不規則な海面の変動は種々の周期、波高および波向をもつ無数の独立な正弦波がその位相を全く random にして重ね合さったものと考えられ、その表示には周波数および波の入射角の関数として表わされた方向スペクトルが用いられる。全波力のスペクトルは方向スペクトルが既知の場合には次節で述べる方法によって算出されるが、通常方向スペクトルを知ることは困難であるので、何らかの形で仮定せざるをえない。

つぎに、問題となるのは入射波の方向スペクトルとしていかなる形のものを採用するかということである。波浪の方向スペクトルは通常次式で表わされるものとされている。

$$E_{\eta\eta}(f, \phi) = E_f(f) h(f, \phi); \quad \int_{-\pi}^{\pi} h(f, \phi) d\phi = 1 \dots\dots\dots (47)$$

ここに、 f : 周波数および ϕ : 方向角であり、また $E_f(f)$: 周波数スペクトルおよび $h(f, \phi)$: 方向分布関数と呼ばれる。

海洋波の定常状態での周波数スペクトルとしては各種のものが提案されており、無限の吹送距離に対しては Neumann や Pierson および Moskowitz のスペクトルが、また有限の吹送距離に対しては Bretschneider や光易のスペクトルが代表的である。しかし、浅海域におけるスペクトルの標準形に関しては海底地形、海底摩擦および砕波などの要因で複雑に変形されるため、井島らの砕波帯におけるスペクトルの高周波側の平衡形状に関する研究を除いてあまり調べられていないようである。一方、方向分布関数についてはその観測がきわめて困難であって、わずかに SWOP のものや Ewing による $\cos^2 \pi(\phi/2)$ のものが提案されているにすぎなかった。しかし最近光易⁽²¹⁾や藤縄⁽²²⁾により風波の方向分布関数は従来 P N J 法で用いられていた $\cos^2 \phi$ 型のものよりピーク周波数付近では分布幅が狭くしかもピーク周波数から高周波側になるにつれて分布幅が広がることが明らかにされつつある。

以上波浪のスペクトルとくに方向分布関数については未解明の問題も少なくないけれども、ここでは簡単のため、周波数スペクトルおよび方向分布関数としてそれぞれ次式を用いることにする。

$$E_f(f) = 0.256 (H_{1/3}/T_{1/3}^2)^2 f^{-5} e^{-1.03(T_{1/3}/f)^4} \dots\dots\dots (58)$$

$$\left. \begin{aligned} h(f, \phi) &= \frac{8}{3\pi} \cos^4 \phi; & |\phi| &\leq \pi/2 \\ &= 0 & ; & |\phi| > \pi/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

ここに、 $H_{1/3}$: 有義波高および $T_{1/3}$: 有義波周期である。式(58)は光易⁽²³⁾が有限な吹送距離の場合の定常状態でのスペクトルの標準形として提案した光易Ⅱ型スペクトルである。

一方、周知のように、不規則な海面の変動が Gauss 分布で表わされるものとすれば、そのスペクトル幅が狭い場合には波高の分布は Longuet-Higgins⁽²⁴⁾によって理論的に示されたように Rayleigh 分布となる。また波高をゼロアップクロス法⁽²⁵⁾で定義するかぎり、波高分布はほとんどスペクトルの形状に関係なく Rayleigh 分布になることが合田の数値シミュレーションの結果からも示されている。

(2) 全波力のスペクトル

時間の関数である出力信号が入力信号と応答関数との線型重ね合わせとして表わされるとき、周波数領域での両者の関係は線型応答系の理論より容易に求められる。すなわち、大口徑円柱に作用する全波力と水位変動は実用上線型関係で結ばれているので、全波力のスペクトル $E_{FF}(f, \phi)$ は線型応答系の周波数領域での入出力の関係を表わす関係式

$$E_{FF}(f, \phi) = |H_{F\eta}(f)|^2 E_{\eta\eta}(f, \phi) \dots\dots\dots (60)$$

より入射波の方向スペクトル $E_{\eta\eta}(f, \phi)$ を用いて簡単に求められる。⁽²⁶⁾ここに、 $H_{F\eta}(f)$ は周波数応答関数と呼ばれ、次式で与えられる。

$$H_{F\eta}(f) = \frac{\rho g D^2 \tanh k h}{(k a)^2 \sqrt{J_1'^2(k a) + Y_1'^2(k a)}} \dots\dots\dots (61)$$

