

線形確率過程の解析と予測

岸 力

目 次

1. まえがき
2. 定常確率過程の一般的な性質
 - 2.1 定常過程の特性量
 - 平均と分散
 - 自己共分散と自己相関関数
 - 自己共分散マトリクスと自己相関マトリクス
 - 2.2 線形定常過程
 - 2.2.1 線形過程をあらわす2つの形式
 - 2.2.2 荷重係数 b と回帰係数 a との関係
 - 2.2.3 自己共分散の母関数および線形定常過程のスペクトル
 - 2.2.4 定常性と転換性
3. 自己回帰過程
 - 3.1 自己相関関数とスペクトル
 - 自己相関係数と回帰係数との関係—Yule—Walker の式
 - スペクトル
 - 3.2 1 次の自己回帰過程—Markov 過程
 - 自己相関関数
 - 分散
 - スペクトル
 - 3.3 2 次の自己回帰過程
 - 自己相関関数
 - 分散
 - スペクトル
 - 3.4 過程の次数の決定—部分自己相関関数
4. 移動平均過程
 - 4.1 自己相関関数とスペクトル
 - 自己相関関数
 - スペクトル
 - 4.2 1 次の移動平均過程
 - 自己相関関数
 - スペクトル

4.3 2次の移動平均過程

自己相関関数

スペクトル

5. 非定常線形過程

5.1 均質な非定常性

5.2 自己回帰—積分—移動平均過程 (ARIMA過程)

5.3 ARIMA過程の同定

基本的なARIMA(p, d, q)モデル

適用例

6. 時系列の予測

6.1 ARIMA過程の陽形式表示

差分形式表示

不規則入力表示

6.2 最小2乗平均誤差予測

6.3 予測値の計算

予測計算の例

6.4 予測値の更新

参考文献

1. まえがき

河川の計画に確率過程の概念が導入され始めたのは、我が国では10年程前からの事と思う。この時期は、東京オリンピックが行こなわれた1964年に東京が深刻な水不足に悩まされ、それを契機として水資源問題がにわかに関心の的となり始めた背景がある。河川の利水計画においては、高水計画の場合以上に、毎日の流量変化の仕方すなわち流量時系列の特性の把握が重要になってくる。この必要性に促されて新しい解析方法が導入されて来たのである。

河川計画に対する確率過程理論の適用にも多くの側面がある。例えば降雨と流出との関係をあらわす流域システムの解析についても、線形システム、非線形システムの別があり、またシステムの構成にしても集中システムと分布システムに分かれる。また計画技法としては水文量の発生 (synthesis or generation) 技術も重要である。さらに1変量を扱うか多変量を扱うかの側面もある。多くの研究方向の中で、本文では線形時系列の解析と予測を論じている。含まれる変量は1変量である。

時系列理論については多くの成書、論文が発表されているし特に土木技術者向けの講座、解説もしばしば行こなわれてきた。しかし現在迄の処、実際面では定常時系列理論の応用が大部分である。筆者は水文量の時系列解析を手掛けている間に、定常時系列という理論上の制約に次第に窮屈さを感じる様になった。河川で扱う時系列は本来定常であるかどうか不明瞭であるから、定常という制約をはずす意味で非定常時系列の理論が必要である。本文ではG.E.P.Box & G.M.Jenkinsが開発した非定常時系列の理論を紹介している。彼等の理論の基本は均質な非定常性 (homogeneous nonstationality) という概念で、時系列値そのものは定常でないが時系列の差分は定常性を示すという考えである。したがって定常時系列理論の拡張として極く自然の形で非定常時系列理論に入って行けるのが特色である。内容としては、紙数の制限もあるので、時系列モデルの同定に必要な諸特性と時系列の予測を主として述

べている。

2. 定常確率過程の一般的な性質

確率過程のうちその特性が時間原点の変化に影響されないものを定常過程 (stationary process) という。すなわち時系列のすべての次数の積率が時間差だけに依存し、観測の時刻には依存しない場合を強定常 (strongly stationary) 又は厳密に定常 (strictly stationary) と呼ぶ。若し f 次の積率まで考える時は f 次の弱定常過程 (weakly stationary process of order f) という。通常の解析では2次積率 (共分散) までを考えるから2次の弱定常過程を扱うことになる。

2.1 定常過程の特性量

平均と分散 定常時系列を Z_t であらわすと、定常性の仮定により確率分布 $p(Z_t)$ は時刻 t によらないから、過程の平均値および分散はそれぞれ

$$\mu = E[Z_t] = \int_{-\infty}^{\infty} Z p(Z) dZ \quad \dots\dots\dots (2.1.1)$$

$$\sigma_s^2 = E[(Z_t - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (Z - \mu)^2 p(Z) dZ \quad \dots\dots\dots (2.1.2)$$

ここに μ : 平均値, σ_s^2 : 分散

で与えられる。離散値からなる時系列においては平均値 μ および分散 σ_s^2 の推定値はそれぞれ

$$\bar{Z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Z_t \quad \dots\dots\dots (2.1.3)$$

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (Z_t - \bar{Z})^2 \quad \dots\dots\dots (2.1.4)$$

で計算される。ただし N は系列値の個数

自己共分散 (autocovariance) と自己相関係数 (autocorrelation coefficients) 定常性の仮定により2つの時系列値 Z_{t_1} と Z_{t_2} との同時確率分布 (joint probability distribution) $p(Z_{t_1}, Z_{t_2})$ は観測の時間差 $|t_1 - t_2|$ が等しいすべての観測値について同一である。離散時系列で時間間隔が k 単位だけはなれているときの Z_t と Z_{t+k} の共分散 (covariance) を $\text{lag } k$ の自己共分散 (autocovariance) といい次式で定義する:

$$r_k = \text{cov}[Z_t, Z_{t+k}] = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)] \quad \dots\dots\dots (2.1.5)$$

同様に $\text{lag } k$ の自己相関係数 (autocorrelation coefficient) を次式で定義する:

$$\rho_k = \frac{E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(Z_t - \mu)^2] E[(Z_{t+k} - \mu)^2]}} = \frac{E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]}{\sigma_s^2}$$

(2.1.5) によれば $\sigma_s^2 = r_0$ であるから

$$\rho_k = r_k / r_0 \quad \dots\dots\dots (2.1.6)$$

また ρ_k を k の関数と考えるときは自己相関関数 (autocorrelation function) と呼ぶ。(2.1.6) によれば

$$\rho_0 = 1 \quad \dots\dots\dots (2.1.7)$$

である。

自己共分散マトリクス (autocovariance matrix) と自己相関マトリクス (autocorrelation matrix)

n 個の自己共分散 $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ を (2.1.8) のように配列したマトリクス Γ_n を自己共分散マトリクスと呼ぶ。

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{n-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & \dots & r_{n-2} \\ r_2 & r_1 & r_0 & \dots & r_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n-1} & r_{n-2} & r_{n-3} & \dots & r_0 \end{bmatrix} = \sigma_s^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{n-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} = \sigma_s^2 P_n \quad (2.1.8)$$

上式に示す通り $\Gamma_n = \sigma_s^2 P_n$ と書くとき P_n を自己相関マトリクスと呼ぶ。

定常過程においては自己共分散マトリクスおよび自己相関マトリクスは正の定符号 (positive-definiteness) である。この事はマトリクスの行列式およびすべての主小行列式 (principal minor) 一小行列の対角線がもとの行列式の対角線と一致するもの一が 0 より大である事を必要とする。例えば $n=2$ のときは

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{すなわち} \quad 1 - \rho_1^2 > 0,$$

したがって $-1 < \rho_1 < 1$ (2.1.9)

また $n=3$ のときは

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

したがって

$$-1 < \rho_1 < 1, \quad -1 < \rho_2 < 1, \quad -1 < \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} < 1 \quad (2.1.10)$$

2.2 線形定常過程

定常過程の 1 次和を線形定常過程 (linear stationary process) という。

2.2.1 線形過程をあらわす 2 つの形式

ガウス雑音 η_t が線形系に加えられたときの出力を Z_t と書くと、図 2.1 に示すように、 Z_t は t 以前に

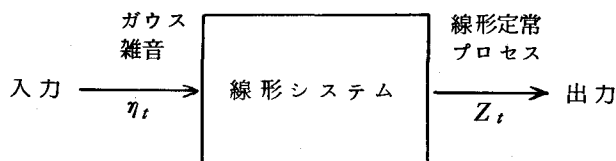


図 2.1 線形定常過程の発生

加えられた入力の影響の総和になっているはずであるから、

$$Z_t = \eta_t + b_1 \eta_{t-1} + b_2 \eta_{t-2} + \dots = \eta_t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \eta_{t-j} \quad (2.2.1)$$

