

非線形流出解析および適応流出予測

日 野 幹 雄

I. 非線形流出系の解析

はじめに：降雨・流出の関係は、流体现象が本質的にそうであるように一般に非線形である。しかし、流出解析は永らく線形現象として取扱われて来た。これは、一つには線形としての取扱いが、流出現象の解明および特性把握のための第一歩として必要であったためであり、また一つには線形としての計算が大して不合理な結果を与えなかったという実際上の理由によるものであった。その後、貯留関数法の一般化や非線形変換法などを経て非線形理論は急速に整備されて来た。特に、奇しくも同じ1971年に発表された4論文により一応の完成を見たと言って良いであろう。

I.1 一般化した貯留関数法

a) 貯留における非定常効果

良く知られているように貯留関数法は、降雨・流出・貯留の関係

$$\frac{dS}{dt} = I - Q \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$S = f(Q)$$

を基礎とする。こゝに、 S ：流域貯留量、 I ：流域への流入としての降雨強度、 Q ：流出高。

いま簡単に

$$S = K_1 (Q - Q_1)^m \quad \dots\dots\dots (2)$$

とおけば、式(1)は次のようになる。

$$mK_1 (Q - Q_1)^{m-1} \frac{dQ}{dt} + Q = I \quad \dots\dots\dots (3)$$

Prasad⁽¹⁾ (1967) は貯留と流出における非定常効果を考慮して

$$S = K_1 Q^m + K_2 \frac{dQ}{dt} \quad \dots\dots\dots (4)$$

と置いた。これより、非線形2階常微分方程式が得られる。

$$K_2 \frac{d^2 Q}{dt^2} + K_1 m Q^{m-1} \frac{dQ}{dt} + Q = I \quad \dots\dots\dots (5)$$

Kulandaiswamy and Subramian⁽²⁾ (1967) は、一般的な貯留一流出の関係式として

$$S = \sum_{i=0}^M a_i (Q, I) \frac{d^i Q}{dt^i} + \sum_{j=0}^M b_j (Q, I) \frac{d^j I}{dt^j} \quad \dots\dots\dots (6)$$

を提案している。Prasad モデル(4)はこの簡略形である。

一般化した貯留関係法、式(5)を用いる場合には、式中のパラメーターの推定(同定)が必要である。しかし、式(5)は非線形であるためそれは難しい。普通パラメーター同定の判断基準は“二乗誤差を最小”にすることである。非線形式のパラメーター同定法としては

(i) DP (動的計画法) による方法

(ii) 準線形化法 (Quasi-linearization)

(iii) 山登り法 (Gradient-search)

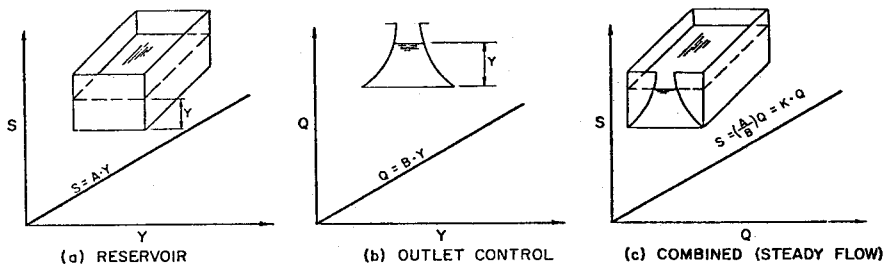


FIG. 1.-PHYSICAL CONCEPT-LINEAR SYSTEM

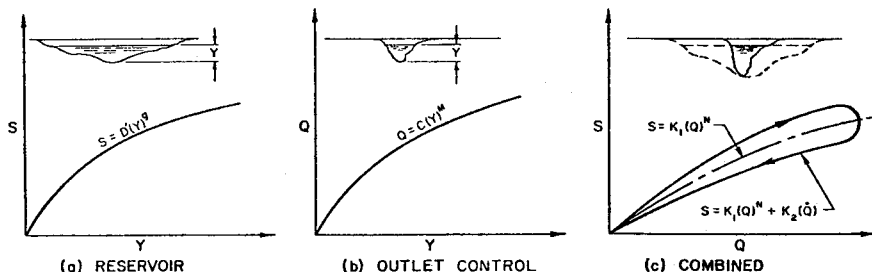


Fig - I - 1 -PHYSICAL CONCEPT-NONLINEAR SYSTEM

が提案されている。これらは、いずれも stochastic な方法というよりもむしろ deterministic な方法である。

b) DPによるパラメーター同定⁽³⁾⁽⁴⁾

式(5)のパラメーター同定に Dynamic Programming⁽⁶⁾⁽⁷⁾を応用する方法が日野(1971)により試みられた。式(5)を次のように変形し、連立微分方程式系とする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= P \\ \frac{dP}{dt} &= \left(-\frac{K_1 m}{K_2} Q^{m-1} \right) P + \left(-\frac{1}{K_2} \right) Q + \frac{I}{K_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

あるいは

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{K_2} & -\frac{K_1 m}{K_2} Q^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I/K_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(8)$$

上記を差分表示すれば、

$$\left. \begin{aligned} Y_{N-1} &= h_1(Y_N, Z_N; X_N, W_N) \\ Z_{N-1} &= h_2(Y_N, Z_N; X_N, W_N) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

となる。こゝに、 Y_N および Z_N は、時刻 $t = N\Delta t$ におけるシステム出力の予測誤差を表わす。

$$Y_N = Q_N - O_N \dots\dots\dots(10)$$

$$Z_N = P_N - (dQ/dt)_N \dots\dots\dots(11)$$

また、 $X \cdot W$ と $h_1 \cdot h_2$ は次式により表現される。^{*}

$$X = K_1 m / K_2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$W = 1 / K_2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$h_1 = Y_N - (Z_N + Z_{N-1}) (\triangle t / 2) + (O_N - O_{N-1}) - \dot{O}_N \triangle t \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$h_2 = Z_N + \{ X_N (Y_N + O_N)^{m-1} (Z_N + \dot{O}_N) + W_N (Y_N + O_N - I_N) \} \triangle t + (\dot{O}_N - \dot{O}_{N-1}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

問題は式(5)による流量の計算値 Q_N と実測値 O_N の誤差を最小にするようパラメータ $K_1 \cdot K_2 \cdot m$ すなわち $X \cdot W$ を決定することである。

$$J = \int_0^T Y^2(t) dt \rightarrow \text{Min} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ところで、式(9)は $X \cdot W$ を制御変数とする多段決定過程である。いま、初期状態(Y, Z)より始まる N 段の多段決定過程における最小評価関数値を $f_N(Y, Z)$ と記することに約束する。初期状態(Y, Z)という点に対して数値(最小評価値)が一つ対応するという意味で、これは正に関数である。この関数 $f_N(Y, Z)$ に付随してその最小値を与える制御変数列(X, W)も同時に決定されているが、DPの普通の定式化ではこれをあらわに表わさない習慣である。時間ステップ N において、まず制御変数 $X \cdot W$ をある値に定めたとする。そのとき残り($N-1$)ステップの最初の状態(Y_{N-1}, Z_{N-1})が決り、同時に総評価関数への寄与分

$$G(Y, Z; X, W) = Y_{N-1}^2 \cdot \triangle t \quad \dots\dots\dots (17)$$

もわかる。この(Y_{N-1}, Z_{N-1})を初期状態とする($N-1$)段決定過程における評価関数の最小値は、記号の定義により $f_{N-1}(Y_{N-1}, Z_{N-1})$ と書き表わされる。したがって、求むべき関数列 f_N についての次のような関数方程式(漸化式, recurrence formula)ができる。

$$f_N(Y, Z) = \min_{X, W} [G(Y, Z; X, W) + f_{N-1}(h_1(Y, Z; X, W), h_2(Y, Z; X, W))] \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(17)は $N=1$ よりはじめて順次 f_N について解くことができる。いわゆるBellmanによるDP (Dynamic Programming)の定式化となっている。

制御変数 X, W については普通可変範囲の条件がつけられる。

$$\begin{aligned} X_0 &\leq X \leq X_{max} \\ W_0 &\leq W \leq W_{max} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

パラメーターをtime invariantとするならば、この制約条件を順次狭くしながら式(18)を繰り返し解けば、一定の収束値として $K_1 = X/mW, K_2 = 1/W$ が決定しうる。図-I・2は一計算例でiterationは2回で収束している。

c) 準線形化(QL)法による同定法⁽⁸⁾

非線形常微分方程式の(2点)境界値問題の新しい解法として準線形化法(quasi-linearization)が提議されている。この方法はもともと、方程式の根を求めるNewton-Raphson法の関数方程式への拡張としてKantorovich(1948)により考えられたものであるが、Bellman & Kalaba⁽⁹⁾(1965)により一般化され組織化された。それゆえ、一般化されたNewton-Raphson-Kantorovich法とも呼ばれる。

変数 x の非線形関数 $f(x)$ はある点 x_0 に関して

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

*) 式(8)の数値積分が発散しないよう差分式を選ぶ必要がある。

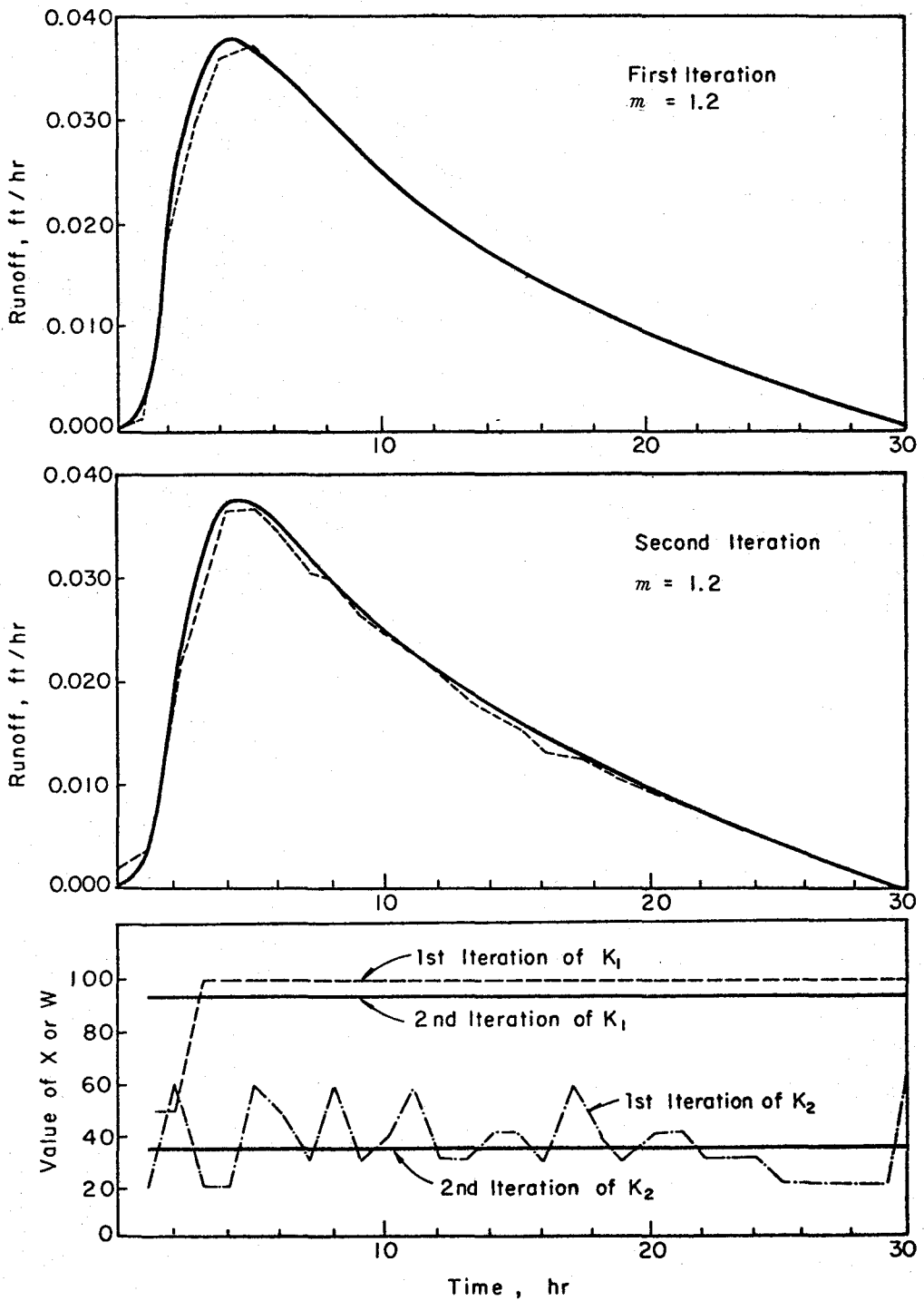


Fig-I-2

と近似される。変数 x を関数 $x(t)$ にまで拡張して非線形関数を次のように近似する。

$$f(x(t), t) \approx f(x_0(t), t) + (x(t) - x_0(t)) f_{x_0}(x_0(t), t) \quad \dots\dots\dots (20)$$

