

水文統計の適用例

—— 多地点降水量の解析と発生例 ——

山 岡 勲

緒 言

「土木学会水理委員会確率統計水文学研究小委員会」の水文統計解析に関する分科会（主査：室田教授）は、水文学における統計解析手法を内外の最新の諸文献に基づいて、確率論から 1) 1 変数（確率）分布理論、2) 2 変数分布理論、3) 多変数分布理論、4) 多 - 1 変数相互変換、に関するものに分類して統一した。

これらのうち、本稿では著者らが担当した多変量解析（Multivariate Analysis）の手法が有効かつ適切に用いられる多地点（Multisites）における水文量に関する解析と発生（Synthesis）について解説し、北海道地方の多地点降水時系列資料による適用例を述べたいと思う。

確率統計的手法による水文学は、計画水文学（Operational Hydrology）として最近急速な進展を示し、多彩な将来への展望が開けた。この進展は現在国際的にも要望の強い水資源問題に関して、長期流出系の入力資料として、一層客観性のある基礎的資料と、一層信頼性のある水文量の将来予測の提供に寄与できるものと考ええる。

また、気象的、地形的因子による降水量の地域的変動が明白であると考えられる大抵の河川の広大な流域では、できるだけ多地点に水文量観測所が設置されることが妥当であるわけで、多変量解析モデルによる降水量の解析、模擬発生はその広域特性を考慮に入れた水文統計例としてのはっきりした特色と目的をもつものと評価される。

多地点における水文諸量の模擬発生モデルとして注目されるのは、Fiering（1964）によって創められた多変量解析理論の導入と Matalas（1967）によって提案された「多重マルコフモデル」である。「多重マルコフモデル」はその後広く用いられているが本来流量時系列の発生に適合すべきもので、季節変動を除いた降水量時系列の構造のように、大抵の場合、純ランダム変動過程とみなせるものに対してはこのモデルを使用することが妥当とは考えられない。

ここに、降水量時系列の模擬発生モデルとして筆者が用いる 2 つの方法は、星（1972）が提案してその実用性を検証してきたもので、すでに十分実用できるようになっているものである。そのうち Model I は、長期間にわたって整備された観測資料をもっている基幹観測所から近傍の衛星観測所における降水量時系列を同時に模擬発生させる「線型重回帰モデル」である（3. に適用例を示す）。この手法は従来の 2 変量重回帰線モデルではできなかった衛星観測所間相互の相関構造の再現ができる特色をもっている。次に Model II は、基幹観測所、衛星観測所の区別なしに流域内の対象全観測所の降水量時系列を同時に模擬発生させる「主成分分析モデル」である（4. に適用例を示す）。従来の計画水文学の分野では重回帰モデルが専用されていたので、多地点での水文量特性が著しく異なると考えられる場合でもその相異性の定量化はできなかった。しかしながら、このモデルを用いると、全観測所で得られる標本値の一次変換を行なう際に、もとの観測値の特性の情報が重複しないように観測地点数だけの直交成分に分解することができ、この直交変換は地点間の降水特性の相異を客観的に説明できる特色をもつ。すなわち、もし地点間の降水特性が同じであれば一つの直交成分にだけ情報が収約されるし、また異質

であれば互いに性質の異なる成分に特性の情報が分散されることになる。その結果、最終的には相関係数行列の固有値と固有ベクトルを順次計算することが解になる。これらの統計量に関する性質から観測所を性質別にグループ化したり、これらの観測所群を気象因子、地形因子と関連させることにも可能性がでてきたものである。多地点の降水量の同時模擬発生に際して、分解された成分が直交性を有するので Monte Carlo 法は容易となる。

本稿の適用例では、月降水量の地域的、季節的変動様相に関して解析を行なっている。80年間の月降水量を模擬発生させた結果、実測値統計量とシミュレーションによる統計量の間に有意な差が認められないことを示している。

さらに、流量資料だけを使用して多地点における流量時系列を同時に模擬発生させることもできるわけで、このモデルの解析と適用例については文献にゆずるが、前述のように、Matalasの一次マルコフ過程モデルは有用である（たとえば室田ら（1972））。ただ、この手法の係数行列の同定は最小自乗法原理に基づくので、この係数行列によって多地点間の関連流出特性を把握することはできない。これに対して、星ら（1973）の提案しているモデルは降水量モデルにおける如く主成分分析手法が用いられている点がユニークであり、lag-one 系列相関係数行列と lag-zero 相関係数行列に関する対称行列の固有値と固有ベクトルを算出する理論式が与えられ、観測資料でその実用性が検証されている。⁽¹⁾

1. 演算に関する基礎概念

ここでは、これからの解説のスムーズな理解を助けるために必要と思われるいくつかの理論および仮定についてあらかじめ簡単に述べておく。

1.1 正規規準変量

一般に水文諸量のひん度分布は非対称分布を示すのであるが、水文解析上正規分布の理論特性を利用できるようになんらかの方法で正規化する場合が多い。したがって、ここで扱う変量は正規変量と仮定する。また、規準化は次式によって行なわれる。

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (1.1)$$

ここで、 Z ：規準変量 X ：観測値 μ ：平均値 σ ：標準偏差

(1.1) 式は実測水文時系列から季節変動を除いて、定常時系列を得る方法として広く利用されている。したがって、時系列はすべて平均値 0、分散 1 の定常過程であるとして扱うことにする。

