

線形系の解析

藤 田 睦 博

1. まえがき

降雨一流出系に限らず多くの物理系の動作は、微分方程式によって記述される。その動作を厳密に記述しようとするとは非常に複雑な形となり、一般に非線形微分方程式になる。工学的見地から、系の動作に本質的影響を与える要素のみを取りあげたり、従属変数の変化する範囲を限定して考えると、線形微分方程式で記述できる場合が少なくない。もし物理系の性質を決定しているパラメータが時間に対して変化しないならば定係数線形微分方程式になる。更にパラメータが空間的に集中している時には、定係数線形常微分方程式になる。

本章においては流出系が、集中定数系で近似できるものとしてその特性及び適用例について述べたものである。したがって本章の底流を流れる一貫した仮定は、次の2大原理である。

- (1) 重ね合せの原理の成立すること
- (2) 時間原点を移動しても現象は不変なこと。

この2大原理のもとに理論は単純化され、透明な推理が成立する。しかし実在の物理系にこの2大前提が厳密な意味で適用することは、まれなことである。それにもかゝらず、線形理論が今日なお有力な基盤を与えるものとされている理由は、工学諸問題において上述の2大原理が近似的に成立する場合が多いという経験的事実によるものである。今日の水文学を体系づける端緒となった Sherman⁽¹⁾の単位図法 (Unit Hydrograph Method) は、まさにこのような観点に立脚しているものと言える。

2. 線形応答系の理論

降雨を $x(t)$ 、流出量を $y(t)$ とする時、流出系は図2.1のように表わされる。図2.1は、きわめて単純な応答系であるが多様な内容を包含している。Kisiel⁽²⁾に従ってこれらを分類した結果を表2.1に示す。⁽³⁾

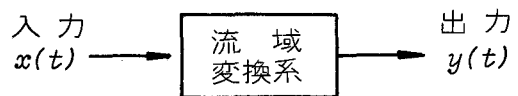


図 2. 1

表2.1 流出モデルの分類

I 入 力	
A 因果関係 (causality) と偶然性 (chance)	
1. 決定論的 (deterministic)	
2. 準決定論的 (quasi-deterministic)	
3. 確率論的 (probablistic)	
B 空間的, 時間的分布	
1. 均一 (Uniform)	
2. 不均一 (Nonuniform)	

II 変換系

A 因果関係と偶然性

B 変換系の線形性と時間不変性

1. 時不変線形 (linear time invariant)
2. 時変線形 (linear time variant)
3. 時不変非線形
4. 時変非線形

C パラメータ形

1. 集中定数系 (lumped - parameter)
2. 分布定数系 (distributed - parameter)

III 出力

入力と同様である。

流域変換系が線形系の場合、図 2.1 の入力 $x(t)$ 、出力 $y(t)$ 間には次の重ね合せ積分が成立する。

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

また現在時刻 t を原点として、過去にさかのぼる時間 σ を考えると (2.1) 式は

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t-\sigma) h(\sigma) d\sigma \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

と書くこともできる。積分方程式の核である $h(t)$ は、線形応答関数、インパルス応答関数、ウェイトング関数或いは、I.U.H. (Instantaneous Unit Hydrograph) とさまざまな名称で呼ばれている。

次に流域変換系を一般化された微分方程式で記述してみる。⁽⁴⁾ 例えば線形貯水池群で流域を近似する Nash⁽⁵⁾ のモデルがこれに相当しよう。

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots\dots\dots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y \\ = a_m \frac{d^m x}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots\dots\dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x \quad \dots\dots\dots (2.3) \end{aligned}$$

a_i, b_j はすべて実定数で $m < n$ である。

(2.3) 式を初期条件 0 のもとにラプラス変換すると

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots\dots\dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots\dots\dots + b_1 s + b_0} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

ただし $X(s), Y(s)$ は、入出力 $x(t), y(t)$ をラプラス変換した関数である。一方 (2.2) 式のたゞみ込み積分のラプラス変換より

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

$H(s)$ は、 $h(t)$ をラプラス変換したものである。この $H(s)$ は、伝達関数と呼ばれよく知られているように入出力に依存せず、システム固有の特性を表わしている。

3. 線形応答核の同定法

システムのパラメーターの同定は、入力 $x(t)$ 、出力 $y(t)$ の観測値より (2.1) 又は (2.2) 式の基本式を解いて核関数 $h(t)$ を求めることに帰着する。この場合、決定論的取扱い (deterministic) をするか、非決定論的取扱い (stochastic) をするか大別して2つの立場があることは、表2.1に示すとおりである。

3.1 決定論的手法

降雨流出では、雨の降り始めを時間の原点にとると、(2.2) 式を次のように変換できる。

$$y(t) = \int_0^t x(t-\sigma) h(\sigma) d\sigma \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

ただし

$$h(\sigma) = 0 \quad \sigma \leq 0$$

(3.1) 式を離散的に表示すると

$$y(i) = \sum_{j=1}^i h(j) x(i-j+1) \Delta j \quad i = 1, 2, \dots\dots\dots (3.2)$$

実際の降雨量や流出量資料は、時間単位、日単位などの離散量で整理されているのが普通である。したがって単位図を求める直接的な手法は、(3.2) 式を連立方程式として未知数 $h(j)$ を求めることである。この場合単位図の継続時間が未知数に関係し、別途にこれを定める必要がある。(3.2) 式で未知数を m 個、 $\Delta j = 1$ として、 $h(j)$ 、 $j = 1, 2, \dots, m$ を求めると

$$\begin{pmatrix} h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1) & 0 & \dots\dots\dots 0 & \dots\dots\dots 0 \\ x(2) & x(1) & \dots\dots\dots 0 & \dots\dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & x(2) & \vdots \\ x(m) & x(m-1) & x(m-2) & \dots\dots\dots x(1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(m) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

一般に流出の継続時間が、単位図の継続時間より長いので多くの連立方程式の組が得られる。降雨と流出量が厳密に(3.2) 式を満足していると、解は全て一致するはずである。しかし実際に計算すると相当に異なり、物理系としては非現実的である負値を含んだ振動解が得られる。これは、観測誤差(単に計測誤差のみならず、降雨分布の不均一性などを含む。)や線形仮定のためで、(3.2) 式を直接解くことは必ずしも有効でなく、多くの研究者により種々の工夫がなされている。例えば、Snyder⁽⁶⁾の最小2乗法による解析、O'Donnel⁽⁷⁾の調和解析法、 $h(t)$ を直接関数で近似する流出関数法などがある。一方(3.1) 式の積分変換をして解を求める手法として Diskin⁽⁸⁾ のラプラス変換法がある。Delleur⁽⁹⁾は、種々の積分変換法を比較検討しており、これについて簡単に説明する。

フーリエ変換法

関数 $f(t)$ のフーリエ変換は、次式で定義される。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

任意関数のフーリエ変換は、必ずしも存在しないが、洪水流のように正值でかつ時間的に制限された関数のフーリエ変換は、存在することが知られている。

(3.1) 式において、 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $h(t)$ のフーリエ変換を $X(\omega)$ 、 $Y(\omega)$ 、 $H(\omega)$ とおくと

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

一方

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

とおいて、 $h(t)$ について考えると

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \{ \cos \omega t - j \sin \omega t \} dt \\ &= R_h(\omega) + j X_h(\omega) \quad \dots\dots\dots (3.7) \end{aligned}$$

ただし $R_h(\omega)$, $X_h(\omega)$ は、 $H(\omega)$ の実数部、虚数部で、

$$\begin{aligned} R_h(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos \omega t dt \\ X_h(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \sin \omega t dt \quad \dots\dots\dots (3.8) \end{aligned}$$

したがって (3.4) の第2式及び (3.7) 式より、

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ R_h(\omega) + j X_h(\omega) \} \{ \cos \omega t + j \sin \omega t \} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \{ R_h(\omega) \cos \omega t - X_h(\omega) \sin \omega t \} d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} \{ R_h(\omega) \sin \omega t \right. \\ &\quad \left. + X_h(\omega) \cos \omega t \} d\omega \right] \quad \dots\dots\dots (3.9) \end{aligned}$$

(3.9) 式において $h(t)$ は、実関数なので $R_h(\omega)$, $X_h(\omega)$ は、それぞれ ω に関して偶関数、奇関数となる。したがって (3.9) 式の第2項は消失して

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{ R_h(\omega) \cos \omega t - X_h(\omega) \sin \omega t \} d\omega \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

(3.5) 式より $R_h(\omega)$, $X_h(\omega)$ は、

$$\begin{aligned} R_h(\omega) &= \frac{R_y(\omega) \cdot R_x(\omega) + X_y(\omega) \cdot X_x(\omega)}{\{ R_x(\omega) \}^2 + \{ X_x(\omega) \}^2} \\ X_h(\omega) &= \frac{X_y(\omega) \cdot R_x(\omega) - R_y(\omega) \cdot X_x(\omega)}{\{ R_x(\omega) \}^2 + \{ X_x(\omega) \}^2} \quad \dots\dots\dots (3.11) \end{aligned}$$

