

沖積地河川の水理学序説

—— 流れと浮遊砂との相互作用 ——

岸 力

目 次

1. 序 論
2. 浮遊砂の濃度分布
 - 2.1 拡散方程式による解 (Euler 的計算手法)
 - 2.2 確率的方法による解 (Lagrange 的計算手法)
 - 2.3 エネルギー方程式による解 (Velikanov の重力理論)
3. 流速分布に及ぼす浮遊砂の効果
 - 3.1 A. T. Ippen の研究
 - 3.2 日野の研究
4. 浮遊砂流に対する板倉・岸・中山の研究
 - 4.1 流速の対数一直線則
 - 4.2 浮遊砂の濃度分布
 - 4.3 「浮遊砂流の Karman 定数」に関する意見
 - 4.4 浮遊流砂量
 - 4.5 浮遊砂流の抵抗則

参 考 文 献

1. 序 論

開水路流れにおける浮遊砂輸送の問題は水理学の重要課題の一つとして長い研究の歴史を持っている。今日 Rouse の式と呼ばれている浮遊砂濃度の分布式は 1937 年、今から約 40 年前に作られていた。また A. T. Ippen (1971) によれば、Rouse の式と等価な関係は彼が von Karman の示唆を受けて既に 1934 年に導いていたという。其の後、現在に至るまでの研究の発展は目覚ましく知識の蓄積は膨大である。

研究の方向は 2 つに大別できる。一つは定常等流における流速分布および浮遊砂の濃度分布の研究である。この問題は河川にあらわれる河床変化の制御と予測のための基礎となる重要課題であり多くの研究者の関心を集めてきた。流体力学的には、固液二相流における乱流構造と浮遊砂との相互作用の解明であり、此の講演の主題に選んだ。他の一つは開水路流れにおける移流分散の研究であり、河川の水質保全への関心の高まりにつれて、特に最近の約 10 年間に急速に発展した分野である。

実際の流砂問題を扱う場合には、上に述べた 2 つの方向の研究成果を合理的に組み合わせる事になる。この場合問題が多様性を示し解を得るための要素の組合せが複雑になればなる程、一方では流砂現象そのものの基本的な性質の研究が必要になる。浮遊砂に関する課題は此の講習会においても第 1 回の 1964 年以來しばしば取り上げられ、その都度新しい研究成果が紹介されてきた。今回も貯水池における濁りの問題が論じられる。此の講演では、開水路流れにおける流速分布と浮遊砂の相互作用に問題を絞って、

浮遊砂を伴う流れの基本的な性質を考察しようと思う。全般的な問題については文末の参考文献^{(1)~(8)}を参照されたい。

2. 浮遊砂の濃度分布

ここでは浮遊砂を含んだ流れの定常等流を考える。水深、勾配、流速および浮遊砂濃度は流れの方向に変化しない。本文では濃度は容積比を意味している。

2.1 拡散方程式による解 (Euler 的計算手法)

浮遊砂濃度の基礎方程式は

$$\epsilon_s \frac{dc}{dy} + w_o c = 0 \quad (2.1)$$

ここに ϵ_s : 浮遊砂の拡散係数, c : 浮遊砂の濃度

y : 水路底からの高さ, w_o : 浮遊砂の沈降速度

浮遊砂の拡散係数が流れの渦動粘性係数 ϵ_m に比例すると考え

$$\epsilon_s = \beta \epsilon_m \quad (2.2)$$

と置く。ただし β は比例係数である。 ϵ_m として

$$\epsilon_m = \kappa u_* y \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (2.3)$$

を用い, (2.1) 式を積分すると

$$\frac{c}{c_b} = \left(\frac{h-y}{y} \cdot \frac{b}{h-b} \right)^{z_1} \quad (2.4)$$

$$z_1 = w_o / \beta \kappa u_* \quad (2.5)$$

ここに h : 水深, b : 河床近くに設けた基準点の高さ,

c_b : 基準点における浮遊砂濃度,

κ : カルマン定数, u_* : 底面のまさつ速度

(2.4) 式は Rouse (1937) の式と一般に呼ばれているが, Ippen (1971)⁽⁹⁾によれば彼が1934年に既に導いていたという。

Vanoni (1946)⁽¹⁰⁾の実験および Einstein & Chien (1955)⁽¹¹⁾の実験は Rouse の式に関する2つの重要な問題点を明らかにした: 浮遊粒子を含む流れでは流速分布が清水流と異なりカルマン定数 κ が減少する。また β は, (2.5) 式における κ を実測流速分布によって補正しても $\beta = 1$ とはならない。この2点は其の後における研究の主題となり, 多くの研究者の関心を集めて来た。

2.2 確率的方法による解 (Lagrange 的計算手法)

前節の方法は拡散方程式を基とする Euler 的な解析法で従来の研究方法の主流であった。これに対し浮遊粒子の運動を追跡し統計的な特性として拡散現象を考える Lagrange 的な解析法が B. J. Barfield et. al (1969)⁽¹²⁾ および M. S. Yalin and B. M. Krishnappan (1973)⁽¹³⁾ によって開発された。

全水深 h を厚さ δy の薄層に分割する。ある小流体塊に注目し, 微小拡散時間 δt の間の流体塊の変位を考える。 n 番 steps および $(n+1)$ 番 steps の終りにおける流体塊の高さを y_n および y_{n+1} とする (Fig. 2.1 参照)。 y_n にある流体塊が次の step で y_{n+1} を中心とする δy_{n+1} の領域に入る確率は

$$Prob(\delta y_{n+1} | y_n) = dp = f_o(y_{n+1}; y_n) \delta y_{n+1} \quad (2.6)$$

確率密度関数 $f_o(y_{n+1}; y_n)$ は正規分布にしたがうと仮定する。

$$f_o(y_{n+1}; y_n) = \frac{1}{\sigma_y \cdot \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(y_{n+1} - y_n)^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (2.7)$$

ここに σ_y は流体塊変位の標準偏差で、拡散時間 δt および変動速度 $(\bar{v}^2)^{1/2}$ に比例するに違いない。

$$\sigma_y = (\text{const})_o \cdot (\bar{v}^2)^{1/2} \cdot \delta t \quad (2.8)$$

$(\bar{v}^2)^{1/2}$ は y によって変化するから、 σ_y は y の関数である。

ここで沈降速度 w を持つ浮遊粒子の運動を考える。流体塊が $v'\delta t$ だけ変位する間に浮遊粒子は $(v' - w)\delta t$ だけ変位する。したがって浮遊粒子の変位の確率密度関数 $f(y_{n+1}; y_n)$ は

$$f(y_{n+1}; y_n) = \frac{1}{\sigma_y \cdot \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\{y_{n+1} - (y_n - w\delta t)\}^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (2.9)$$

Fig. 2.1 乱流中における砂粒子の拡散

さて浮遊粒子の初期高さを y_* と書くと、 y_* を出発した粒子が $(n+1)$ steps の後高さ y_{n+1} にある確率密度関数は

$$f_{n+1}(y_{n+1}; y_*) = \int_0^h f_n(y_n; y_*) f(y_{n+1}; y_n) dy_n \quad (2.10)$$

で与えられる。ここに $f_n(y_n; y_*)$ は y_* を出発した粒子が n steps の後に y_n にある確率密度関数であり、 $f(y_{n+1}; y_n)$ は (2.9) 式で与えられる。(2.10) 式は $f_{n+1}(y_{n+1}; y_*)$ が 1 step 前の確率密度 $f_n(y_n; y_*)$ できまる事をあらわしている。この意味で浮遊粒子の運動は Markov 過程の一種である。

$n=0$ に対応する密度関数は δ -関数を用い $\delta(y - y_*)$ にとる事ができる。 $f_1(y_1; y_*)$ は (2.9) で $n=0$ と置いた推移関数である。 $f_2(y_2; y_*)$, $f_3(y_3; y_*)$ ……は (2.10) によって順に与えられる。このようにして

$$f_n(y_n; y_*) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

を得ることができる。

考えている等流モデルの場合には、粒子を放出する。"source" は x 軸に沿って一様に分布している。したがって任意の 2 断面にはさまれた領域では、任意の瞬間に同数の粒子が存在するに違いない。したがって、ある高さ y の濃度は

$$c = \alpha_1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y; y_*) \quad (2.12)$$