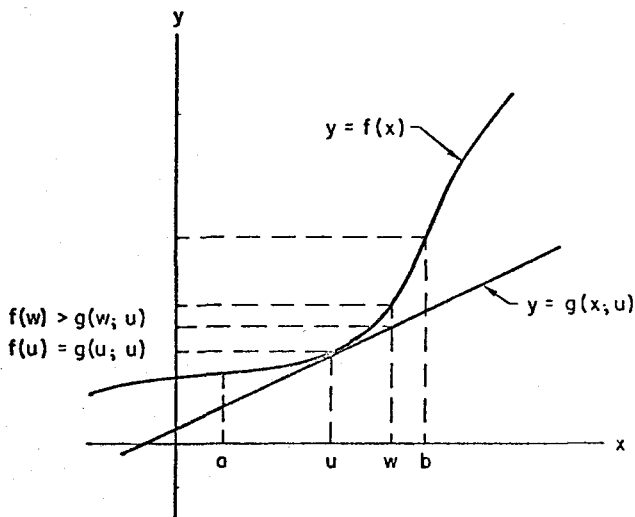


Fig-I-3(a) Illustration of convexity

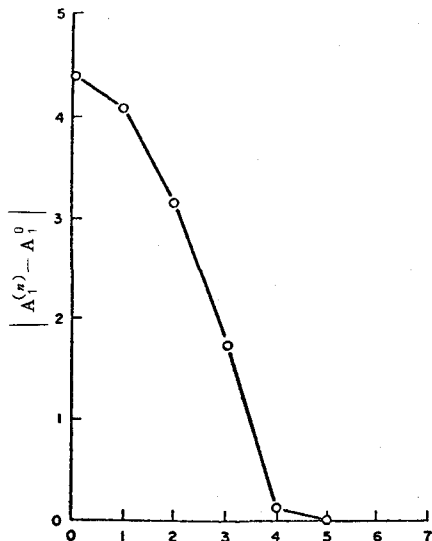


Fig-I-3(b) Convergence of the parameter A_1

こゝに f_{x_0} は関数 f の x_0 に関する微分を表わす。

Labadie and Dracup (1969) は準線形化法と二乗誤差最小を組み合わせたパラメーター同定法を行った。

いま式(5)の変数を

$$\left. \begin{aligned} Q &= x_1 \\ dQ/dt &= x_2 \\ A_1 (= K_1 m / K_2) &= x_3 \\ A_2 (= 1 / K_2) &= x_4 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

とおく。こゝで、 m は既知とすると式(5)は次の一階常微分方程式系に書き表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_3 x_1^{m-1} x_2 - x_4 (x_1 - I) \\ \dot{x}_3 &= 0 \\ \dot{x}_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$x_i^{(n)}$ を x_i の n 回目の繰り返し計算値とすれば、準線形化方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1^{(n+1)} &= x_2^{(n+1)} \\ \dot{x}_2^{(n+1)} &= -x_3^{(n)} (x_1^{(n)})^{m-1} x_2^{(n)} - x_4^{(n)} (x_1^{(n)} - I) \\ &\quad + (x_1^{(n+1)} - x_1^{(n)}) [-(m-1) x_3^{(n)} (x_1^{(n)})^{m-2} x_2^{(n)} - x_4^{(n)}] \\ &\quad + (x_2^{(n+1)} - x_2^{(n)}) [-x_3^{(n)} (x_1^{(n)})^{m-1}] \\ &\quad + (x_3^{(n+1)} - x_3^{(n)}) [-x_2^{(n)} (x_1^{(n)})^{m-1}] \\ &\quad + (x_4^{(n+1)} - x_4^{(n)}) [-x_1^{(n)} + I] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3^{(n+1)} &= 0 \\ \dot{x}_4^{(n+1)} &= 0 \end{aligned}$$

式(23)は、第 $(n+1)$ 回目の繰り返し計算の変数 $x_i^{(n+1)}$ に関して線形方程式ゆえ、特解 $p_i^{(n+1)}$ と4つの独立な斉次解 h_{ij} が求まるとこれらの線形和として解が表わされる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1^{(n+1)}(t) \\ x_2^{(n+1)}(t) \\ x_3^{(n+1)}(t) \\ x_4^{(n+1)}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_1^{(n+1)}(t) \\ p_2^{(n+1)}(t) \\ p_3^{(n+1)}(t) \\ p_4^{(n+1)}(t) \end{bmatrix} + C_1^{(n+1)} \begin{bmatrix} h_{1,1}^{(n+1)}(t) \\ h_{1,2}^{(n+1)}(t) \\ h_{1,3}^{(n+1)}(t) \\ h_{1,4}^{(n+1)}(t) \end{bmatrix} + C_2^{(n+1)} \begin{bmatrix} h_{2,1}^{(n+1)}(t) \\ h_{2,2}^{(n+1)}(t) \\ h_{2,3}^{(n+1)}(t) \\ h_{2,4}^{(n+1)}(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + A_1^{(n+1)} \begin{bmatrix} h_{3,1}^{(n+1)}(t) \\ h_{3,2}^{(n+1)}(t) \\ h_{3,3}^{(n+1)}(t) \\ h_{3,4}^{(n+1)}(t) \end{bmatrix} + A_2^{(n+1)} \begin{bmatrix} h_{4,1}^{(n+1)}(t) \\ h_{4,2}^{(n+1)}(t) \\ h_{4,3}^{(n+1)}(t) \\ h_{4,4}^{(n+1)}(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ここに、 h_{ij} は $x_i(0)=1$ 、 $x_{i \neq j}(0)=0$ を初期条件とする式(23)の斉次解、 $C_i \cdot A_i$ は初期条件である。

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(n+1)}(0) &= C_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)}(0) &= C_2^{(n+1)} \\ x_3^{(n+1)}(0) &= A_1^{(n+1)} \\ x_4^{(n+1)}(0) &= A_2^{(n+1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

二乗誤差最小の条件に式(24)を代入し、 $C_i \cdot A_i$ に関して微分して(水文データは $t_k = k \Delta t$ ($k=1, 2, \dots, r$))について得られている。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^r \{ &P_1^{(n+1)}(t_k) + C_1^{(n+1)} h_{1,1}^{(n+1)}(t_k) + C_2^{(n+1)} h_{2,1}^{(n+1)}(t_k) \\ &+ A_1^{(n+1)} h_{3,1}^{(n+1)}(t_k) + A_2^{(n+1)} h_{4,1}^{(n+1)}(t_k) - O(t_k) \} \cdot h_{i,1}^{(n+1)}(t_k) = 0 \\ &(i=1, \dots, 4) \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^r h_{i,1}(t_k) h_{j,1}(t_k) &= a_{i,j} \\ \sum_{k=0}^r \{ O(t_k) - P_1^{(n+1)}(t_k) \} h_{i,1}^{(n+1)}(t_k) &= b_i \end{aligned}$$

と置けば

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

上式から $C_i \cdot A_i$ の第 $(n+1)$ 回目のiteration値が求められる。これを(24)に代入すれば、 x_i の第 $(n+1)$ 推定値となり、 x が収束($|x^{(n+1)} - x^{(n)}| < \varepsilon$)するまであらためて式(23)~(27)による繰り返し計算をすればよい。

Quasi-linearizationが収束するためには最初の推定値 $x_i^{(0)}(t)$ がconvex regionにあるよう適切に選ぶことが必要である。しかし、これはパラメーターの数が増えるに従い困難となる。

図-I・4は quasi-linearization によるパラメーター同定計算の収束状況を示す一例である。

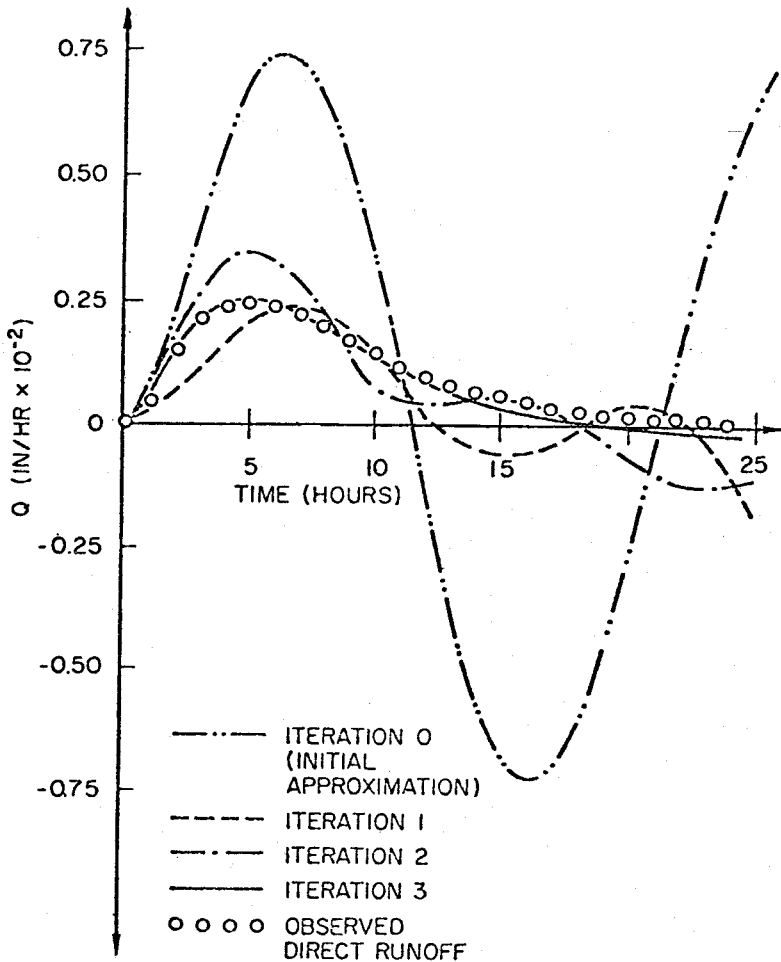


Fig-I・4 Convergence of direct runoff approximation for an example identification problem

d) 山登り法⁽¹⁾

これは最も基本的な計画・最適化手法の応用であり、収束性は比較的良いと云われる。詳細については省略する。

DP法とQL法の比較

DP法では、本来 time variant であるパラメーターを制御量と考えて取扱っている。そのためパラメーターに関する initial guess を必要としない。第1回の推定ではパラメーターはかなり変動するが、逐次変動幅を狭くすれば一定値に収束する。一方、準線形化法では線形性のため計算が楽に行える反面 initial guess を適切に行わないとパラメーターは収束しない。

I.2 非線形変換法

降雨が白色ノイズ性をもつ場合には、降雨の非線型変換により Wiener filter 理論が適用出来る。

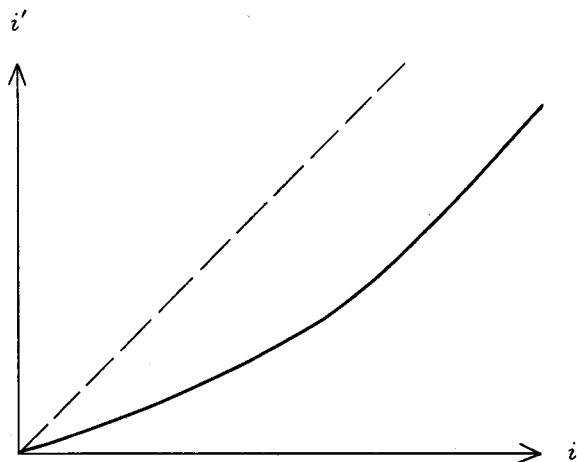
a) 有効降雨変換

一般に降雨が少ない間は滲透分が多く有効降雨 I' は少く、降雨強度が強まるにつれて、有効降雨 I' は

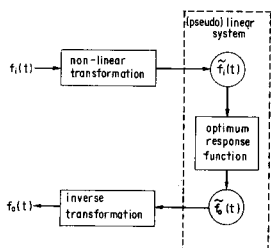
図のような曲線を描く。しかも日降雨は白色ノイズであり相関性がないことから、有効降雨 I' と I の間に

$$I' = f_n(I) \dots\dots\dots (1)$$

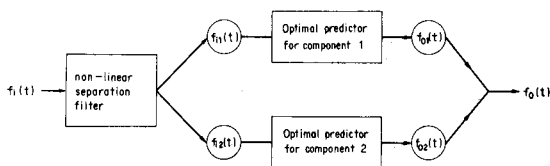
の関係を期待しうる。



(a)