ただし $R_x(\omega)$, $X_x(\omega)$ は、 $X(\omega)$ の実数部、虚数部で、 $R_y(\omega)$, $X_y(\omega)$ は、それぞれ $Y(\omega)$ の実数部、虚数部である。したがって (3.10), (3.11) 式から理論的には、 $h(t)$ を求めることができる。しかし実際の計算において、 $x(t)$ を有効雨量、 $y(t)$ を直接流出量とした場合、これらの観測値は離散量で与えられるのが普通である。したがってフーリエ変換又はその逆変換の積分は、有限和に置き換えて計算せざるを得ない。この場合サンプリング定理より、次の関係式を誘導できる。 $x(t)$, $y(t)$ のサンプリング間隔を Δt 、サンプル数をそれぞれ N_R , N_Q とする。したがって周波数領域において $1/2\Delta t$ 以上の高周波成分は、無意味である。カットオフ周波数は、

$$f_c = \frac{1}{2\Delta t} \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

であり、周波数の範囲は、 $0 \leq \omega \leq 2\pi f_c$ となる。降雨 ($x(t)$)、流出 ($y(t)$) の継続時間を T_R 、 T_Q とおくと、

$$\begin{aligned} T_R &= (N_R - 1) \Delta t \\ T_Q &= (N_Q - 1) \Delta t \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

($T_Q - T_R$) は、求めようとしている線形応答関数 $h(t)$ の継続時間に等しい。したがって $h(t)$ のサンプル数 N_ω は、 $(N_Q - N_R + 1)$ 個である。一方周波数領域において $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ の間隔で計算を行なうと、時間領域における最大巾は、 $T_c = 1/2\Delta f$ である。 T_c を $h(t)$ 継続時間に等しくとると、

$$\Delta f = \frac{1}{2T_c} = \frac{1}{2(N_Q - N_R)\Delta t} \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

となる。すなわち周波数領域においては、そのとりうる範囲 $0 \leq \omega \leq \pi/\Delta t$ を少なくとも $(N_Q - N_R)$ 個に分割して計算するとよいことになる。

一方応答関数 $h(t)$ が求まると入力 $x(t)$ と $h(t)$ より出力 $y(t)$ が計算される。この際 (3.1) 式にもどって時間領域内で $y(t)$ を求めることもできるし、(3.5) 式右边を逆変換する周波数領域内でも計算できる。後者の場合 $y(t)$ を T_Q 時間まで正確に求めるには、 $\Delta f = 1/2 T_Q$ 又は、 $\Delta\omega \leq \pi/T_Q$ に選ぶ必要がある。

ラプラス変換法

線形応答関数 $h(t)$ のラプラス変換及びその逆変換は、次式で定義される。

$$H(s) = \int_0^\infty h(t) e^{-st} dt \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{r-j\infty}^{r+j\infty} H(s) e^{st} ds \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

実際の計算にあたって、(3.16) 式の形式のままでは計算できない。(3.16) 式を扱う 1 つの手法として、この式をフーリエ変換に置換する方法がある。ラプラス・ガンマ法と呼ばれる手法で、Krylov, Skoblyia によってラプラス逆変換に関する数値計算の表が与えられている。

ラプラス変換のパラメーター S を次式で表わすと

$$S = r + j\omega \quad \dots\dots\dots (3.17)$$

(3.16) 式は

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^\infty e^{(r+j\omega)t} H(r+j\omega) j d\omega = \frac{e^{rt}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{j\omega t} H(r+j\omega) d\omega \quad \dots\dots\dots (3.18)$$

更に (3.18) 式は次のように変形できる。

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \dots\dots\dots (3.19)$$

ただし

$$G(\omega) = H(r+j\omega) \quad \dots\dots\dots (3.20)$$

$$g(t) = h(t) e^{-rt} \quad \dots\dots\dots (3.21)$$

(3.19) 式は、(3.4) 式の第 2 式フーリエ逆変換と同一である。一方 (3.15) 式は、

$$H(r+j\omega) = \int_0^\infty h(t) e^{-(r+j\omega)t} dt \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

と書けるので

$$G(\omega) = \int_0^\infty e^{-\tau t} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^\infty g(t) e^{j\omega t} dt \quad (3.22)$$

(3.22) 式は、(3.4) 式の第1式と同じである。フーリエ変換法の場合と同様に $G(\omega)$ を実数部と虚数部に分離して

$$G(\omega) = R_g(\omega) + jX_g(\omega) \quad (3.23)$$

とおくと (3.10) 式より

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{R_g(\omega) \cos \omega t - X_g \sin \omega t\} d\omega \quad (3.24)$$

$x(t)$, $y(t)$ のラプラス変換を $X(\omega)$, $Y(\omega)$ とおくと

$$G(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = R_g(\omega) + jX_g(\omega) = \frac{R_y(\omega) + jX_y(\omega)}{R_x(\omega) + jX_x(\omega)} \quad (3.25)$$

したがって線形応答関数は、

$$h(t) = \frac{e^{\tau t}}{\pi} \int_0^\infty \{R_g(\omega) \cos \omega t - X_g(\omega) \sin \omega t\} d\omega \quad (3.26)$$

ここに

$$R_g(\omega) = \int_0^\infty e^{-\tau t} h(t) \cos \omega t dt \quad (3.27)$$

$$X_g(\omega) = - \int_0^\infty e^{-\tau t} h(t) \sin \omega t dt$$

入出力 $x(t)$, $y(t)$ より $R_g(\omega)$, $X_g(\omega)$ を求めるには、(3.25) 式によればよく、その計算法は (3.11) 式と同じである。又 $h(t)$ が因果性時間関数であるので、(3.26) 式は

$$h(t) = \frac{2e^{\tau t}}{\pi} \int_0^\infty R_g(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (3.28)$$

又は

$$h(t) = \frac{2e^{\tau t}}{\pi} \int_0^\infty -X_g(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (3.29)$$

とも表わせる。

本手法による実際の計算の場合、 Δt , $\Delta \omega$ 及び積分範囲は前節のフーリエ変換法と同様である。

一方複素周波数の実数部 γ は、 $G(\omega)$ の特異点の右側にあるように選ばねばならない。しかし降雨及び流出量が離散的データしか与えられない場合、流域系に数学的モデルを仮定しないかぎりわからない。流出系は、振動系で言えば常に過制振の状態をとるような安定系である。したがって後に計算例を示すが極端に大きな値をとらないがぎり、計算結果に大きな影響を与えない。

Z変換法

前述した積分変換法は、連続関数で表示できる入出力に関して発達してきたもので、これを流出系のように離散的データしか得られない場合に拡張して用いてきたものである。Z変換法は、連続関数におけるサンプル値のラプラス変換の一形式で、自動制御の分野ではサンプル値制御系としてその一分野をなしている。⁽⁴⁾

$x(t)$ を離散表示して $x(\Delta t)$, $x(2\Delta t)$, ..., $x(n\Delta t)$とおくと, Z 変換及びその逆変換は,

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta t) Z^{-n} \quad \dots\dots\dots (3.30)$$

$$x(n\Delta t) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(Z) Z^{n-1} dZ \quad \dots\dots\dots (3.31)$$

出力 $y(t)$, 線形応答関数 $h(t)$ の Z 変換を $Y(Z)$, $H(Z)$ とおくと, たゞみ込み積分より,

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \quad \dots\dots\dots (3.32)$$

(3.32)式は, ラプラス変換して求めた場合と区別してパルス伝達関数と呼ばれている。(3.32)式より $H(Z)$ は,

$$H(Z) = \frac{y(\Delta t) + y(2\Delta t)Z^{-1} + \dots\dots\dots + y(n\Delta t)Z^{-n+1}}{x(\Delta t) + x(2\Delta t)Z^{-1} + \dots\dots\dots + x(m\Delta t)Z^{-m+1}} \quad \dots\dots\dots (3.33)$$

一方(3.15)式のラプラス変換と(3.30)式を比較して $h(t)$ とパルスインパルス関数 $H(n\Delta t)$ は, 次の関係式がある。

$$H(n\Delta t) = h(n\Delta t) / \Delta t \quad \dots\dots\dots (3.34)$$

降雨-流出系では, 初期条件を0とおける。

$$y(0) = x(0) = 0 \quad \dots\dots\dots (3.35)$$

したがって(3.30)式を, Z^{-1} で展開すると

$$H(Z) = H_0 + H_1 Z^{-1} + H_2 Z^{-2} + \dots\dots\dots + H_n Z^{-n} \quad \dots\dots\dots (3.36)$$

ここで

$$H_n = \{ y(n\Delta t) - H_1 x(n\Delta t) - H_2 x[(n-1)\Delta t] \dots - H_{n-1} x(2\Delta t) \} / x(\Delta t) \quad \dots\dots\dots (3.37)$$

$$H_n = H(n\Delta t)$$

したがって(3.34), (3.37)式より $h(n\Delta t)$ を求めることができる。

図3.1～図3.2にDelleurらによって与えられた数値計算例を示す。計算例は,

$$x(t) = t(1-t)e^{1-t}(e^8 - 41) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \dots\dots\dots (3.38)$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{e^{9-t} \cdot t^3(2-t)}{12} + e^{1-t}(t^2 + 3t + 4) - e \cdot (4-t) & (0 \leq t \leq 1) \\ \frac{e^{9-t}(2t-1)}{12} + (11-3t) - e(4-t) & (1 \leq t \leq 8) \\ \frac{e^{9-t}}{12} \{ 12t^2 - 130t + 335 - (t-8)^2(152-14t-t^2) \} + (11-3t) & (8 \leq t \leq 9) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.39)$$

$$h(t) = \frac{t(e^{8-t} - 1)}{e^8 - 41} \quad 0 \leq t \leq 8 \quad \dots\dots\dots (3.40)$$