ある基準の高さ y_b における濃度を c_b と書くと濃度分布は

$$c/c_b = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y; y_*) / \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y_b; y_*) \quad (2.13)$$

Yalin and Krishnappan (1972, 1973) は次の計算手順で浮遊砂の濃度分布を求めた。水深 h を N 層の薄層に分割し、例えば $h/N = 8\sigma_y$ とれば、拡散時間 δt の間には 99.994 % の粒子がこの層内に止ることになる。(2.8) 式によれば

$$\delta t < \frac{h}{(\overline{v^2})^{1/2}} \frac{1}{8N(const)\sigma}$$

粗な乱流の実験結果を参照して

$$\delta t < \frac{h}{u_*} \frac{1}{0.57N}$$

$N=20$ ととり、 δt を

$$\frac{\delta t u_*}{h} = 0.0875 < \frac{1}{0.57 \times 20} \quad (2.14)$$

にとった。

(2.8) 式で σ_y を求めるが、 $(\overline{v^2})^{1/2}/u_*$ $\sim y/h$ の関係は Fig. 2.2 を用いた。また、 $(const)\sigma$ は 1.00 ではなく 1.50 とした。

また (2.13) 式では y_* を指定する必要があるが、 y_* は掃流層と浮遊層の境界の高さをあらわす。実測値と計算値との比較から、 $y_*/h \sim u_*/w_0$ の関係として Fig. 2.3 を用いた。基準点の高さ y_b は慣例にしたがい $y_b/h = 0.05$ とした。

浮遊砂の濃度分布に関する (2.4) 式と (2.13) 式との比較を Fig. 2.4 に示す。図には Vanoni and Nomikos⁽¹⁴⁾ (1960) による実験結果を記入してある。この実験例は $u_*/w_0 \approx 3.6$ である。式 (2.13) による計算濃度分布は、拡散方程式に基づく (2.4) 式より、実験結果によく一致している。

Yalin and Krishnappan は u_*/w_0 の種々の値に対し濃度分布を計算し Fig.

2.5 を示している。彼等はまた $1.25 \leq u_*/w_0 \leq 10.00$ の範囲で実験を行い、Fig. 2.5 が実験値とよく一致したと報告している。Rouse の式 (2.4) は $u_*/w_0 < 1.5 \sim 2.0$ の範囲では (2.13) 式とほぼ一致し、実験結果にも適合するが、 u_*/w_0 がこの範囲を超えて大となると Fig. 2.4 の例で示した様に実験値に適合しなくなる。特に (2.4) 式の濃度分布曲線は $u_*/w_0 > 3$ になると逆 S 字型を呈するが、実測値ではこの性質があらわれない事を強調している。

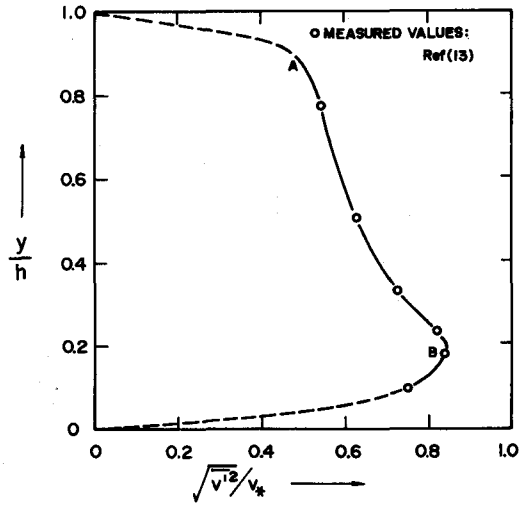


Fig. 2.2 鉛直変動速度の分布 Ref. [13]

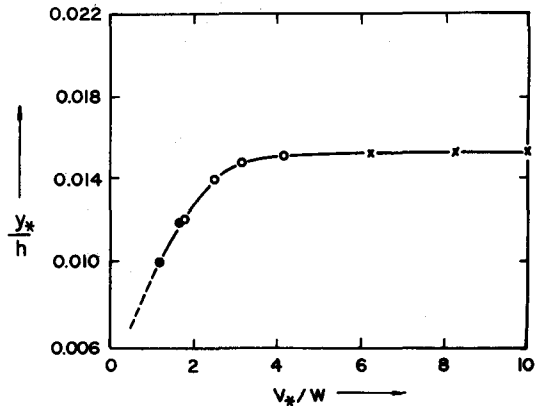


Fig. 2.3 浮遊層と掃流層の境界の高さ Ref. [13]

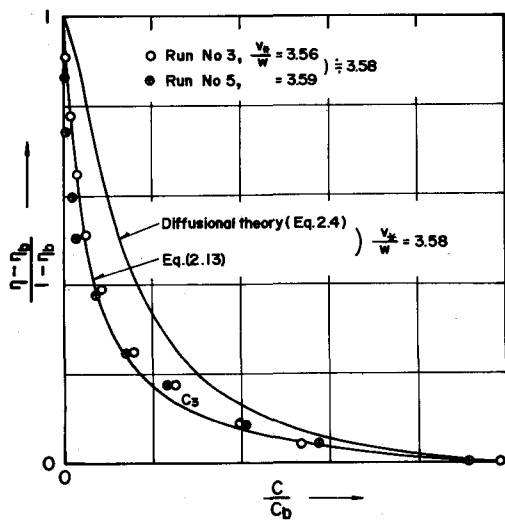
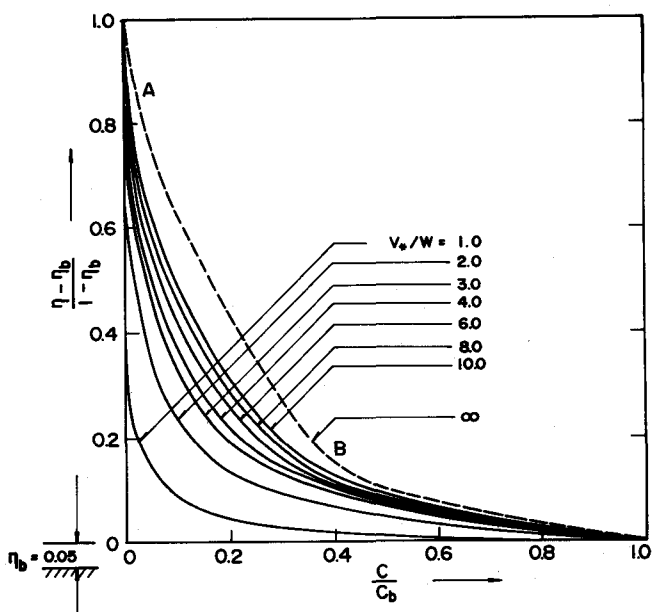


Fig. 2.4 浮遊砂の濃度分布 Ref. [13]



C/C_b - DISTRIBUTION CURVES GIVEN BY THE PROBABILISTIC METHOD

(The mild kinks at A and B are because the curve in Fig. 2.2 has the kinks at the same levels)

Fig. 2.5 浮遊砂の濃度分布 Ref. [13]

2.1 節に述べた Euler 的解法と 2.2 節に述べた Lagrange 的解法の基本的な相違点は拡散係数 ϵ_s に見出される。Euler 的解法は (2.2) および (2.3) 式に示めされている様に

$$\epsilon_s = \beta \epsilon_m = \beta k u_* y \left(1 - \frac{y}{h}\right) = \beta k u_* h \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (2.15)$$

を用いている。これに対し、Lagrange 的解法では

$$\epsilon_s = \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{dt} \quad (2.16)$$