(b) -SCHEMATIC REPRESENTATION OF NON-LINEAR PREDICTION METHOD



(c) -METHOD OF NONLINEAR RUNOFF PREDICTION

Fig-I・5

変換降雨 I' と流出との間に線形関係が近似的に成立すれば、前章の線形理論をそのまま用いることができる。線形関係の検討には変換降雨 I' と流出量 Q との間の coherence

$$r(f) = \left[\frac{|S_{i'd}(f)|}{S_{i'i'}(f) S_{dd}(f)} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、

$S_{i'i'}$: 変換降雨のスペクトル

S_{dd} : 流出量スペクトル

$S_{i'd}$: 変換降雨と流出量のクロススペクトル

を調べ、これが各周波数にわたり最も 1 に近い交換式を用いる。神流川流域については図-I・5(a)を考慮し

$$I' \begin{cases} = I^m & (0 \leq I < I_0) \\ = f(I) & (I_0 \leq I) \end{cases} \dots\dots\dots(3)$$

と置き、種々の m の値に対し coherence を計算し

$$m = 2$$

の場合に coherence が最も高いことが認められた。

b) 降雨強度とピーク流出量による変換ベキ指数の見積り

中小規模の河川の洪水流出を日単位（あるいはそれより長い時間単位）で観測すると降ったものはすぐ流出するとみなせる。このような場合には複雑な Coherence 計算によらず変換ベキ指数を見積ることができる。

すなわち、急勾配小流域では流域貯留時間も短く、日単位程度ではいわば no-memory circuit に近い性質をもっている。しかも、このような河川の流出特性は一般に非線形性が強く、線形モデルでは高水流出を表現しえない。図にみるように降雨が強くなるにつれて、線形予測よりも遙かに多くの流出がある (Fig. I・11 (b) の上図)。

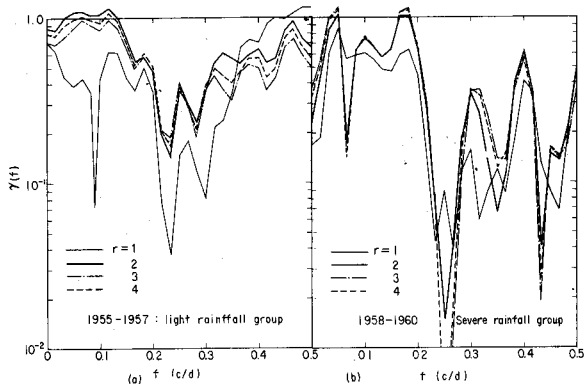


Fig-I-6

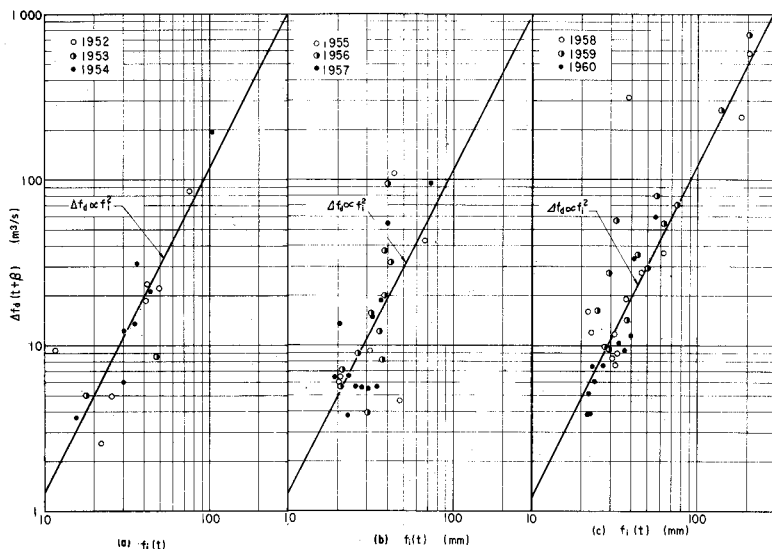


Fig-I-7

そこで、相対応ずる降雨と流出量のピーク値を両対数紙にプロットするとほゞ

$$Q_p \propto I_p^2 \dots\dots\dots(4)$$

の関係が成立している。次節に示す非線形流出核解析でも多くの場合 2 次の非線形性まで考慮すれば良いことを考えると、この関係は偶然ではなくむしろ流れの抵抗則と関連するかなり必然的な結果と考

えられる。

c) 非線形変換有効降雨による流出計算

以上の非線型変換法による線型モデル

$$f_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h'(\tau, \alpha) I'(t - \tau) d\tau$$

による計算結果は、図-I・8(b)のようで洪水流量について良い一致を示している。

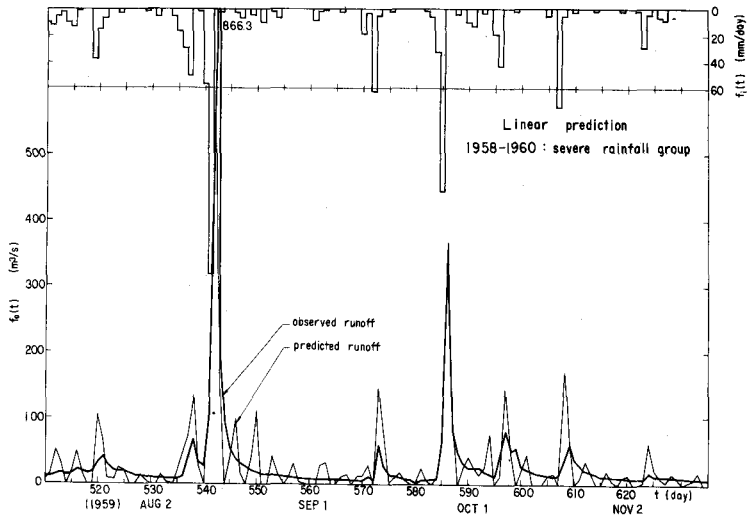


Fig-I・8(a)

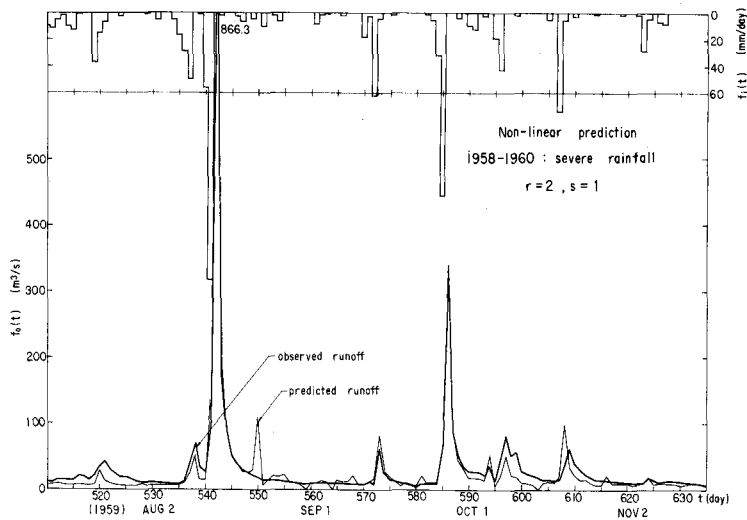


Fig-I・8(b)

上の記述で誤解の生じないように再言すれば、非線形変換法の基礎となっているのは日降雨の白色ノイズ性であって、流域がno-memoryである必要は全くない。

I.3 非線形応答系

3.1 非線形応答系の理論

a) 一般化された降雨一流出応答系

すでに述べたように、最も単純でしかも流出現象の特徴を良く表現しているのが単位流出図法である。 $x(t)$ を時刻 t における降雨強度、 $h(\tau)$ を単位流出関数とすると、流出 $y(t)$ は

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad \dots\dots\dots(1)$$

あるいは

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad \dots\dots\dots(2)$$

と表わされる。

降雨一流出の関係が非線形の場合には極く自然な類推から、上の関係を一般化して次のように表わせるであろう。

$$\begin{aligned} y(t) &= h_0 + \int_{-\infty}^t h_1(t;\tau)x(\tau)d\tau + \iint_{-\infty}^t h_2(t;\tau_1,\tau_2)x(\tau_1)x(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ &\quad + \iiint_{-\infty}^t h_3(t;\tau_1,\tau_2,\tau_3)x(\tau_1)x(\tau_2)x(\tau_3)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 + \dots\dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \dots \int_{(n)}^t h_n(t;\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \\ &= \sum \int_{(n)} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n) \prod_{k=1}^n x(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

こゝに、 τ_k は積分変数、 $h_n(t;\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n)$ は降雨 x の n 次の作用を表わす応答関数（あるいは核）である。

式(3)はほとんどすべての非線形流出理論の考え方基礎になっているものである。この式は Volterra⁽¹⁾ (1930)により導入され、その後 Wiener (1942, 1958)により非線形確率過程や雑音に対する非線形応答の理論に導入された。

式(3)の表示を **Volltera Series**, 核 $h_n(\tau_1,\dots,\tau_n)$ を Volterra Kernel という。

b) Wiener - Hermite (Cameron - Martin - Wiener) 展開

$x(s)$ が白色ガウス雑音の場合に Cameron and Martin⁽²⁾ (1947)は式(3)の直交汎関数表示、式(4)、について数学的に厳密な議論を行った。

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n[h_n^*, x(t)] \quad \dots\dots\dots(4)$$

こゝに、 G_n は次式に示すような汎関数である。

$$\begin{aligned} G_0[h_0^*, x(t)] &= h_0^* \\ G_1[h_1^*, x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1^*(\tau_1)x(t-\tau_1)d\tau_1 \\ G_2[h_2^*, x(t)] &= \iint_{-\infty}^{\infty} h_2^*(\tau_1,\tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ &\quad - K \int_{-\infty}^{\infty} h_2^*(\tau_2,\tau_2)d\tau_2 \end{aligned}$$

$$G_3[h_3^*, x(t)] = \iiint_{-\infty}^{\infty} h_3^*(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ - 3K \iint_{-\infty}^{\infty} h_3^*(\tau_1, \tau_2, \tau_2) x(t-\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots\dots\dots (5)$$

$$(K = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt)$$

$h_1^*(\tau_1)$ は 1 次の核の全部ではなく、それより高次の汎関数の中にも含まれている。一般に、 $h_n^*(\tau_1, \dots, \tau_n)$ は n 次の核のすべてとは限らない。式(3)の核と区別するために右上に*を付けた。式(4)は **Wiener Series** と呼ばれる。

各汎関数 G_n は (もちろん、 $x(t)$ が白色ガウス雑音のとき) 直交関係を満す。

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_m[h_m, x] \cdot G_n[h_n, x] dt = \delta_{mn} \dots\dots\dots (6)$$

一般に、汎関数 G_n の第一項は $\iint \dots \int h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n$ であり、次項以下の項の係数は Hermite 多項式の係数と一致する。それゆえ、 $x(s)$ が白色ガウス雑音の場合の式(4)の表示は **Wiener — Hermite 展開** または **Cameron — Martin — Wiener (C. M. W) 展開** と呼ばれる。

c) 流出核の性質

流出核は変数 τ_j に関し対象性をもつ。すなわち

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \dots, \tau_n) = h(\tau_j, \dots, \tau_1, \dots, \tau_n) \\ = h(\tau_1, \tau_j, \dots, \tau_2, \dots, \tau_n) \\ = \dots\dots\dots \\ = h(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots, \tau_j) \dots\dots\dots (7)$$