において, 前述した3種類の積分変換法により解を比較したものである。計算は, (3.38), (3.39)

式で与えられる $x(t)$, $y(t)$ を $\Delta t = 0.1$ で離散化し, 周波数領域においてはカットオフ周波数 q_m を N_Q 分割したものである。ただし N_Q は, $y(t)$ のサンプル数である。

図 3.1 は, ラプラス変換のパラメータ γ の変化が解に及ぼす影響について比較したものである。極端に大きな値をとらないかぎり顕著な差は認められない。図において $\gamma = 0$ の場合は, フーリエ変換法

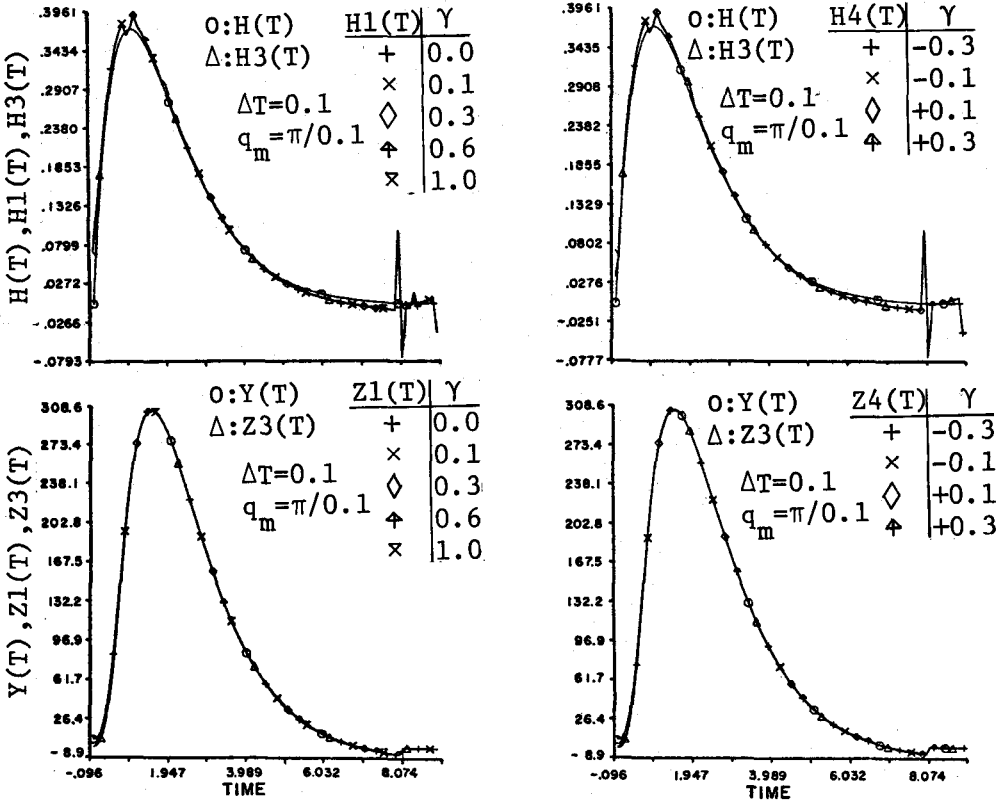


図 3.1 LAPLACE-GAMMA METHOD-EFFECT OF VARIATION OF γ

- | | | |
|---------|----------------------------|-----------------------------|
| $X(T)$ | : (3・38) 式 | |
| $Y(T)$ | : (3・39) 式 | |
| $H(T)$ | : (3・40) 式 | |
| $H1(T)$ | : (3・28) 式による $h(t)$ の計算値 | } (ラプラス変換) |
| $H2(T)$ | : (3・29) 式による $h(t)$ の計算値 | |
| $H3(T)$ | : (3・10) 式による $h(t)$ の計算値 | (フーリエ変換) |
| $H4(T)$ | : (3・20) 式による $t(t)$ の計算値 | (ラプラス変換) |
| $Z1(T)$ | : $H1(T)$ を用いた $y(t)$ の計算値 | } (3・1) 式による
$y(t)$ の再現値 |
| $Z2(T)$ | : $H2(T)$ を用いた $y(t)$ の計算値 | |
| $Z3(T)$ | : $H3(T)$ を用いた $y(t)$ の計算値 | |
| $Z4(T)$ | : $H4(T)$ を用いた $y(t)$ の計算値 | |
| q_m | : カットオフ周波数 | |

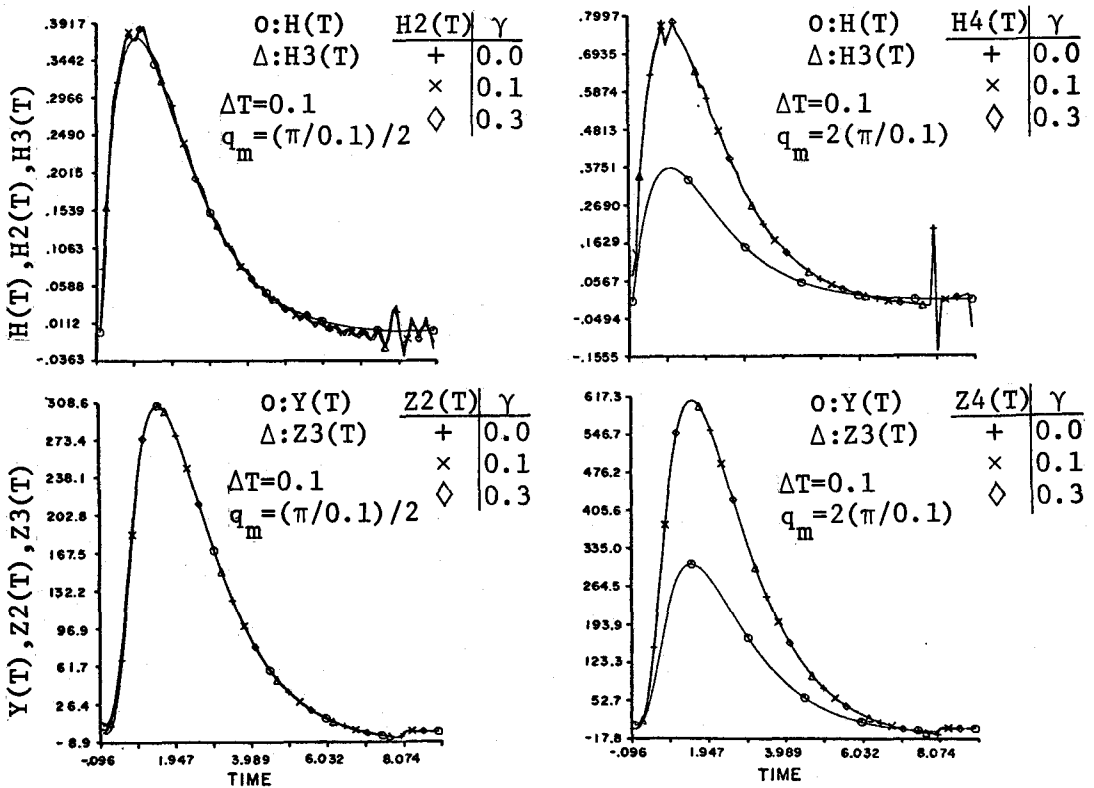


図 3.2 LAPLACE-GAMMA METHOD-EFFECT OF VARIATION IN q_m

に相当する。図 3.2 は、カットオフ周波数 q_m と時間領域の対応について検討したものである。図 3.1 とあわせて $q_m = 5\pi, 10\pi, 20\pi$ の 3 例について比較できる。特に $q_m = 20\pi$ の時、サンプリング定理から得られるナイキスト周波数の 2 倍で、計算に大きな誤差が生じている。図 3.3 は、異なる 2 つの流域における実測資料を用いて有効雨量と直接流出量より Z 変換法で応答関数を求めたものである。スムーズな応答関数と振動解が得られた例である。

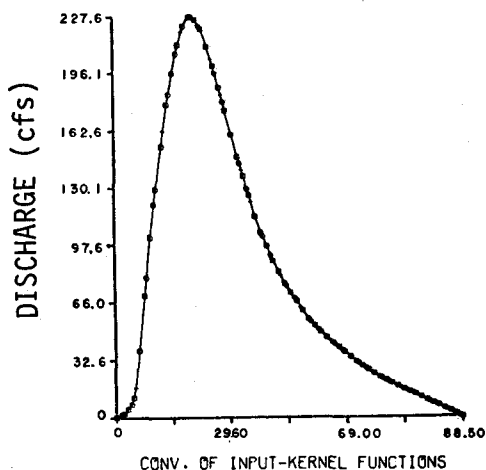
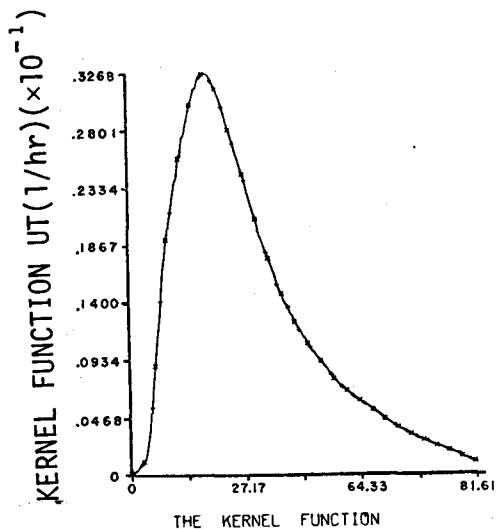
一方洪水流は、正值でかつ時間的に制限された関数なので、図 3.4 のように降雨 $x(t)$ 、流出量 $y(t)$ のフーリエ変換をすることができる。したがって