ただし, b_j : 定係数

と書ける。すなわち, 線形定常過程はガウス過程 η_t の現在および過去の値のある荷重和としてあらわすことができる。

この事は流出単位図の原理を想起すると理解が具体的になるであろう。図 2.2. a は (2.2.2 - a) の演算を示し, 図 2.2. b は (2.2.2 - b) の演算を示す。

$$Q(t) = \int_0^t r(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (2.2.2-a)$$

$$= \int_0^t r(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (2.2.2-b)$$

ただし Q : 流出量, $u(t)$: 単位図, $r(t)$: 降雨強度

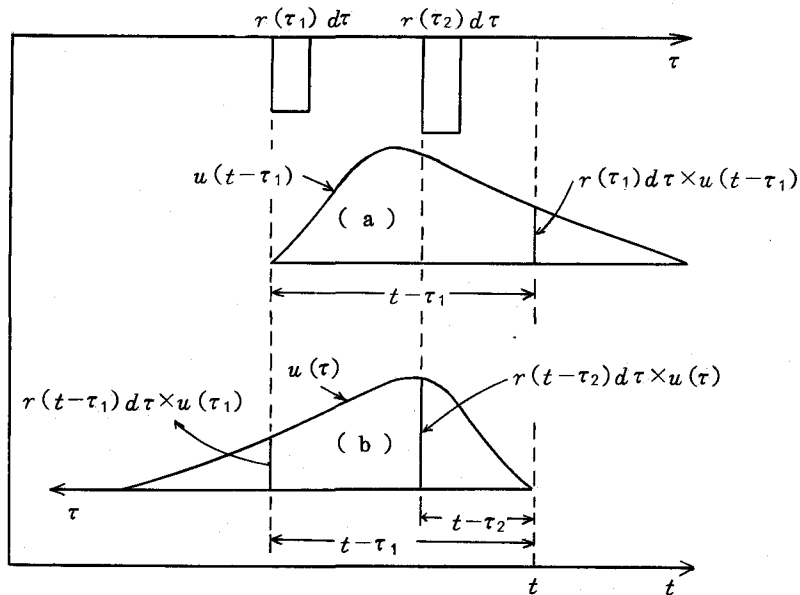


図 2.2 単位図の原理

(2.2.2 - b) を離散値であらわすと, $r d\tau = R$ と書いて

$$Q_t = u_0 R_t + u_1 R_{t-1} + \dots + u_t R_0 \quad (2.2.3)$$

上式において $Q_t \rightarrow Z_t$, $R_t \rightarrow \eta_t$, $u_j \rightarrow b_j$ と置き換えると (2.2.1) になる。

(2.2.1) をみると Z_t は, 別の形として, Z の過去の値の荷重和と η_t の和としてあらわすことが可能である。

$$Z_t = a_1 Z_{t-1} + a_2 Z_{t-2} + \dots + \eta_t = \sum_{j=1}^{\infty} a_j Z_{t-j} + \eta_t \quad (2.2.4)$$

ただし a_j : 定係数

流出過程の例で考えると, (2.3.4) は流域システムの機能を線形微分方程式であらわした事に相当している。例えば流域を 1 つの線形貯水池 (linear reservoir) であらわすと降雨と流出量との関係は,

$$K \frac{dQ}{dt} + Q = r, \quad \text{ただし } K: \text{貯溜係数 (storage factor)}$$

これを差分式であらわすと

$$Q_t = a_1 Q_{t-1} + R'_t$$

となり、(2.2.4)の最も簡単な場合になる。

上に述べたように線形定常過程には一般に2種類の表現形式がある。

一つは(2.2.1)の形式で Z_t がガウス雑音 η_t の移動平均の形になっている($\sum b_j$ は必ずしも1ではないから、数学上の移動平均ではない)。この意味で(2.2.1)を移動平均過程(moving average process)という。

他の一つは(2.2.4)の形式で、 $Z_t, Z_{t-1}, \dots$ が回帰式の形になっている。(2.2.4)を自己回帰過程(autoregressive process)という。

2.2.2 荷重係数 b と回帰係数 a との関係

(2.2.1)と(2.2.4)とは一つの現象に対する異なる表現形式であるから、係数 b と a の間には当然数学的な関係がある。この関係を考えるため次の演算子を用いる。

後進演算子(Backward shift operator)

$$BZ_t = Z_{t-1}, \quad B^m Z_t = Z_{t-m} \quad \dots\dots\dots (2.2.5)$$

前進演算子(Forward shift operator)

$$FZ_t = Z_{t+1} = B^{-1}Z_t, \quad F^m Z_t = Z_{t+m} \quad \dots\dots\dots (2.2.6)$$

後進差分演算子(Backward difference operator)

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (1 - B)Z_t \quad \dots\dots\dots (2.2.7)$$

和演算子(Summation operator)

$$\left. \begin{aligned} SZ_t &= \nabla^{-1} Z_t = (1 - B)^{-1} Z_t \\ &= (1 + B + B^2 + \dots\dots\dots) Z_t \\ &= Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + \dots\dots\dots = \sum_{j=0}^{\infty} Z_{t-j} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.2.8)$$

移動平均過程の最も簡単な例として

$$Z_t = \eta_t - b\eta_{t-1} = (1 - bB)\eta_t \quad \dots\dots\dots (2.2.9)$$

を考える。(2.2.1)で $b_1 = -b, b_j = 0 \text{ for } j > 1$ の場合である。(2.2.9)で η_t を Z_t であらわすと、

$$(1 - bB)^{-1} Z_t = \eta_t \quad \text{すなわち} \quad (1 + bB + b^2 B^2 + \dots\dots\dots) Z_t = \eta_t$$

書きかえると

$$Z_t = -bZ_{t-1} - b^2 Z_{t-2} - \dots\dots\dots + \eta_t$$

この式と(2.2.4)を比較すると

$$a_j = -b^j$$

である。

一般に (2.2.1) は

$$\left. \begin{aligned} Z_t &= \Psi(B) \eta_t \\ \text{ただし } \Psi(B) &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j B^j, \quad \text{ただし } b_0 = 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2.10)$$

同様に, (2.2.4) は

$$\left. \begin{aligned} \pi(B) Z_t &= \eta_t \\ \text{ただし } \pi(B) &= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j B^j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2.11)$$

(2.2.11) の両辺に $\Psi(B)$ を乗ずると $\Psi(B) \eta_t = Z_t$ であるから,

$$\Psi(B) \pi(B) = 1, \quad \text{すなわち } \pi(B) = \Psi(B)^{-1} \dots\dots\dots (2.2.12)$$

(2.2.12) は $\pi(B)$ あるいは $\Psi(B)$ のどちらか一方を知って他方を知るのに利用される。

2.2.3 自己共分散の母関数および線形定常過程のスペクトル

線形過程の自己共分散を計算するには母関数 (generating function)

$$r(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k B^k \dots\dots\dots (2.2.13)$$

を用いるのが便利である。上式では r_0 はプロセスの分散で B^0 の項の係数である。 r_k は lag k の自己共分散で B^k および $B^{-k} = B^k$ の係数である。この様に母関数 $r(B)$ が与えられれば, r_k は B についてのべき級数展開の係数として求められる。移動平均過程 (2.2.10) に対する共分散母関数は,

$$r(B) = \sigma_\eta^2 \Psi(B) \Psi(B^{-1}) \dots\dots\dots (2.2.14)$$

で与えられる。ただし σ_η^2 はガウス雑音の分散である。例えば (2.2.9) を例にとると,

$$Z_t = \eta_t - b \eta_{t-1} = (1 - bB) \eta_t$$

であるから $\Psi(B) = (1 - bB)$ である。したがって

$$r(B) = \sigma_\eta^2 (1 - bB) (1 - bB^{-1}) = \sigma_\eta^2 \{ -bB^{-1} + (1 + b^2) - bB \}$$

(2.2.13) と比較すると,

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= (1 + b^2) \sigma_\eta^2 \\ r_1 &= -b \sigma_\eta^2 \\ r_k &= 0, \quad k \geq 2 \end{aligned} \right\}$$

線形過程ではしばしばパワースペクトル (power spectrum) を用いて解析が行こなわれる。自己共分散母関数 $r(B)$ が与えられると (2.2.14) で $B = e^{-i2\pi f}$ と置くとパワースペクトル $P(f)$ の $1/2$ になる。すなわち

$$\begin{aligned} P(f) &= 2 \sigma_\eta^2 \Psi(e^{-i2\pi f}) \Psi(e^{i2\pi f}) \\ &= 2 \sigma_\eta^2 | \Psi(e^{-i2\pi f}) |^2, \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \dots\dots\dots (2.2.15) \end{aligned}$$

2.2.4 定常性と転換性

定常性の条件は2.1の(2.1.9)および(2.1.10)で触れた。この条件は(2.2.10)において $\Psi(B)$ が $|B| \leq 1$ の領域で収束するという一つの条件にまとめる事ができる。

定常性とは別に、線形過程に対し転換性という特性を考えることができる。具体例を示す。移動平均過程の最も簡単な例である(2.2.9)を再びとり上げる。(2.2.9)は $-b^j = a_j$ と置くと(2.2.4)の形に書ける事を前に述べた。すなわち

$$Z_t = (1 - bB) \eta_t \quad \dots\dots\dots (2.2.10)$$

を書き変えて

$$Z_t = -bZ_{t-1} - b^2Z_{t-2} + \dots\dots + \eta_t \quad \dots\dots\dots (2.2.9)$$

とした。(2.2.10)で与えられる Z_t は定常過程 η_t の線形結合であるから b の値に制限なく一つの定常過程である。しかし(2.2.9)の形でみると、 $|b| > 1$ ならば(2.2.9)の右辺の回帰係数は発散する形になっている。すなわちある時刻 t の値 Z_t はそれ以前の値 Z_{t-1} , Z_{t-2} , $\dots\dots$ 等に依存しているが、依存の程度は時刻がはなれる程大きくなる。このような性質であれば、時系列の過去における実現値から将来値を予測する事は無意味な事になる。この状態を除くためには(2.2.9)の右辺の回帰係数が収束すればよいから $|b| < 1$ という条件を付ければよい事になる。一般に線形過程には(2.2.10)と(2.2.11)の2つの表現形式があり、そのとき移動平均演算子(moving average operator) $\Psi(B)$ と自己回帰演算子(autoregressive operator) $\pi(B)$ との間には(2.2.12)の関係がある。したがって(2.2.12)によって一方から他方を求めたとき $\Psi(B)$ または $\pi(B)$ が $|B| \leq 1$ のはんいで収束するとき、その過程(又は時系列)は転換可能である(invertible)という。転換性(invertibility)は、前に触れた様に、過程の予測において重要な性質である。