したがって、式(3)あるいは(4)を第 n 次の項で打ち切り、 $\triangle \tau$ 間隔の格子点 $\tau = [0, \triangle \tau, 2\triangle \tau, \dots, J_n \triangle \tau]$ で流出核を表現すれば、流出核を表現するための点の数 M は

$$M = \sum_{n=0}^n J_n + n C_n = \sum_{n=0}^n \frac{(J_n + n)(J_n + n - 1) \dots (J + 1)}{n(n-1) \dots 1} \dots\dots\dots (8)$$

である。

3.2 非線形流出核の同定法—(1) 離散化による方法

非線形応答核を実際に求めることは、Wiener の著書 (P. 97, Lecture 11) にその一方法が簡単に述べられていたものの、なかなか具体的計算は行われなかった。そして、永い空白の時間の後 1971 年に至り独立にそしてそれぞれ異なる方法で数名の研究者 (日野他⁽⁶⁾⁽⁷⁾ 1971, Amorocho & Brandstetter⁽⁸⁾ 1971, Bidwell⁽⁹⁾ 1971, Kuchment & Borshchevsky⁽¹⁰⁾ 1971) により発表された。それらを分類すれば、④非線形応答式の離散近似と最小二乗法 (ないしは回帰分析) による方法、⑥非線形応答核の直交関数展開による方法および、⑦フィルター相関法となる。以下にこれらの方法をわかりやすさの順に説明する。

a) 離散化表示と最小二乗法(回帰分析)

積分変数 τ_i を $\Delta\tau_i (= \Delta)$ 間隔(簡単のため $\Delta = 1$ とする)の格子点に分割し,

$$\tau_1: [0, \infty] \rightarrow j_1 = 0, 1, 2, \dots, J$$

$$\tau_2: [0, \infty] \rightarrow j_2 = 0, 1, 2, \dots, J$$

$$\vdots$$

$$\tau_n: [0, \infty] \rightarrow j_n = 0, 1, 2, \dots, J$$

式(3)を離散化表示すれば、式(9)・(10)のようになる。

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + \dots + y_n(t) + \dots \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここに

$$y_n(t) = \sum_{j_1=0}^J \dots \sum_{j_n=0}^J h_n(j_1, j_2, \dots, j_n) x(t-j_1) x(t-j_2) \dots x(t-j_n) \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$(t = 0, 1, 2, \dots)$$

上式は $h_0, h_1(0), h_1(1), h_1(2), \dots, h_2(0,0), h_2(0,1) \dots$ を係数とし $x(t), x(t-1), \dots, x^2(t), x(t)x(t-1), \dots, x(t-j_1)x(t-j_2) \dots x(t-j_n)$ 等を説明変数とする $y(t)$ に関する線形な回帰関係式とみなすことができる。すなわち、応答関係は非線形でも、流出核を求める立場からすれば線形関係式となっている。過去の多数のデータから線形関係式の係数を求めることを回帰分析(multi-regression analysis)と呼んでいる。回帰係数が求まるためには、データ数 M が回帰係数の数 N より大きくななければならない($M \geq N$)。式(9)・(10)の関係を $t = 1, 2, \dots, M$ について書き並べると次の行列表示を得られ、最小二乗法により h が決定する。

$$y = Xh \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここに、 $y \cdot h$ はそれぞれ M 次元および N 次元ベクトル、 X は $M \times N$ 行列で次のように定義されている。

$$y = [y(0), y(1), \dots, y(M)]^T$$

$$h = [h_0, h_1(0), h_1(1), \dots, h_1(J), h_2(0,0), h_2(1,0), \dots, h_2(J,0), h_2(2,1), h_2(3,1), \dots, h_n(0,0,\dots,0), \dots, h_n(J,J,\dots,J)]^T$$

非線形流出核の離散化表示による直接的計算法は Amorocho and Brandstetter⁽⁸⁾ (1971) により発表され、その後白石・大西・伊藤⁽¹²⁾ (1975) により具体的計算例が示された。特に白石らはまず線形解析を行い、その後誤差分に対して 2 次の非線形核の同定を行う方が良いことを示している。

▶ 式(11)より係数ベクトル h を求めること、すなわち回帰分析法により流出核 h を求めることは、計算機により容易にできる。(たいていの電算機には Application Program として回帰分析 routine が用意されている。)ただし、この方法では未知数の数が非常に多くなるという欠点がある。例えば、一次と二次の流出核のみを考慮し $J = 100$ (h_T) とすると未知数は 5151 になってしまう。

この欠点を補う方法が次に述べる stepwise regression 法と核の直交関数展開法である。

b) 離散表示と stepwise regression による方法

すべての格子点での流出核の値を求める上記の方法は未知数の数が龐大で実用的に無理という欠点を補うために、Bidwell⁽⁹⁾ (1971) は回帰式の中の説明変数のうち寄与率の大きいもののみを考慮する

Stepwise regression (Efroymson (1960)) の方法により非線形流出式を導いた。

① まず、一次の説明変数の組を、流出現象の物理機構を考慮して例えば次のように作る。

$$s_1 = x_t, s_2 = x_t + x_{t-1}, s_3 = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + x_{t-3},$$

$$s_4 = x_t + \dots + x_{t-7}, \quad s_5 = x_t + \dots + x_{t-15}$$

この組み合わせは、表面流出の時間スケールは短かく、滲透流出のそれは長いということを陰に含んでいる。

⑪ つぎにこれらの一次および二次の組み合わせを次のように作る。

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1^2	$s_1 s_2$	$s_1 s_3$	$s_1 s_4$	$s_1 s_5$
	s_2^2	$s_2 s_3$	$s_2 s_4$	$s_2 s_5$
		s_3^2	$s_3 s_4$	$s_3 s_5$
			s_4^2	$s_4 s_5$
				s_5^2

このとき、流出 y の回帰式は

$$y = b_0 + b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + \dots \quad (12)$$

ここに

$$Z_k = s_i \text{ or } s_i s_j \quad (i, j = 1 \text{ or } 2 \text{ or } \dots 5)$$

► stepwise regression による Bidwell の方法は、流出関係式を求める計算が容易で、かつ説明変数の数が少ないから観測データ数が少ない場合にも流出解析を行うことが可能であるという利点をもっている。しかし一方、回帰係数が流出核に対応していないし、また流出核の全形が求められないので、非線形流出の特性を把握することは困難であるという欠点をもっている。

3.3 非線形流出核の同定法—(2) 核の直交関数展開

流出核の関数形（各格子点での流出核の値）を直接求めるかわりに、流出核を直交関数で展開しその係数を決定する方法がある。（Wiener 1958, Amorochio 他）。

任意の関数 $f(t)$ は一般に直交関数列 $\{F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t), \dots\}$ により

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(t) \quad (6)$$

のように展開される。Fourier 展開はこの最も広く応用される例である。

いま式(6)の関係を一般化し、第 n 次の流出核 $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ を既与の直交関数系 $\{F_n(\tau)\}$ の積により

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{i,j,\dots,\nu} F_i(\tau_1) F_j(\tau_2) \dots F_\nu(\tau_n) \quad (7)$$

と表わすと、流出 $y(t)$ は

$$y(t) = \sum y_n(t) \quad (8)$$

ここに、

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \int \dots \int h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{i,j,\dots,\nu} A(t) \quad (9) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $F_i(\tau)$ は区間 $[0, \infty]$ で定義され、 $\tau \rightarrow \infty$ のとき $F_i \rightarrow 0$ となる性質をもつものとする。

ここに

$$A(t) = A_1(t) A_2(t) \dots A_\nu(t) \quad (10a)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1(t) &= \int F_1(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 \\ A_2(t) &= \int F_2(\tau_2) x(t-\tau_2) d\tau_2 \\ &\dots\dots\dots \\ A_M(t) &= \int F_M(\tau_M) x(t-\tau_M) d\tau_M \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10b)$$

$t = 0, 1, \dots, M$ に対して上の関係を書き並べ、行列表示を行えば

$$y = A\alpha \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに

$$y = [y(0), y(1), \dots, y(M)]^T$$

$$\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_M, \alpha_{00}, \alpha_{01}, \dots]^T$$

上式(9, 11)は離散させた元の形、3.2の式(1)と全く同形である。したがって、もし選ばれた直交関数の収束性が良く、展開を少ない項数で打ち切ることができれば、流出核を求める計算(最小二乗法、回帰分析)は直接離散化法より遙かに楽になる。

a) Meixner 関数展開

Amorocho and Brandstetter (1971) は、積分(10)を差分近似で行うために、Laguerre 関数の離散化表示である Meixner 関数、式(12)を用いて流出核の計算を行った。

$$F_k(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(k+n+1)/2} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n}{j} \quad \dots\dots\dots (12)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$)

式(12)の漸化式形は

$$2(k+1)F_{k+1}(n) = 2^{1/2}(3k+1-n)F_k(n) - 2kF_{k-1}(n) \quad \dots\dots\dots (12a)$$

彼らは北カルフォルニアの流域面積30平方マイルの Petaluma Creek にこの方法を応用し、2次の流出核まで求めて流出解析を行った。

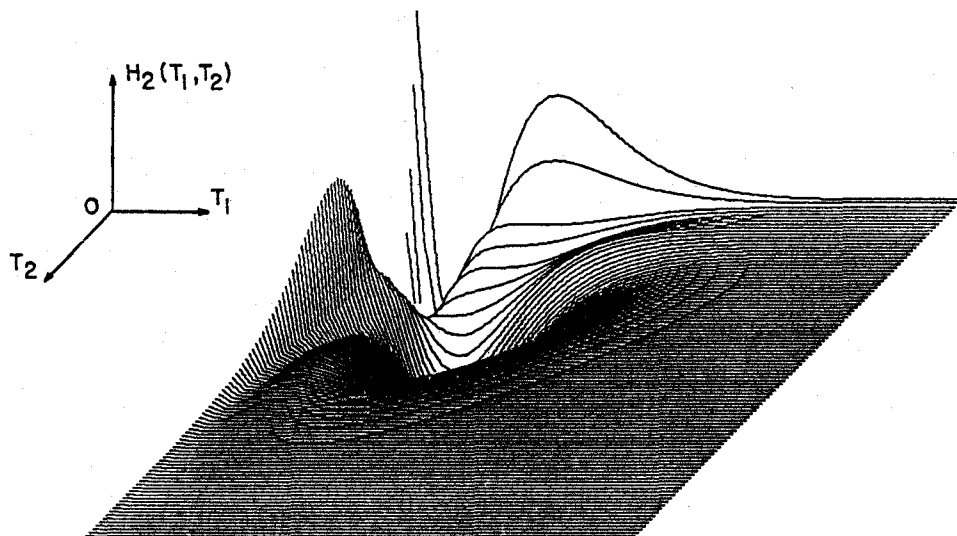


Fig-I-9(a) Perspective view of second order kernel function for nonlinear analysis of Petaluma Creek

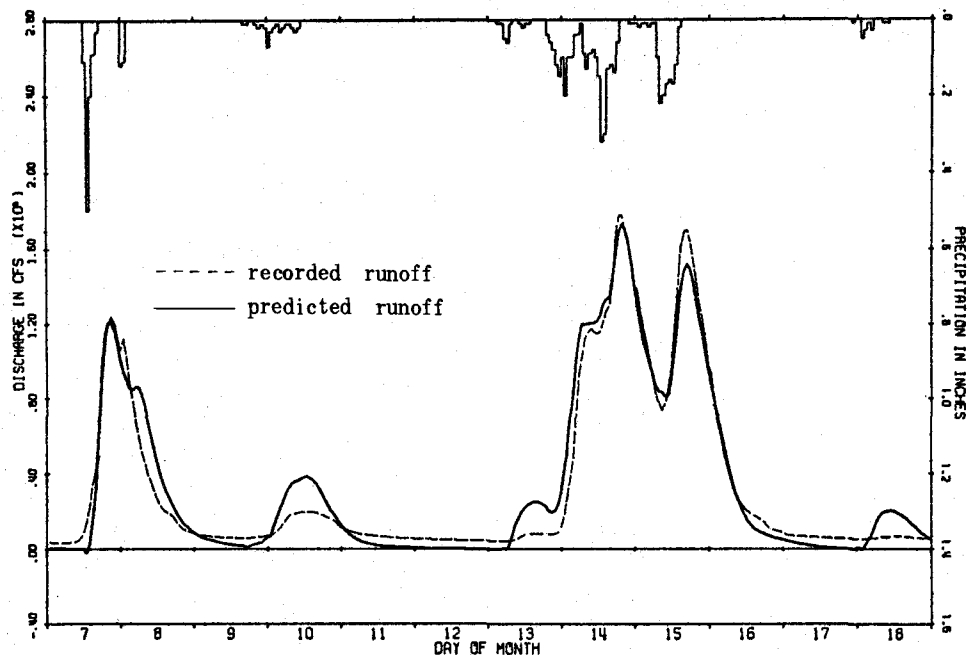


Fig- I · 9(b) Nonlinear analysis of Petaluma Creek, Jan. 7-18, 1956.