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega} \sum k_i e^{-j\omega t_i} \quad \dots\dots\dots (3.41)$$

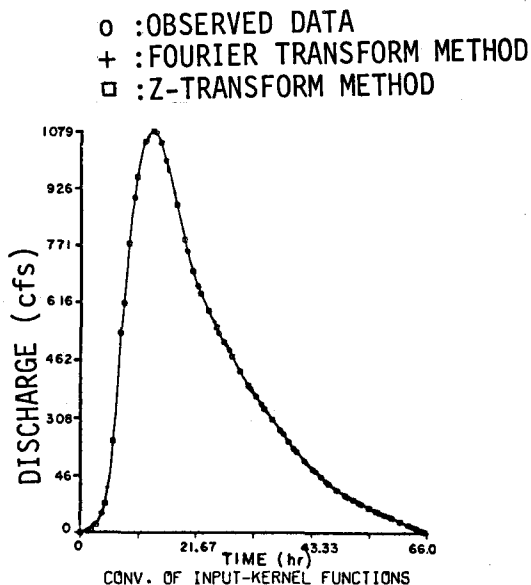
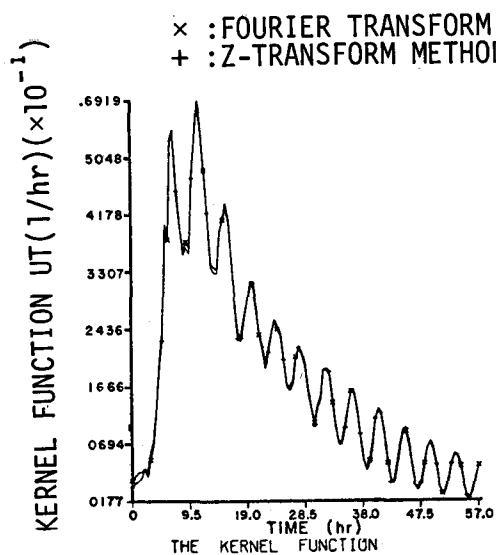
$$Y(\omega) = -\frac{1}{\omega^2} \sum k'_i e^{-j\omega t_i} \quad \dots\dots\dots (3.42)$$

システム関数 $H(\omega)$ は、

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = -\frac{1}{\omega} \frac{\sum k'_i e^{-j\omega t_i}}{\sum k_i e^{-j\omega t_i}} \quad \dots\dots\dots (3.43)$$



STORM OF 6/22/60 ON CARPENTER CREEK NEAR EGYPT, INDIANA



STORM OF 1/16/53 ON MISSISSINEWA RIVER NEAR RIDGEVILLE, INDIANA

図 3.3 Z-TRANSFORM METHOD

一方 $H(\omega)$ の逆変換に関してフロイドは図3.5に示すように図式近似によって積分を簡単化した。
図3.5は、 $H(\omega)$ の実数部(実曲線)とその台形近似(破線)を示したものである。(3.10)式を書きなおすと

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_h(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (t > 0) \quad \dots\dots\dots (3.44)$$

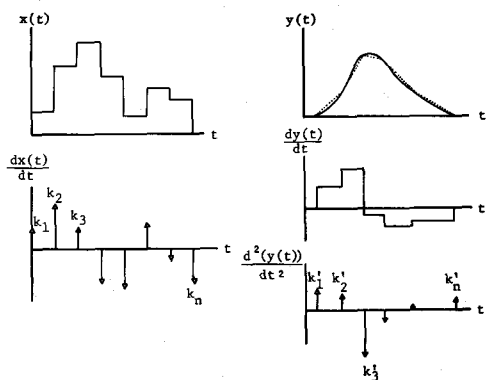


図 3.4 降雨量の微係数と流出量の折線
及びその微係数

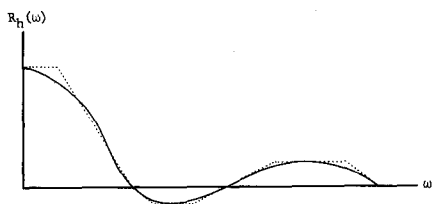


図 3.5 $R_h(\omega)$ 曲線とその台形近似

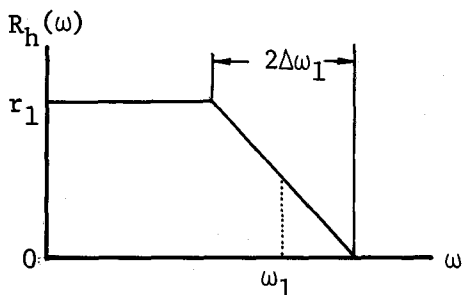


図 3.6 計算の基本になる台形

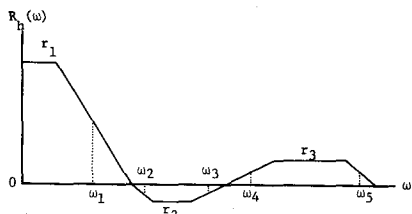


図 3.7 台形近似された $R_h(\omega)$

フロイドの方法は、(3.44)式の積分を一つ一つの台形について別々に計算し、あとで合算するものである。この計算の基本として図 3.6 に示す台形について (3.44) 式を計算する。

$$\int_0^{\omega_1 + \Delta\omega} R_h(\omega) \cos \omega t d\omega = r_1 \omega_1 \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} \cdot \frac{\sin \Delta\omega_1 t}{\Delta\omega_1 t} \dots\dots\dots (3.45)$$

したがって図 3.7 の台形近似された $R_h(\omega)$ は

$$\begin{aligned} h(t) = & \frac{2}{\pi} (r_1 \omega_1) \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} \cdot \frac{\sin \Delta\omega_1 t}{\Delta\omega_1 t} + \frac{2}{\pi} (r_1 \omega_3) \frac{\sin \omega_3 t}{\omega_3 t} \cdot \frac{\sin \Delta\omega_3 t}{\Delta\omega_3 t} \\ & - \frac{2}{\pi} (r_2 \omega_2) \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2 t} \cdot \frac{\sin \Delta\omega_2 t}{\Delta\omega_2 t} + \frac{2}{\pi} (r_3 \omega_5) \frac{\sin \omega_5 t}{\omega_5 t} \cdot \frac{\sin \Delta\omega_5 t}{\Delta\omega_5 t} \\ & - \frac{2}{\pi} (r_3 \omega_4) \frac{\sin \omega_4 t}{\omega_4 t} \cdot \frac{\sin \Delta\omega_4 t}{\Delta\omega_4 t} \dots\dots\dots (3.46) \end{aligned}$$

実測資料を用いた (3.44) 式の計算例として藤田⁽¹⁾の研究がある。

3.2 確率論的手法

前節まで紹介した方法は、与えられた入出力の時間関数が各時点で完全に一致するように線形応答関数を決定している。その結果正負の振動を含む解が得られる場合がある。Eagleson⁽¹²⁾ は、この点を考慮して、予測誤差が全体として最小になるような解析を提示した。ほゞ同年代に我国においても日野ら⁽¹³⁾によってWienerの情報理論が、流出予測問題に適応された。

推定問題を少し一般的に考えてみよう。今 $X(t)$ と $S(t)$ という2つの確率過程が与えられたものとする。 $X(t)$, $S(t)$ は、それぞれデータと信号を意味するものとする。したがって問題は、 $X(t)$ のいくつかの値 $X(\xi)$ によって $S(t)$ の種々のパラメータを推定することである。推定すべき量を次式で表わす。

$$g(t) = T_s[S(t)] \quad \dots\dots\dots (3.47)$$

$g(t)$ は、ランダム変数でも確率過程でもよい。推定は、時間軸上の

$$\xi \in I \quad \dots\dots\dots (3.48)$$

の領域で任意の数の $t = \xi$ における $X(t)$ の値を基準にして行われる。したがって $g(t)$ の推定量として用いることのできるデータの適切な変換

$$\hat{g}(t) = T_X[X(\xi)] \quad \xi \in I \quad \dots\dots\dots (3.49)$$

を見つけることである。もし $g(t) = S(t + \alpha)$, $X(t) = S(t)$ ならば、予測問題となる。又 $g(t) = S(t)$, $X(t) = S(t) + n(t)$ (ただし $n(t)$ は雑音)ならば、フィルタリングの問題となる。

$\hat{g}(t)$ を $g(t)$ の指定値として用いる場合、誤差 $\epsilon(t)$ が伴う。

$$\epsilon(t) = g(t) - \hat{g}(t) \quad \dots\dots\dots (3.50)$$

後述するようにWienerは、 $E\{\epsilon^2(t)\}$ を最小にする判定基準を与えた。又(3.49)に示すデータ $X(\xi)$ の変換 T_X は、本章の目的からして線形変換である。