3. 自己回帰過程

(2.2.4)に自己回帰過程の一般式を示した。ここでは次式で与えられる p 次の自己回帰過程を考える(以下これを $AR(p)$ 過程と略記する)：

$$Z_t = a_1 Z_{t-1} + a_2 Z_{t-2} + \dots\dots a_p Z_{t-p} + \eta_t \quad \dots\dots\dots (3.1.1)$$

3.1 自己相関関数とスペクトル

(3.1.1)の両辺に Z_{t-k} を乗じると、

$$Z_{t-k} Z_t = a_1 Z_{t-k} Z_{t-1} + a_2 Z_{t-k} Z_{t-2} + \dots\dots + Z_{t-k} \eta_t \quad \dots\dots\dots (3.1.2)$$

(3.1.2)の期待値を求めると、定常過程の自己共分散には(2.1.5)の関係があるから、

$$r_k = a_1 r_{k-1} + a_2 r_{k-2} + \dots\dots a_p r_{k-p}, \quad k > 0 \quad \dots\dots\dots (3.1.3)$$

が得られる。(3.1.2)の最後の項 $Z_{t-k} \cdot \eta_t$ において Z_{t-k} は時刻 $t-k$ 以前の値だけを含んでいて η_t とは相関がないから $E[Z_{t-k} \cdot \eta_t] = 0$, $k > 0$ となる。(3.1.3)を過程の分散 $r_0 = \sigma_z^2$ で割れば

$$\rho_k = a_1 \rho_{k-1} + a_2 \rho_{k-2} + \dots\dots a_p \rho_{k-p}, \quad k > 0 \quad \dots\dots\dots (3.1.4)$$

$$\pi(B) \rho_k = 0$$

B は t ではなく k に作用すると考える。

$$\sigma_{\xi}^2 = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots a_p r_p + \sigma_{\eta}^2 \quad \dots \quad (3.16)$$
$$\sigma_{\eta}^2 / \sigma_s^2 = 1 - a_1 \rho_1 - a_2 \rho_2 - \dots - a_p \rho_p \quad \dots \quad (3.17)$$

(3.1.7) の左辺は過程に含まれるガウス雑音 (純偶発性成分) の分散と過程そのものの分散との比で,

を解析効果 (efficiency of analysis) と呼んでいる。これが 1 に近い程ある時刻の実現値は過去の実現値に対する依存性が高く予測の精度が高いことをあらわしている。

と、

(3.1.10) を Yule-Walker の式といい、 ρ_k に推定値を用いて回帰係数を求めるのに利用される。

$$\text{と書くとき} \quad A = P_\rho^{-1} \rho_\rho \dots\dots\dots (3.11)$$

スペクトル $AR(p)$ 過程においては,

であるからこれらの関係を (2.2.15) に代入すれば

A-6-9

3.2 1 次の自己回帰過程 - Markov 過程

$$\begin{aligned} Z_t &= a_1 Z_{t-1} + \eta_t \\ &= \eta_t + a_1 \eta_{t-1} + a_1^2 \eta_{t-2} + \cdots \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

(3.2.1) であらわされる過程を 1 次の自己回帰過程又は Markov 過程という。定常性の条件は $-1 < a_1 < 1$ である。

自己相関関数 (3.1.4) において $a_k = 0$, $k \geq 2$ であるから、

$$\rho_k = a_1 \rho_{k-1}, \quad k > 0 \quad (3.2.2)$$

この漸化式において $\rho_0 = 1$ であるから

$$\rho_k = a_1^k, \quad k \geq 0 \quad (3.2.3)$$

前に述べた様に a_1 の制限は $|a_1| < 1$ であるから、 a_1 は正負どちらの値でもとり得る。 $a_1 > 0$ のときは ρ_k は k とともに指数的に減少する。これに対し $a_1 < 0$ のときは k の奇偶によって ρ_k は符号を変えながら振動的に減衰する。

分散 (3.1.8) によれば

$$\sigma_s^2 = \frac{\sigma_\eta^2}{1 - a_1 \rho_1} = \frac{\sigma_\eta^2}{1 - a_1^2} \quad (3.2.4)$$

スペクトル (3.1.12) によれば

$$p(f) = \frac{2\sigma_\eta^2}{|1 - a_1 e^{-i2\pi f}|^2} = \frac{2\sigma_\eta^2}{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos 2\pi f}, \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \quad (3.2.5)$$

(3.2.4) によれば $\sigma_\eta^2 = (1 - a_1^2) \sigma_s^2$ であるから

$$p(f) = \frac{2(1 - a_1^2) \sigma_s^2}{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos 2\pi f}, \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \quad (3.2.6)$$

水文学や河川工学で扱う問題では $a_1 > 0$ がほとんどである。図 3.1 にコレログラムとスペクトルの

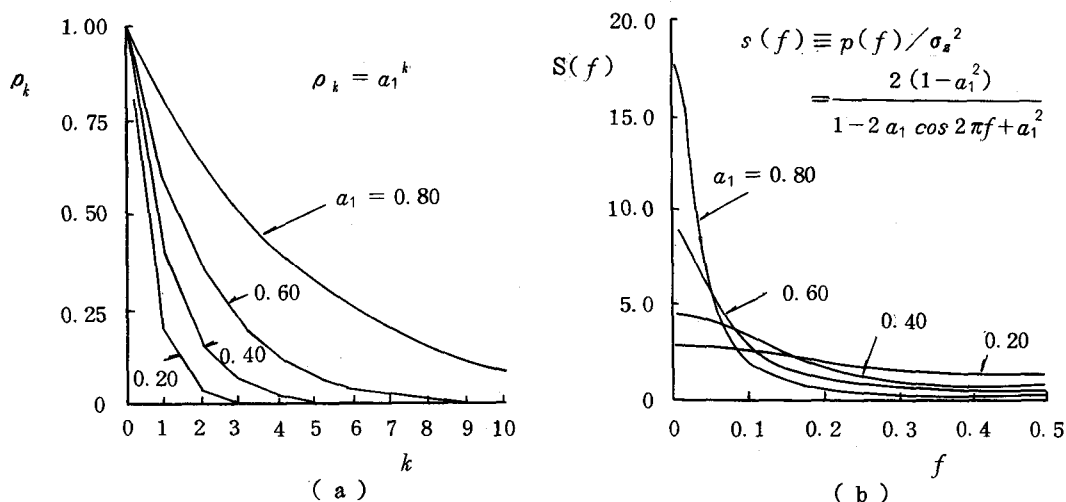


図 3.1 Markov 過程のコレログラム(a)とスペクトル(b)

例を示した。 a_1 が増すとともに変動の強度が低周波部分に集中して来る性質がみられる。

3.3 2次の自己回帰過程

$$Z_t = a_1 Z_{t-1} + a_2 Z_{t-2} + \eta_t \quad \dots\dots\dots (3.3.1)$$

を2次の自己回帰過程といい、 $AR(2)$ 過程と略記する。定常性の条件は

$$\pi(B) = 1 - a_1 B - a_2 B^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3.2)$$

の根が単位円の外部にある条件であり、

$$\left. \begin{array}{l} a_2 + a_1 < 1 \\ a_2 - a_1 < 1 \\ -1 < a_2 < 1 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.3.3)$$

で与えられる。

自己相関関数 (3.1.4)によれば自己相関関数の漸化式は、

$$\rho_k = a_1 \rho_{k-1} + a_2 \rho_{k-2}, \quad k > 0 \quad \dots\dots\dots (3.3.4)$$

$k=1$ とおくと、 $\rho_0 = 1$ であるから、

$$\rho_1 = \frac{a_1}{1 - a_2} \quad \dots\dots\dots (3.3.5)$$

$\rho_0 = 1$ および ρ_1 を出発値とすれば(3.3.4)により ρ_k を回帰係数 a_1 および a_2 であらわす事ができる。

(3.3.4)は2次の定差式でその解は一般に、

$$\rho_k = \frac{G_1(1 - G_2^2)G_1^k - G_2(1 - G_1^2)G_2^k}{(G_1 - G_2)(1 + G_1 G_2)} \quad \dots\dots\dots (3.3.6)$$

ここに G^{-1} および G_2^{-1} は過程の特性方程式(characteristic equation)(3.3.2)の根である。図3.2に(3.3.3)によって与えられる係数値 a_1 および a_2 の領域と、その中における ρ_k の挙動を示す。

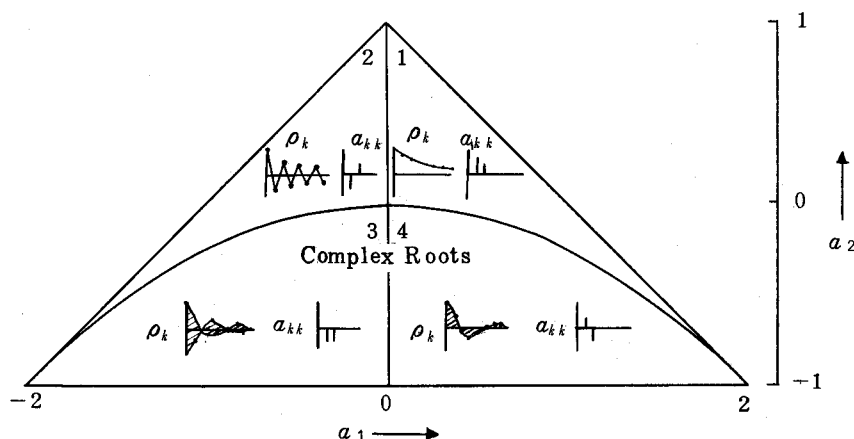


図 3.2 $AR(2)$ 過程の自己相関関数 ρ_k と
部分自己相関関数 a_{kk} (Box & Jenkins)