であるから、(2.8) 式を代入すれば

$$\epsilon_s = (const)_0^2 (\bar{v}^2) \delta t \quad (2.17)$$

Fig. 2.2 に与えられた $(\bar{v}^2)^{1/2}/u_*$ の関数を $g(y/h)$ であらわせば $\bar{v}^2 = u_*^2 g^2(y/h)$ である。また (2.14) 式によれば $u_* \delta t = 0.0875 h$ である。したがって (2.17) 式は

$$\epsilon_s = (const)_0^2 (0.0875) u_* h g^2(y/h) \quad (2.18)$$

となる。(2.15) 式による $\epsilon_{s \max}$ は $y = h/2$ にあるに対し (2.18) 式による $\epsilon_{s \max}$ は $y \approx h/5$ にあり、関係形も異っている。Yalin and Krishnappan が指摘している様に、 u_*/w_0 が大きく、したがって浮遊砂濃度も高くなると Rouse 型の分布が適合しなくなるとすれば、その原因は (2.15) 式にさかのぼって考えなければならない。

2.3 エネルギー方程式による解 (Velikanov の重力理論)

M. A. Velikanov (1955, 1958⁽¹⁵⁾) は浮遊砂を含んだ流れのエネルギー方程式から浮遊砂の濃度分布式を導いた。Yalin (1972) によって要約された結論によれば、浮遊砂の濃度分布は

$$\frac{u\tau}{r_s} \frac{dc}{dy} + w_0 c = 0 \quad (2.19)$$

で与えられる。ここに u : 底面から y の高さの平均流速、 τ : 底面から y の高さのせん断力、 r_s : 浮遊粒子の単位体積重量。

(2.1) 式と比較すると Velikanov の理論では拡散係数 ϵ_s を

$$\epsilon_s = \frac{u\tau}{r_s} \quad (2.20)$$

と置いた事になる。 $\tau = \tau_0 (1 - y/h)$, $u = \frac{u_*}{\kappa} \log_e \left[(y/h)/a \right]$, (ただし $a = k_s/30h$, k_s : 粗度高) を代入すると

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{J}{(r_s/r_0)} \cdot (u_* h) \left(\frac{u}{u_*} \right) \left(1 - \frac{y}{h} \right) \\ &= \frac{J}{(r_s/r_0)} \cdot (u_* h) \cdot \frac{\log_e \left[(y/h)/a \right]}{\kappa} \cdot \left(1 - \frac{y}{h} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

ただし r_0 : 流体の単位面積重量、 J : エネルギー勾配、(2.21) 式と (2.15) 式とを比較すると

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_s (\text{Velikanov})}{\epsilon_s (\text{Rouse})} &= \frac{J}{\beta k^2 (r_s/r_0)} \frac{\log_e \left[(30 y/h) (h/k_s) \right]}{(y/h)} \\ &\div \frac{J}{\beta k (r_s/r_0)} \frac{5.75 \left[\log_{10} (y/h) + 3 \right]}{(y/h)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Velikanovの理論と実験との比較は u_*/w_0 の比較的小さな例についてだけ行なわれていて、その範囲ではRouseの式との間に著しい違いは認められない。しかし(2.21)によればVelikanov式における (ϵ_s/u_*h) は y/h の他にエネルギー勾配 J および (h/h_s) に依存している。これに対しRouseの式では (ϵ_s/u_*h) は y/h のみの関数になっている。特に同一の u_*/w_0 を持つ流れにおいて濃度分布が J に依存するかどうかは研究の価値がある。また(2.22)式によればVelikanov式における ϵ_s はRouse式のそれと関数形も異り、(2.18)式に示したYalinらの式に似た分布形を持つ。

3. 流速分布に及ぼす浮遊砂の効果

前章では浮遊砂の濃度分布に関する3理論を説明した。これらの理論の相違点は2.2および2.3節で繰返し述べた様に、浮遊砂の拡散係数 ϵ_s の評価方法にある。したがって研究をさらに進めるためには、浮遊砂を含んだ流れの流速分布をあわせて考察しなければならない。

3.1 A. T. Ippenの研究

A. T. Ippen (1971, 1973)⁽¹⁶⁾はM. I. Tにおいて浮遊砂を含む流れに関する広汎な研究を行いBSCEおよびIAHRの特別講演において成果を要約して発表している。ただしM. I. Tでの実験はすべて滑面水路で行なわれたものであり、したがって以下に述べる結果はすべてが粗面水路に直ちに適用できるかどうかは証明されていない点に留意すべきである。

Elasta and Ippen (1961)⁽¹⁷⁾およびOrdonetz (1970)は流速の欠則度則が浮遊砂の影響を受け(3.1)式になる事を半実験的に導いた。

$$\frac{u - u_{max}}{u_*} = \frac{1}{\kappa'} \log_e \left(\frac{y}{h} - \phi \log_e \frac{y}{h} \right) \quad (3.1)$$

(3.1)式における κ' はKármán定数の修正値でIppen (1969, 1971)は

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{1 + c_m (s - 1)}{1 + 2.5 c_0} \quad (3.2)$$

を与えた。ただし κ :清水流のKármán定数で $\kappa = 0.385$ を用いる。 c_m :浮遊砂の断面平均濃度(容

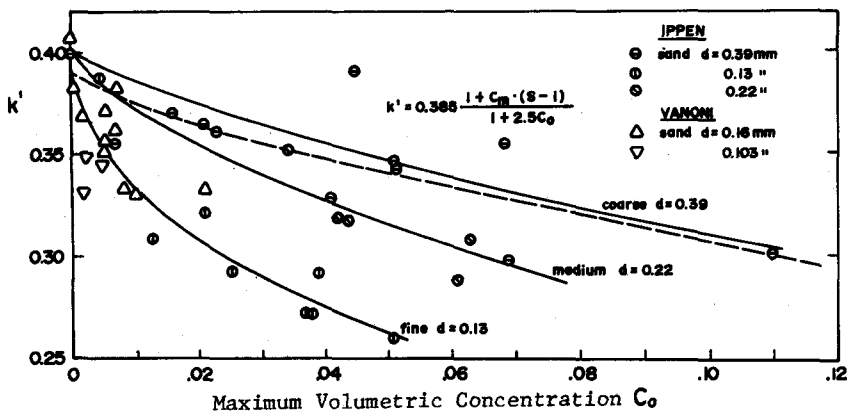


Fig. 3.1 The Modified Von Karman Constant k' as a Function of Maximum Concentration and of Sand Size. Ref. (16)

積比), c_0 : 底面附近の最大濃度で $y/h = 0.03 \sim 0.05$ の高さに生ずる。 s : 粒子の比重
 其の後の研究によれば, κ' は濃度だけでなく浮遊砂の粒径にも依存し, 細粒子程 κ' の減少が著しい。
 Montes (1973) は実験例として Fig. 3.1 を与えている。

(3.1) 式右辺に導入された補正項 ϕ は Montes (1973) によって Fig. 3.2 のように与えられている。 図中 Z_1 は (2.5) 式によって与えられた濃度分布式の指数である。 Z_1 に含まれる係数 β は Taggart et. al (1972)⁽⁸⁾ により粒子 Reynolds 数 $R_d = u_* d / \nu$ の関数として与えられた。 $R_d < 40$ では $\beta \approx 1$ で $R_d > 40$ では β は 1 を超えて大となる傾向が認められる。しかし β の実験値は散乱が大きく, Ippen (1973) もさらに研究を要する結果であると述べている。

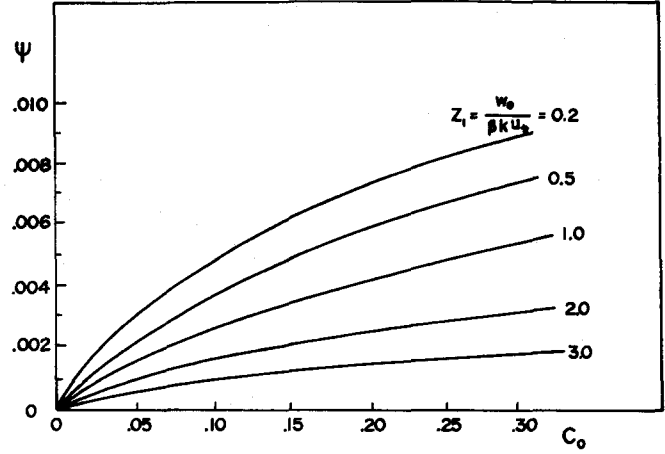


Fig.3.2 Correlation of Factors Ψ , Z and c_0 Ref.(16)