したがってWienerの濾波・予測理論は、ある統計的基準のもとで雑音に埋れた信号を推定しようとするもので、次の仮定よりなっている。

- (1) 降雨-流出系は、定常確率過程である。
- (2) 降雨-流出現象は、線形系で近似できる。

これらの仮定の吟味については次節で述べるが、こゝでは梅雨期、融雪期のように比較的継続時間の長い流出現象を対象にする。

図3.8に示すように推定したい量 $g(t)$ を、時刻 $t + \alpha$ における流出量とする。

$$g(t) = y_0(t + \alpha) \quad \dots\dots\dots (3.51)$$

この場合、入力である降雨量は、時間 t までわかっていることを意味する。したがって $y_0(t + \alpha)$ は

$$y_0(t + \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, \alpha) x(t - \tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (3.52)$$

で与えられる。しかし雑音の影響のため、この予測流出量と実際の流出量を完全に一致させることができない。

(3.50)式で与えられる誤差は、

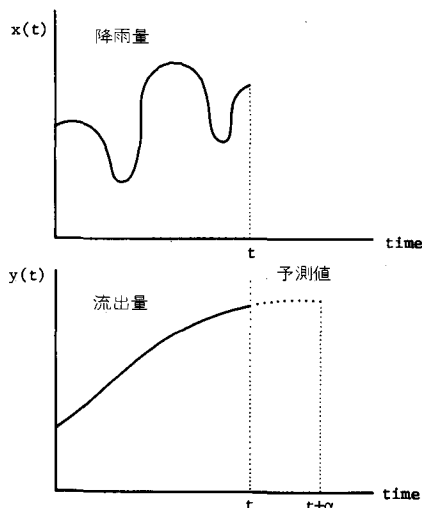


図 3. 8

$$\varepsilon(t+\alpha) = y(t+\alpha) - y_0(t+\alpha) \quad \dots\dots\dots (3.53)$$

Wiener は、最適化の基準として予測誤差の 2 乗平均値 $E\{\varepsilon^2(t)\}$ を採用し、これを最小化する $h(t)$ を Wiener-Hopf 積分方程式で与えた。

$$E\{\varepsilon^2(t+\alpha)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{y(t+\alpha) - y_0(t+\alpha)\}^2 dt \quad \dots\dots\dots (3.54)$$

(3.52) 式より

$$E\{\varepsilon^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma, \alpha) h(\tau, \alpha) R_{xx}(\tau - \sigma) d\tau d\sigma \\ - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, \alpha) R_{xy}(\tau) d\tau + R_{yy}(\alpha) \quad \dots\dots\dots (3.55)$$

ここに $R_{xx}(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$, $R_{yy}(\tau)$ は $x(t)$ の自己相関関数, $x(t)$, $y(t)$ 間の相互相関関数, $y(t)$ の自己相関関数で、次式で与えられる。

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t+\tau) dt \quad \dots\dots\dots (3.56)$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t+\tau) dt \quad \dots\dots\dots (3.57)$$

$$R_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) y(t+\tau) dt \quad \dots\dots\dots (3.58)$$

(3.55) 式を最小にする必要十分条件は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma, \alpha) R_{xx}(\tau - \sigma) d\sigma - R_{xy}(\tau) = 0 \quad (\tau \geq 0) \quad \dots\dots\dots (3.59)$$

(3.59) 式が、Wiener-Hopf の式と呼ばれ、この式を満足する $h(t)$ は最良推定値である。(3.59) 式に $\tau \geq 0$ の条件がつくのは、次のように考えると理解しやすい。(3.54) 式に示す自乗平均誤差が最小になる $h(t)$ を求めるには、 $\xi \leq t$ に対して直交原理より

$$E\left[\left\{y(t+\alpha) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, \alpha) x(t-\tau) d\tau\right\} x(\xi)\right] = 0 \quad \dots\dots\dots (3.60)$$

を満足する $h(t)$ を選ばなければならない。 $\xi \leq t$ に対して (3.60) 式より

$$R_{xy}(t+\alpha-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t-\xi-\tau) h(\tau, \alpha) d\tau \quad \dots\dots\dots (3.61)$$

(3.61) 式で、 $t-\xi \geq 0$ とすると (3.59) 式と一致する。

(3.59) 式に $\tau \geq 0$ の条件がなければ、 $h(t)$ は前節と同様な手法で求められる。すなわち $x(t)$ のスペクトルを $S_{xx}(\omega)$, $x(t)$ と $y(t)$ のクロススペクトルを $S_{xy}(\omega)$, システム関数を $H(\omega)$ とすると、未知関数 $h(t)$ は

$$H(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} \quad \dots\dots\dots (3.62)$$

で与えられる。

(3.59) 式は、現象の観測が無限大の過去まで逆のほりうる場合の線形応答関数を求める式である。実際問題として過去の観測時間は、有限時間 T ^(4.15) である。この場合 (3.59) 式は

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^T h(\sigma, \alpha) R_{xy}(\tau - \sigma) d\sigma \quad 0 \leq \tau \leq T \quad \dots\dots\dots (3.63)$$

Wiener-Hopf の式の解法としては、直接的手法、スペクトル因数分解法、固有関数展開法などがある。

Wiener-Hopf の式を差分化して解を求めてみる。 $\Delta\sigma = \Delta\tau = 1$ として

$$R_{xy}(i) = \sum_{k=0}^m h(k) R_{xx}(i-k) \quad \dots\dots\dots (3.64)$$

(3.64) 式をマトリックス表示して、

$$\begin{bmatrix} R_{xy}(0) \\ R_{xy}(1) \\ \vdots \\ R_{xy}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \dots\dots\dots R_{xx}(m) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & & R_{xx}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}(n) & R_{xx}(n-1) & & R_{xx}(n-m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(m) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.65)$$

$n=m$ ならば (3.65) 式は、 n 元の連立 1 次方程式なので解は

$$[h] = [R_{xx}]^{-1} [R_{xy}] \quad \dots\dots\dots (3.66)$$

で与えられる。

又 $n > m$ ならば、最短左側インバース (minimum left inverse)⁽¹⁶⁾ を用いて

$$[h] = \{ [R_{xx}]^T [R_{xx}] \}^{-1} [R_{xx}]^T [R_{xy}] \quad \dots\dots\dots (3.67)$$

で与えられる。

高棹⁽¹⁷⁾らは、日降水量系列のように $\tau \geq 1$ で近似的に無相関とみなしうる場合、 $h(i)$ を次のように推定する実用的簡便法を提案している。(3.64) 式より

$$R_{xy}(i) = a h(i) + b \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq i)}}^m h(k) \quad \dots\dots\dots (3.68)$$

したがって

$$h(i) = \frac{R_{xy}(i) - b \cdot f}{a - b} \quad \dots\dots\dots (3.69)$$

ただし

$$a = R_{xx}(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad \dots\dots\dots (3.70)$$

$$b = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right\}^2 \quad \dots\dots\dots (3.71)$$

$$f = \sum_{k=0}^m h(k) \quad \dots\dots\dots (3.72)$$

(3.72) 式の f は、対象期間内の流出率に相当している。

スペクトルの因数分解法については、日野⁽¹³⁾⁽¹⁸⁾が流出問題に適用している。本手法を流出系に適用するにあたって次のような点に特徴がある。すなわち降雨の自己相関関数及び降雨一流出の相互相関関数が、一般に図 3.9 に示すような形で与えられ、有限個の指数関数の和で近似できるので、スペクトルが ω に関する有理関数となり比較的簡単に解を求めることができる。日野が示した例について記述してみる。降雨の自己相関関数 $R_{xx}(\tau)$ と降雨一流出の相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ が、次の関数形で表わされる場合

$$R_{xx}(\tau) = a_1 e^{-p_1 |\tau|} \quad \dots\dots\dots (3.72)$$

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} b_1 e^{-q_1 \tau} + b_2 \tau e^{-q_2 \tau} & (\tau \geq 0) \\ b_1 e^{q_3 \tau} & (\tau \leq 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.73)$$

$$b_2 = b_1 (q_1 + q_2) \quad \dots\dots\dots (3.74)$$

(3.74) 式は、以後の計算を簡単化する。(3.72),

(3.73) のフーリエ変換より

$$\Phi_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{a_1 p_1}{\pi (p_1^2 + \omega^2)} \quad \dots\dots\dots (3.75)$$

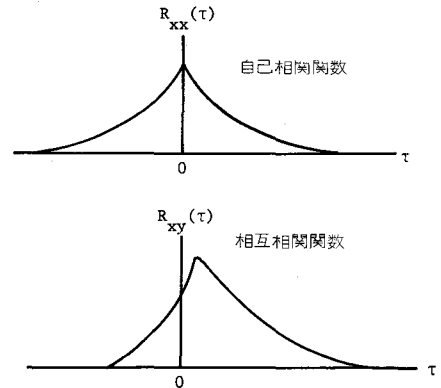


図 3.9 流出系における自己相関関数
及び相互相関関数

$$\begin{aligned} \Phi_{xy}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{b_2}{2\pi} \frac{(q_3 + 2q_2 - q_1)(q_4 + j\omega)}{(q_1 + j\omega)(q_2 + j\omega)^2(q_3 - j\omega)} \quad \dots\dots\dots (3.76) \end{aligned}$$

$$q_4 = \frac{(q_1 q_3 + q_2^2)}{q_3 + 2q_2 - q_1} \quad \dots\dots\dots (3.77)$$