図にみられる様に ρ_k の特性は4領域に区分される。 $a_1^2 + 4a_2 \geq 0$ のときは G_1, G_2 は実根である。根が正の実根のときは、図の領域1であるが、 ρ_k は k とともに単調に減衰する。根が負の実根のときは、

図の領域2であるが、 ρ_k は符号を変えながら減衰する。 $a_1^2 + 4a_2 < 0$ のときは G_1, G_2 は複素根で過程 Z_t は擬周期的な挙動を示す。図 3.3 に 1 例を示す。2つの複素根を $G_1 = de^{i2\pi f_0}, G_2 = de^{-i2\pi f_0}$

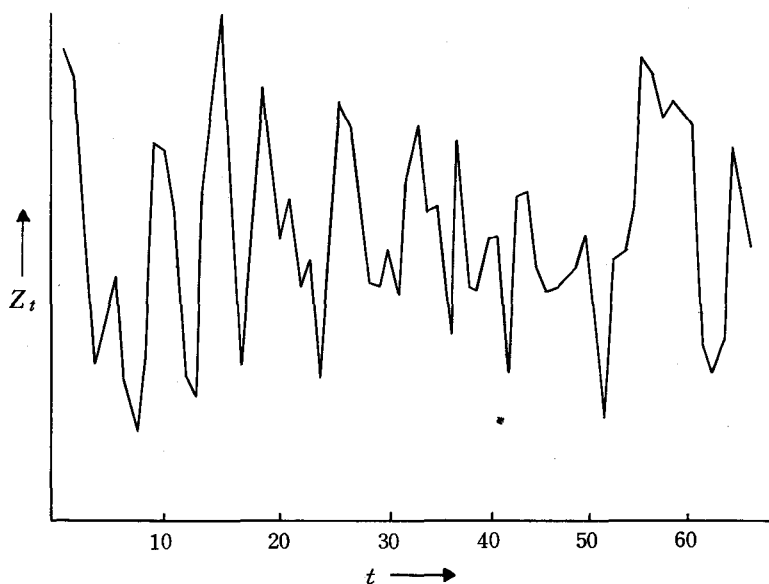


図 3.3 $AR(2)$ 過程の例 (Box & Jenkins)

$$Z_t = 0.75Z_{t-1} - 0.50Z_{t-2} + \eta_t$$

と書くと (3.3.6) により、

$$\rho_k = \frac{\{\operatorname{sgn}(a_1)\}^k d^k \sin(2\pi f_0 k + F)}{\sin F} \quad (3.3.7)$$

ただし $\operatorname{sgn}(a_1)$ は係数 a_1 の符号をあらわす。(3.3.7) は減衰正弦波で、 d^k が減衰係数、 f_0 が基本周波数、 F が位相角である。これらは回帰係数と次の関係をもつ：

$$d = \pm\sqrt{-a_2}, \text{ 符号は } a_1 \text{ の符号と同じ,} \quad (3.3.8)$$

$$\cos 2\pi f_0 = \frac{|a_1|}{2\sqrt{-a_2}} \quad (3.3.9)$$

$$\tan F = \frac{1+d^2}{1-d^2} \tan 2\pi f_0 \quad (3.3.10)$$

領域4では位相角 F は 90° より小さく、 ρ_k は図 3.2 にみられるように減衰正弦波であるが、 ρ_k の初めの数ラグでは符号は正である。これに対し、領域3では位相角 F が 90° と 180° の間にあり、ラグ0とラグ1では常に符号が変化する。

回帰係数 a_1, a_2 に関する定常性の条件は (3.3.3) および図 3.2 に示したが、相関係数に関する定常性の条件もしばしば必要になる。これは既に (2.1.10) に示したが再記すれば、

$$-1 < \rho_1 < 1, \quad -1 < \rho_2 < 1, \quad \rho_1^2 < \frac{1}{2}(\rho_2 + 1)$$

この領域を図 3.4 に示す。

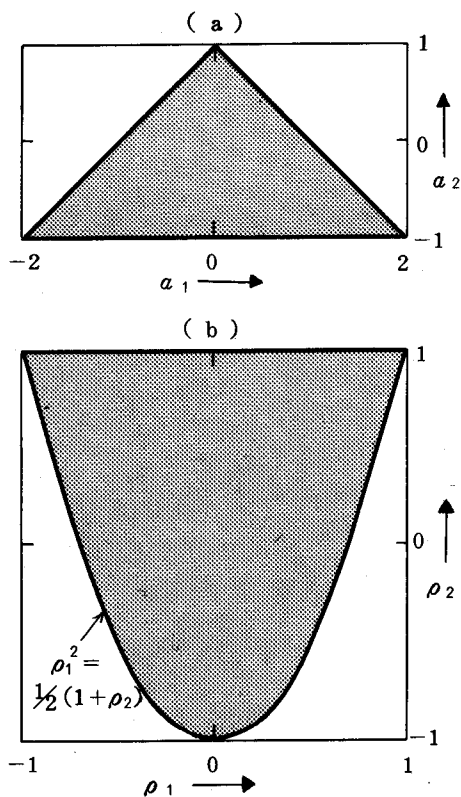


図 3.4 $AR(2)$ 過程の定常条件
(Box & Jenkins)
(a) 係数 a_1 および a_2
(b) 相関係数 ρ_1 および ρ_2

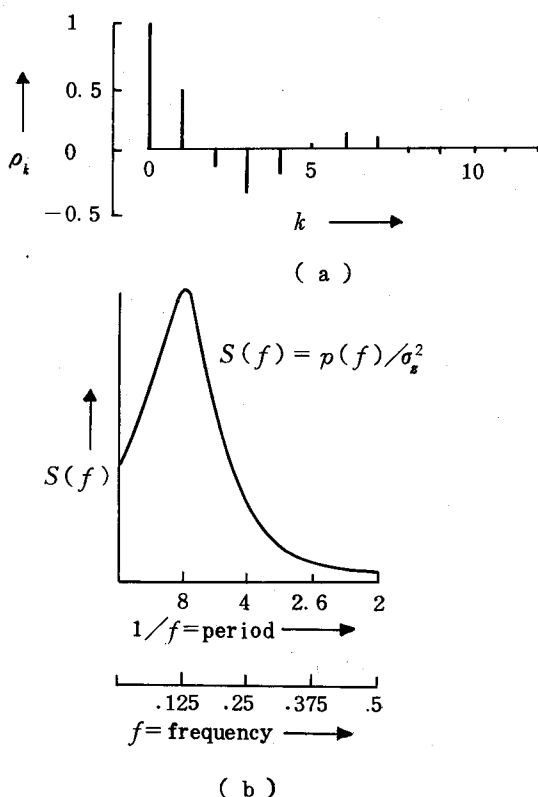


図 3.5 $AR(2)$ 過程: $Z_t = 0.75Z_{t-1} - 0.50Z_{t-2} + \eta_t$
に対する (a)コレログラム, (b)スペクトル
(Box & Jenkins)

分散 (3.1.8) および (3.3.4) によれば

$$\begin{aligned} \sigma_s^2 &= \frac{\sigma_\eta^2}{1 - a_1 \rho_1 - a_2 \rho_2} \\ &= \left(\frac{1 - a_2}{1 + a_2} \right) \frac{\sigma_\eta^2}{\{ (1 - a_2)^2 - a_1^2 \}} \quad \dots\dots\dots (3.3.11) \end{aligned}$$

解析効果は、したがって

$$1 - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_s^2} = 1 - \left(\frac{1 + a_2}{1 - a_2} \right) \{ (1 + a_2)^2 - a_1^2 \} \quad \dots\dots\dots (3.3.12)$$

スペクトル (3.1.12) によれば

$$\begin{aligned} p(f) &= \frac{2\sigma_\eta^2}{|1 - a_1 e^{-i2\pi f} - a_2 e^{-i4\pi f}|^2} \\ &= \frac{2\sigma_\eta^2}{\{1 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1(1 - a_2)\cos 2\pi f - 2a_2\cos 4\pi f\}}, 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \quad \dots (3.3.13) \end{aligned}$$

特性方程式の根が複素数であれば、すなわち $a_1^2 + 4a_2 < 0$ のときはスペクトルも擬周期的な性質を示し (3.3.9) に与えた基本周波数の近傍に過程分散の大部分が集中する。図 3.5 は図 3.3 に示した過程のコレログラムおよびスペクトルである。

3.4 過程の次数の決定 — 部分自己相関関数

ある過程の実現値 (標本) 時系列が与えられそれを解析しようとするれば、過程の次数を知らなければならぬ。

a_{kj} を k 次の過程における j 番目の回帰係数とする。 a_{kk} は、したがって、最後の係数である。(3.1.4) により、

$$\rho_j = a_{k1} \rho_{j-1} + \dots + a_{k(k-1)} \rho_{j-k+1} + a_{kk} \rho_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3.4.1)$$

(3.4.1) で $k = 1, 2, \dots$ と置いて a_{kk} を求めると (3.1.11) により、

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \rho_1 \\ a_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \\ a_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.4.2)$$

(3.4.2) の分母、分子は同じ要素で構成され、分子は分母の最後の列を ρ_k で置き変えた行列式である。 a_{kk} はラグ k の関数と考えられるが、これを部分自己相関関数 (partial autocorrelation function) と呼ぶ。(3.4.1) で明らかな様に、考えている過程が p 次の自己回帰過程ならば $k \leq p$ に対し a_{kk} は 0 でない値をもち、 $k > p$ に対しては a_{kk} は 0 になる。この性質は標本過程の次数をきめるのに利用される。