1.2 行列の演算

行列（マトリックス）の基本演算のうち、行列と行列の乗算の法則が重要である。2つの行列 A と B の積 AB は A の列数と B の行数が等しいときのみ定義される。 $[k \times m]$ の行列 A と $[m \times n]$ の行列 B の積を

$$A B = C \quad (1.2)$$

とすると、 C の行列は $[k \times n]$ で与えられる。これを記号的に次の関係式で表す。

$$\begin{array}{c} [k \times m] [m \times n] = [k \times n] \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \end{array}$$

この記号式はいくつかの行列を乗じて出来る行列の形を決定するのに便利である。以上の性質から、次に示されるような解析に必要な統計量を算定するための行列表示が可能となる。たとえば、 x_i がある標本値の平均値からの偏差であれば分散 ($Var(x)$) は次式で与えられる。

$$Var(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T) = E \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \right\} = E \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \quad (1 \cdot 3)$$

同様に、 x_i, y_i が共に規準化変量であればその相関係数(r_{xy})は次式で定義される。

$$r_{xy} = E(\mathbf{x}\mathbf{y}) = E \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \right\} = E \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i \right) \quad (1 \cdot 4)$$

ここで、 $E\{\cdot\}$:期待値演算子 $\mathbf{x}^T$: $\mathbf{x}$ の転置ベクトル(行列)

1.3 行列の固有値

多変量解析ではしばしば行列の固有値問題が議論される。ある解析の結果次の方程式が得られたと仮定しよう。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1 \cdot 5)$$

これを行列表示すると

$$[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}] \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1 \cdot 6)$$

ここで、 $\mathbf{1}$:単位行列 $\mathbf{0}$:零ベクトル $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$

$\lambda, \mathbf{x}$ がそれぞれ $\mathbf{A}$ の固有値、固有ベクトルといわれるものである。 n 次の行列 $\mathbf{A}$ は一般に n 個の固有値をもつ。また、工学における応用例では $\mathbf{A}$ が実対称行列である場合が多い。そこで、実対称行列の固有値と固有ベクトルに関するいくつかの重要な性質について述べてみる。

性質 1 実対称行列 $\mathbf{A}$ の2つの相異なる固有値 λ_i, λ_j に対する固有ベクトル $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ は直交する。すなわち、

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_i = 0 \quad (1 \cdot 7)$$

性質 2 実対称行列 $\mathbf{A}$ の固有値 λ_i はすべて実数、正值、しかも相異なるものである。

性質 3 固有値の和は $\mathbf{A}$ の対角要素の和に等しい。すなわち、

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr.}(\mathbf{A}) \quad (1 \cdot 8)$$

n 次の実対称行列 $\mathbf{A}$ が固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とそれに対応する一次独立な n 個の固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ を持つとき、(1・6)式は次式のように変形される。

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{D} \quad (1 \cdot 9)$$

ここで,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \ddots \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (1 \cdot 10)$$

$$X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \quad (1 \cdot 11)$$

$$x_i = [x_{1i} \ x_{2i} \ \dots \ x_{ni}]^T \quad (1 \cdot 12)$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ が一次独立であるから X には逆行列が存在する。(1・9) 式の左から X^{-1} を乗ずると

$$X^{-1}AX = D \quad (1 \cdot 13)$$

$A^T = A$, $D^T = D$ であることに注意して (1・13) 式の両辺の転置をとると

$$X^T A (X^{-1})^T = D \quad (1 \cdot 14)$$

(1・13) 式と (1・14) 式から次式が成立することがわかる。

$$X^{-1} = X^T \text{ あるいは } XX^T = 1 \quad (1 \cdot 15)$$

(1・15) 式を満足する行列が直交行列である。(1・15) 式の直交行列の性質から, (1・9) 式は次のように変形される。

$$X^T AX = D \quad (1 \cdot 16)$$

あるいは

$$A = XDX^T \quad (1 \cdot 17)$$

(1・17) 式は, いかなる実対称行列もその固有値からなる対角行列とその固有ベクトル行列で表現できることを意味する。この概念はとくに対称行列の解法に有効である。今後の解析例において次の方程式系にしばしば遭遇する。

$$BB^T = C \quad (1 \cdot 18)$$

ここで, C : 要素既知の正方行列 B : 要素未知の正方行列

行列演算上, C は対称行列になる。 B は n^2 個の未知数を持ち, 一方, C が対称行列という性質から, B の要素を規定する条件式数は $n(n+1)/2$ 個である。すなわち, B を一義的に決定するには $n^2 - \{n(n+1)/2\}$ 個の条件式が不足する。この方程式系の解法として, B を上方(下方)三角行列と仮定して解く平方根法がよく知られている。しかしながら, (1・17) 式の性質を用いて, B を比較的容易に解くことも可能である。すなわち, C の固有値行列を D , 固有ベクトル行列を X とすると, (1・17) 式から次式が得られる。

$$\begin{aligned} C &= BB^T = XDX^T \\ &= (XD^{1/2})(XD^{1/2})^T \end{aligned} \quad (1 \cdot 19)$$

すなわち, B は次式に等しくなることがわかる。

$$B = XD^{1/2} \quad (1 \cdot 20)$$

ここで, $D^{1/2}$ は固有値の平方根を要素にもつ対角行列である。なお, このとき x_i のノルムが 1 になるように次式で規準化しておく。

$$x_i^T x_i = 1 \quad (1 \cdot 21)$$

また, 性質 1 で述べたように, 互いに異なる固有値に対してその固有ベクトルは直交する。したが

って、Bの解法に必要な不足条件式数 $n(n-1)/2$ は固有ベクトルの直交条件式数に等しい。

2. 水文学模擬発生モデル

実際の水資源計画にあたって十分な長さの水文観測資料が存在していることはまれであり、このことが計画の策定をより困難にしている場合が多い。この種の困難を克服するために用いられる手法が水文学の Simulation, Generation であり、これらの研究分野が Operational Hydrology (計画水文学) という名で知られているものである。

