

数値シミュレーションと海岸工学

日 野 幹 雄

コンピューターによる数値シミュレーションの発達には、正に目を見はるものがある。問題を流体に限ってみてもありとあらゆる問題に数値シミュレーションの手法が導入されており、用いられている技法も多種多様である。したがって、本講義では具体的対象を海岸工学に関連する問題に限りこれを横糸とし、流体の数値シミュレーションの方法と考え方を縦糸として論じることとする。すなわち、流体に関する計算技法に従い章分けを行い、各章内で海岸工学に関する問題を採り上げ解説する。

I. はじめに

a) 数値シミュレーションの意義

①流体力学の問題、したがって次に述べる二階偏微分方程式の解が純解析的に求められるのは境界条件や初期条件の単純な場合に限られる。しかしながら、現実に出合う複雑な問題も単純な基本的メカニズムの複合であり、こゝに解析的方法により現象の基本を理解することの重要性普遍性がある。他方、実際の問題に対して具体的に量的にも正確な解を求めることもむろん必要であって、コンピューターの発達とともに Computer Fluid Dynamics, Computer Hydraulics の分野が著しく発達した。

②しかし、具体的な複雑な問題に対して解を与えることのみが Computer Fluid Dynamics の目的ではなく、基本的問題ではあるが基礎方程式の非線型性のために解析的方法では解を求めることの困難な問題について“良く制御された条件”のもとでの基礎的“数値実験データ”を提出することも C. F. D. の重要な目的である。これには円柱など bluff body のまわりの流れとこれに働く力、衝撃波、乱流等の問題を挙げることができる。

③また、非線型問題である流体の問題の解法は本来近似解法であるから、種々の解析法の精度の検討ということも C. F. D. の役割の一つである。

b) 流体力学の基礎方程式

流体の運動は二階偏微分方程式で記述される。二階偏微分方程式の一般形は次式のように表わされる。

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi + G = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

この偏微分方程式は適当な変換により次の基本的な型に分類できる。この数学的基本型はまたそれぞれの物理現象の基本型に対応している。

1) Laplace および Poisson 方程式 (楕円型)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \rho(x, y) \quad \dots\dots\dots (2)$$

2) Helmholtz 方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

3) 拡散方程式 (抛物型)

$$a^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b(x, t) \quad \dots\dots\dots (4)$$

4) 波動方程式 (双曲型)

$$C^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \dots\dots\dots (5)$$

海岸工学における諸問題と上の偏微分方程式の基本型との対比を示すと表一1 となる。

表一1：偏微分方程式の基本型と海岸工学の問題

II. 標準的定差近似法

a) Taylor 展開と定差法

デジタル（計数型）コンピューターはソロバンのように離散的 (disciete) に数を取扱う。したがって、連続体である流体の問題も離散的に一つまり対象とする領域を格子網で覆い、ある距離あるいは時間離れた各格子点の変量を求めることになる。

数値シミュレーションの標準的方法は各格子点の変量で、基礎方程式の微分を近似する方法である。これには、変数のTaylor展開を応用する。例えば、 x の関数 $f(x)$ を x_i 点のまわりに展開すれば

$$f(x_{i+n}) = f(x_i) + (n\delta x) f'(x_i) + \frac{(n\delta x)^2}{2} f''(x_i) + O((n\delta x)^3) \dots\dots\dots (6)$$

こゝに、 $x_{i+n} = x_i + n\delta x$

式(6)で $n = \pm 1$ と置くと

$$\left. \begin{aligned} f(x_{i+1}) &= f(x_i) + \delta x f'(x_i) + \frac{(\delta x)^2}{2} f''(x_i) \\ f(x_{i-1}) &= f(x_i) - \delta x f'(x_i) + \frac{(\delta x)^2}{2} f''(x_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となる。これより x_i 点における微分を隣り合う格子点の f の値を用いて近似することができる。

$$\begin{aligned} f'(x_i) &\rightleftharpoons [f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})] / 2\delta x \\ f''(x_i) &\rightleftharpoons [f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))] / (\delta x)^2 \end{aligned}$$

このようなTaylor展開に基づく差分近似には、Taylor展開の何次までの近似を取るか、どの格子点を用いて近似するかにより種々の方法がある。また、連続量を離散量で置きかえたことの誤差 (discretization error) や、コンピューターの数字の桁数が有限であるための誤差 (truncation error) が生じ、その結果次のような問題が生じる。

- 計算安定性
- 近似精度、収束性
- 演算速度
- Numerical dissipation-artificial viscosity,
- Numerical dispersion
- 非斉次項の差分法