浮遊砂の濃度分布は (2.1) 式から

$$\frac{dc}{c} = -\frac{w_0}{\epsilon_s} dy = -\frac{w_0 du/dy}{\beta(1 - \frac{y}{h})u_*^2} dy \quad (3.3)$$

(3.1) によれば du/dy は

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{u_*}{\kappa' h}\right) \frac{\frac{y}{h} - \phi}{\frac{y}{h} \left(\frac{y}{h} - \phi \log_e \frac{y}{h}\right)} \quad (3.4)$$

(3.4) 式を (3.3) 式に代入して積分すれば

$$\log_e \frac{c}{c_0} = \left(\frac{w_0}{\beta \kappa' u_*}\right) \int_{y/h}^{\phi} \frac{(\eta - \phi)}{\eta(1 - \eta)(\eta - \phi \log_e \eta)} d\eta \quad (3.5)$$

c_0 は高さ $y = \phi h$ における濃度で, M. I. T での実験はこの点が最大濃度になっている。 $\phi/\eta \ll 1$ で ϕ が無視できる場合は (3.5) 式は (2.4) 式に帰着される。多くの実験例では $y = \phi h$ (Fig. 3.2 によれば ϕ は 10^{-3} のオーダーである) の高さの濃度は直接測定されていないし, 慣行にしたがって $\eta_b = b/h \approx 0.05$ の高さの濃度 c_b を基準にとって

$$\log_e \frac{c}{c_0} = \left(\frac{w_0}{\beta \kappa' u_*}\right) \int_{y/h}^{\eta_b} \frac{(\eta - \phi)}{\eta(1 - \eta)(\eta - \phi \log_e \eta)} d\eta \quad (3.6)$$

を用いるのが便利である。

浮遊流砂量は (3.7) 式で与えられる。

$$q_s = \int_0^h u c dy$$

(3 . 7)

ただし q_s : 単位巾, 単位時間当りの (容積) 浮遊砂量

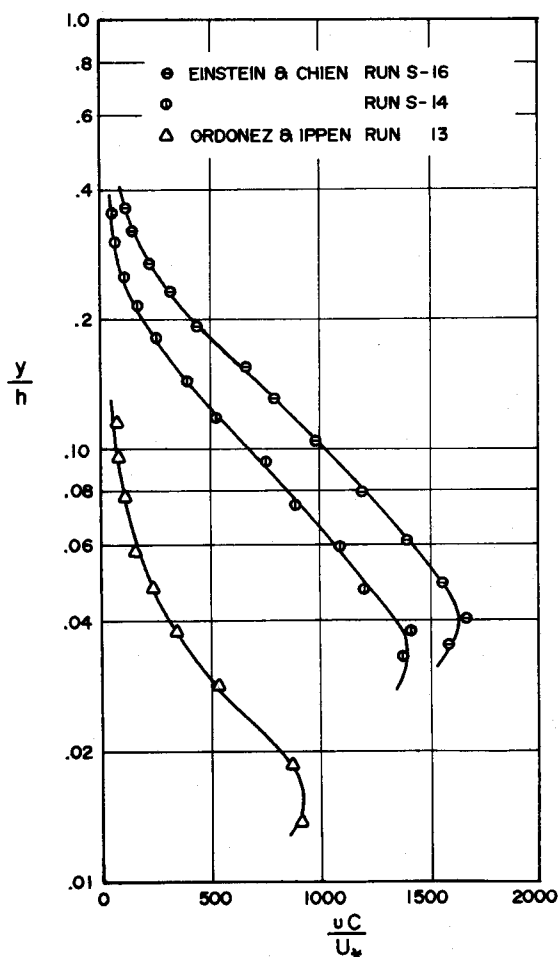


Fig.3.3 Distribution of Sediment Transport $u.c$ over the Depth. Ref.(16)

Ippen(1971)は $u.c/u_*$ の分布の計算値と実験値とを比較しFig. 3.3を与えている。Ippenらの理論は、半実験的に求めた流速分布(3.1)式を基礎として展開されているので他の水理条件、例えば粗な乱流に適用できるかどうかの疑問は残るけれども、計算値と実験値の一致は美事であり、浮遊砂現象を解明する上の基本課題の一つが流速分布の研究である事を教えている。

次に浮遊砂がDarcy-Weisbachの抵抗係数 f に及ぼす効果に言及して置く。Montes(1973)の研究結果では、浮遊砂の存在は f の値を増し、しかも濃度が高い程 f の増加も著しい傾向が認められた。ただし、Montesのこの結果は滑面水路で、流れとしては粗滑の遷移領域で得られた事を重ねて注意して

置く。

3.2 日野の研究

前節に述べた Ippenらの研究に代表される様に、浮遊砂を含む流れにみられる諸特性を的確に抽出するための系統的な実験研究は主としてアメリカの研究者によって行こなわれた。これに対し、実験的な事実を説明するための理論開発はわが国の研究者に負う処が大きい。特に室田(1953)⁽¹⁹⁾、椿(1955)⁽²⁰⁾、志村(1957, 1961)⁽²¹⁾および日野(1963)⁽²²⁾による研究は高く評価されるものと思う。ここでは従来の理論研究の総まとめの意味で日野の理論の結論だけを述べる。

浮遊砂を含む流れの加速度方程式は次式で与えられる：

$$l \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = f(c) l_0 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 - Bg \frac{\rho_0}{\rho_m} (s-1) \frac{w_0 c}{u_*} \quad (3.8)$$

ここに l ：浮遊砂流の混合距離、 l_0 ：清水流の混合距離、 $f(c)$ ：移動する流体塊と粒子群との衝突による加速度の減殺効果をあらわす c のある関数で1より小さい値を持つ。 ρ_0 ：流体の密度、 ρ_m ：浮遊砂流の断面平均密度、 ρ_s ：粒子の密度、 $s = \rho_s / \rho_0$ 、 g ：重力の加速度、 B ：定数

浮遊砂流における乱流構造の変化を

$$\frac{l_0}{l} = \phi(c, \xi, y/h) \quad (3.9)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{l} = \frac{u_*}{l_0} \phi(c, \xi, y/h) \quad (3.10)$$

であらわす。(3.10)式を(3.8)式に代入すれば

$$\frac{u_*^2}{l_0} \phi = f(c) \frac{u_*^2}{l_0} \phi - B u_*^2 \frac{\rho_0 g (s-1) w_0 c}{\rho_m u_*^3} \quad (3.11)$$

(3.11)式を解いて ϕ を求め、微小項を無視すると

$$\phi = \frac{1}{f(c)} + B \left[\frac{\rho_0 g (s-1) w_0 \kappa h}{\rho_m u_*^3} \right] c \left(\frac{y}{h} \right) \quad (3.12)$$

(3.9)式の右辺に、ある無次元量 ξ を導入したが(3.12)式によれば

$$\xi = \frac{\rho_0 g (s-1) w_0 \kappa h}{\rho_m u_*^3} \quad (3.13)$$

である。ここに κ ：清水流の Kármán 定数

(3.12)式を(3.10)式に代入し、 $l_0 = \kappa y$ として流速分布を求めると

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\kappa y} \left(1 + \beta c + B \frac{\xi}{h} c y \right) \quad (3.14)$$

$$\text{ただし} \quad \frac{1}{f(c)} = 1 + \beta c, \quad \beta \text{ は定数で } \beta = 2.0 \quad (3.15)$$

次に、(3.14)式によって浮遊砂の拡散係数 $\epsilon_s (= \epsilon_m)$ を求め濃度分布の式を導くと

$$\frac{dc}{c} = - \frac{w_0}{\kappa u_*} \left(\frac{1}{y} + \frac{\beta c}{y} + B \frac{\xi}{h} c \right) \frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{h} \right)} \quad (3.16)$$

(3.14)、(3.16)式は右辺に c を含むため積分が困難であるが、日野は第1近似として Rouse 分布すなわち(2.4)式を両式の右辺の c に用いそれぞれの解を求めた。ただし(2.4)式における Z は $Z = w_0 / \kappa u_*$ としている。