降雨スペクトラム $\Phi_{xx}(\omega)$ を因数分解して、 ω 平面の上半平面にのみ零点及び極をもつ項を $\Phi_{xx}^+(\omega)$ 、逆に下半平面にのみ零点及び極をもつ項を $\Phi_{xx}^-(\omega)$ とすると、(3.59) 式の解は

$$H(\lambda) = \frac{1}{2\pi \Phi_{xx}^+(\lambda)} \int_0^{\infty} \phi(\tau) e^{-j\lambda\tau} d\tau \quad \dots\dots\dots (3.78)$$

$$\phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{xy}(\omega)}{\Phi_{xx}^-(\omega)} e^{j\omega\tau} d\omega \quad \dots\dots\dots (3.79)$$

したがって

$$\begin{aligned} \phi(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_2 (q_3 + 2q_2 - q_1)(q_4 + j\omega)}{2\pi (q_1 + j\omega)(q_2 + j\omega)^2(q_3 - j\omega)} \cdot \left\{ \sqrt{\frac{a_1 p_1}{\pi}} \frac{1}{p_1 + j\omega} \right\} e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= Res \left[\frac{b_2 \sqrt{\pi}}{\sqrt{a_1 p_1}} (q_3 + 2q_2 - q_1) \frac{(q_4 + s)(p_1 + s)}{(q_1 + s)(q_2 + s)^2(q_3 - s)} \right] \cdot l.h.p. \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a_1 p_1}} b_2 (q_3 + 2q_2 - q_1) \{ k_1 e^{-q_1 \tau} + k_2 \tau e^{-q_2 \tau} + k_3 e^{-q_3 \tau} \} \quad \dots\dots\dots (3.80) \end{aligned}$$

$$H(\lambda) = \frac{b_2 (q_3 + 2q_2 - q_1)}{2 a_1 p_1} (p - j\lambda) \left\{ \frac{k_1}{q_1 + j\lambda} + \frac{k_2}{(q_2 - j\lambda)^2} + \frac{k_3}{(q_2 - j\lambda)} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.81)$$

$$k_1 = \frac{(q_4 - q_1)(p_1 - q_1)}{(q_2 - q_1)(q_3 + q_1)}$$

$$k_2 = \frac{(q_4 - q_2)(p_1 - q_2)}{(q_1 - q_2)(q_3 + q_2)} \quad \dots\dots\dots (3.82)$$

$$k_3 = \frac{(q_4 - q_2)(p_1 - q_2)}{(q_1 - q_2)(q_3 + q_2)} \left\{ \frac{1}{q_4 - q_2} + \frac{1}{p_1 - q_2} - \frac{1}{q_1 - q_2} - \frac{1}{q_3 + q_2} \right\}$$

$$h(t, \alpha) = \frac{b_2(q_3 + 2q_2 - q_1)}{2a_1 p_1} \left[k_1(p_1 + q_1)e^{-q_1 t} + k_2 \{t(p_1 + q_2) - 1\} e^{-q_2 t} \right. \\ \left. + k_3(p_1 + q_2) e^{-q_2 t} \right] \quad \dots\dots\dots (3.83)$$

更に日野は、(3.73)式の相互相関関数を次のように一般的にした場合についても、その解を示した。

ただし自己相関関数は、(3.72)式のまゝである。

$$R_{xy}(\tau) = \begin{cases} \sum_K R_{1,K}(\tau) = \sum_K A_{1,K}(\beta - \tau)^{n_K} \exp\{a_{1,K}(\tau - \beta)\} & (\tau < \beta) \\ \sum_K R_{2,K}(\tau) = \sum_K A_{2,K}(\tau - \beta)^{m_K} \exp\{-a_{2,K}(\tau - \beta)\} & (\tau \geq \beta) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.84)$$

ただし n_K , m_K は、0 又は正の整数で $a_{1,K}$, $a_{2,K}$ は実数である。解の結果のみを示すと

$$h(\tau, \alpha) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{1}{N} \sum_K \frac{(p_1^2 - a_{1,K}^2)}{p_1^2} R_{1,K}(t + \alpha) & (0 \leq t \leq \beta - \alpha) \\ \frac{1}{N} \sum_K \frac{(p_1^2 - a_{2,K}^2)}{p_1^2} R_{2,K}(t + \alpha) & (\beta - \alpha < 0 \leq t) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.85)$$

ただし、

$$N = \frac{2a_1}{p_1} \quad \dots\dots\dots (3.86)$$

図 3.10～図 3.13 は、日野によって示された神奈川の適用例である。ただし降雨の自己相関及び降雨－流出の相互相関は

$$R_{xx}(\tau) = 177.8 e^{-2.71\tau} \quad \dots\dots\dots (3.87)$$

$$R_{xy}(\tau) = \begin{cases} 448 e^{1.53(\tau-1)} & (\tau < 1) \\ 381 e^{-0.115(\tau-1)} & \dots\dots\dots (3.88) \\ + 67 e^{-0.0885(\tau-1)} & (\tau \geq 1) \end{cases}$$

として求めたものである。

図中の直接法とは、(3.59)式を差分化して連立方程式より求めた結果である。

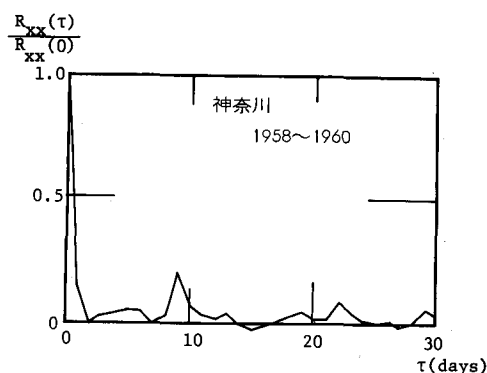


図 3.10 降雨量自己相関関数

4. 線形化，定常化

実存の物理系が、厳密に線形性を示すことはまれである。降雨流出系においても、流域による差があるが一般に現象は非線形性を示す。非線形要素としては、雨水の凹地貯留，土中への浸透もしくは保留

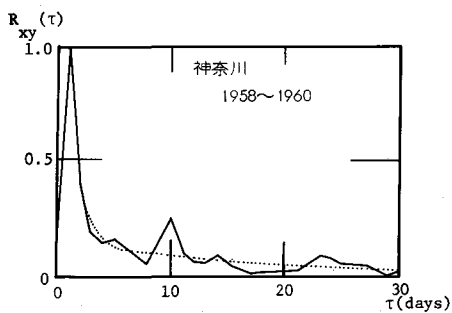


図 3.11 降雨量～流出量の
相互相関関数

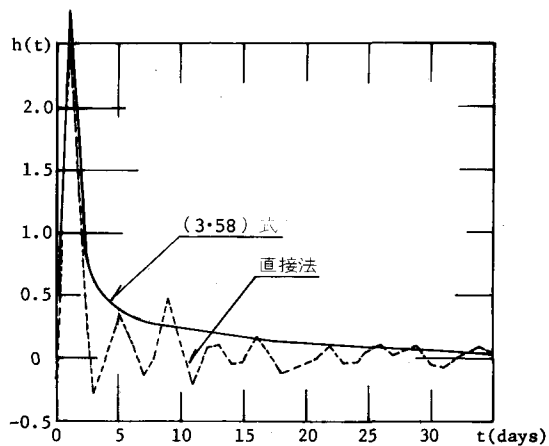


図 3.12 最適応答関数

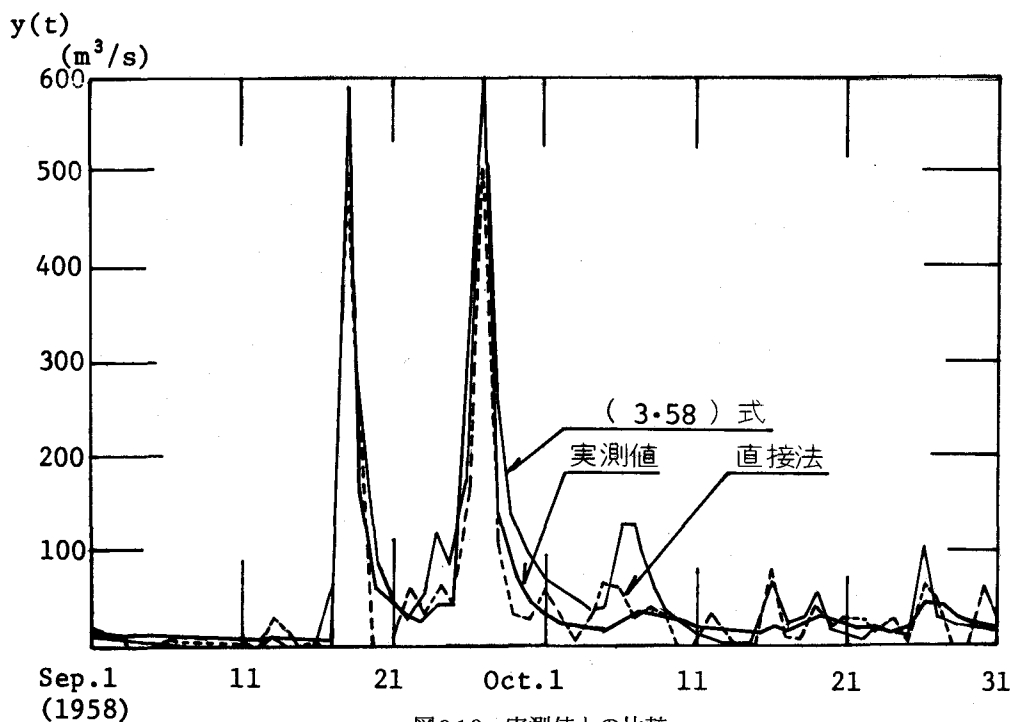


図 3.13 実測値との比較

される部分で、いわゆる損失と流れそのものもっている性格などが考えられる。したがって前述の線形理論をそのまま適要するのでは、結果に大きな誤差を伴う。すなわち線形理論を用いるにあたって、予め非線形性を示す要素を除去する必要がある。もとより線形化という体系化された手法があるわけではなく、流出現象の物理的考察に頼らざるを得ない。