したがって、波浪の主方向およびそれと直角方向に作用する全波力のスペクトル $E_{FF}^P(f)$ および $E_{FF}^R(f)$ はそれぞれ次式で計算される。

$$E_{FF}^P(f) = |H_{F\eta}(f)|^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E_{\eta\eta}(f, \phi) \cos^2 \phi d\phi \dots\dots\dots (62)$$

$$E_{FF}^R(f) = |H_{F\eta}(f)|^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E_{\eta\eta}(f, \phi) \sin^2 \phi d\phi \dots\dots\dots (63)$$

いま、入射の方向スペクトルとして式58および59を用いれば、波浪の主方向の全波力スペクトルは式62から

$$E_{FF}^P(f) = 0.2133 (H_{1/3} / T_{1/3}^2)^2 \left\{ \frac{\rho g D^2 \tanh k h}{(k a)^2 \sqrt{J_1'^2(k a) + Y_1'^2(k a)}} \right\}^2 f^{-5} e^{-1.03 (T_{1/3} f)^4} \dots\dots\dots (64)$$

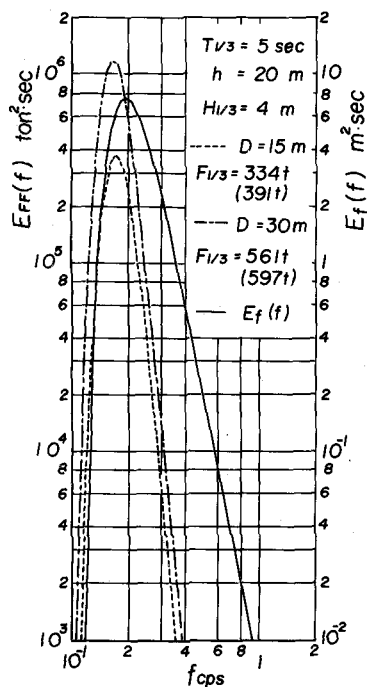
で表わされる。波の方向性を考慮しない場合には式64の係数は式58および62から明らかなように 0.256 となり、方向性を考慮した場合より大きくなる。また方向分布関数のべき数 n の値が増加するほど、周波数スペクトルだけを用いた結果に近づく。

一方、前述の議論からゼロアップクロス法で定義した全波力の極大値も Rayleigh 分布に従う。したがって全波力の極大値の $1/3$ 最大値 $F_{1/3}$ および $1/10$ 最大値 $F_{1/10}$ などを定義すると、それらと分散値 $\overline{F^2}$ との関係は次式で表わされる。⁽²⁷⁾

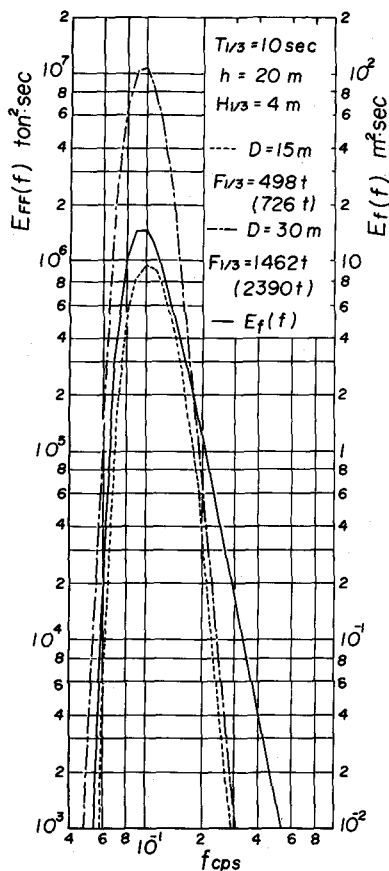
$$F_{1/3} = 2.0 \sqrt{\overline{F^2}}, F_{1/10} = 2.55 \sqrt{\overline{F^2}}, \overline{F^2} = \int_0^\infty E_{FF}(f) df \dots\dots\dots (65)$$

ただし、平均値からの波力の極大値の大きさを問題とするので、式65の係数は各種平均波高間の関係式の係数の半分になる。

図-15は合田と同様に、図に示した条件で式58および64を用いて計算した入射波および全波力のスペクトルである。図-3に示した質量係数の特性から明らかなように、円柱の直径に比べて入射波の波長が小さい場合には、全波力のスペクトルのピークの位置は低周波側に移項し、また高周波側になるにつれて急速に減少する。図には式65に従って計算した全波力の $1/3$ 最大値および図中の条件で規則波として計算した結果も () 内に示してあるが、いずれの場合も規則波とした場合の方が大きい。しかし、波群の中の最大値を対象とすれば、規則波の場合よりはるかに大きくなる。また波浪の主方向と直角方向の波力は主方向の波力の 0.447 倍である。