流速分布および濃度分布はそれぞれ

$$\frac{u - u_{max}}{u_*} = \frac{1}{k} \left[\log_e \frac{y}{h} - \beta c_A \int_{y/h}^1 \frac{1}{\eta} \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^s d\eta - B c_A \int_{y/h}^1 \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^s d\eta \right] \quad (3.17)$$

$$\log_e \left(\frac{c}{c_b} \right) = \left(\frac{w_0}{\kappa u_*} \right) \left[\log_e \left(\frac{h-y}{y} \cdot \frac{b}{h-b} \right) - \beta c_A \int_{y/h}^{y/h} \frac{1}{\eta(1-\eta)} \cdot \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^s d\eta - B \xi c_A \int_{y/h}^{y/h} \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^s d\eta - B \xi c_A \int_{b/h}^{y/h} \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^{s-1} d\eta \right] \quad (3.18)$$

$$\text{ただし } c_A = c_b \left(\frac{b}{h-b} \right)^s \quad (3.19)$$

(3.17), (3.18) 式は実測値との比較が行なわれていない。日野の論文(1963, p. 81, Fig. 4)には(3.17)式による欠速度則が図示されている。しかし計算曲線は Ippenらの式(3.1)と相反する傾向を持っている。理由が判然としないので再検討が必要と思う。

Vanoni (1946) および Einstein and Chien (1955) の実験的研究から後、浮遊砂流では Kármán 定数が清水流の場合より減少するという表現が水理学の分野では慣用されている。前述の Ippen の報告でも Kármán 定数の変化という考え方が用いられている。日野 (1963) は修辭的にもこの表現が適切でないと述べているが、著者は浮遊砂流における Kármán 定数の定義の点から考えてこの表現が妥当でないとと思っている。次章においてその理由が明らかにされるであろう。速度勾配の増加をあらわす指標と考えると Kármán 定数の変化を求める。日野が示した結果は

$$\frac{\kappa}{\kappa'} = \frac{(1 + \beta c_m)}{2} \left[1 + \{ 1 + 4B\kappa(1 + \beta c_m)\xi \}^{1/2} \right] \quad (3.20)$$

$$\text{ただし } \xi = \frac{g(s-1)w_0 c_m(h-\delta)}{u_*^3 \log_e(h/\delta)} ; \quad \delta : \text{粘性底層の厚さ} \quad (3.21)$$

(3.20) 式で $B=13$ とれば、実測値と計算値はよく一致する。

日野はさらに、浮遊砂流における乱れ強度の変化の式を導き Elata and Ippen (1961) の実験結果——中立粒子流における乱れ強度の増加を説明している。また板倉・中山 (1975) は浮遊砂流について乱れ強度の減少が日野式とよく一致する事を実験的に確かめている。特に浮遊砂流では沈降速度が 0 でない有限値を持つため、乱れ強度の減少は極く小さく、清水流の場合と比べてほぼ不変と考えてよい。2.2 節で Yalin and Krishnappan による濃度分布の解法を説明し、彼等の計算曲線が実測値によく一致する事を述べた。彼等の成功の理由は、混合距離を用いなくて変動速度に着目して計算理論を構成した処にある。

4. 浮遊砂流に対する板倉・岸・中山の研究

3 節で浮遊砂流に対する流速分布式として Ippen らにより (3.1) 式および日野による (3.17) 式を示した。これらは欠速度式になっていて u_{max} を与えなければ流速の絶体値が求められないし、また浮遊砂流の抵抗則を導くこともできない。板倉、岸、中山 (1975) は流速分布についてさらに考察を進めた。

4.1 流速の対数一直線則 (log-linear law)

単位体積の流体要素についてのエネルギー平衡方程式を(4.1)式であらわす。

$$\tau \frac{du}{dy} \cong \overline{g\rho'v'} + B \frac{\rho u_*^3}{\kappa L} \quad (4.1)$$

ここに τ : セン断力, u : 時間平均流速, u_* : まさつ速度, ρ' : 流体塊の混合による変動密度, v' : 変動速度の鉛直成分, κ : Kármán 定数, ρ : 時間平均密度, L : 現象の特性長, B : 比例定数
(4.1)式の左辺は Reynolds 応力による乱れエネルギーの発生量をあらわし, 右辺はその配分を示している。右辺第1項は砂粒子を浮遊させるためのエネルギーであり, 第2項は粘性による散逸エネルギーである。右辺第1項は

$$\overline{g\rho'v'} = g\rho(s-1) \overline{c'v'} = g\rho(s-1)w_0 c \quad (4.2)$$

浮遊砂流の流速分布は(4.1)式の右辺におけるエネルギーの配分割合によって清水流と異ってくると考えられる。(4.2)式を考慮して, (4.1)式の右辺の第1項と第2項の比をとり特性長 L を求めると, 比例定数 B を除いて

$$\frac{1}{L} = \frac{\kappa g(s-1)w_0 c}{u_*^3} \quad (4.3)$$

(4.3)式に与えた特性長 L は buoyancy flux (浮力によるエネルギー輸送速度) と粘性によるエネルギー散逸速度との比で, 気象学でいう Monin-Obukhov に相当するものである。〔Monin-Obukhov (1954)⁽²⁴⁾, Turner (1973)⁽²⁵⁾〕。

また L は日野理論に導入されたパラメータ ξ と密接な関係があり, (3.13)式と(4.3)式を比較すれば

$$\frac{h}{L} \cong \xi c \left(\frac{\rho_m}{\rho_0} \right) \cong \xi c \quad (4.4)$$

である。

清水流では(4.1)式の右辺第1項は0となり, また第2項の B/L は $1/y$ になる。この事を考慮して(4.1)式を次のように書き換える:

$$\tau \frac{du}{dy} = \alpha \frac{\rho u_*^3}{\kappa L} + \frac{\rho u_*^3}{\kappa y} = \frac{\rho u_*^3}{\kappa y} \left(1 + \alpha \frac{y}{L} \right) \quad (4.5)$$

あるいは

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\kappa y} \left(1 + \alpha \frac{y}{L} \right) \quad (4.6)$$

(4.6)式における係数 α は Monin-Obukhov 係数と呼ばれ, Webb (1970)⁽²⁶⁾ は地表風の観測資料を解析し $\alpha \cong 5$ を得ている。

(4.3)式によれば L は濃度 c を含むから y の関数である。しかし気象学での適用例をみると L は y によらぬものとし, 地表近くの基準点での値が用いられている。この例にならって, (4.3)式の c に断面平均濃度 c_m を用いる事にする。板倉・岸・中山は浮遊砂流の流速分布をしらべ

$$\alpha \cong 7 \quad (4.7)$$

を得た。

再び(4.1)式に戻り, 左辺の乱れエネルギーの発生量に対する右辺第1項の砂粒子を浮遊させるた

めのエネルギーの比 R_f を考える。 R_f は flux Richardson 数と呼ばれる。(4.2) および (4.5) 式を参照すれば

$$R_f = \frac{\kappa g (s-1) w_0 c}{u_*^3} y \left(1 + \alpha \frac{y}{L}\right)^{-1} \quad (4.8)$$

$\alpha y/L \ll 1$ であれば

$$R_f \approx y/L \quad (4.9)$$

渦動粘性係数 (運動量輸送係数) ϵ_m を考えると

$$\epsilon_m = \frac{u_*^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right)}{(du/dy)} = \kappa u_* y \left(1 - \frac{y}{h}\right) \left(1 + \alpha \frac{y}{L}\right)^{-1} \approx \kappa u_* y \left(1 + \frac{y}{h}\right) (1 - \alpha R_f) \quad (4.10)$$

(4.10) 式によれば $R_f = \alpha^{-1} \approx 0.14$ で $\epsilon_m = 0$ となり乱流運動が減衰する。Webb (1970) は $R_f \approx 0.2$ で気流の乱れの減衰が始まる事を報告している。浮遊砂流ではこの R_f が、与えられた水理条件の下での最大浮遊砂濃度 (断面平均) の条件になるであろう。

(4.6) 式を積分すれば

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\log_e \frac{u_* y}{\nu} + \alpha \frac{y}{L} \right) + \left\{ B' \left(\frac{u_* k_s}{\nu}, \frac{k_s}{L} \right) - \frac{1}{\kappa} \log_e \frac{u_* k_s}{\nu} \right\} \quad (4.11)$$