水資源計画策定に直接必要な入力情報は流量時系列であり水文学シミュレーションのうちでも、とくに流量データの発生手法が研究の中心的課題であった。しかしながら、この手法の改良、開発に際しては流量資料のいくつかの質的問題を考慮すべきである。すなわち、流量資料は降水資料にくらべて、観測所の配置と密度の問題、統計年数の不足、水位から変換されるための観測値の信頼性の問題点が指摘される。また、近年流域の流出特性が開発とともに急速に変化しており、これに伴って流量の統計的母集団の性質も変化してきていると考えられ、これらの問題も水文解析上無視できない。このようないくつかの難点を克服するためには情報量の価値が大である降水量のシミュレーションモデルを確立し、何んらかの流出モデルによって流量に変換して、河川流況の長期間予測をはかる必要がある。

ここでは水資源開発システムの解析においてその基礎となる水文学のシミュレーション手法について概説してみる。水文学の統計的特性は時間構造と空間構造で特徴づけられる。したがって、水文学の模擬発生モデルもこの2つの特性を preserve するものでなければならない。水文現象を的確に表現するためにいかなる数字モデルを開発するかは、多くの場合水文学の時系列特性に依存する。季節変動を除いた水文学の一般的構造として、流量時系列はマルコフ過程に基づくことが多く、一方降水量時系列はランダム系列とみなしうることが多い。ランダム系列とみなせる場合、単一の観測地点における水文学時系列は簡単にシミュレートできる。すなわち、標準正規乱数を発生させ、 $(1 \cdot 1)$ 式の逆変換をほどこせばよい。しかしながら、この手法では多地点間の固有の相関構造を再現させることはできない。それ故、ランダム系列に対する発生手法としては相関分析が有効となる。今迄の研究成果によれば、多地点における降水量時系列の模擬発生モデルには主成分分析による手法^{(3), (4), (5), (6)}、流量時系列の発生には Matalas⁽⁷⁾ によって提案されたマルコフモデルが^{(2), (8), (9), (10)} それぞれ定着しつつあると考えられる。

3. 線型重回帰モデル—Model I⁽¹¹⁾

降水量資料についての解析にあたって大抵の場合まず気がつく点は、ある一地点だけの水文学が比較的長期間にわたって整備され、解析に必要な近傍の観測所の標本数が時系列としてはかなり短かいという事実である。今便宜上、長期間にわたって観測値が得られる観測所を基幹観測所、その他の観測所を衛星観測所と呼ぶことにする。線型重回帰モデルというのは衛星観測所における降水量を基幹観測所の既往標本数だけ同時に模擬発生させようとする手法である。このモデルの特徴は衛星観測所間の統計的特性として、既往標本の固有の相関構造を再現させようとするものである。

このモデル式は次式で定義される。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad (3 \cdot 1)$$

上式を行列表示すれば

$$Y = AX + BF \quad (3 \cdot 2)$$

ここで、 Y ：衛星観測所における〔 $m \times 1$ 〕の観測値ベクトル X ：基幹観測所における観測値
 F ：〔 $m \times 1$ 〕の確率変動ベクトル A ：〔 $m \times 1$ 〕の係数ベクトル B ：〔 $m \times m$ 〕の係数行列
 m ：衛星観測所数

係数行列の同定のための仮定は次のものである。

$$E(FX^T) = 0 \quad (3 \cdot 3)$$

$$E(FF^T) = 1 \quad (3 \cdot 4)$$

ここで、 $E(\cdot)$ ：期待値演算子 0 ：零ベクトル 1 ：単位行列 T ：添字 T は転置ベクトル
 (3・4)式の仮定は確率変動成分の平均値が0で分散が1、しかも相互に独立であることを意味する。
 係数行列 A 、 B の最小自乗法推定が以下に示される。

(3・2)式の右から X^T を乗じて両辺の期待値をとれば、

$$E(YX^T) = A \cdot E(XX^T) + B \cdot E(FX^T)$$

上式において、 $E(XX^T)$ は基幹観測所における規準化されたデータの分散を意味するから、1に等しく、また(3・3)式の仮定により、係数ベクトル A は次式で与えられる。

$$A = E(YX^T) \quad (3 \cdot 5)$$

すなわち、 A は基幹観測所と衛星観測所間の相関係数ベクトルに等しい。

(3・2)式の右から Y^T を乗じて両辺の期待値をとれば、

$$\begin{aligned} E(YY^T) &= A \cdot E(XY^T) + B \cdot E(FY^T) \\ &= AA^T + B \cdot E(FX^T) \cdot A^T + B \cdot E(FF^T) \cdot B^T \end{aligned}$$

(3・3)、(3・4)式の仮定により、係数行列 B は次式で与えられる。

$$BB^T = E(YY^T) - AA^T \quad (3 \cdot 6)$$

$E(YY^T)$ は衛星観測所間の相関係数行列である。(3・6)式の右辺は既知であり、この式は(1・18)式に対応していることがわかる。すなわち、係数行列 B の同定には、まず(3・6)式右辺の固有値、固有ベクトルを算定し、次に(1・20)式によって B を決定すればよい。(3・5)、(3・6)式によって係数行列が同定されれば、確率変動成分 F は次式で与えられる。

$$F = B^{-1}(Y - AX) \quad (3 \cdot 7)$$

このとき、 B の逆行列が存在するかどうか問題となるが、これは保障される。というのは、固有ベクトルの性質(性質1)ですでに述べたように、これらの統計量は直交条件を満足するからである。