(a)



(b)

図-15 入射波および全波力のスペクトルの計算例

(3) 全波力の時間波形の算出方法

(2)で述べた方法は不規則な変動の統計的な平均値を求めるものであるが、ここでは不規則波の時間波形が与えられた場合に、全波力の時間波形を計算する方法について述べる。

岩垣および石田らはReidの線型フィルター法に回折理論を導入して不規則波による全波力の時間波形を求める方法を提案している。ただし、岩垣らは円柱の一部分に作用する波力を対象としているが、ここでは全体の統一をはかるため、全波力について示すことにする。

いま入射波の水位変動を

$$\eta_I(t) = -\int_0^\infty M(\sigma) \cos(\sigma t - \delta(\sigma)) d\sigma \quad \dots\dots\dots (66)$$

と表示し、各成分波が微小振幅波理論に従うものとすれば、不規則波による全波力は式(33)を用いて

$$F(t) = -\rho g D^2 \int_0^\infty C_1(\sigma) M(\sigma) \cos(\sigma t - \delta(\sigma)) d\sigma \\ + \rho g D^2 \int_0^\infty C_2(\sigma) M(\sigma) \sin(\sigma t - \delta(\sigma)) d\sigma \quad \dots\dots\dots (67)$$

となる。ここに、 $M(\sigma)$ ：振幅スペクトルおよび $\delta(\sigma)$ ：初期位相であり、また $C_1(\sigma)$ および $C_2(\sigma)$ は次

式で表わされる。

$$C_1(\sigma) = \frac{\tanh kh J_1'(ka)}{(ka)^2 (J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka))}, \quad C_2(\sigma) = \frac{\tanh kh Y_1'(ka)}{(ka)^2 (J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka))} \dots\dots (68)$$

式(67)の第1項および第2項はそれぞれ $C_1(\sigma)$ および $C_2(\sigma)$ を周波数応答関数とする対称線型フィルター式

$$G_s[\eta_I(t)] = p_0 \eta_I(t) + \sum_{n=1}^N p_n [\eta_I(t+n\tau) + \eta_I(t-n\tau)] \dots\dots\dots (69)$$

および反対称線型フィルター式

$$G_a[\eta_I(t)] = \sum_{n=1}^N q_n [\eta_I(t+n\tau) - \eta_I(t-n\tau)] \dots\dots\dots (70)$$

を用いることにより $\eta_I(t)$ を入力として算出することができる。ここに、 p_n および q_n は入力 $\eta_I(t)$ に対する出力 $G_s[\eta_I(t)]$ および $G_a[\eta_I(t)]$ の周波数応答関数のFourier係数である。具体的な計算結果はいまだ公表されていないが、Morison式に基づく不規則波の波力の計算はReidや岩垣らによって行われている。

以上述べた2つの方法は前述の楕円柱や複数本に作用する不規則波の波力の場合にも適用可能である。

6. 結 語

以上、本小論において著者は剛体と仮定され、かついわゆる抗力の影響が無視される場合に非砕波の波によって大口径柱体に作用する全波力の取り扱い方法を著者なりに整理して述べたつもりである。最近こうした研究は多数行われ、貴重な成果が得られているが、これらについて言及することはできなかった。とくに、任意形状の物体に作用する波力に対しては、Green関数を導入して積分方程式に変換し、それを数値的に解く方法がひんばんに用いられるようになっており、今後の展開が期待される。

最後に、著者にこれまで暖かい御指導と適切な御助言を賜った京都大学防災研究所土屋義人教授に深く感謝するとともに、図面の作成に助力載いた防災研究所芝野照夫助手に謝意を表明する。

参 考 文 献

- (1) Barnett, T. P. : Wind Waves and Swell in the North Sea, EOS, Trans. AGU., Vol. 51, No. 7, 1970, pp. 544 ~ 550.
- (2) 土屋義人 : 日本海沿岸における冬期波浪の協同観測, 京大防災研年報, 第16号A, 1973, pp. 29 ~ 39.
- (3) Havelock, T. H. : The Pressure of Water Waves upon a Fixed Obstacle, Proc. Royal Soc., Vol. 175, 1940, pp. 409 ~ 421.
- (4) MacCamy, R. C. and Fuchs, R. A. : Wave Forces on Piles ; A Diffraction Theory, Tech. Mem., No. 69, BEB, 1954, pp. 1 ~ 17.
- (5) 田中清 : 円形島による波浪の回折, 第3回海岸工学講演会講演集, 1956, pp. 33 ~ 35.
- (6) Laird, A. D. K : A Model Study of Wave Action on a Cylindrical Island, Trans. AGU, Vol. 36, No. 2, 1955, pp. 270 ~ 285.
- (7) Bonnefille, R. and Germain, P. : Wave Action on Isolated Vertical Cylinders of Large Dimension, IAHR Congress, London, 1963, pp. 311 ~ 318.