(4.11) 式が浮遊砂流に対する流速の対数一直線則 (log-linear law) である。清水流では $L \rightarrow \infty$ であるから (4.11) 式は対数則になる。右辺の B' は L が特性長として加わるから $u_* k_s/\nu$ と k_s/L の関数と考えた。 $\bar{\nu}$ は浮遊砂流における動粘性係数で Ippen (1971) の見解を参照して

$$\bar{\nu} = \nu (1 + 2.5 c_0) \quad (4.12)$$

を用いる。〔(3.2) 式参照〕

(4.11) 式で B' が k_s/L に依存するかどうかを次のようにして判定した: Einstein and Chien (1955) の実験および著者らの実験から、ほぼ同一の水理条件を持つ清水流と浮遊砂流の資料の組を選ぶ。浮遊砂流では河床に堆積が生じていない資料に限定している。清水流の流速分布に

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \log_e \frac{u_* y}{\nu} + \left\{ B \left(\frac{u_* k_s}{\nu} \right) - \frac{1}{\kappa} \log_e \frac{u_* k_s}{\nu} \right\} \quad (4.13)$$

を適用し、粗度高 k_s を求める。この資料と組になる浮遊砂流の測定値に (4.11) 式とさきに求めた k_s を適用し B' を計算する。一連の資料について B と B' とを比較したが $B' \approx B$ となり、 B' は L に依存しないことがわかった。浮遊砂流の流速分布は (4.11) 式を変形した (4.14) 式が使い易い。

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\log_e \frac{u_* y}{\bar{\nu}} + \phi \frac{u_* y}{\bar{\nu}} \right) + \left\{ B \left(\frac{u_* k_s}{\bar{\nu}} \right) - \frac{1}{\kappa} \log_e \frac{u_* k_s}{\bar{\nu}} \right\} \quad (4.14)$$

$$\text{ただし } \phi = \alpha \frac{\bar{\nu}}{u_* L} \quad (4.15)$$

(4.14) 式によれば浮遊砂が流速に及ぼす効果は底面近くではなく $u_* y/\bar{\nu}$ が大きい表面近くで著しい事がわかる。また (4.15) 式で定義された ϕ は浮遊砂濃度にほぼ比例して増大する。

Fig. 4.1 には (4.14) 式による流速分布と実測値との比較を示した。理論値と実測値とはよく一致している。なお、流れが完全粗又は滑な状態であれば (4.14) 式は

$$\frac{\nu}{u_*} = 8.5 + \frac{1}{\kappa} \left(\log_e \frac{y}{k_s} + \phi_1 \frac{y}{k_s} \right), \quad \frac{u_* k_s}{\bar{\nu}} > 70 \quad (4.16.a)$$

$$= 5.5 + \frac{1}{\kappa} \left(\log_e \frac{u_* y}{\nu} + \phi_1 \frac{u_* y}{\nu} \right), \quad \frac{u_* k_s}{\nu} < 5 \quad (4.16.b)$$

$$\text{ただし } \phi_1 = \alpha \frac{k_s}{L} \quad (4.16.c)$$

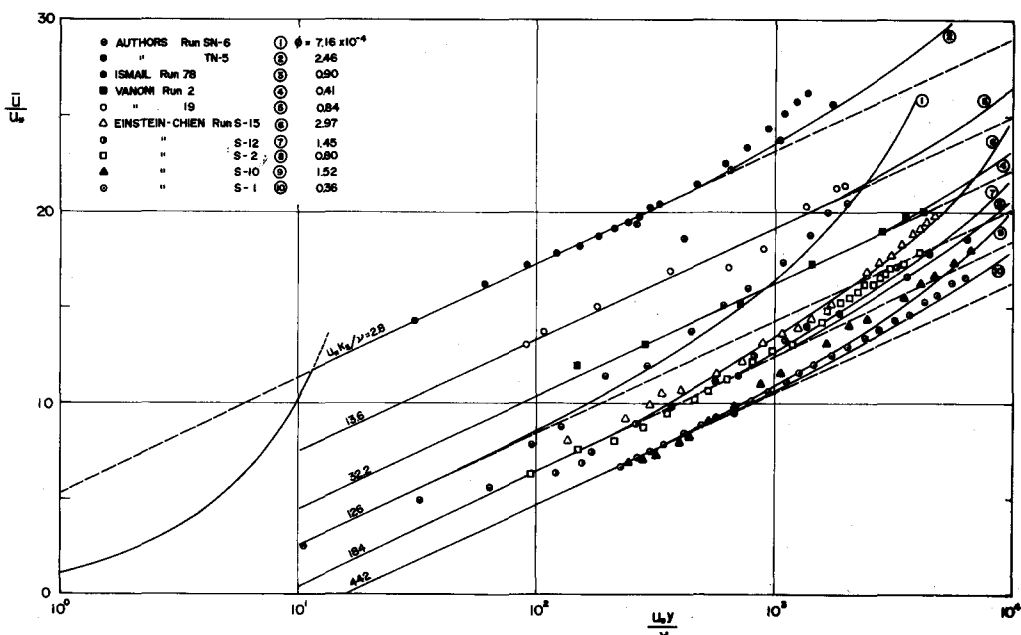


Fig. 4.1.a 浮遊砂を含む流れの流速分布

さらに (4.14) 式から欠速度則を求めると

$$\frac{u - u_{max}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left[\log_e \frac{y}{h} + \phi_2 \left(\frac{y}{h} - 1 \right) \right] \quad (4.17)$$

$$\text{ただし } \phi_2 = \alpha \frac{h}{L}$$

参考のため、前述の Ippenらの半実験式 (3.1) を再記する。

$$\frac{u - u_{max}}{u_*} = \frac{1}{\kappa'} \log_e \left(\frac{y}{h} - \phi \log_e \frac{y}{h} \right) \quad (3.1)$$

Fig. 4.1.b に (4.17) 式による計算値と Einstein and Chien (1955) による実験値との比較を示す。計算値とはよく一致し、浮遊砂流の欠速度則における附加パラメータは $\phi_2 = \alpha h/L$ だけである事が確認できる。

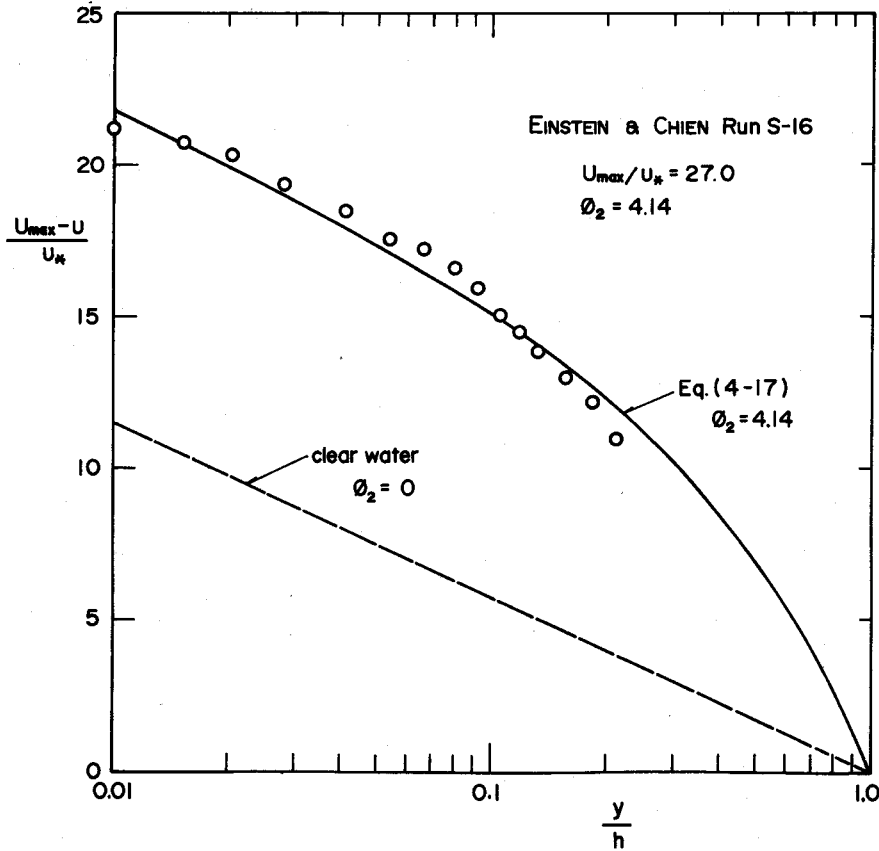


Fig. 4.1.b 浮遊砂を含む流れの流速分布

4.2 浮遊砂の濃度分布

浮遊砂の拡散係数が渦動粘性係数と等しいと考えると(4.10)式により

$$\epsilon_s = \kappa u_* y \left(1 + \frac{y}{h}\right) \left(1 + \alpha \frac{h}{L} \frac{y}{h}\right)^{-1} \quad (4.18)$$