さて、(3・5)式と(3・6)式の係数行列の内容に注目してみると、2個の観測所だけを考える場合には、次の2変量回帰モデル⁽²⁾に変形されることが容易に理解されよう。

$$y = \rho x + \sqrt{1 - \rho^2} f \quad (3 \cdot 8)$$

ここで、 ρ は基幹観測所と衛星観測所間の相関係数。(3・8)式が水文量模擬発生手法として広範に利用されている回帰線モデルである。しかしながら、(3・8)式では、すべての衛星観測所の水文量が基幹観測所だけを媒介にしてシミュレートされるために、衛星観測所間の固有の相関構造が再現される保障は得られない欠点がある。一方、(3・2)式による線型重回帰モデルではすべての観測所間の相関構造が保存される。

(3・2)式による模擬発生の手順は次のとおりである。

- (1) 基幹・衛星観測所の共通した既往標本について係数行列A, Bの同定を行なう。
- (2) 基幹観測所における規準化された観測値をXの項に入れる。
- (3) 標準正規乱数をFの項に発生させる。
- (4) (1・1)式の逆変換によって衛星観測所の降水量系列を得る。

4. 主成分分析理論によるモデル—Model II⁽⁴⁾

線型重回帰モデルは1個の基幹観測所から数個の衛星観測所の降水量系列を同時に模擬発生させる手法である。しかしながら、長期間にわたって観測値が完備している地点がなかったり、あるいは基幹観測所が待っているデータ期間より長期にわたって水文量を発生させる必要性が生ずる場合には、この手法はその要求に对应しているとは言えない。そこで、基幹・衛星観測所の区別なく対象とするすべての観測所の水文量を同時にシミュレートする手法が必要となる。この種の問題に対処する手法として多変量解析理論の主成分分析に基づく模擬発生モデルを紹介する。主成分分析の基本概念は、互いに相関構造を有する観測値ベクトルを、標本特性の情報が重複しないように互いに直交する成分に分解するという考えである。これは、直交関数としてよく知られており、また広範に利用されているフーリエ級数と数学的アナロジーをもつものである。主成分分析の構造式は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \quad (4 \cdot 1)$$

上式を行列表示すれば

$$Y = BG \quad (4 \cdot 2)$$

ここで、Y: [n×1]の観測値ベクトル B: [n×n]の係数行列 G: [n×1]の直交変量ベクトル n: 観測地点数

y_i, g_i を規準化変量と仮定しているから g_i の分散は1となり、互いに異なる g_i, g_j ($i \neq j$)は直交しているから次式が成立する。

$$E(GG^T) = 1 \quad (4 \cdot 3)$$

ここで、E(・): 期待値演算子 1: 単位行列

(4・2)式の右から G^T を乗じて両辺の期待値をとれば、係数行列は次式で与えられる。

$$B = E(YG^T) \quad (4 \cdot 4)$$

すなわち、係数行列は観測値ベクトルと直交変量ベクトルの相関係数に等しい。また、この関係式はフーリエ級数におけるフーリエ変換に対応していることが容易に理解される。

(4・2)式の右から Y^T を乗じて両辺の期待値をとれば

$$BB^T = R = E(Y Y^T) \quad (4 \cdot 5)$$

ここで、 R は観測所間の相関係数行列であり、これは対称行列である。

(4・5)式は前述した(1・18)式に対応するもので、係数行列 B は R の固有値行列 D とその固有ベクトル行列 X から次式によって算出できる。

$$B = X D^{1/2} \quad (4 \cdot 6)$$

(1・15)式の直交行列の性質から、係数行列 B には次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} B^T B &= D^{1/2} X^T X D^{1/2} = D^{1/2} X^{-1} X D^{1/2} \\ &= D \end{aligned} \quad (4 \cdot 7)$$

上式をスカラー表示すると

$$\sum_{k=1}^n b_{ki} b_{kj} = \begin{cases} \lambda_i & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (4 \cdot 8)$$

しかも、前述した固有値の性質から次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr.}(R) = n \quad (4 \cdot 9)$$

フーリエ解析において、各周波数に対応するパワーは振巾に関連しているように、(4・8)、(4・9)式で与えられる固有値 λ_i は各成分 g_i のパワーとみなすことができよう。すなわち、 λ_1 は卓越周波数(低周波)に対応し、 λ_n が高周波数に対応するものである。今、この一例として降水事象を考えてみる。地点降水量間には一般には大なり小なりの相関性があり、その構造は相関係数で測られる。もちろん観測される地点降水量は年毎に変動していることが予想される。この空間変動のうち観測所間には共通する変動成分と共通しない変動成分が存在すると仮定すれば、 λ_1 はその空間変動のうちから最も共通した成分を抽出していることになる。以上の議論から、多数の観測所間の降水量の相関構造としての相関係数行列を調べるかわりに、固有値を算定することによって降水量の空間変動の度合を評価することが可能である。

もし、(4・2)式の G に関する統計量が必要な場合には、(4・2)式の左から B^{-1} を乗じ、さらに(4・6)式から、次式が得られる。

$$\begin{aligned} G &= B^{-1} Y = D^{-1/2} X^{-1} Y \\ &= D^{-1/2} X^T Y \end{aligned} \quad (4 \cdot 10)$$