- (8) 永井莊七郎・久保直・時川和夫：超大円柱に働く波の圧力，第21回土木学会年次学術講演会講演概要集，Ⅱ-71，1966.
- (9) 中村宏・阿部宣行：発電所冷却水取水塔の水理，第19回海岸工学講演会論文集，1972，pp. 391～394.
- (10) 中村宏・阿部宣行：海中の近接した2個の冷却水取水塔に作用する波力，第20回海岸工学講演会論文集，1973，pp. 31～35.
- (11) 堀川清司・渡辺晃・勝井秀博：円柱に作用する碎波力に関する研究，第20回海岸工学講演会論文集，1973，pp. 37～42.
- (12) Chakrabarti, S. K. : Nonlinear Wave Forces on Vertical Cylinder, Proc. ASCE, Jour. Hydraulic Div., Vol. 98, HY11, 1972, pp. 1895～1909.
- (13) 山口正隆・土屋義人：大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線型性の影響，土木学会論文報告集，No. 229，1974，pp. 41～53.
- (14) Skjelbreia, L. and Hendrickson, J. A. : Fifth Order Gravity Wave Theory, Proc. 7th Conf. on Coastal Eng., 1960, pp. 184～197.
- (15) 合田良実・吉村知司・伊藤正彦：島堤による波の反射および回折に関する研究，港湾技術研究所報告，第10巻，第2号，1971，pp. 3～52.
- (16) 合田良実・吉村知司：海中に孤立した巨大構造物に作用する波力の計算，港湾技術研究所報告，第10巻，第4号，1971，pp. 3～52.
- (17) 合田良実・吉村知司・笹田正：楕円体近似による固定船体に働く波力の理論および実験，港湾技術研究所報告，第12巻，第4号，1973，pp. 23～74.
- (18) Chappellear, J. E. : Wave Forces on Groups of Vertical Cylinders, Jour. Geophys. Res., Vol. 64, No. 6, 1959, pp. 199～208.
- (19) Lebreton, J. C. and Cormault, P. : Wave Action on Slightly Immersed Structures, Some Theoretical and Experimental Considerations, Proc. of the Symposium "Research on Wave Actions, Vol. 4, Paper 12, 1969, pp. 1～34.
- (20) 大楠丹：複数本の直立円柱に作用する波力，九州大学応用力学研究所所報，第40号，1973，pp. 205～222.
- (21) 光易恒・水野信二郎・本多忠夫・力石国雄：海洋波の方向スペクトルについて，第21回海岸工学講演会論文集，1974，pp. 261～265.
- (22) Fujinawa, Y. : Measurements of Directional Spectrum of Wind Waves Using an Array of Wave Detectors Part II; Field Observation, Jour. Oceanog. Soc. of Japan, Vol. 31, 1975, pp. 25～42.
- (23) 光易恒：風波のスペクトルの発達(2)一有限な吹送距離における風波のスペクトルの形について一，第17回海岸工学講演会論文集，1970，pp. 1～7.
- (24) Longuet-Higgins, M. S. : On the Statistical Distribution of the Height of Sea Waves, Jour. Marine Res., Vol. 11, No. 3, 1952, pp. 245～266.
- (25) Goda, Y. : Numerical Experiments on Wave Statistics with Spectral Simulation, Report PHRI, Vol. 9, No. 3, 1970, pp. 3～57.
- (26) 土木学会編：海洋鋼構造物設計指針(案)解説，1973，pp. 42～45.

- (27) 合田良実：海中構造物に関する波浪の諸問題，橋梁，Vol. 7, No. 8, 1971, pp. 26 ~ 34 .
- (28) 岩垣雄一・石田啓・千田哲雄：円柱に作用する不規則波力について，第21回海岸工学講演会論文集，1974, pp. 1 ~ 5 .
- (29) Reid, R. O. : Correlation of Water Level Variations with Wave Forces on a Vertical Pile for Nonperiodic Waves, Proc. 6th Conf. on Coastal Eng., 1957, pp. 749 ~ 786 .