(4.18) 式を(2.1)に代入して浮遊砂濃度の分布式を求めると

$$\frac{c}{c_b} = \left[\left(\frac{h-y}{h-b} \right)^{1+\phi_2} \left(\frac{b}{y} \right) \right]^s \quad (4.19)$$

$$\text{ただし } \phi_2 = \alpha \frac{h}{L} \quad (4.20)$$

$$Z = w_0 / \kappa u_* \quad (4.21)$$

(4.19) 式で $\phi_2 = 0$ とすれば(2.4)式のRouse分布になる。(4.19)式と実測値との比較をFig. 4.2に示す。3章でIppenらの研究を紹介し、半実験的に導かれた濃度分布式(3.6)を示した。これと比較すると(4.19)式は、はるかに簡明であり、しかもFig. 4.2にみられる様に実測値とよく一致している。

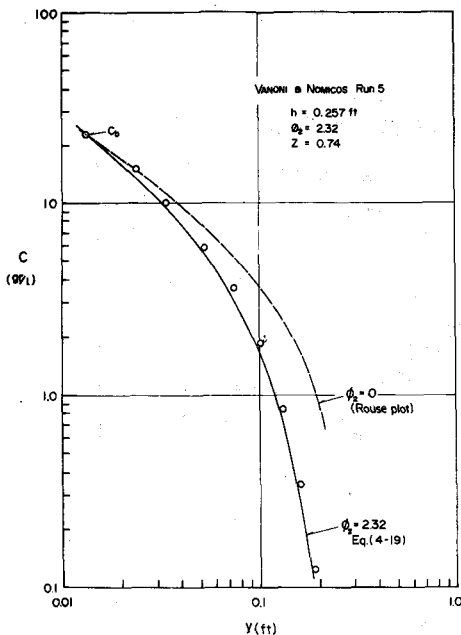


Fig. 4.2.a 浮遊砂の濃度分布 Ref. [23]

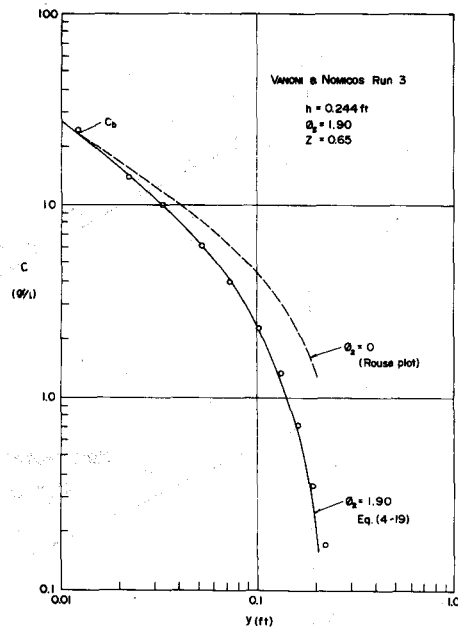


Fig. 4.2.b 浮遊砂の濃度分布 Ref. [23]

4.3 「浮遊砂流の Kármán 定数」に関する意見

3.2 節において浮遊砂流における Kármán 定数の変化について説明し、この表現が現象の性質から考えても妥当でないと述べた。本節では著者の意見をさらに補足したいと思う。

4.1 節の流速分布に関する著者らの結論は、対数則に代る対数一直線則の提案である。基本式である (4.6) 式からわかるように、浮遊砂の存在により混合距離が変化し、清水流および浮遊砂の混合距離をそれぞれ l_0 , l と書けば

$$\frac{l_0}{l} = \left(1 + \alpha \frac{y}{L}\right) \quad (4.22)$$

比重が 1 より大きい砂粒子の場合は $L > 0$ であるから、混合距離は清水流の場合より小となる。しかも (4.22) 式からわかる様に、変化の割合は y/L の関数で、断面について一定ではない。したがって (4.22) 式を Kármán 定数の変化としてあらわすのは無理である。事実 Fig. 4.1 に示した流速分布は semi-log plot で曲線となり、これに直線をあてはめて Kármán 定数の修正値 k' を求める操作は多分に恣意的である。

また、これに関連して ε_s と ε_m の比 β について触れよう。 β は濃度分布の指数 Z_1 と (4.21) 式の Z

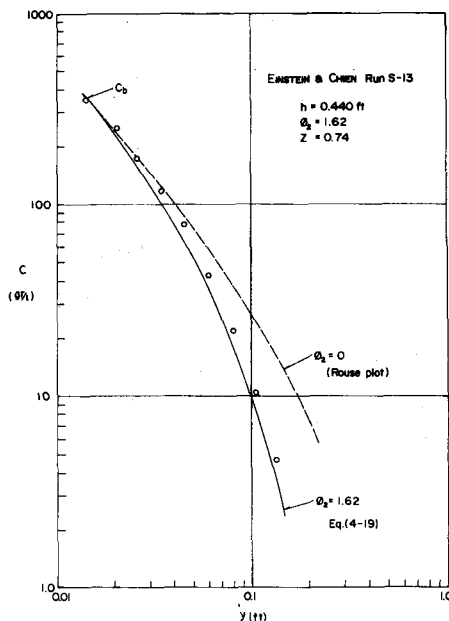


Fig. 4.2.c 浮遊砂の濃度分布 Ref. [23]

の比で定められる。(2.4)式と(4.19)式とを比較すると $y^{(z-z_1)} = (h-y)^{[z(1+\phi_2)-z_1]}$ の関係から $Z > Z_1$ すなわち $\beta > 1$ となるが, β は y/h と ϕ_2 の関数となるから, β の値をきめる事は困難と思われる。

4.4 浮遊流砂量

単位巾当りの浮遊流砂量 q_s を(4.23)式であらわす。

$$q_s = \int_b^h u c dy \quad (4.23)$$

u に(4.14)式, c に(4.19)式を用いて(4.23)式の計算を行なえば

$$\frac{q_s}{u_* c_b} = \frac{\left(\frac{b}{h}\right)^s \cdot (h-b)}{\left[\left(1-\frac{b}{h}\right)^{1+\phi_2}\right]^s} \left\{ \frac{\phi_2}{\kappa} I_3 + \frac{1}{\kappa} I_2 + \left(B \left(\frac{u_* k_s}{\nu} \right) - \frac{1}{\kappa} \log_e \frac{k_s}{h} \right) I_1 \right\} \quad (4.24)$$

ここに

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{b/h}^1 \left[\frac{(1-\eta)^{1+\phi_2}}{\eta} \right] d\eta \\ I_2 &= \int_{b/h}^1 \left[\frac{(1-\eta)^{1+\phi_2}}{\eta} \right]^s \log_e \eta d\eta \\ I_3 &= \int_{b/h}^1 \left[\frac{(1-\eta)^{1+\phi_2}}{\eta} \right]^s \eta d\eta \end{aligned} \quad (4.25)$$

(4.24)式において $(b/h) \ll 1$ であれば

$$q_s = u_* c_b h \left[\frac{b}{h} \right]^s P \quad (4.26)$$

$$P = \frac{\phi_2}{\kappa} I_3 + \frac{1}{\kappa} I_2 + \left(B \left(\frac{u_* k_s}{\nu} \right) - \frac{1}{\kappa} \log_e \frac{k_s}{h} \right) I_1 \quad (4.27)$$