- b) Forsythe (1957)による多項式による方法⁽¹⁾
 c) Laguerre 関数展開(アナログ回路による計算)⁽¹⁾

► 流出核の展開項数を $(0, \dots, N)$ で打ち切ることが出来れば, 第 n 項の流出核まで求める場合の未知係数の総数は

$$M_0 = \sum_{n=0}^N N+n C_n$$

となる。したがって, 直交関数展開法は, 流出核の値を直接求める 3.2 の方法に較べて, 流出核の展開係数の数が少なくてすみ場合極めて有利である。このためには展開関数系表現が流出核への収束性が良いことが条件となる。今後高次の流出核の一般的共通の特性の研究により流出核の表現に有利な展開関数系を検討する必要がある。また, 流出核の次数により展開関数系を別に選ぶ方が良いかも知れない。

3.4 非線形流出核の同定法—(3) フィルター相関法による核の同定

a) 相関法

不規則入力を受ける線形系の同定に次の関係式がしばしば利用される。

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} h(\sigma) R_{xx}(\tau - \sigma) d\sigma \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに, $R_{xx} \cdot R_{xy}$ はそれぞれ入力の自己相関および入力出力の相互相関である。核(インパルス応答関数) $h(\sigma)$ を求めるには, ①上の関係式を差分化し数値的に求める, ②上式を周波数域で表現し, Wiener の spectrum の因数分解法により解析的に解く, ③固有関数展開により解析的に求める, 等々の方法がある。非線形応答系の場合にも, それぞれこれらに対応する方法がある。①③の方法は 3.2, 3.3 ですすでに述べた方法を生のデータではなく相関関係で行うことに相当する。四ヶ所・田中・戸原⁽¹⁸⁾(1974)は最小二乗法により非線形相関関係式の核を求めた。

b) 直交関数フィルター相関法⁽³⁾

白色ガウス雑音である入力の時系列 $x(t)$ と出力の時系列 $y(t)$ が与えられたとき、入力 $x(t)$ を既知の互に独立な線形および非線形応答系を組み合わせで構成した応答系に入れ、各成分応答系よりの出力 $y_i(t)$ と既与の出力 $y(t)$ との相関からその成分系の重さ(係数)を一つずつ決定しようという考え方は、すでに Wiener (1958, P. 98) により提案されている。2. で述べた直交関数展開法は原理的にはこの方法であるが相関を採らず係数を回帰分析により一度に決定するところが異っている。成分応答系の構成に Laguerre 関数ボックスを用い、各次の応答核をこれにより正規直交関数展開し、

$$\left. \begin{aligned} h_1(\tau_1) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m l_m(\tau_1) \\ h_2(\tau_1, \tau_2) &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} C_{m_1 m_2} l_{m_1}(\tau_1) l_{m_2}(\tau_2) \\ &\dots\dots\dots \\ h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) &= \sum_{m_1} \dots \sum_{m_n} C_{m_1 \dots m_n} l_{m_1}(\tau_1) \dots l_{m_n}(\tau_n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

(ここに、 $l_{m_n}(\tau_n)$ は m_n 次の Laguerre 多項式)、と表すことも Wiener により述べられている。ある一つの第 n 次の直交関数回路からの出力は

$$y_{n,j}(t) = \int \dots \int l_{m_1}(\tau_1) \dots l_{m_n}(\tau_n) x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \dots\dots\dots(3)$$

である。第 n 次の応答はこれらのすべての $m_1 \dots m_n$ の回路の組みからの出力に重さを掛けそれらの和として

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \int \dots \int h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\ &= \sum \dots \sum C_{m_1 \dots m_n} \int \dots \int l_{m_1}(\tau_1) \dots l_{m_n}(\tau_n) x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \end{aligned}$$

したがって、入力 $x(t)$ が white noise ならば、元応答系からの出力 $y(t)$ とある n 次の直交関数回路からの出力 $y_{n,j}(t)$ との積を作れば、その平均値として係数 $C_{m_1 \dots m_n}$ が求まる。

$$C_{m_1 \dots m_n} = \overline{y(t) y_{n,j}(t)} \dots\dots\dots(4)$$

c) 遅延フィルター相関法

式(1)において、入力 $x(t)$ が白色ノイズならば

$$R_{xx}(\tau-\sigma) \rightarrow \delta(\tau-\sigma) \dots\dots\dots(5)$$

となり、したがって式(1)より

$$R_{xy}(\sigma) = h(\sigma) \dots\dots\dots(6)$$

の関係が得られる。これは図—I・10に示すように、入力 $x(t)$ による線型応答系よりの出力 $y(t)$ と遅延回路を通し σ 時間だけずらした入力 $x(t-\sigma)$ とを乗じ平均した相互相関 $R_{xy}(\sigma)$ が核 $h(\sigma)$ に他ならないことを示している (Lee (1960), P. 342)。Lee and Schetzen⁽⁴⁾ (1965) はこの方法を非線形系に拡張した。2 次の非線形核は二種の遅延回路よりの出力の積

$$y_2(t) = x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) \dots\dots\dots(7)$$

と元系よりの出力の積の平均より

$$\overline{y_1(t) y_2(t)} = 2K^2 h_2(\sigma_1, \sigma_2) + h_0 K u(\sigma_1 - \sigma_2) \dots\dots\dots(8)$$

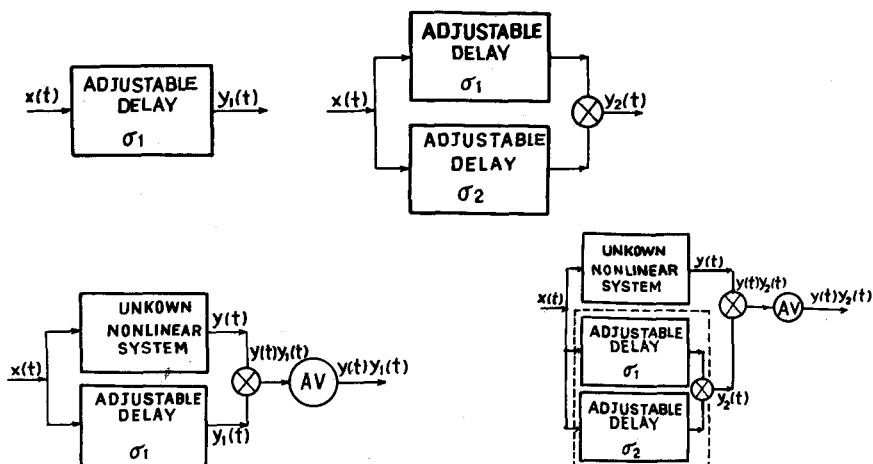


Fig - I · 10 The delay - filter systems for calculation of the muticorrelation and the nonlinear kernels

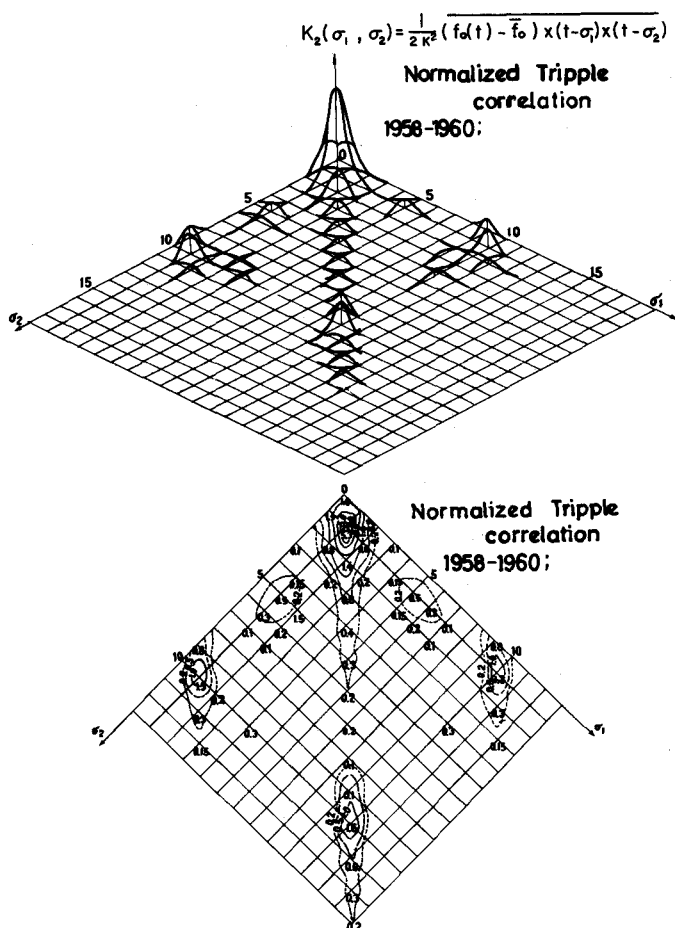


Fig - I · 11(a): The second - order nonlinear kernels

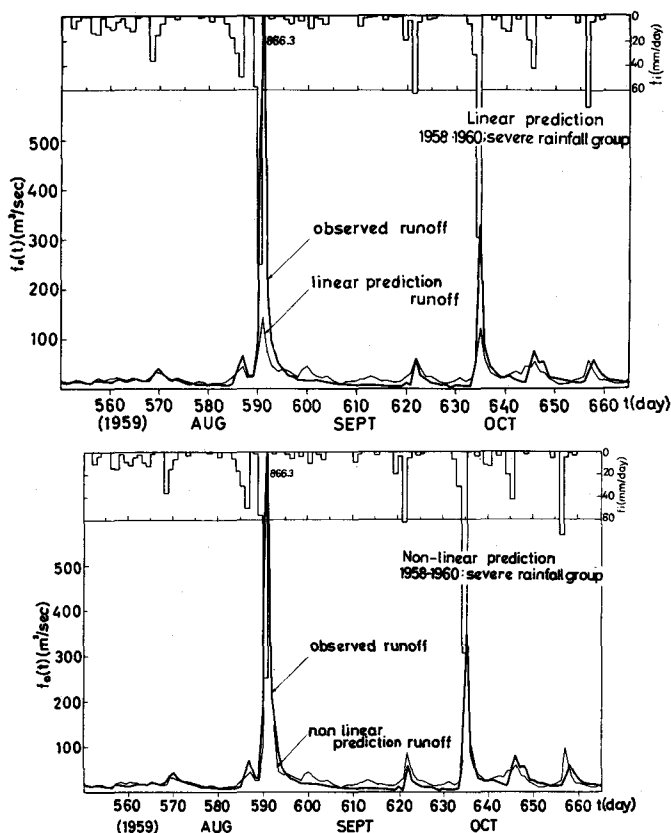


Fig-I-11(b) An example of runoff prediction

のように求められる。こゝに、 u : unit impulse,

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\sigma) d\sigma \quad \dots\dots\dots (9)$$

さらに高次の非線形核も多種遅延フィルターにより同様に求めることができる。

日野・鋤柄・吉川⁽⁶⁾⁽⁷⁾(1970)は、日降雨がほぼwhite noiseであることに着目し、線形および2次の非線形核を求めた(図-I-11a, b)。この結果、洪水予測の精度には著しい向上がみられた。

▶ 遅延フィルター相関法の著しい特徴は、lag time $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ での線形および非線形核 $h_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ の値そのものを直接的にしかも必要とする任意の点について容易に求めうることである。このため、回帰分析あるいは核の直交関数展開による直接法の場合のようにdata数や応答関数の時間スケールが大きくてもdimensionalityの制約を受けることがない。また、digital電算機他analogue的にも核を求めることが可能である。

I.4 非線形流出系の力学過程

以上の諸節に述べたように非線形確率過程理論により、流出系の非線形特性が求められ、これにより流出現象の理解をより深めることができた。しかし、これらはいずれもdata dependentな結論であり、はたして物理の一般法則(流体の運動方程式)から導かれる普遍的な結論と考えて良いのであろうかという疑問が残る。