ここで、 $D^{-1/2}$ は $D^{1/2}$ の対角成分の逆数をそれぞれ対角成分とする対角行列である。

(4・2)式による多地点水文量発生過程は次の手順によって行なわれる。

- (1) 観測所間の相関係数行列から(4・6)式によって係数行列 B の同定を行なう。
- (2) G の項に標準正規乱数を発生させる。
- (3) (1・1)式の逆変換によって所要の水文量系列を得る。

統計的手法は物理現象、自然現象の客観的説明を不得意とするといわれる理由は、従来の計画水文学の手法がすべて回帰モデルであることに起因していると考えられる。もちろん回帰モデルは予測モデルとして、有効な手段であることは水文解析でも広く認められている。しかしながら、この手法の構造が最小自乗法原理に基づくために、多地点での水文量特性が著しく異なると考えられる場合にも、その相異性の定量的表現が困難である。主成分分析モデルは回帰モデルに内在するいくつかの欠点を

除去するだけでなく、多地点水文量をさほど困難なく模擬発生させる構造を持っている。しかも、解析で得られるパラメーターの物理的意味も従来から知られている数学モデルとよく対応しており、水文量の空間的・季節的変動様相を把握する上で有効なものといえる。

5. 適用例

以上述べた2つのモデルの妥当性を検討するため、降水量時系列を模擬発生させた結果を示す。解析対象流域は石狩川上流域で、流域面積は約5,500 km²である。採用観測所はFig. 1に示す9地点である。

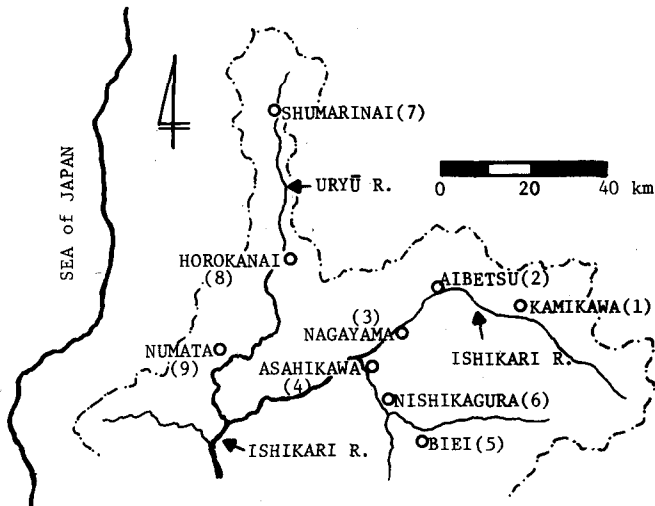


Fig. 1

The Upper Ishikari River Watershed and Selected Gaging Stations

便宜上、重回帰分析理論による方法をModel I、主成分分析理論による方法をModel IIと呼ぶことにして、2つのモデルによる結果の比較を行なう。Model Iでは基幹観測所として旭川(観測所 4)を採用した。このとき、既往観測標本数は基幹観測所については80個(1892-1971)、衛星観測所については20個(1952-1971)である。両モデルとも係数行列は20個の標本によって同定した。模擬発生は両モデルとも80年間である。この制約はModel Iで基幹観測所の月降水量系列(旭川の80年間)を(3・2)式のXの項に適用するためである。その意味ではModel IはModel IIに比べて不確定要素が1個少なくなっている。もちろん、基幹観測所が持っているデータ期間より長期間にわたって衛星観測所の降水量を模擬発生させる必要が生じた場合には、Model IでもXの項に標準正規乱数を発生させねばならなくなり、このときには両モデルの計算手順には差がなくなる。

正規変換型は両モデルとも平方根変換で統一して係数行列を算出した。Fig. 2は旭川の80年間の月降水量を平方根変換し、さらに(1・1)式によって規準化した変量をハーゼンプロットした一例である。この図からも平方根変換は実用上十分な適用性を有していると考えられる。すべての地点月降水量が平方根変換によって正規化されていると仮定すれば、(3・2)式のF、および(4・2)式のGも理論上正規変量にならなければならない。しかしながら、実際に既往標本をもとに(3・7)式と(4・10)式によってFとGの分布特性を計算してみると、これらは必ずしも正規分布を示すとはいえない。

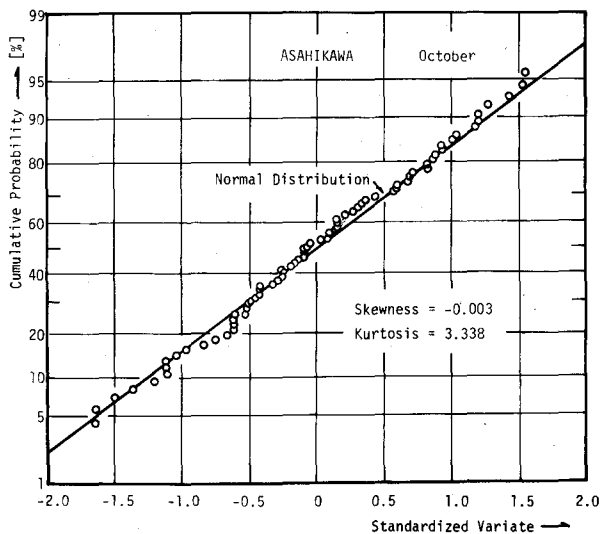


Fig. 2 Normalization by Square Root Transformation

そこでFとGに歪度を考慮したガンマ分布型の乱数を発生させることを試みた。この分布型は次式で与えられる。⁽⁷⁾

$$\xi = \frac{2}{r} \left(1 + \frac{r\eta}{6} - \frac{r^2}{36} \right)^3 - \frac{2}{r} \quad (5 \cdot 1)$$