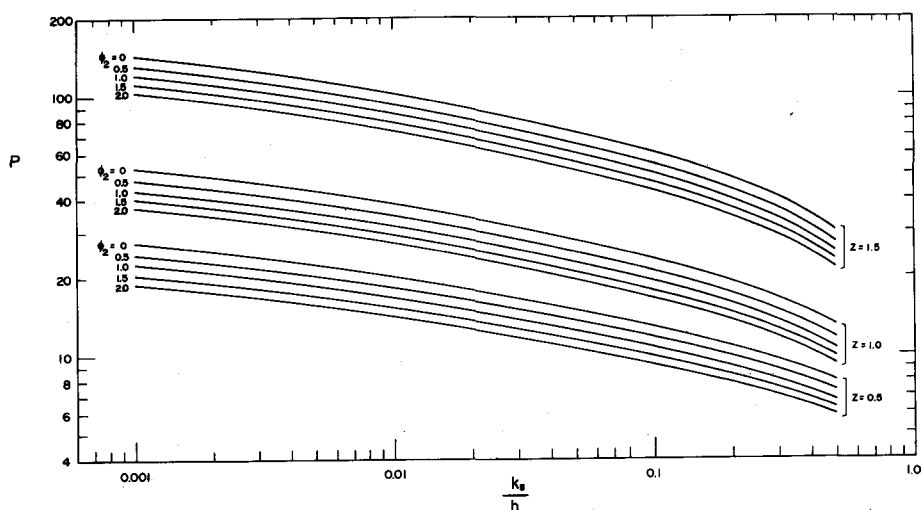


Fig. 4.3 $P - \frac{k_s}{h}$ ☒ Ref.[23]

Einstein の浮遊流砂量式は (4.24) ~ (4.27) 式において $\phi_2 = 0$ とした特別の場合に当る。Fig. 4.3 に関数 P のグラフを示した。ただしこの計算では $B(u_* k_s / \nu) = 8.5$, $b/h = 0.05$ にとった。

浮遊流砂量の算定に当っては底面濃度 c_b の評価が重要であるが、昨年の講習会における芦田 (1974) の報告に最近の研究が要約されている。

4.5 浮遊砂流の抵抗則

4.1 で浮遊砂流の流速分布を求めたので、これから導かれる抵抗則を示す。

(4.16.a) および (4.16.b) を積分して平均流速を求めると

$$\frac{u_m}{u_*} = 6.0 + \frac{1}{\kappa} \log_e \frac{h}{k_s} + \frac{\phi_2}{2\kappa}, \quad \frac{u_* k_s}{\nu} > 70 \quad (4.28.a)$$

$$= 3.0 + \frac{1}{\kappa} \log_e \frac{u_* h}{\nu} + \frac{\phi_2}{2\kappa}, \quad \frac{u_* k_s}{\nu} < 5 \quad (4.28.b)$$

(4.28.b) 式において $\nu \sim \bar{\nu}$ と考えると、Darcy-Weisbach のまさつ係数は浮遊砂流の場合を f , 清水流の場合を f_0 と書くと、(4.28.a), (4.28.b) 式ともに

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = \sqrt{\frac{8}{f_0}} + \frac{\phi_2}{2\kappa} \quad (4.29)$$

となる。 ϕ_2 は (4.20) 式に定義したが $\phi_2 = \alpha h/L$ である。

(4.29) 式によれば、浮遊砂流のまさつ係数は清水流にくらべ小となる。3.1 節で浮遊砂流のまさつ係数に関する Montes の実験結果を述べたが彼の結果は本節の結論と全く対立するものである。精密かつ系統的な実験が浮遊砂流に関するわれわれの理解をさらに深かめるであろう。

参 考 文 献

- (1) 吉川秀夫：河床変動論，水工学シリーズ，土木学会水理委員会，1964。
- (2) 芦田和男：ダムにおける Sedimentation，水工学シリーズ，土木学会水理委員会，1965。
- (3) 椿東一郎：流砂，水工学シリーズ，土木学会水理委員会，1966。
- (4) 芦田和男：浮遊砂，水工学シリーズ，土木学会水理委員会，1974。
- (5) 吉良八郎：貯水池の堆砂問題，水工学シリーズ，土木学会水理委員会，1974。
- (6) 杉尾捨三郎：浮遊砂による貯水池の堆砂過程，水工学シリーズ，土木学会水理委員会，1974。
- (7) 日野幹雄：河川の乱流現象，水工学シリーズ，土木学会水理委員会，1966。
- (8) 林 泰造：流水中における物質の移流と拡散，水工学シリーズ，土木学会水理委員会，1971。
- (9) Ippen, A. T.: A New Look at Sedimentation in Turbulent Streams, Journ. BSCE, Vol. 58, No. 3, July, 1971。
- (10) Vanoni, V. A.: Transportation of Suspended Sediment by Water, Trans. ASCE, Vol. 111, 1946。
- (11) Einstein, H. A. and Chien, N.: Effects of Heavy Sediment Concentration near the Bed on Velocity and Sediment Distribution, Univ. of Calif., Inst. of Eng. Research, NO. 8, 1955。
- (12) Barfield, B. J., Smerdon, E. T. and Hiler, E. A.: Prediction of Sediment Profiles in Open Channel Flows by Turbulent Diffusion Theory, Water

Resources Res., Vol. 5, No.1, Feb., 1969.

- (13) Yalin, M.S. and Krishappan, B.M. : A Probabilistic Method for Determining the Distribution of Suspended Solids in Open Channels, Proc. Int. Sympo. on River Mechanics, Bangkok, January, 1973.
- (14) Vanoni, V.A. and Nomikos, G.N. : Resistance Properties of Sediment Laden Streams, Trans. ASCE, Vol. 125, Part. 1, 1960.
- (15) Yalin, M.S. : Mechanics of Sediment Transport, Pergamon Press, 1972, pp. 173 ~ 178.
- (16) Ippen, A.T. : The Interaction of Velocity Distribution and Suspended Load in Turbulent Streams, Special Lecture at Int. Sympo. on River Mechanics, Bangkok, January, 1973.
- (17) Elata, C. and Ippen, A.T. : The Dynamics of Open Channel Flow with Suspensions of Neutrally Buoyant Particles, M.I.T., Hydrodynamics Laboratory, Tech. Rep. No. 45, 1961.
- (18) Taggart, W.C., Yermoli, C.A., Montes, S. and Ippen, A.T. : Effect of Sediment Size and Gradation on Concentration Profiles in Turbulent Flow, M.I.T. Ralph M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, Tech. Rep. No. 152, 1972.
- (19) 室田 明 : 浮遊砂濃度と流速分布の関連について, 土木学会誌, 38巻, 11号, 1953.
- (20) 椿東一郎 : 浮遊流砂が流れに及ぼす影響について, 土木学会誌, 40巻, 9号, 1955.
- (21) 志村博康 : 浮遊砂のある流れの基礎的研究, 山形大学紀要(農学), 第4巻, 4号, 1961.
- (22) 日野幹雄 : 固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化, 土木学会論文集, 92号, 1963.
Hino, M. : Turbulent Flow with Suspended Particles, Proc. ASCE, Hy 4, July, 1963.
- (23) 板倉忠興, 岸 力, 中山 隆 : 浮遊砂を含む開水路流れの水理特性, 沖積地河川における河床形状と流体抵抗の研究, 文部省科研報告, 1975.
中山 隆 : 浮遊砂を含んだ開水路流れの水理特性, 北大修士論文, 1975.
- (24) Monin, A.S. and Obukhov, A.M. : Basic Relationships of Turbulent Mixing in the Surface Layer of the Atmosphere, Akad. Nauk. SSSR. Trud. Geofiz. Inst, No. 24, 1954.
- (25) Turner, J.S. : Buoyancy Effects in Fluids, Cambridge Univ. Press, 1973, Chapt. 5.
- (26) Webb, E.K. : Profile Relationships—the log-linear Range, and Extension to Strong Stability, Quart. J.R. Met. Soc. 96, 1970.