19, 20

高棹、池淵らは前節の線形応答関数 $h(t)$ を求めるにあたって、降水、流出量系列に含まれる非線形成分を巧妙に除去している。

こゝでは、高棹らによって示された計算例を参考にこれらの手法について述べる。

図 4.1, 図 4.2 は、由良川荒倉地点における流出量及び降水量～流出量の自己相関係数, 相互相関係

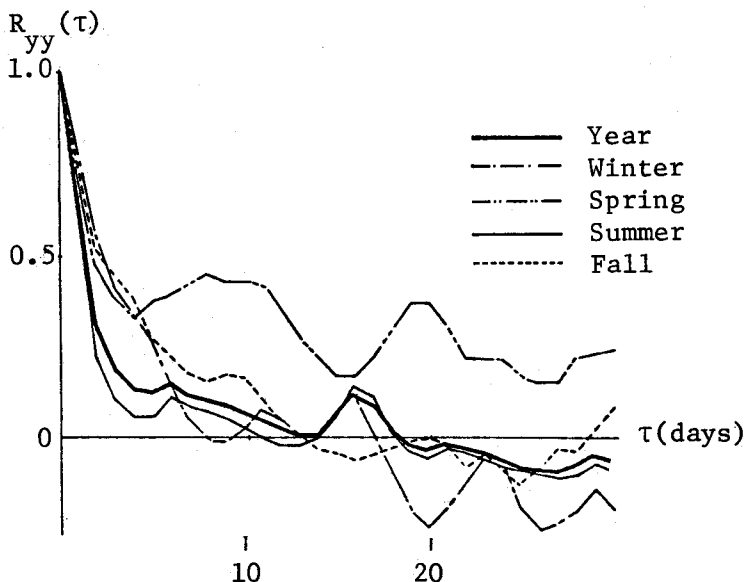


図 4.1 由良川荒倉地点における日平均流量の自己相関係数

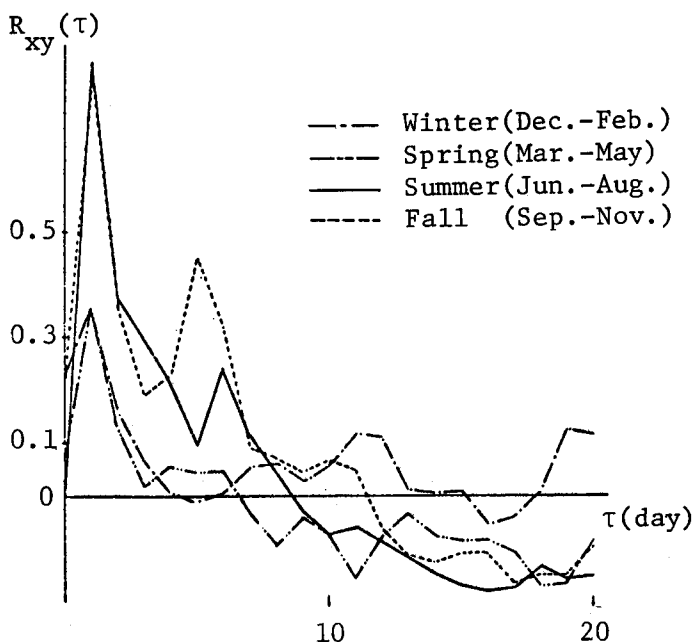


図 4.2 荒倉地点における降雨量～流出量の相互相関係数

数の計算例である。先ず第1に系の定常化をはかるためには、図に示されているように適当な期間毎に分割して扱う必要がある。

一方流出現象は、概念的に表面流出、中間流出、地下水流出に分類され、表面流出は非線形性の強いことが知られている。この非線形性の強い表面流出成分を除く方法は、次式で示される。 $Q(i), R(i)$ を実測の流出量、降雨量として、

$$x(i) = R(i) - N_R(i) \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

$$y(i) = Q(i) - N_Q(i) \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

$$N_R(i) = \begin{cases} 0 & R(i) \leq r \cdot D \\ R(i) - r \cdot D & R(i) > r \cdot D \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

$$N_Q(i) = \begin{cases} 0 & Q(i) \leq r_a \cdot A \\ Q(i) - r_a \cdot A & Q(i) > r_a \cdot A \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

$N_R(i), N_Q(i)$ は、降雨量、流出量における中間流出成分で、 r は、表層土の有効空隙率、 D は表層土の厚さ、 A は流域面積、 r_a は中間流出最大強度である。又 $r \cdot D$ 及び r_a は、表面流出終了後のハイドログラフ解析に次のように推定できる。

$$r \cdot D = \{ e^{\lambda(t_2 - t_1)^2} - 1 \} f_c / \lambda \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

$$r_a = \lambda \cdot r \cdot D \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

t_1, t_2 はそれぞれ表面流出及び中間流出の終了時刻、 λ は中間流出のてい減係数、 f_c は最終浸透能である。(4.1)～(4.4)式による計算例(一様分離法)として、図4.3、図4.4を示す。

更に土湿量変化を考慮した式として、(4.1)式を次のように与えている。

$$x(i) = R(i) - L(i)$$

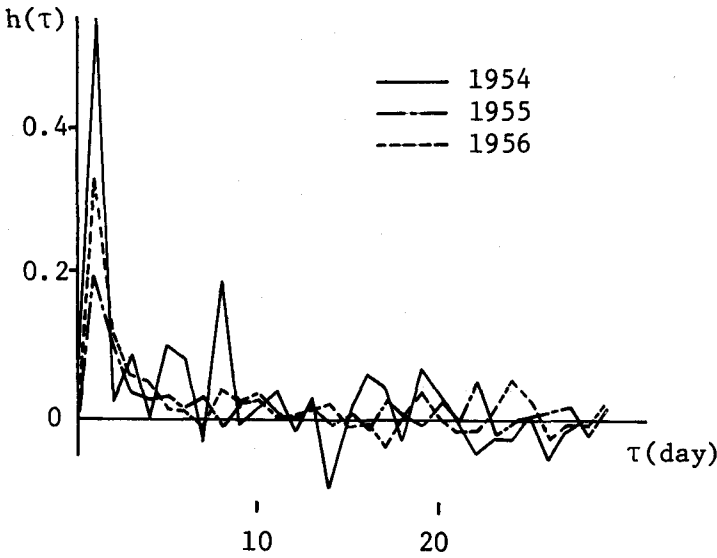


図4.3 一様分離法による単位図の計算例(季節夏, 荒倉地点)

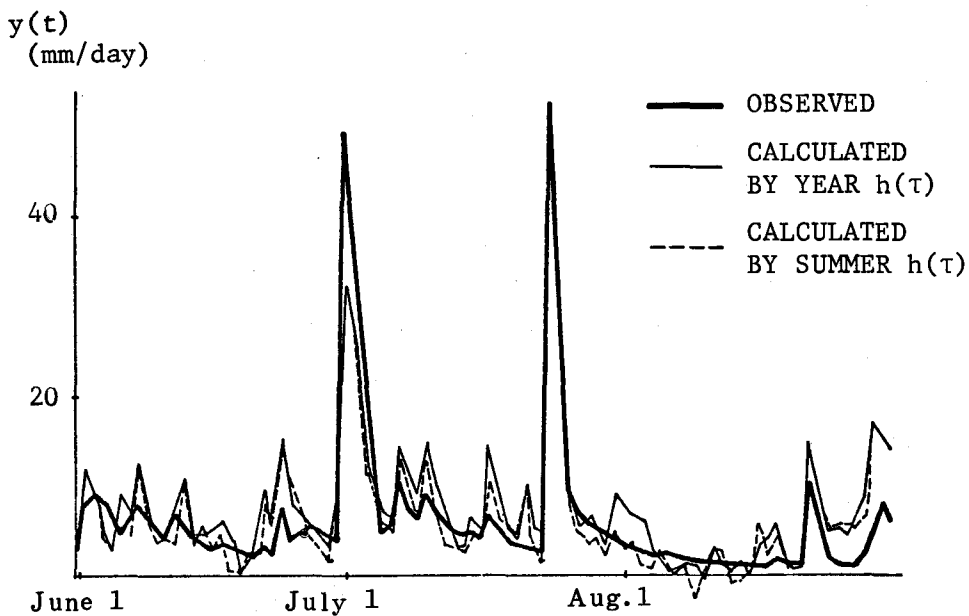


図 4.4 実測流出量と推定流出量の比較 (季節夏, 荒倉地点)

$$L(i) = \begin{cases} I(i) & \omega \leq \omega_c \\ N_R(i) = R(i) - \gamma D & \omega = \omega_s \\ 0 & \omega_c < \omega < \omega_s \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