ここで、 η ：標準正規乱数 r ：歪度
すなわち、既往標本から(3・7)式と(4・10)式によって各行毎の歪度を算出し、標準正規乱数を(5・1)式によって変換し、 ξ をFないしGに代入する。

上述した計算手順に従がい、2つのモデルによって得られたシミュレーションの一例を示そう。Fig. 3には平均値、Fig. 4には標準偏差、Fig. 5にはコロログラム、Table 1には相関係数行列を、それぞれシミュレート値と実測値を対比して示した。

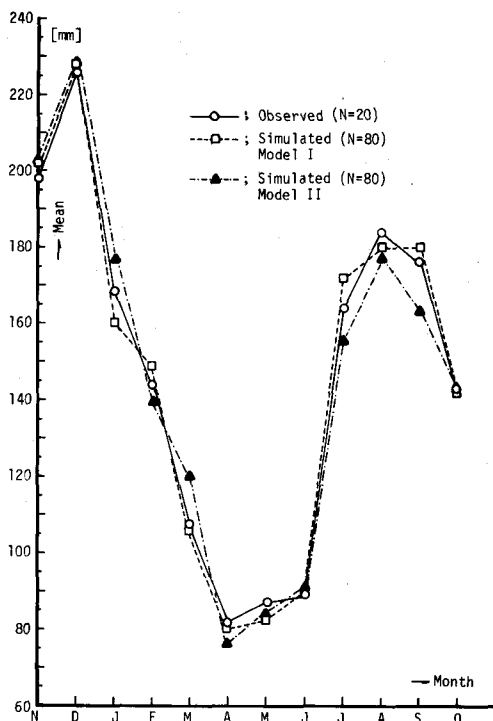


Fig. 3 Mean of Monthly Precipitation at HOROKANAI

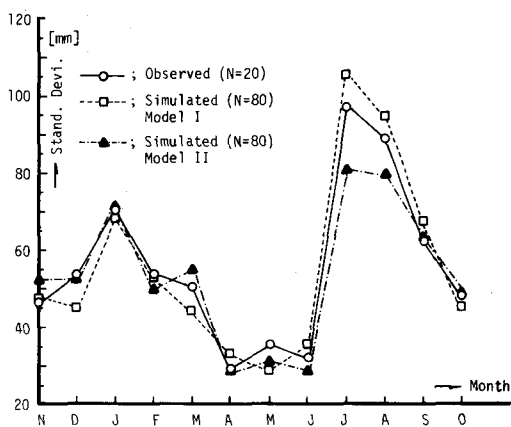


Fig. 4 Standard Deviation of Monthly Precipitation at HOROKANAI

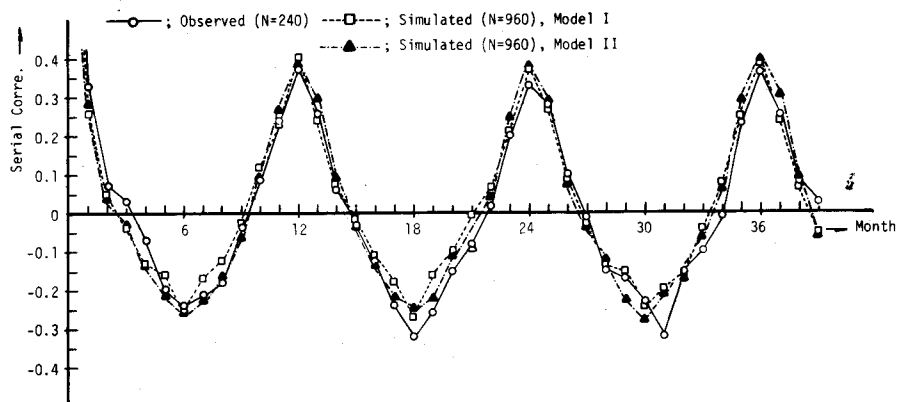


Fig. 5 Correlogram of Monthly Precipitation at HOROKANAI

(January)											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Sta.	
1	1.00	.34 .38 .27	.44 .57 .41	.27 .43 .18	.12 .16 .18	.19 .20 .10	.17 .32 -.06	-.13 .07 -.29	-.03 .07 -.23	obs. sim. I sim. II	1
2		1.00	.70 .69 .77	.68 .65 .66	.63 .53 .65	.49 .45 .55	.72 .73 .68	.67 .67 .64	.56 .62 .49	obs. sim. I sim. II	2
3			1.00	.82 .85 .83	.73 .68 .82	.62 .59 .71	.71 .78 .73	.53 .57 .62	.58 .64 .56	obs. sim. I sim. II	3
4				1.00	.80 .77 .88	.64 .70 .77	.83 .83 .77	.76 .74 .77	.69 .74 .67	obs. sim. I sim. II	4
5					1.00	.74 .76 .75	.57 .48 .57	.67 .64 .74	.56 .60 .65	obs. sim. I sim. II	5
6						1.00	.53 .50 .59	.50 .55 .62	.45 .57 .56	obs. sim. I sim. II	6
7							1.00	.79 .79 .76	.75 .81 .64	obs. sim. I sim. II	7
8								1.00	.87 .90 .89	obs. sim. I sim. II	8
9									1.00	obs. sim. I sim. II	9
Sta.		1	2	3	4	5	6	7	8	9	