4. 移動平均過程

(2.2.1) に移動平均過程の一般式を示した。ここでは次式で与えられる q 次の移動平均過程を考える (以下これを $MA(q)$ 過程と略記する) :

$$\begin{aligned} Z_t &= \eta_t - b_1 \eta_{t-1} - b_2 \eta_{t-2} - \dots - b_q \eta_{t-q} \\ &= (1 - b_1 B - b_2 B^2 - \dots - b_q B^q) \eta_t = \Psi(B) \eta_t \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

この過程は特性方程式

$$\Psi(B) = (1 - b_1 B - b_2 B^2 - \dots - b_q B^q) = 0 \quad (4.1.2)$$

の根が単位円の外部にあれば転換可能 (invertible) であり、また定常 (stationary) である。

4.1 自己相関関数とスペクトル

この過程の分散および自己共分散は

$$\sigma_s^2 = (1 + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_q^2) \sigma_\eta^2 \quad (4.1.3)$$

および

$$r_k = \begin{cases} (-b_k + b_1 b_{k+1} + b_2 b_{k+2} + \dots + b_{q-k} b_q) \sigma_\eta^2, & k = 1, 2, \dots, q \\ 0, & k > q \end{cases} \quad (4.1.4)$$

したがって自己相関関数は

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-b_k + b_1 b_{k+1} + b_2 b_{k+2} + \dots + b_{q-k} b_q}{1 + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_q^2}, & k = 1, 2, \dots, q \\ 0, & k > q \end{cases} \quad (4.1.5)$$

解析効果は、(2.4.3)により

$$1 - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_s^2} = \frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_q^2}{1 + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_q^2} \quad (4.1.6)$$

スペクトル (2.2.15)に(2.4.2)を代入すれば、

$$p(f) = 2\sigma_\eta^2 |1 - b_1 e^{-i2\pi f} - b_2 e^{-i4\pi f} - \dots - b_q e^{-i2\pi q f}|^2, \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \quad (4.1.7)$$

4.2 1次の移動平均過程

$$\begin{aligned} Z_t &= \eta_t - b_1 \eta_{t-1} \\ &= (1 - b_1 B) \eta_t \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

(4.2.1)であらわされる過程を1次の移動平均過程という。この過程は常に定常で b_1 の値に制限はない。しかしこの過程が転換可能なためには $-1 < b_1 < 1$ でなければならない。

自己相関関数 (2.4.3)によれば、

$$\sigma_s^2 = (1 + b_1^2) \sigma_\eta^2 \quad (4.2.2)$$

また(4.1.5.)によれば

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-b_1}{1 + b_1^2}, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

(4.2.3)により、

$$b_1^2 + \frac{b_1}{\rho_1} + 1 = 0 \quad (4.2.4)$$

(4.2.4)によれば、この2次式の2根の積は1だから、1つの根を b_1 とすれば b_1^{-1} もまた根であり、さらに転換性の条件により1つの根が $|b_1| < 1$ ならば、他の根は $|b_1^{-1}| > 1$ となり転換性を満たさない。 ρ_k に関する転換性の条件は(4.2.3)により $-0.5 < \rho_1 < 0.5$ である。

スペクトル (4.1.7)により、

$$p(f) = 2\sigma_{\eta}^2 |1 - b_1 e^{-i2\pi f} |^2 \\ = 2\sigma_{\eta}^2 (1 + b_1^2 - 2b_1 \cos 2\pi f), \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots (4.2.5)$$

b_1 が負，したがって ρ_1 が正のときは，スペクトルは低周波成分が卓越する。逆に b_1 が正で ρ_1 が負のときはスペクトルは高周波成分が卓越する。

4.3 2次の移動平均過程

$$Z_t = \eta_t - b_1 \eta_{t-1} - b_2 \eta_{t-2} \quad \dots\dots\dots (4.3.1)$$

を2次の移動平均過程といい， b_1, b_2 の値に制限なくこの過程は定常である。しかしこの過程が転換可能な条件は

$$\left. \begin{aligned} b_2 + b_1 &< 1 \\ b_2 - b_1 &< 1 \\ -1 &< b_2 < 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.3.2)$$

(4.3.2.) は $AR(2)$ 過程の定常性条件 (3.3.3) に類似の形式をもっている。

自己相関関数 (4.1.3) によればこの過程の分散は，

$$\sigma_s^2 = (1 + b_1^2 + b_2^2) \sigma_{\eta}^2 \quad \dots\dots\dots (4.3.3)$$

また (4.1.5) によれば

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \frac{-b_1(1-b_2)}{1+b_1^2+b_2^2} \\ \rho_2 &= \frac{-b_2}{1+b_1^2+b_2^2} \\ \rho_k &= 0, \quad k \geq 3 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.3.4)$$

(4.3.2) と (4.3.4) により， $MA(2)$ 過程の転換性の条件を相関係数であらわすと，

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 + \rho_1 &= -0.5 \\ \rho_2 - \rho_1 &= -0.5 \\ \rho_1^2 &= 4\rho_2(1-2\rho_2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.3.5)$$

(4.3.2) および (4.3.5) で与えられる転換可能領域を図4.1に示す。また自己相関関数および部分自己相関関数はこの過程の特性方程式

$$\Psi(B) = 1 - b_1 B - b_2 B^2 = 0$$

の根の性質によって $AR(2)$ 過程の場合と類似の挙動を示す。図4.2に4領域における ρ_k および a_{kk} の概形を示してある。

スペクトル (4.1.7) によれば

$$p(f) = 2\sigma_{\eta}^2 |1 - b_1 e^{-i2\pi f} - b_2 e^{-i4\pi f} |^2 \\ = 2\sigma_{\eta}^2 \{1 + b_1^2 + b_2^2 - 2b_1(1-b_2) \cos 2\pi f - 2b_2 \cos 4\pi f\}, \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots (4.3.6)$$

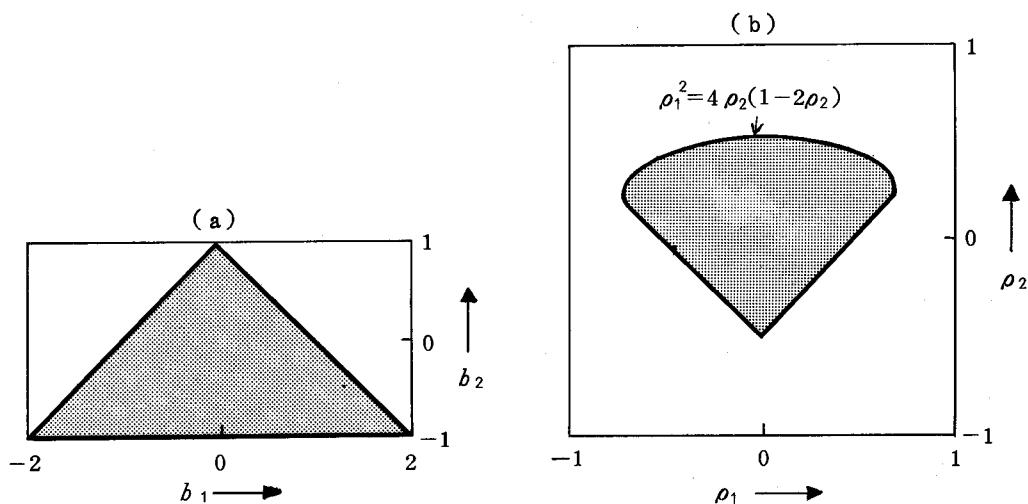


図 4.1 $MA(2)$ 過程の転換可能な条件 (Box & Jenkins)

- (a) 係数 b_1 および b_2
 (b) 相関係数 ρ_1 および ρ_2

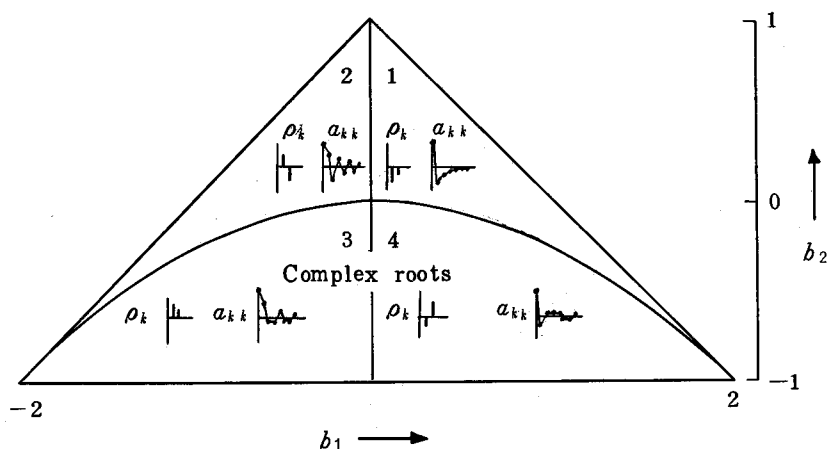


図 4.2. $MA(2)$ 過程の自己相関関数 ρ_k と
 部分自己相関関数 a_{kk} (Box & Jenkins)

(4.3.6) と $AR(2)$ 過程のスペクトル (3.3.13) とを比較すると両者に明白な関係がある事に気が付く。すなわち $2\sigma_\eta^2$ を別にすると、(4.3.6) は (3.3.13) の逆数で a と b とを置換した形であることがわかる。