この疑問に答えるために、またstochasticな立場とdynamicな立場の融合をめざして、流れの基礎

方程式から線形および非線形流出核を解析的に導くことが試みられている(日野⁽⁴⁾1972)。この理論はCameron—Martin—Wiener展開とFourier変換を用いる高度のものであり、本講義では省略する。

II 適応プロセスと流出予測

II.1 適応制御・学習制御

降雨—流出系のような natural system は man-made system と異り、system の特性や入力 の性質が一定しない。降雨は流域に一樣に降るとは限らず、ある場合には山地に強く、ある場合には平地に強く、ある場合には降雨分布は時間的に移動する。また、流出特性は季節により、地点により、antecedent precipitation により変化し、また斜面崩壊・土砂流出のような自然的要因ないしはダム構築等の人為的要因によりたえず変化している。したがって、過去の水文資料により流域の流出特性を決定しても、それを用いた流出予測と実流出との間には多くの場合誤差を生じる。それゆえ、時々刻々に受信される降雨・流量データにより流出予測の信頼性を高めることが必要である。

さて、生物は本来環境の変化に適応(adapt)する機能をもっている。このような機能を機械的・自動的に実現するよう構成された制御系を適応制御系という。この概念は1950年代の中ごろから制御工学に導入され、以来適応制御の定義について種々の議論が行われた。これらの内のいくつかの定義を挙げる。

■ 「制御系が自己のおかれている環境条件—目標値・外乱の性質・系を構成するパラメーターの状態など——をなんらかの方法で自動的に認知し、その認知された環境条件に最も適する制御方式、制御装置の構造などを自動的に修正・決定してゆくような制御系」

■ 「制御されるプラントを自動的・連続的に自己設計してゆく制御方式であって、人間の果している基本的な機能を制御という仕事の中で機械によって実現する」(Truxal)

■ 「与えられた動作評価関数によってその動作を測定し、そのパラメータを最適値に近づけるよう修正する制御系」(Eveleigh)

また、適応制御系の必要な機能は①プラント特性の同定・②制御装置のもつべき特性の決定・③制御装置の調整であるといわれる(Kalman)。適応系ではこれらが迅速にオンラインで行われる。

このような適応プロセスをさらにおしよめたものが学習プロセス(Learning process)であって、「プロセスの進行につれて、未知の構造やパラメーターをしだいに多く学びとり」

「過去の経験に基づいて制御装置の構成やアルゴリズムを持続的に改善する機能を学習機能という」

本章では適応制御系・適応プロセスの概念による流出予測の方法として以下の3つを紹介する。

II.2 DPによる洪水予測

すでに第I章第1節においてDPによる非線形流出系のパラメーター同定について述べた。一般化された貯留関係数法のように、流出システムの構造が単純でシステム・パラメーターの数が少なければ、DP法によりシステム・パラメーターの変化を迅速に同定でき、したがって洪水のオンライン予測が可能になる。この場合、評価関数は最新の情報に重みをおいた重み付き予測誤差の最小二乗とすれば良い。

$$J = \int_{-\infty}^t w^2(\tau - t) [Q(\tau) - O(\tau)]^2 d\tau \rightarrow \text{Min} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、

$$\int_0^{\infty} w(\tau) d\tau = 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

I.1の式(18)より、現時点 $t = t_0 + N\Delta t$ (N : 予測誤差の評価ステップ数) よりはじまる N —段階決

定過程のDP関数方程式は

$$f_N(Y, Z) = \min_{X, W} [\bar{G}_1(Y, Z; X, W) + f_{N-1}(h_1, h_2)] \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 $f_N(Y, Z)$ = 初期状態 Y, Z よりはじまる N 段決定過程の最小評価関数値。

$$\begin{aligned} \bar{G}_1 &= w_1^2 Y_{N-1}^2 \\ \bar{G}_j &= w_j^2 Y_{N-j}^2 \\ Y &= Q - O \\ Z &= dQ/dt - dO/dt \\ X, W &= \text{システム・パラメータ} (k_1 m/k_2, 1/k_2) \end{aligned}$$

時刻 t がすゝみ新しいデータが得られるたびに、上式によりパラメータの同定を行い、次にこれを用いて洪水予測を行う。

II.3 Kalman フィルターによる洪水のオンライン予測

a) Kalman フィルターの特徴

近代制御理論で最も注目されているものに1960年に発表されたKalmanのフィルター理論⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾がある。Kalman フィルターが秀れているとみなされるのは次のような理由による。

- ① 古典的Wiener フィルターと異り、確率過程の定常性を仮定していない。
- ② 問題の設定が一般的である。システムを観測系を通して測定するとして理論が講成されている。したがってシステムのすべての状態を観測しえない場合にも適用しうる。

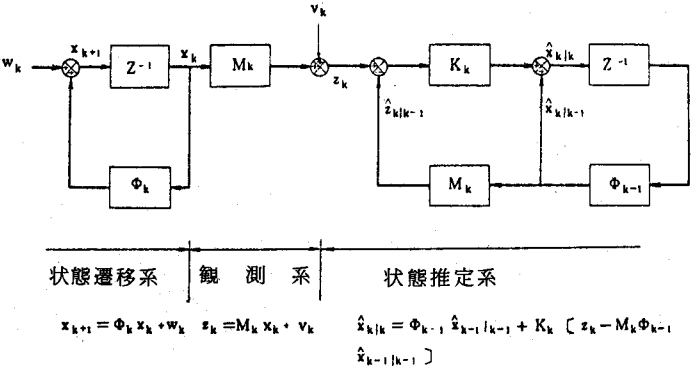


Fig-II・1: カルマン・フィルターの状態推定フロー

③ Wiener フィルターのように長い過去のデータを記憶する必要がなく、逐次計算により最適解が求められ、とくにオンライン計算に威力を発揮する。

b) Kalman フィルターの考え方

Kalman の理論は数学的に難解であるので、こゝではその考え方を比喩的に説明しよう(日野, 1973⁽⁹⁾)。座標軸の数を増して行くにつれて広い空間が表現出来る。すなわち、一本の座標軸では直線が、二本の座標軸で平面が、三本の座標軸で空間が表現しうる。情報の場合にも新しい情報が得られるたびにこれまでの情報には含まれていない部分がありいわば新しい座標軸が一本加わったことに相当する。われわれには3次元空間以上を視覚的に表現しえないから、これまで(K -step)の情報のすべてを一本の座標軸で

表現することにしよう。

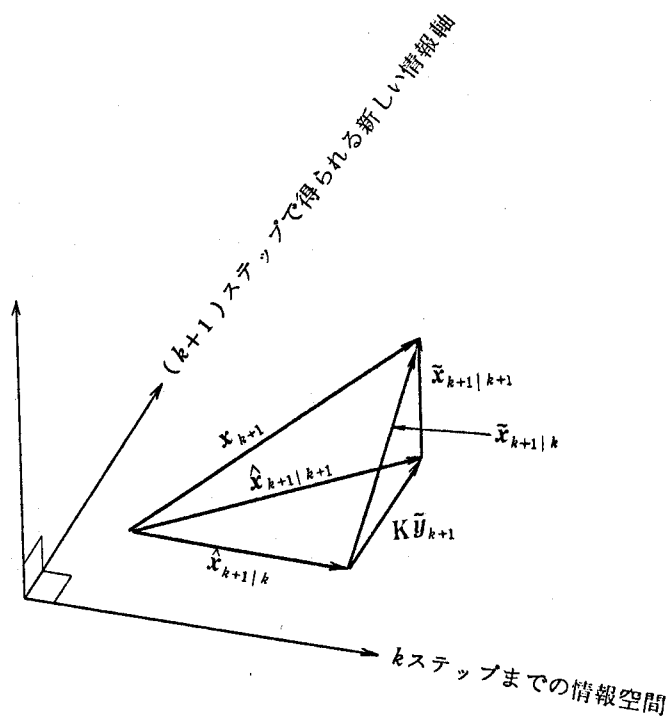


Fig-Ⅱ・2：カルマン理論の視覚的説明

われわれの観測しうるのはシステムの状態 $\mathbf{x}$ ではなく、ある観測系を通した状態 $\mathbf{y}$ である。システムの状態 $\mathbf{x}$ が直接観測されるのは観測系が理想的な特別な場合である（図-Ⅱ・1）。

さて、ステップ k までの情報から推定した状態 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ は、ステップ k までの情報で作る空間内ないしは情報軸上にある。次のステップ（ $k+1$ ）では観測量 $\mathbf{y}_{k+1}$ を通して新たに独立な情報が加わるから、座標軸は一本増えて空間の次元も増加する。ステップ（ $k+1$ ）の真の状態 $\mathbf{x}_{k+1}$ とステップ k までの時点での推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ との誤差 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ には、ステップ（ $k+1$ ）での情報が得られたならば推定しうる分（つまり、（ $k+1$ ）情報軸の成分 $= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ ）とそれでもなお推定できない誤差として残る分 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$ がある。これを幾何学的に表現すれば、ベクトル $(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})$ と $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$ とは直交していることになる（図-Ⅱ・2）。

Kalman はステップ（ $k+1$ ）での新しい情報 $\mathbf{y}_{k+1}$ で推定しうる成分はステップ（ $k+1$ ）での観測量 $\mathbf{y}_{k+1}$ とその予測値 $\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}$ との誤差 $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} (= \mathbf{y}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k})$ から得られると考え、これを

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{y}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$$

と表わし、この写像マトリックス $\mathbf{K}$ を理論的に導いた。導き方については原論文や解説を参考にしていただくとして、平たく云えば、「前の時点で予想したことと今実際に起ったことの間に差（ $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$ ）が生じたとすれば、信頼しうる最新の情報であるこの差に手加減を加えて次の時点の予想をする」というわれわれが日常経験的に行っていることに他ならない。この手加減の仕方が Kalman gain $\mathbf{K}$ である。

c) Kalman フィルターによる状態推定

Kalman フィルター理論は元来線型システムの状態推定として導かれている。システム方程式と観測式がそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

で与えられるとき、最適フィルタは次のように書かれる。

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \underbrace{\mathbf{F}(t)}_{\substack{\hat{\mathbf{x}} \text{の増加率の} \\ \text{推定値}}} \hat{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\mathbf{K}(t)}_{\substack{\text{Kalman} \\ \text{gain}}} \underbrace{[\mathbf{y}(t) - \mathbf{M}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)]}_{\substack{\text{観測値の推定誤差} \\ \hat{\mathbf{y}}}} \dots\dots\dots(5)$$

こゝに、Kalman gain は次式により求められる。

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{M}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t) \dots\dots\dots(6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^T(t) \\ &\quad - \mathbf{P}(t)\mathbf{M}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{M}(t)\mathbf{P}(t) \\ &\quad + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^T(t) \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

また、 $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$ はノイズ $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ の分散行列、 $\mathbf{P}$ は推定誤差の共分散行列

d) Kalman フィルターによるパラメーター同定

Man-made system では真の状態がノイズにより邪魔される。しかし、Natural system ではノイズの影響よりもシステムの構成そのものが不確定である。そこでシステム・パラメーターの同定に Kalman フィルターを応用するには、観測による状態の歪はないと考えシステム方程式を書き直し、これをシステムパラメーターの観測式と読み替え、

システム方程式	→	観測方程式
$\mathbf{x}$: 状態	→	観測量
$\mathbf{h}$ システム・パラメーター	→	推定すべき状態
$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}$	→	$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{h} + \mathbf{w}$
		($\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{v}$)

新たに、システム・パラメーターの変化を記述するシステム方程式を導入すれば良い。すなわち、「観測系（実は洪水のシステム方程式）を通してシステム・パラメーターを流量などの量として観測している」、あるいは「洪水はシステム・パラメーターの観測系である」とみなす。