(July)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1.00	.82 .80 .81	.77 .72 .89	.96 .97 .73	1.00	.80 .77 .88	.69 .70 .77	.90 .83 .77	.87 .75 .71	
2		1.00	.77 .88 .89	.72 .72 .73	.96 .97 .96	.80 .77 .88	.69 .70 .77	.90 .83 .77	.87 .75 .71	
3			1.00	.77 .88 .89	.72 .72 .73	.96 .97 .96	.80 .77 .88	.69 .70 .77	.90 .83 .77	
4				1.00	.77 .88 .89	.72 .72 .73	.96 .97 .96	.80 .77 .88	.69 .70 .77	
5					1.00	.77 .88 .89	.72 .72 .73	.96 .97 .96	.80 .77 .88	
6						1.00	.77 .88 .89	.72 .72 .73	.96 .97 .96	
7							1.00	.77 .88 .89	.72 .72 .73	
8								1.00	.77 .88 .89	
9									1.00	
Sta.		1	2	3	4	5	6	7	8	9

obs.; Observed (N=20) sim. I; Model I (N=80) sim. II; Model II (N=80)

Table 1 Correlation Coefficients Matrix

模擬発生の結果をみるかぎり、時間構造、空間構造とも有意な差がなく再現されていると考えられる。したがって、降水量模擬発生の方法としては両モデルとも実用上十分な精度で適用しうるものと認められた。しかしながら、両モデルの構造上の差異を考察してみると、Model I は従来から広く利用されている 回 帰 モデルであり、パラメーターの同定は最小自乗法原理に基づいている。このため従来から指摘されているように、係数行列 A, B は降水量の地域分布特性の相異についてはなんらの情報も提供してくれない。一方、Model II の係数行列の同定は最小自乗法とは違って、地点観測値を相互に関係のない独立な成立に分解するという概念に基づいている。この直交変換は地点間の降水特性の相異を客観的に説明するのに有効な手段となる。Fig. 6 以下にその解析例を示す。

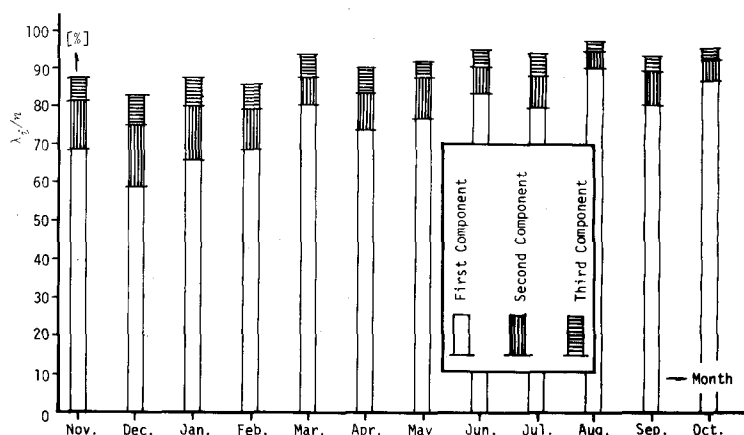


Fig. 6 Percentage Contribution of Each Component to Total Variance

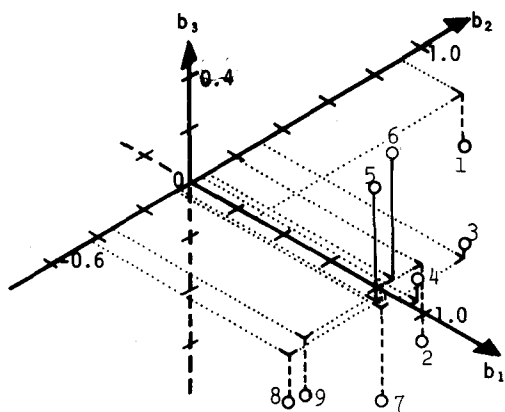


Fig. 7 A Correlation Coefficient between Observed Values and Decoupled Components (January)

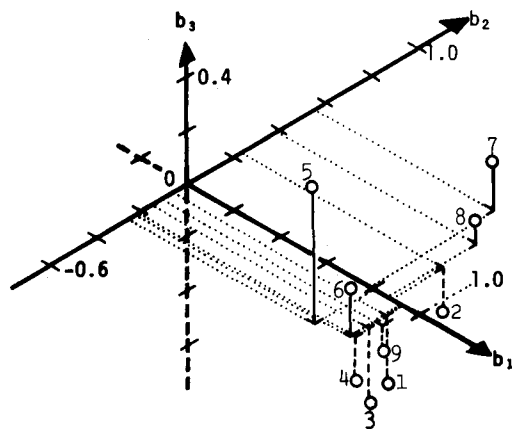


Fig. 7 B Correlation Coefficient between Observed Values and Decoupled Components (July)