5. 非定常線形過程

前章では定常線形過程の性質と解析方法を述べた。本章では前述の議論を拡張して非定常線形過程を考える。

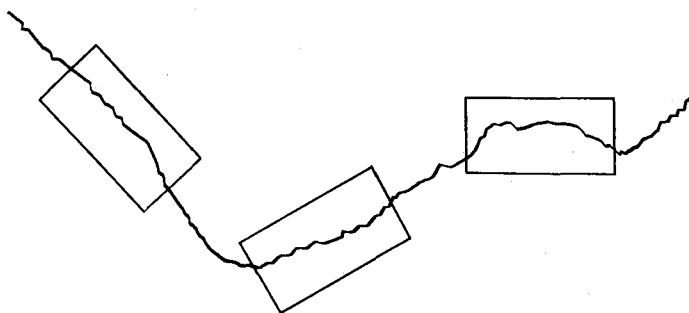
5.1 均質な非定常性

図 5.1 にわれわれがしばしば取り扱う非定常過程の例を示す。図 5.1. a の



(a) Level の変化により非定常性を示す時系列

$$\text{モデル } \pi(B) \nabla Z_t = \Psi(B) \eta_t.$$



(b) Level と Slope の変化により非定常性を示す時系列

$$\text{モデル } \pi(B) \nabla^2 Z_t = \Psi(B) \eta_t$$

図 5.1 2 種類の均質な非定常性の例 (Box & Jenkins)

過程は平均値が一定でないから定常過程ではない。しかしこの点を除くと過程の統計的な性質は観測の時刻によらず至る処一致している。したがって観測値 Z_t の差分 $\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$ をとれば、 ∇Z_t は定常過程にしたがうと考える事ができる。図 5.1. b は前例とは別の非定常過程で平均値と勾配が変化しているが、これらの点を除くと統計的性質は一致している。この例では $\nabla^2 Z_t$ をとると、 $\nabla^2 Z_t$ は定常過程にしたがうと考える事ができる。

ここで ∇Z_t あるいは $\nabla^2 Z_t$ など一般に $\nabla^d Z_t$ ($d \geq 1$ の整数) であらわされる演算の意味を考えよう。

$$w_t = \nabla^d Z_t \quad \dots\dots\dots (5.1.1)$$

とおく。演算子の定義 (2.2.8) により $\nabla^{-1} = S$ であるから、例えば $d = 1$ のときは (5.1.1) を書き変えて、

$$Z_t = \nabla^{-1} w_t = S w_t = \sum_{h=-\infty}^t w_h \quad \dots\dots\dots (5.1.2)$$

同様に $d = 2$ のときは、

$$Z_t = \nabla^{-2} w_t = S \cdot S w_t = S w_t + S w_{t-1} + S w_{t-2} + \dots$$

$$= \sum_{i=-\infty}^t \sum_{h=-\infty}^i w_h \quad (5.1.3)$$

一般に (5.1.1) であらわされる Z_t は、過程 w_t を d 回加え合わせた結果に等しいことがわかる。

5.2 自己回帰 — 積分 — 移動平均過程 (ARIMA過程)

図 5.1. a は、 Z_t が定常過程になるというモデルであらわすことができる。これを定式化して、

$$\pi(B) \nabla Z_t = \Psi_0 + \Psi(B) \eta_t \quad (5.2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } \pi(B) &= 1 - a_1 B - a_2 B^2 - a_3 B^3 - \dots - a_p B^p \\ \Psi(B) &= 1 - b_1 B - b_2 B^2 - b_3 B^3 - \dots - b_q B^q \\ \Psi_0 &= \text{定数} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.2)$$

(5.2.1) は次のようにあらわすこともできる：

$$\left. \begin{aligned} \pi(B) w_t &= \Psi_0 + \Psi(B) \eta_t \\ w_t &= \nabla Z_t \end{aligned} \right\} \quad (5.2.3)$$

(5.2.3) の第1式の期待値をとると、

$$E[w_t] = E[\nabla Z_t] = \Psi_0 / (1 - a_1 - a_2 - \dots - a_p) \quad (5.2.4)$$

若し $\Psi_0 \neq 0$ のある定数であれば、 $E[w_t]$ すなわち $E[Z_t - Z_{t-1}]$ が0でないある一定値を持つから、 Ψ_0 は過程の線形傾向 (linear trend) をあらわすことがわかる。この場合は $w'_t = w_t - \Psi_0$ と置けば w'_t は平均値0の定常過程にしたがうことになる。したがって (5.2.1) で $\Psi_0 = 0$ としても一般性は損なわれないから、以下の解析では Ψ_0 を省略して議論を進めている。

(5.2.1) で与えられる ∇Z_t は、例えば (3.3.2) に示めされているように、自己回帰演算子 $\pi(B)$ = 0 の根が単位円の外部にあれば定常である。またさらに、(4.1.2) に示めされているように、移動平均演算子 $\Psi(B)$ = 0 の根が単位円の外部にあれば転換可能である。それぞれの条件を係数 a および b であらわすことも前に述べた。さらに (5.2.3) によれば、(5.2.1) で与えられる Z_t は (5.1.2) に示めされているように定常過程 w_t の和 (積分) であらわされるからこれを 自己回帰 — 積分 — 移動平均過程 (autoregressive integrated moving average processes) と呼ぶ。図 5.1. b の例は、

$$\pi(B) \nabla^2 Z_t = \Psi(B) \eta_t \quad (5.2.5)$$

であらわされる。一般に、

$$\pi(B) \nabla^d Z_t = \Psi(B) \eta_t \quad (5.2.6)$$

を $ARIMA(p, d, q)$ 過程と呼ぶ。 p は自己回帰演算子 $\pi(B)$ の次数、 d は差分演算子 ∇^d の次数、 q は移動平均演算子 $\Psi(B)$ の次数である。実際にあらわれる過程では p 、 d および q は、過程が周期成分を持つ場合以外は2を超える事は殆んどない。

5.3 ARIMA過程の同定

ARIMAモデルの次数を決定するには Z_t 、 ∇Z_t 、 $\nabla^2 Z_t$ 、…… の自己相関関数をしらべる。最初に $\nabla^d Z_t$ の相関関数の収束の速さに注目し、 d の値を決定する。次に p 、 q を決定するが、それにはいくつかのモデルについて相関関数の特長をしらべておくのが便利である。

基本的な $ARIMA(p, d, q)$ モデル

1) $ARIMA(1, d, 0)$ モデル

$$(1 - a_1 B) \nabla^d Z_t = \eta_t \quad (5.2.7)$$

2) $ARIMA(0, d, 1)$ モデル

$$\nabla^d Z_t = (1 - B) \eta_t \quad \dots\dots\dots (5.2.8)$$

3) $ARIMA(2, d, 0)$ モデル

$$(1 - a_1 B - a_2 B^2) \nabla^d Z_t = \eta_t \quad \dots\dots\dots (5.2.9)$$

4) $ARIMA(0, d, 2)$ モデル

$$\nabla^d Z_t = (1 - b_1 B - b_2 B^2) \eta_t \quad \dots\dots\dots (5.2.10)$$

5) $ARIMA(1, d, 1)$ モデル

$$(1 - a_1 B) \nabla^d Z_t = (1 - b_1 B) \eta_t \quad \dots\dots\dots (5.2.11)$$

それぞれのモデルに対する諸特性を表 5.1 に示す。表中の相関関数と係数との関係に標本相関係数を代入すればモデルのパラメーター a および b を求めることができる。

表 5.1 $ARIMA(p, d, q)$ 過程のモデル同定 (Box & Jenkins)

Order	(1, d, 0)	(0, d, 1)
Behavior of ρ_k	decays exponentially	only ρ_1 nonzero
Behavior of a_{kk}	only a_{11} nonzero	exponential dominates decay
Preliminary estimates from	$a_1 = \rho_1$	$\rho_1 = \frac{-b_1}{1 + b_1^2}$
Admissible region	$-1 < a_1 < 1$	$-1 < b_1 < 1$
Order	(2, d, 0)	(0, d, 2)
Behavior of ρ_k	mixture of exponentials or damped sine wave	only ρ_1 and ρ_2 nonzero
Behavior of a_{kk}	only a_{11} and a_{22} nonzero	dominated by mixture of exponentials or damped sine wave
Preliminary estimates from	$a_1 = \frac{\rho_1(1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2}$ $a_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$	$\rho_1 = \frac{-b_1(1 - b_2)}{1 + b_1^2 + b_2^2}$ $\rho_2 = \frac{-b_2}{1 + b_1^2 + b_2^2}$
Admissible region	$\begin{cases} -1 < a_2 < 1 \\ a_2 + a_1 < 1 \\ a_2 - a_1 < 1 \end{cases}$	$\begin{cases} -1 < b_2 < 1 \\ b_2 + b_1 < 1 \\ b_2 - b_1 < 1 \end{cases}$

Order	(1, d, 1)	
Behavior of ρ_k	decays exponentially from first lag	
Behavior of a_{kk}	dominated by exponential decay from first lag	
Preliminary estimates from	$\rho_1 = \frac{(1 - b_1 a_1)(a_1 - b_1)}{1 + b_1^2 - 2 a_1 b_1}$	$\rho_2 = \rho_1 a_1$
Admissible region	$-1 < a_1 < 1$	$-1 < b_1 < 1$

適用例 図 5.2 はある化学装置における温度の記録であるが、前述の図 5.1 の例とくらべると $d = 2$ の非定常過程が適合するように見える。これと似た時系列は水文量例えば年降水量の長期的変動の調査などにおいて筆者もしばしば出合っている。

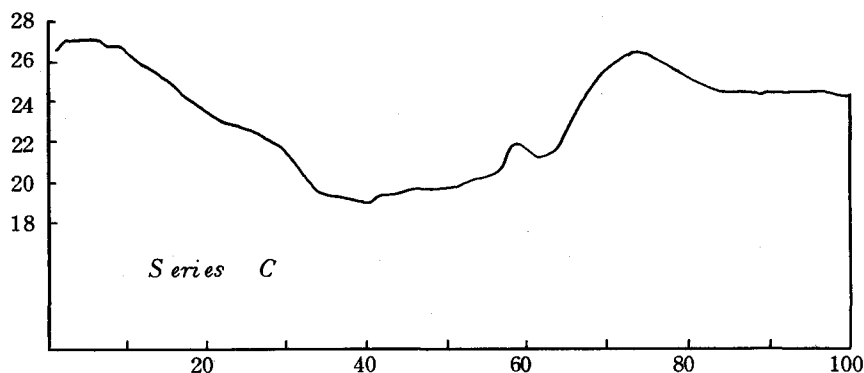


図 5.2 ある化学プロセスにおける毎分の温度の読み(Box & Jenkins)