なお、こゝで注意したいのは Kalman フィルターを同定に用いる場合には、システム方程式は必ずしも線型である必要はなく、パラメーターに関して線型であれば良い点である。

e) 適用例

長々しい式は原論文を参照して頂くことにして、二三の実例を示そう。

図のような hyetgraph, hydrograph のデータが刻々と与えられる場合の unit - hydrograph の同定と

流出の予測が図-
II・3 aである。
同じモデル洪
水に対して貯留
関数式を用いた
場合の係数の同
定と流出予測が
図-II・3 bで
ある。

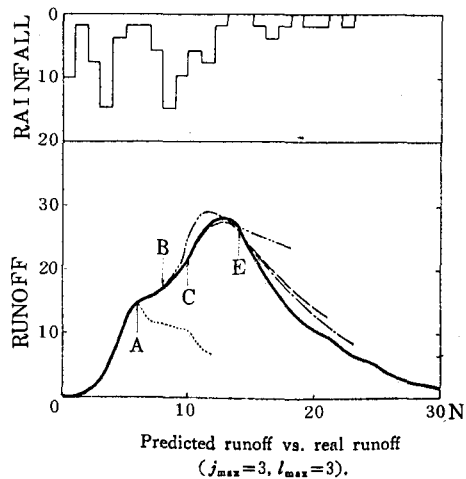
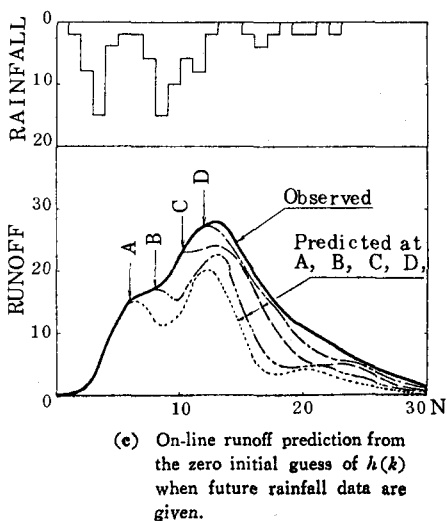
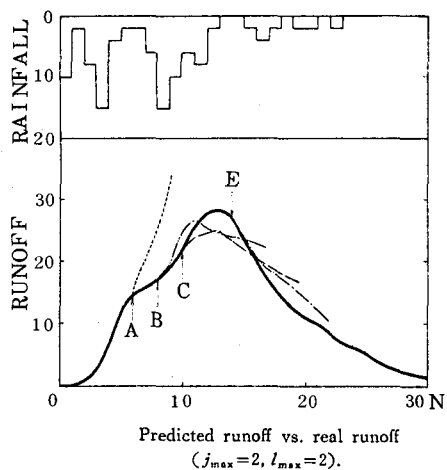
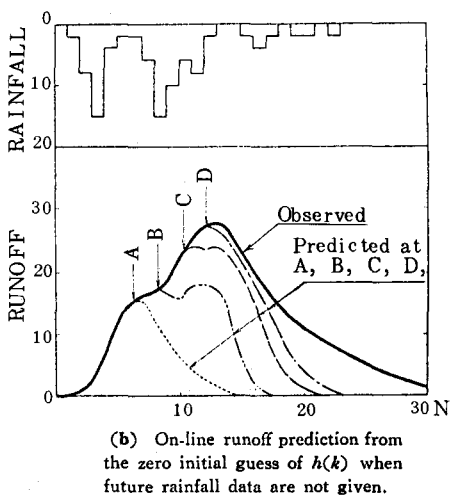
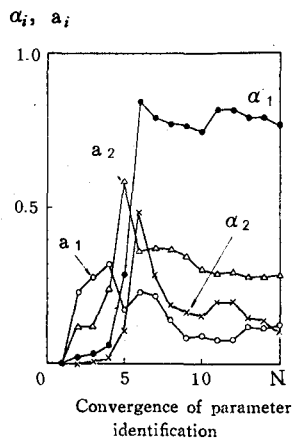
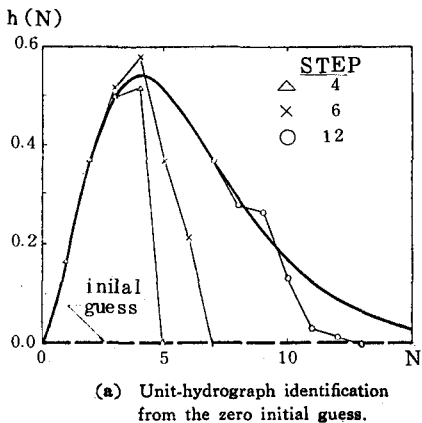


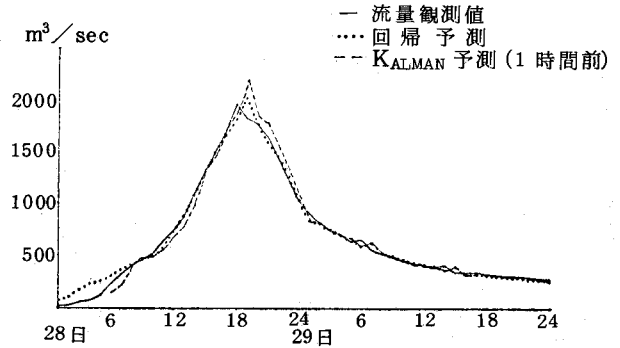
Fig-II・3(a)

Fig-II・3(b)

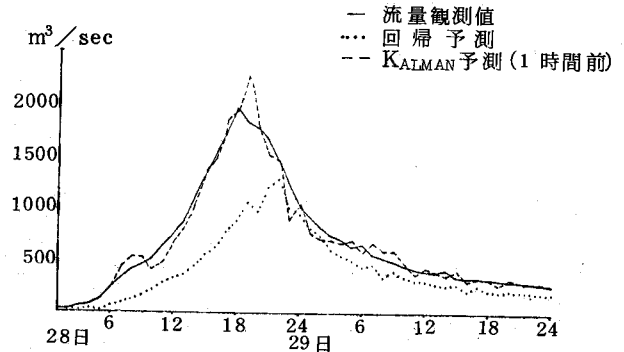
最後に、相模川における実洪水予測の例が図-Ⅱ・4である。この場合には、回帰式による流出予測との誤差をKalman フィルターで予測する方法を用いている。

DPとKalman filterの比較

DPによる計算は比較的簡単で速く、計算もon-line化することが可能である。Kalman filterは最もon-line予測に適した方法である。両方法の特徴は次のような点であろう。まず、DPでは過去の全データを記憶することが必要の上、DPの関数表にも記憶場所を要するが、Kalman filterは逐次修正法で最新のデータだけを保存すれば良く、計算は遙かに単純である。一方、DPは非線形性を何んら苦しめないが、Kalman filterももとは線形問題について提案されたものである。しかし、本節の場合には、システム方程式は線形でなくても良い。また、必要ならばKalman filterにも非線形の場合の理論が確立しているから、これを本節の問題にも応用しえよう。



(a) 降雨および流量情報による



(b) 降雨情報なし、流量情報のみ

Fig-Ⅱ・4 流出量予測

Ⅱ.4 GMDH—発見的自己組織化法⁽²⁾

a) GMDHの考え方

未知な複雑な系については、システム・パラメーターの同定に先立って、システムの構造式を推定する必要がある。このような場合には「定式化の困難さ」と「高次元の呪い」につきまといわれる。

ソ連のA. G. Ivakhnenkoは、1968年以来GMDH (Group Method of Data Handling) 方法を開発提唱している。これは発見的自己組織化 (Heuristic Self-Organization) の原理にもとづくもので、高次の非線形性を有し、

構造が未知な系について「変数が、少なく (次元の呪いをうけることなく)」「少数のデータ」で高次の多項式近似を可能にする柔軟な方法であるといわれる。

GMDHはWienerによるサイバネティックスの思想に沿うもの

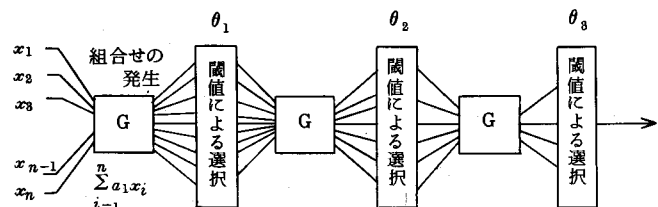


Fig-Ⅱ・5 パーセプトロンの構造⁽⁵⁾

であり、蒔種・交配の繰り返しによる品種改良の方法に類似し、また手法的には Rosenblatt による脳の知覚モデルパーセプトロンを継承したものである。

b) 多項式による基本的アルゴリズム

入力変数 x'_i ($i = 1, 2, \dots$) と出力変数 y との間に非線形関係

$$y = f(x'_1, x'_2, \dots)$$

があるとする。

① Prehistory の決定 ; y に影響する入力変数の期間を定めて、おのおのをすべて入力変数とする。

$$x'_i \quad (i = 1, 2, \dots, T)$$

② 出力と各入力変数の相関をとり、相関係数の大きいものを“有用”入力変数として残し、他を捨てる。有用入力変数を並べかえる。

$$x_i y \geq R \quad (i = 1, 2, \dots, N; N < T)$$

③ 原データを training data と checking data の 2 組に分ける。これらを原データから交互にとるか、分散の大きい方を training に小さい方を checking にする。

④ 有用入力変数 x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) のうち 2 個 $x_i \cdot x_j$ の組合せにより中間変数 Z_k ($k = 1, 2, \dots, N(N-1)/2$) を作る。

$$Z_k = a_{k0} + a_{k1}x_i + a_{k2}x_j + a_{k3}x_i^2 + a_{k4}x_j^2 + a_{k5}x_i x_j$$

こゝに、係数 a_{kl} ($l = 1, 2, \dots, 5$) は training data による二乗平均誤差を最小にするように決定する。

$$\epsilon_k^2 = (y - Z_k)^2 \rightarrow \text{Min}$$

⑤ checking data により二乗平均誤差の小さいものから順に M 個の中間変数を採用し、残りは捨てる。

⑥ $Z_i \rightarrow x_i, Z_j \rightarrow x_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, M$) とし、④ ~ ⑥ の計算を繰り返す。

⑦ ステップ ⑤ における checking data による二乗平均誤差の最小が前回の最小な二乗平均誤差を越えたとき計算を停止し、 Z_k ($k = 1, 2, \dots, M$) のうちから最小二乗平均誤差を与える $Z_{k'}$ を一つ選ぶ。この $Z_{k'}$ を順次逆にもとの入力変数 $x_i \cdot x_j$ etc にもどして f の完全記述が定まる。 q 回繰り返し④の操作をすることで、 f は $x_i, x_{i+1}, \dots$ の 2^q 次の非線形形式となっている。

以上のアルゴリズムを flow chart で示したのが図-Ⅱ・6 である。

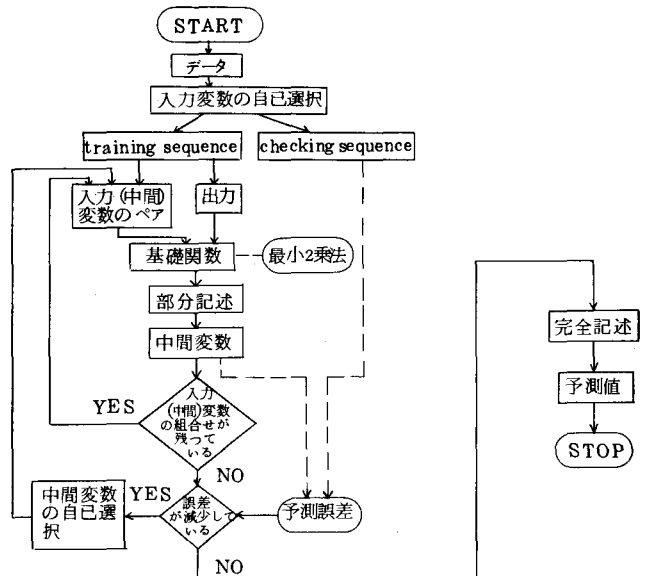


Fig-Ⅱ・6 GMDHのアルゴリズムのフローチャート

c) GMDHによる河川流量の予測⁹²

池田・樫木ら(1974)はGMDHによる河川流量の1日先の予測や水質予測を行った。上に述べた基本的アルゴリズムによる予測の場合には流出量の急増に対する追従性がやゝ悪く、そのため彼らは中間変数生成に

$$\hat{W}_i^k = b_0 + b_1 Z_i^{(k)} + b_2 (Z_i^{(k)})^2$$

の操作を追加した修正法を提案している。ここで b_j は $(y - \hat{W}_i^{(k)})^2$ を最小にするよう決定する。図-Ⅱ・7は、2ヶ月間のdata(したがってtraining data, checking dataはそれぞれ30個)を用い