(4・9)式に示されるように、固有値の和は全分散に等しいので、このパラメーターは分解された直交成分の全分散に対する寄与の割合を表わすもので、Fig. 6は第3成分までの固有値の百分率を示したものである。月降水量の季節的変動様相として、どの月においても第3成分まで全変動の90%近くが説明される。とくに第1成分が卓越しているが、これは、地点降水量は年毎に変動はしているが、この流域系で降水量の空間変動を把えた場合、どの月でも60%以上の共通した卓越変動成分がみつめられるということの意味すると解釈されよう。(4・4)式に示されるように、係数行列Bの列ベクトルは直交成分と地点降水量の相関係数を与える。また、(4・8)式からこの相関係数の2乗和は各々の成分の固有値に等しいことがわかる。したがって、固有値に対するこのパラメーターの寄与の割合を調べることによって、月降水量の地域的変動様相を把えることができる。Fig. 7は第3成分までの相関係数の大きさを示したもので、図中の番号はFig. 1の観測所番号に対応する。また、 b_1 、 b_2 、 b_3 は係数行列の第1、第2、第3列ベクトルに対応する。たとえば、1月では、観測所 1(上川)の相関係数は(b_{11} , b_{12} , b_{13})=(0.265, 0.917, -0.136), 観測所 2では、(b_{21} , b_{22} , b_{23})=(0.769, 0.187, -0.266)となる。この図から、各々の成分についての特徴を述べると、第1成分では、冬・夏期とも相関係数は正値をとっている。ただ、1月では観測所 1を除く観測所で0.8という高い係数をとっている。一方、7月では全観測所で0.8という相関係数を持っている。その結果、7月の方が λ_1 の値が大きい。第2成分では降水量の地域分布特性に顕著な差がみられる。すなわち、1月では、観測所 1だけが高い正値をとり、とくに λ_2 に対する寄与が大である。また、観測所 8・9(雨龍川流域)で比較的高い負値をとっている。7月でも雨龍川流域の観測所が比較的高い正値を持っている。第3成分では1月、7月とも特定の観測所、すなわち、観測所 5, 6, 7が他のものに比較して大きな値をとっている。したがって、これらの観測所の λ_3 への寄与が大である。

以上、降水量時系列の模擬発生上必要と思われる2つのシミュレーションモデルについて述べ、適用例によってその有効性を検討してみた。その結果、2つのモデルによるシミュレーションには本質的な差が認められないので、実際の適用にあたっては観測値の完備の割合を考慮しながら、目的に応じてこれらのモデルを使いわけることが可能である。また、実際の計算における難易度も同等であると考えられる。すなわち、2つのモデル式は基本的には対称行列の固有値、固有ベクトルを算定することに帰着される。ただ、Model IIの方が模擬発生過程に付随して降水量の空間分布特性を把握できる利点を併せもっているといえよう。

結 言

回帰分析は水文統計解析の予測モデルとして久しく専用されてきた数学的手法であるが、その適用に際しては次の諸点に留意すべきである。

- 1) 係数の同定は最小自乗法原理に基づくので、得られた係数によって時系列特性に及ぼす因子の物理的意義を客観的に説明することはできない。Sample Size や選定変数の増減による偏回帰係数の不安定性が目立つ。
- 2) この手法のEfficiency は決定係数や重相関係数で測られるが、従属変数と独立変数間に一組でも高い相関係数があれば重相関係数はそれよりも必ず高くなるという性質をもつ。このための独立変数の選択が大事となり、単に数だけ多くとっても回帰分析の精度を上げることはできない。

以上の問題点に対応するには、1) 階段的回帰式、2) 直交回帰式法、3) 主成分分析法、の利用が有効であろう。とくに2)の方法、3)の方法を取り入れたモデルが大容量の電算機の普及に伴っ

て、実用性をましてきた。

本稿は、その成果というべき多変量解析の手法を適用した多地点水文量解析の特色と演算の要点を平易に述べたつもりである。なお、計算はすべて北海道大学計算センター内 FACOM 230-60を用いた。

最後に、本稿の執筆に際し、星 清氏（北海道大学助手）の御協力をいただいたことを感謝する。

参 考 文 献

- (1) Hoshi, K. & Yamaoka, I. : A Simulation Technique of Runoff at Multistations ; Bulletin of the Faculty of Engineering, Hokkaido University, No. 69, 1973.
- (2) Young, G.K. & Pisano, W. C. : Operational Hydrology Using Residuals ; Proc. of ASCE, HY 4, 1968.
- (3) Fiering, M. B. : Multivariate Technique for Synthetic Hydrology ; Proc. of ASCE, HY 5, 1964.
- (4) 星 清 : 多変量統計モデルによる降水量の解析とシミュレーションに関する研究 ; 土木学会論文報告集, No. 213, 1973.
- (5) 端野 道夫 : 多次元不連続降水時系列に関する研究 ; 第19回水理講演会論文集, 1975.
- (6) 江藤 剛治 : 物理的な発生機構を考慮した降水量時系列に関する研究 ; 第19回水理講演会論文集, 1975.
- (7) Matalas, N. C. : Mathematical Assessment of Synthetic Hydrology ; Water Resources Research, Vol. 3, No. 4, 1967.
- (8) 室田 明, 江藤 剛治, 角湯 正剛 : 広域的な月水文量の解析とそのシミュレーション ; 土木学会論文報告集, No. 203, 1972.
- (9) McMahon, T. A., Codner, G. P. & Philips, C : Single and Multi - Site Operational Hydrology ; Nordic Hydrology, Vol. 3, 1972.
- (10) Cole, J. A. & Sherriff, J. D. F. : Some Single - and Multi - Site Models of Rainfall within Discrete Time Increments ; Journal of Hydrology, Vol. 17, 1972.
- (11) Hoshi, K. & Yamaoka, I. : A Simulation Technique of Monthly Runoff by Use of Precipitation Time Series at Multistations ; Proc. of the 2nd International Symposium in Hydrology, Fort Collins, Colo., U. S. A., 1972.
- 星 清, 山岡 勲 : 降水量時系列を考慮した多地点月流量シミュレーションについて ; 第16回水理講演会講演集, 1972.
- (12) 石原藤次郎, 池淵 周一 : 日降水量の空間的・時間的確率構造とそのシミュレーションに関する研究 ; 土木学会論文報告集, No. 197, 1972.