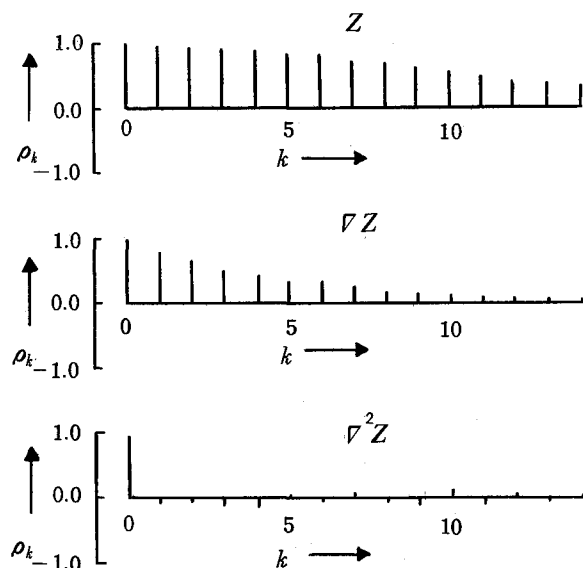


図 5.3 Series C の種々の差分に対する
コレログラム (Box & Jenkins)

この記録の自己相関関数を計算し図 5.3 に示したコログラムを得た。図によると、少くも $d \geq 1$ にとるべきことがわかる。比較計算の結果図 5.2 の過程は

$$(1 - 0.8B) \nabla Z_t = \eta_t \quad \dots\dots\dots (5.2.12)$$

であらわされ $ARIMA(1, 1, 0)$ モデルが適用できた。 $\nabla = 1 - B$ であるから (5.2.12) は (5.2.13) と書くこともできる。

$$(1 - 1.8B - 0.8B^2) Z_t = \eta_t \quad \dots\dots\dots (5.2.13)$$

(5.2.13) は形式的には $AR(2)$ 過程になっている。しかし (3.3.3) に与えた定常性の条件が満たされていないから、この過程は定常ではない事に注意すべきである。

6. 時系列の予測

時系列が $ARIMA(p, d, q)$ モデル

$$\pi(B) \nabla^d Z_t = \Psi(B) \eta_t \quad \dots\dots\dots (5.2.6)$$

であらわされたとして、時刻 t の時点で Z_{t+l} , $l \geq 1$ を予測する事を考える。これを時刻 t における lead time l の予測という。(5.2.6) は非定常過程の一般式であるが、いうまでもなく定常過程も特殊な場合として含んでいる。時系列解析の多くの例において、特に水文量の時系列においては、系列が必ずしも定常過程であるかどうか判然としていない。したがって定常過程という制限を設けずに予測方法を考えることにする。

6.1 $ARIMA$ 過程の陽形式表示

差分形式表示 (5.2.6) の左辺の演算子を $\pi(B) \nabla^d = \varphi(B)$ と書くと、

$$\varphi(B) = \pi(B) (1 - B)^d = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots\dots - \varphi_{p+d} B^{p+d} \quad \dots\dots\dots (6.1.1)$$

であるから (5.2.6) から次式が得られる：

$$\begin{aligned} Z_t = & \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-2} + \dots\dots + \varphi_{p+d} Z_{t-p-d} - b_1 \eta_{t-1} - b_2 \eta_{t-2} - \dots\dots \\ & - b_q \eta_{t-q} + \eta_t \quad \dots\dots\dots (6.1.2) \end{aligned}$$

(6.1.2) は Z_t を Z の過去の値および η の現在および過去の値であらわす式で予測計算に適する形である。

不規則入力表示 (5.2.6) は不規則変動 η の荷重和系列としてあらわす事ができる。これは Z_t を不規則変動 η がある系に加えられたときの出力と解釈することになる。すなわち

$$Z_t = \eta_t + \xi_1 \eta_{t-1} + \xi_2 \eta_{t-2} + \dots\dots = \eta_t + \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \eta_{t-j} = \xi(B) \eta_t \quad \dots\dots\dots (6.1.3)$$

(6.1.3) の両辺に $\varphi(B)$ を乗ずると、

$$\varphi(B) Z_t = \varphi(B) \xi(B) \eta_t$$

(5.2.6) によれば $\varphi(B) Z_t = \Psi(B) \eta_t$ であるから、

$$\varphi(B) \xi(B) = \Psi(B) \quad \dots\dots\dots (6.1.4)$$

が成立する。この関係によって荷重係数 ξ_j を求めることができる。

例として $ARIMA(1, 1, 1)$ 過程

$$(1 - a_1 B) \nabla Z_t = (1 - b_1 B) \eta_t \quad \dots\dots\dots (6.1.5)$$

が考える。この場合は

$$\varphi(B) = (1 - a_1 B)(1 - B) = 1 - (1 + a_1)B + a_1 B^2$$

$$\Psi(B) = 1 - b_1 B$$

であるから、(6.1.4)に代入すれば、

$$\{1 - (1 + a_1)B + a_1 B^2\} (1 + \xi_1 B + \xi_2 B^2 + \dots) = 1 - b_1 B$$

この式から

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= 1 \\ \xi_1 &= A_0 + A_1 a_1 \\ \xi_2 &= A_0 + A_1 a_1^2 \\ &\vdots \\ \xi_j &= A_0 + A_1 a_1^j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.1.6)$$

ただし $A_0 = \frac{1-b_1}{1-a_1}$, $A_1 = \frac{b_1-a_1}{1-a_1}$, $\xi_0 = A_0 + A_1 = 1$

したがって

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} (A_0 + A_1 a_1^j) \eta_{t-j} \dots\dots\dots (6.1.7)$$

6.2 最小2乗平均誤差予測

時刻 t において lead time ℓ の予測値を $\hat{Z}_t(\ell)$ と書き、これが(6.1.3)の不規則入力表示であらわされると仮定する。すなわち、

$$\hat{Z}_t(\ell) = \xi_\ell^* \eta_t + \xi_{\ell+1}^* \eta_{t-1} + \xi_{\ell+2}^* \eta_{t-2} + \dots\dots\dots (6.2.1)$$

ただし ξ^* は最小誤差をもつ予測式の荷重係数である。

一方(6.1.3)により

$$Z_{t+\ell} = \sum_{j=-\infty}^{t+\ell} \xi_{t+\ell-j} \cdot \eta_j = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \eta_{t+\ell-j} \dots\dots\dots (6.2.2)$$

したがって予測値の2乗平均誤差は、

$$E[Z_{t+\ell} - \hat{Z}_t(\ell)] = (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{\ell-1}^2) \sigma_\eta^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \{ \xi_{\ell+j} - \xi_{\ell+j}^* \}^2 \sigma_\eta^2 \dots\dots\dots (6.2.3)$$

したがって、

$$\xi_{\ell+j}^* = \xi_{\ell+j} \dots\dots\dots (6.2.4)$$

のとき予測値の2乗平均誤差は最小になる。また(6.2.2)によれば、

$$\begin{aligned} Z_{t+\ell} &= (\eta_{t+\ell} + \xi_1 \eta_{t+\ell-1} + \dots + \xi_{\ell-1} \eta_{t+1}) + (\xi_\ell \eta_t + \xi_{\ell+1} \eta_{t-1} + \dots) \\ &= e_t(\ell) + \hat{Z}_t(\ell) \dots\dots\dots (6.2.5) \end{aligned}$$

ここに $e_t(\ell)$ は lead time ℓ をもつ予測値 $\hat{Z}_t(\ell)$ の誤差である。

時刻 t までの Z の値すなわち $Z_t, Z_{t-1}, \dots$ がある実現値をとったときの $Z_{t+\ell}$ の条件付き期待値 $E[Z_{t+\ell} | Z_t, Z_{t-1}, \dots] = E_t[Z_{t+\ell}]$ と書くと、(6.2.2)において $E[e_t(\ell)] = 0$ であるか

ら、

$$\hat{Z}_t(l) = \xi_l \eta_t + \xi_{l+1} \eta_{t-1} + \cdots = E_t[Z_{t+l}] \quad (6.2.6)$$

すなわち最小 2 乗平均誤差の予測値 $\hat{Z}_t(l)$ は時刻 t における Z_{t+l} の条件付き期待値に等しいことがわかる。

予測の誤差は、

$$e_t(l) = \eta_{t+l} + \xi_1 \eta_{t+l-1} + \cdots + \xi_{l-1} \eta_{t+1} \quad (6.2.7)$$

また予測誤差の分散は、

$$V(l) = \text{var}[e_t(l)] = (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{l-1}^2) \sigma_\eta^2 \quad (6.2.8)$$