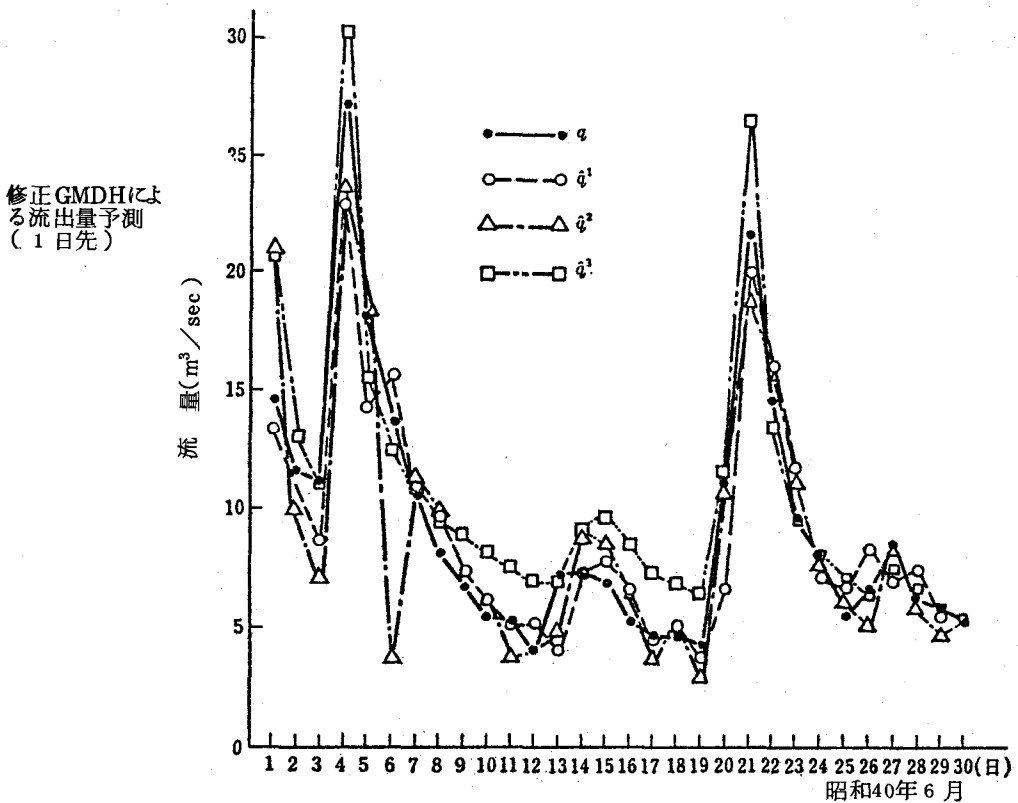


Fig-Ⅱ・7

た修正GMDHによる流量予測の例である。

Ⅱ.5 非線形Wiener展開法・Kalman フィルター・GMDHの比較

これまでに述べて来た水文現象の同定予測法のうち、特に特徴のある非線形Wiener展開法とKalman FilterおよびGMDHの3つの方法をいくつかの点について相互に比較してみる。

(i) 非線形性

GMDHと非線形Wiener展開法は、システムの構造式として高次の非線形性を含んでいる。しかし、多項式ないしは級数展開の係数に関しても線形式となっており、最小二乗誤差の criterionにより係数を決定している。また、GMDHにおける中間変数の自己選択は非線形Wiener展開法でBidwell(1971)が用いた stepwise regression (I・3・2b)に近い。

Kalmanフィルターは本来線形系の状態推定法として考えられたものである。しかしⅡ・3d)のようにパラメーター同定に应用するときには、システム方程式がパラメーターについて線形であれば良く、状態変数に関して非線形な系にもそのまま適用しうる。

(ii) 構造式

システムが複雑で構造式が未知の場合でも簡単なシステム構造式を自己発見的に決定して行くことがGMDHの最大の特長と言える。しかし、河川流出のように「流出は降雨による」と入力・出力の因果関係が明確な場合には、問題は(ラグも含めた)高次の非線形性を決定することにしはられる。これはすでにⅠ・3で述べた種々の方法でも可能である。したがって、GMDHは現象にいくつもの因子が影響し合っている場合に最も秀れているといえる。

(iii) 物理過程

非線型Wiener展開法、とくにⅠ・3・4c)の遅延フィルター相関法では容易に非線型応答関係を決定することができ(こゝでは2次の非線形核までしか求めなかったが3次以上でも特に困難さは生じない)、これにより現象の物理過程の把握が容易となる。しかし、stepwise regressionやGMDHでは相乗項の項数を制約するため現象の物理構造がやゝ明確さを欠くことになる。

(iv) オンライン性

逐次近似的接近であるKalmanフィルターは、オンライン性で他の方法よりも秀れている。一方、GMDHであれstepwise regressionであれ一たび簡単なシステム構造式が決定されると、あとは構造式に含まれる係数を刻々のデータにより修正するだけである。これは普通回帰分析で行われるのであるが、最新データの信頼性に重点を置くKalmanフィルターがより適切と思われる。

したがって、構造式が複雑未知の場合には、まずregressionによりシステム構造式の決定を行い、実施時にKalmanフィルターにより構造式の係数修正をオンラインで行うという方式が考えられる。

参 考 文 献

I.1 一般化した貯留関数法

- (1) Prasad, R. (1967): A nonlinear hydrologic system response model, J. Hydraul. Div., ASCE, vol. 93, no. HY 4, 201 - 221.
- (2) Kulandaiswamy, V. C. and Subramanian, C. V. (1967): A nonlinear approach to runoff studies, Proc. Intern. Hydrology Symp., vol. 1, 72 - 79, Colorado State Univ.
- (3) Chiu, C.-L. and Huang, J. T. (1970): Nonlinear time-varying model of rainfall-runoff relation, Water Resources Res., vol. 6, no. 5, 1277 - 1286.
- (4) 日野幹雄 (1971): 洪水予測における同定問題と適応制御について, 第15回水理講演会講演集, 67 - 72.
- (5) Hino, M. (1971): Proceedings of 1st US-Japan Bilateral Seminar in Hydrology, Hawaii, 272 - 274.
- (6) Bellman, R. (1957): Dynamic Programming, Princeton Univ. Press.
- (7) Bellman, R. (1961): Adaptive Control Processes: A Guided Tour., Princeton Univ. Press.

- (8) Labadie, J. W. and Dracup, J. A. (1969): Optimal identification of lumped watershed models, Water Resources Res., vol. 5, no. 3, 583 - 590.
- (9) Bellman, R. and Kalaba, R. (1965): Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems, Elsevier, New York.
- (10) Tuffuor, S. and Labadie, J. W. (1974): A nonlinear time variant rainfall-runoff model for augmenting monthly data, Water Resources Res., vol. 10, no. 6, 1161 - 1166.

I.2 非線形変換法

- (1) Hino, M. (1970): Runoff forecasting by variable transformation, J. Hydraulics Division, ASCE, vol. 96, no. HY 4, pp. 871 - 878.
- (2) 日野幹雄 (1968): 非線形降雨流出系における流出予測 — 情報理論的水文学への序説(Ⅲ) —, 東京工業大学土木工学科研究報告, № 6, pp. 145 - 154.

I.3 非線形応答系

- (1) Volterra, V. (1930): Theory of Functionals of Integral and Integro-Differential Equations, Dover Publications, New York (1960), (Blackie and Sons Ltd., London 1930).
- (2) Cameron, R. H. & Martin, W. T. (1947): The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functionals, Ann. Math., vol. 48, pp. 385 - 389.
- (3) Wiener, N. (1958): Nonlinear Problems in Random Theory, MIT Press, Cambridge, Mass.
- (4) Amorocho, J. (1963): Measures of the linearity of hydrologic systems, J. of Geophy. Res., vol. 68, no. 8, pp. 2237 - 2249.
- (5) Jacoby, S. L. S. (1966): A mathematical model for nonlinear hydrologic systems, J. of Geophy. Res., vol. 71, no. 2, pp. 4811 - 4824.
- (6) 吉川秀夫・日野幹雄・鋤柄徹 (1970): 降雨-流出系における非線形予測の研究 — 情報理論的水文学への序説IV —, 東京工業大学土木工学科研究報告, № 8, pp. 97 - 104.
- (7) Hino, M. Sukigara, T. & Kikkawa, H. (1971): Nonlinear runoff kernels of hydrologic system, Proc. Ist U. S. - Japan Seminar in Hydrology, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.
- (8) Amorocho, J. and Brandstetter, A. (1971): Determination of nonlinear functional response functions in rainfall-runoff processes, Water Resources Research, vol. 7, no. 5, pp. 1087 - 1101.
- (9) Bidwell, V. J. (1971): Regression analysis of nonlinear catchment systems, Water Resources Research, vol. 7, no. 5, pp. 1118 - 1126.
- (10) Kuchment, L. S. & Borshchevsky, E. N. (1971): Identification of nonlinear hydrologic systems, Meteorol. Gidrol., no. 1, pp. 42 - 47.
- (11) Zand, S. M. and Harder, J. A. (1973): Application of nonlinear system identification to the Lower Meckong River, South-east Asia, Water

Resources Research, vol. 9, no. 2, pp. 290 - 297.

- (12) 白石英彦, 大西亮一, 伊藤喜一(1974): 重回帰式による非線形降雨流出の解析法 — 重回帰式による水系解析の方法(I) —, 農業土木試験所
- (13) 四ヶ所四男美, 田中宏平, 戸原義男(1974): 非線形システムモデルによる流出解析, 農業土木学会論文集, 第50号, pp. 20 - 23.
- (14) Lee, Y. W. & Schetzen, M. (1965): Measurement of the Wiener kernels of a nonlinear system by cross-correlation, Int. J. Control, vol. 2, no. 3, pp. 237 - 254.
- (15) Amorocho, J. (1973): Nonlinear hydrologic analysis, Advances in Hydrosience (ed. by Chow, V. T.), vol. 9, pp. 203 - 251.
- (16) Amorocho, J. (1967): The nonlinear prediction problem in the study of the runoff cycle, Water Resources Research, vol. 3, no. 3, pp. 861 - 880.
- (17) Strauss, A. M. (1973): The nonlinear rainfall response of watersheds with time dependent storage and conveyance properties, Proc. 1st World Congress on Water Resources, vol. IV, pp. 361 - 366.
- (18) Diskin, M. H. & Boneh, A. (1973): Determination of optimal kernels for second-order stationary surface runoff systems, Water Resources Research, vol. 9, no. 2, pp. 311 - 325.

I.4 非線形系の力学過程

- (1) Hino, M. (1972): Stochastic approach to linear and nonlinear runoff analysis, Tech. Report No. 12, Dept. of Civil Eng., Tokyo Inst. Tech., pp. 67 - 75.

II. 適応プロセスと流出予測

- (1) ノーバート・ウィナー(池原・弥永・室賀・戸田訳)(1956, 1961): サイバネティックス — 動物と機械における制御と通信 —, 岩版書店.
- (2) Mishkin, E. and Braun, Jr., L. (editors)(1961): Adaptive Control Systems, McGraw-Hill, (磯部孝監訳, コロナ社).
- (3) Bellman, R. (1961): Adaptive Control Processes; A Guided Tour, A RAND Corporation Research Study, Princeton Univ. Press.
- (4) 北川敏男(編)(1966): 学習制御および学習制御機械, 共立出版.
- (5) 三浦良一(1970): 適応制御系, 最近の制御理論シリーズIX, 計測と制御, 9巻5号, 377 - 387.
- (6) Ivakhnenko, A. G. and Lapa, V. G. (1967): Cybernetics and Forecasting Techniques, Elsevier.
- (7) Kalman, R. E. (1960): A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, J. Basic Eng., vol. 28, p. 35.
- (8) Jazwinski, A. M. (1970): Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press.
- (9) 日野幹雄(1973): KALMANの予測推定理論の平易な誘導について, 東京工業大学土木工学科研究報告, №15, pp. 91 - 99.

- (10) 日野幹雄 (1974) : 水文流出系予測へのカルマン・フィルター理論の適用, 土木学会論文報告集, 第 221 号.
- (11) 日野幹雄・石川和秀 (1975) : 河川流量の長期および短期予測について, 土木学会論文報告集, 第 236 号, pp. 59 - 70.
- (12) 池田三郎・榎木義一 (1975) : GMDH (発見的自己組織化法) と複雑な系の同定・予測, 計測と制御, vol. 14, No. 2, pp. 185 - 195.