ただし, ω は表層土の含水比, ω_c は毛管含水比, ω_s は飽和含水比, $I(i)$ は初期損失量である。(4.7) (4.8) 式を用いた計算例を, 図 4.5, 図 4.6 に示す。図 4.4 と比較して結果が改良されていることがわかる。

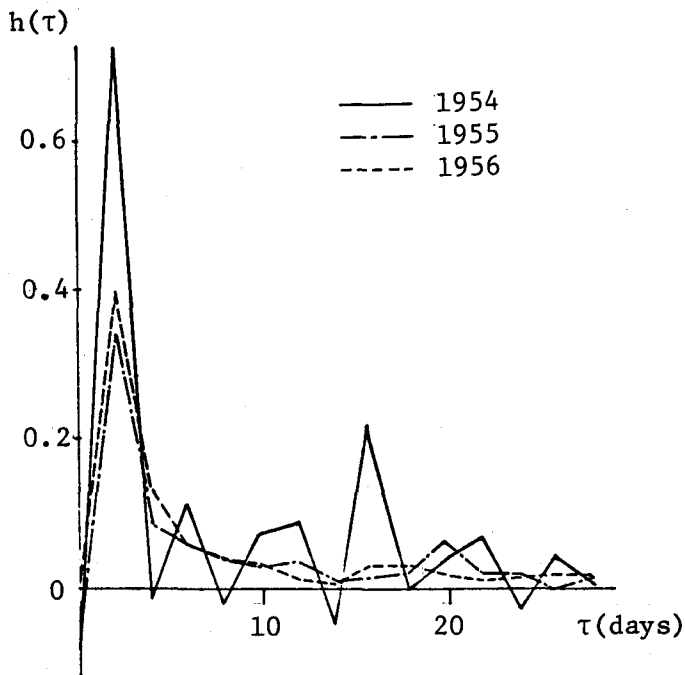


図 4.5 土湿量変化を考慮した降雨期の単位図 (荒倉地点)

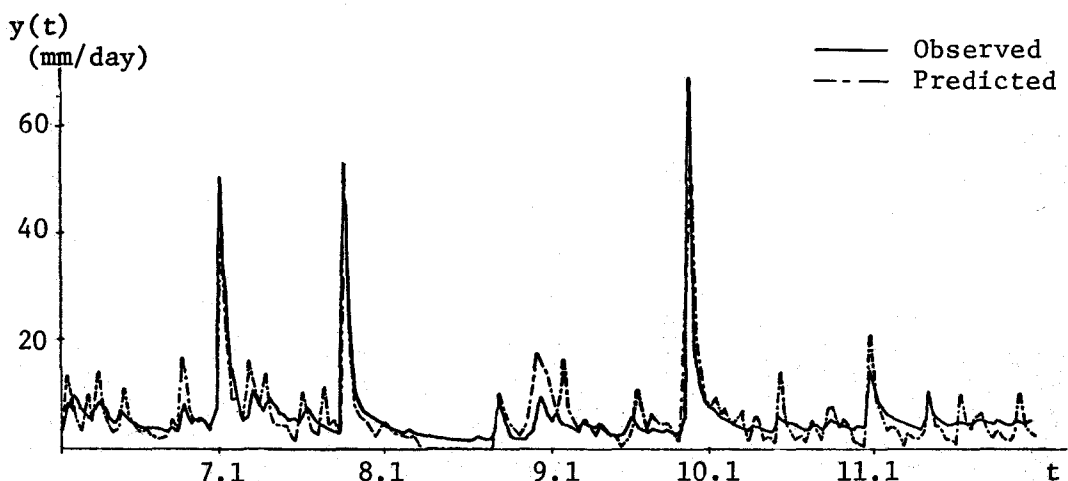


図 4.6 実測流出量と推定流出量の比較（荒倉地点）

出力信号レベル

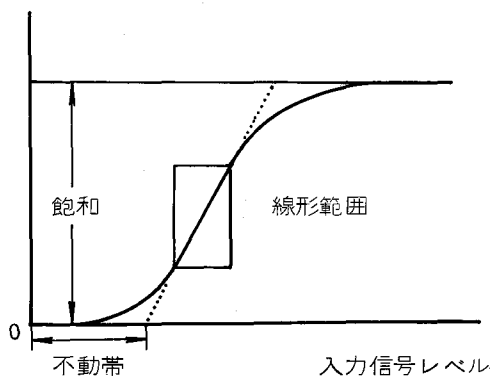


図 5. 1.

入力信号レベル

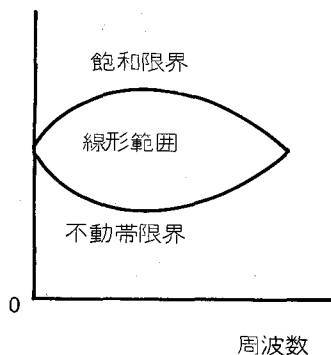


図 5. 2

5. おわりに

本章で扱った線形理論は、最初に述べたように2つ仮定を基礎としている。この仮定が成立する条件を信号レベルと周波数範囲から考えてみる。信号レベルの側からみると図 5.1 に示すように流出系に限らず変換系には飽和と不動帯という2つの非線形性がある。一方周波数と信号レベルで考えると線形領域は、図 5.2 のように表わすことができる。したがって線形理論の適用にあたって、対象としている流出現象が、どの位置にあるのか又その現象内に線形範囲を越える要素がないか常に注意する必要がある。この意味において系の入出力から系の特性を求めようとするいわゆる **Black - Box** 問題と力学的立場から系の内部構造に接近する手法とは、表裏一体をなしているものと考えられる。

参 考 文 献

- (1) Sherman, L.K. ; Stream flow from rainfall by the Unit - graph method, Eng. News - Record, 108, 1932
- (2) Kisiel, C.C. ; Time Series Analysis of Hydrologic Data, Advances in Hydrosience, VoL. 5, Edited by V.T. Chow Academic press, 1969
- (3) 山岡勲 ; 水文学における確率過程
1970 年度水工学に関する夏期研修会講義集, B, 1970
- (4) 例えば
市川邦彦 ; 体系自動制御理論, 朝倉書店, 1966
- (5) Nash, J.E. ; The form of the instantaneous unit hydrograph, Intern. Assoc. Sci. Hydrology, Pub. 45, VoL. 3, 1957
- (6) Snyder, W.M. ; Hydrograph Analysis by the Method of least square, Proc. A.S.C.E. VoL. 81, Separate No. 793, Sept. 1955
- (7) O'Donnell, T. ; Instantaneous Unit Hydrograph derivation by harmonic analysis, Intern. Assoc. Sci. Hydrology, Pub. 51, 1960
- (8) Diskin, M.H. ; A basic study of the linearity of the rainfall - runoff process in watersheds, Ph. D. Thesis directed by V.T. Chow, University of Illinois, Urbana, Ill, 1964
- (9) Delleur, J.W. and Rao, R.A. ; Linear system analysis in hydrology - the transform Approach, the kernel oscillations and the effect of noise, United States - Japan Bi-Lateral Seminar in Hydrology, Honolulu, Jan. 1971
- (10) Papoulis, A. ; the Fourier integral and its Applications, McGraw-Hill Book Company 1962
- (11) 藤田睦博 ; 降雨流出系のシステム関数の解析について,
第15回水理講演会講演集, 1971
- (12) Eagleson, P.S. ; Mejia, R. ; March, R. ; Computation of Optimum Realization Unit Hydrograph, W.R.R., 2 (4), 1966
- (13) 日野幹雄 ; 情報理論の適用による出水予測性の向上, 第4回災害科学総合シンポジウム論文集,
1967
- (14) Zadeh, L.A. ; Ragazzini, J.R. ; An extension of Wiener's theory of prediction, J. Appl. Phy. VoL. 21, 1950
- (15) Davis, R.C. ; On the theory of prediction of nonstationary processes, J. Appl. Phy., V 23, 1952.
- (16) 高橋安人 ; システムと制御, 岩波書店, 1972
- (17) 石原藤次郎, 高埴琢馬, 池瀧周一 ; 統計的単位図の簡易推算法とその応用, 土木学会関西支部年次学術講演会, 昭和42年
- (18) 日野幹雄 ; 情報理論的水文学への序説 - 流出予測性の向上, 東京工業大学土木科, 研究報告 VoL. 4, 1968
- (19) 高埴琢馬, 池瀧周一 ; 長期流出機構の情報論的研究, 京都大学防災研究所年報, 12, B, 昭和44年

- ⑳ 石原藤次郎, 高棹琢馬, 池瀧周一; 長期間流出解析法に関する 2.3 の考察, 土木学会論文報告集, Vol. 196, 1971
- ㉑ 石原藤次郎, 石原安雄, 高棹琢馬, 頼千元; 由良川の出水特性に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 昭和33年