さらに、(6.2.5) で $e_t(1)$ を考えると、

$$e_t(1) = Z_{t+1} - \hat{Z}_t(1) = \eta_{t+1} \quad (6.2.9)$$

これまで η は不規則変動という丈で内容が不明確であったが、(6.2.9) によると η は 1 step 予測の誤差である事がわかる。

6.3 予測値の計算

予測値 $\hat{Z}_t(l)$ を計算するには (6.1.2) に与えた差分形式表示を用いるのが便利である。記述を簡単にするため条件付き期待値を次のように略記する：

$$E_t[\eta_{t+l}] = [\eta_{t+l}], \quad E_t[Z_{t+l}] = [Z_{t+l}]$$

(6.1.2) の記法にしたがって $[Z_{t+l}]$ をあらわすと、

$$\begin{aligned} [Z_{t+l}] = \hat{Z}_t(l) &= \varphi_1 [Z_{t+l-1}] + \cdots + \varphi_{p+d} [Z_{t+l-p-d}] - b_1 [\eta_{t+l-1}] \cdots \\ &\quad - b_q [\eta_{t+l-q}] + [\eta_{t+l}] \quad (6.3.1) \end{aligned}$$

ここで条件付き期待値として次の値を用いれば $\hat{Z}_t(l)$ を容易に計算することができる：

$$\left. \begin{aligned} [Z_{t-j}] &= E_t[Z_{t-j}] = Z_{t-j}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots \\ [Z_{t+j}] &= E_t[Z_{t+j}] = \hat{Z}_t(j), \quad j = 1, 2, \cdots \\ [\eta_{t-j}] &= E_t[\eta_{t-j}] = \eta_{t-j} = Z_{t-j} - \hat{Z}_{t-j-1}(1), \quad j = 0, 1, 2, \cdots \\ [\eta_{t+j}] &= E_t[\eta_{t+j}] = 0, \quad j = 1, 2, \cdots \end{aligned} \right\} \quad (6.3.2)$$

すなわち Z_{t-j} ($j = 0, 1, 2, \cdots$) は過程の実現値でそのまま用いる。 Z_{t+j} ($j = 1, 2, \cdots$) は未だ実現していない値であるから予測値 $\hat{Z}_t(j)$ を用いる。 η_{t-j} ($j = 0, 1, 2, \cdots$) は不規則変動の実現値で、(6.2.9) により $\eta_{t-j} = Z_{t-j} - \hat{Z}_{t-j-1}(1)$ として与えられる。 η_{t+j} ($j = 1, 2, \cdots$) は未だ実現していない不規則変動であるから期待値は 0 である。

予測計算の例 図 5.2 に示した時系列に対して予測を行ってみる。この時系列は (5.2.13) に示したように、

$$(1 - 1.8B + 0.8B^2)Z_t = \eta_t \quad (5.2.13)$$

であらわされる。したがって

$$Z_{t+l} = 1.8 Z_{t+l-1} - 0.8 Z_{t+l-2} + \eta_{t+l} \quad \dots\dots\dots (6.3.3)$$

時刻 t を原点として予測値を求めると、(6.3.1)により

$$\left. \begin{aligned} \hat{Z}_t(1) &= 1.8 Z_t - 0.8 Z_{t-1} \\ \hat{Z}_t(2) &= 1.8 \hat{Z}_t(1) - 0.8 Z_t \\ \hat{Z}_t(l) &= 1.8 \hat{Z}_t(l-1) - 0.8 \hat{Z}_t(l-2), \quad l = 3, 4, 5 \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6.3.4)$$

この例でみられるように予測値は $\hat{Z}_t(1), \hat{Z}_t(2) \dots\dots$ の順に漸化式を通じて容易に求められる。また時刻 $t+1$ において Z_{t+l} の実現値がわかると (6.3.3) により $\eta_{t+1} = Z_{t+1} - \hat{Z}_t(1)$ として η_{t+1} の値が求められる。

予測値の誤差は (6.2.8) で評価できるが、式中の荷重係数 ξ_j は (6.1.6) で $a_1 = 0.8, b_1 = 0$ すなわち $A_0 = 5, A_1 = -4$ において求められる。

$$\xi_0 = 1$$

$$\xi_1 = 5 + (-4)(0.8) = 1.80$$

$$\xi_2 = 5 + (-4)(0.8)^2 = 2.44$$

⋮

$$\xi_j = 5 + (-4)(0.8)^j$$

lead time l に対する ξ_l の値は次表の通りである：

lead time l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ξ_l	1.80	2.44	2.95	3.36	3.69	3.95	4.16	4.33	4.46	4.57	4.65	4.72	4.78	4.82

ξ_l の値を (6.2.8) に代入すれば $V(l) = \text{var} [e_t(l)]$ が求められるが、lead time l に対する $V(l)/\sigma_\eta^2$ の変化は次表のようになる：

lead time l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V(l)/\sigma_\eta^2$	1.00	4.24	10.19	18.96	30.24	43.86	59.46	76.79	95.52	115.41

lead time l の増加とともに誤差の分散が急速に増大する事がわかる。

σ_η^2 を求めるに (5.2.12) に戻って、 ∇Z_t が 1 次の定常自己回帰過程 (Markov 過程) にしたがる事を利用すればよい。 ∇Z_t の分散を $\text{var} [\nabla Z_t]$ と書くと (3.2.4) により、

$$\sigma_\eta^2 = \{ \text{var} [\nabla Z_t] \} (1 - a_1^2) \quad \dots\dots\dots (6.3.5)$$

この例では $\sigma_\eta^2 = 0.018$, $\sigma_\eta = 0.134$ である。

図 6.1 に図 5.2 の時系列について $t=20$ および 67 の 2 時点を原点として行った予測計算の結果を示す。

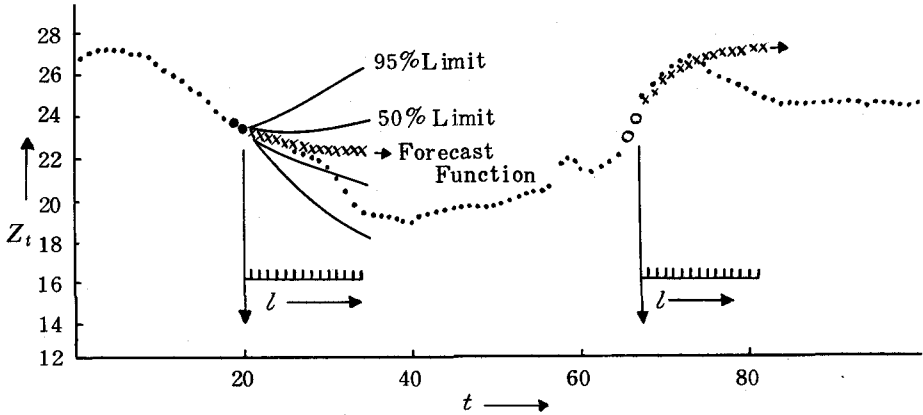


図 6.1 Series C に対する予測値とその信頼限界

η_t の分布形がわかれば予測値の信頼限界も計算できる。分布形が確定できない場合にも正規分布と仮定して信頼限界を考える例が多い。図において $t=20$ を原点にした場合について 50% 信頼限界および 95% 信頼限界を記入してあるがそれぞれ $\hat{Z}_{20}(l) \pm 0.674 (V(l))^{1/2}$ および $\hat{Z}_{20}(l) \pm 1.96 (V(l))^{1/2}$ をあらわす。

6.4 予測値の更新

時刻 t を原点として時刻 $t+l$ の時系列値を予測する場合、予測値は前述の通り時刻 t までの実現値を基にした条件付き期待値であるから時刻の経過とともに当然予測値は更新 (updating) される。

6.1 において ARIMA 過程には 2 種の表現形式がある事を述べた。不規則入力表示を用いて時刻 t を原点とする lead time $l+1$ の予測値 $\hat{Z}_t(l+1)$ および時刻 $t+1$ を原点とする lead time l の予測値 $\hat{Z}_{t+1}(l)$ をあらわすと、(6.2.6) によりそれぞれ、

$$\hat{Z}_{t+1}(l) = \xi_l \eta_{t+1} + \xi_{l+1} \eta_t + \xi_{l+2} \eta_{t-1} + \dots$$

$$\hat{Z}_t(l+1) = \xi_{l+1} \eta_t + \xi_{l+2} \eta_{t-1} + \dots$$

上式から下式を引けば、

$$\hat{Z}_{t+1}(l) = \hat{Z}_t(l+1) + \xi_l \eta_{t+1} \quad (6.4.1)$$

時刻 $t+1$ の実現値がわかると $\eta_{t+1} = Z_{t+1} - \hat{Z}_t(1)$ として η_{t+1} が確定するから、(6.4.1) によって更新された予測値が得られる。ただし (6.4.1) における予測値は同一時刻 $t+l+1$ に対するもので時刻が 1 step 前進した値でない事に注意すべきである。時刻を 1 step 進めるには、前に述べた差分形式の予測式で計算しなければならない。

参 考 文 献

非常に数が多いので、主として土木技術者向けに書かれた解説書と専門書として好適と思われる数冊

を挙げる。

1. 講座, 解説等

- 1) 土木技術者のための新数学講座, 1～6. 土木学会誌, 1969. 10～1970. 3. 吉川和広, 日野幹雄, 伊藤学, 伯野元彦.
- 2) 岸力: 水文量の時系列としての特性とその解析方法, 土木学会北海道支部講習会, 1967-3.
- 3) 山岡勲: 水文学における確率過程, 土木学会水工学夏期講習会, 1970-8.
- 4) 神田徹: 数値解析の一般的手法について, 土木学会関西支部47年度講習会, 1972-6.

2. 単行本

- 1) V.Yevjevich: Stochastic processes in hydrology, Water Resources Publications, 1972.
- 2) M.B.Fiering: Streamflow synthesis, Harvard University Press, 1967.
- 3) M.B.Fiering and B.B.Jackson: Synthetic streamflows, Water Resources Monograph 1, A.G.U., 1971.
- 4) 小河原正己: 時系列理論とその応用, 日本応用力学会編「応用統計学」第7章, 金原出版, 1966.
- 5) G.E.P.Box and G.M.Jenkins: Time series analysis - forecasting and control, Holden-Day, 1970.