これらについて詳しく論
 じることは、多数の読者に
 にとって無味乾燥であろう。
 この問題については藤井・
 伊藤²⁾による簡潔な解説がな
 されているので、本講では
 代表的差分法を図-1に示
 し、偏微分方程式型とこれ
 らに適用される手法の一欄
 表を表-2に示す。この表
 において、未知の変数が既
 知の変数によりあらわに表
 示されるのがexplicit(陽)
 法で、未知の変数を求める

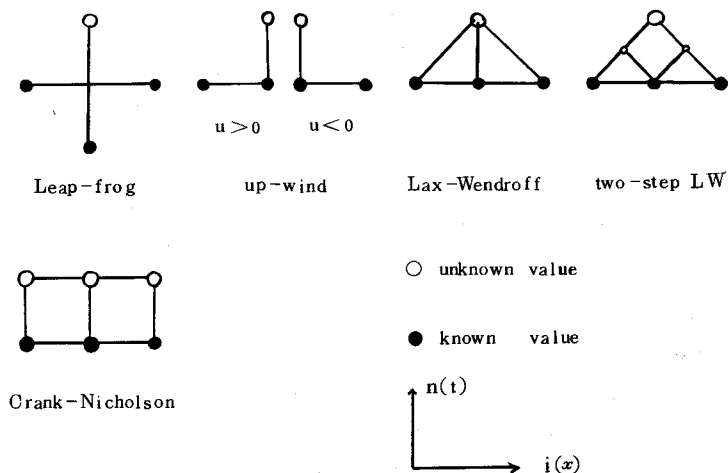


図-1

式中に未知の変数が含まれる形に表現されているのがimplicit(陰)法である。前者は一ステップの計算で未知の変数が求まるのに反し、後者では繰り返し計算が必要である。しかし、逆に後者では格子間隔を広く取ることができるという利点があり、計算法の工夫によりADI(Alternating Direction Implicit)法のように演算速度の速い方法も発表されている。explicit法では一般に計算安定性の上から格子間隔を狭く取る必要があるが、衝撃波など流れの急激な変化の場合にはこの方法(特にLax-Wendroff法)が有効である。

b) 例題

標準的定差法により解かれている海岸工学の問題には津波・高潮・温排水の拡散・水質汚濁、物体に働く波の抗力などがあり、これらについては頁数の制約上参考文献1) 11) 12)を参照して頂くことにする。

表-2: 偏微分方程式の型と種々の定差解法

	explicit 法	implicit 法
発展型 { 放物型 (伝熱・拡散型) 双曲型 (波動型)	Leap-frog 法 Up-wind difference 法 Donor cell 法 Friedrich 法 Lax-Wendroff 法 tow step Lax-Wendroff 法 Predictor-Corrector 法 Strang 法	Crank-Nicholson 法 ADI 法*
楕円型 (ポテンシャル)		Richardson 法 Liebmann 法 accelerated Liebmann 法 (S.O.R 法) (ADI (Douglas'62)**)

* □ 内はより高度な方法 ** evolutive typeに直して計算

III. MAC 法

a) MAC 法のアプローチ

流体力学のコンピューター実験が構造物の場合のそれに較べて非常に複雑である理由は、第一に基礎方程式が非線型であることによる。他の理由として境界が流体の運動とともに変化する境界自身が従属変数の場合、つまり自由水面のある場合も取扱う必要があることによる。

カルフォルニア大学 Los Alamos Scientific Laboratory の Harlow や Welch らによって自由表面をもつ流れの数値解法として特に開発されたアプローチが MAC (marker and cell) 法である。MAC は 1965 年の発表以来いく人かの人々により幾多の改良が加えられ、現在では MAC により三次元問題も解かれるようになった。

初期の MAC 法では marker はディスプレイのために流体粒子の移動を示すとともに自由表面の位置を決定するのに重要な役割をしていた。しかし、その後 Chan により自由表面の位置の決定は自由表面の方程式 $D\eta/Dt = w$ から求めるように改良され、現在では marker そのものは単なる display のための意味しかもたなくなった。この点 MAC における particle は、流体粒子の属性を particle にもなせる PIC (particle in cell) 法と異っている。したがって、MAC は発表当時の marker を除く計算アルゴリズムを指す名称として用いられるようになっていく。すなわち、④一般に二次元の流体計算では従属変数の数を減すために u, v, p のかわりに渦度 ω と流関数 ψ を用いるが、MAC では二次元の場合にも渦度と流関数ではなく直接流速成分と圧力を従属変数として計算をすすめる。⑤連続の方程式は圧力の方程式を通じて満足させる。初期の MAC 法では連続の方程式は圧力 p の方程式 $\nabla^2 p = f_n(\mathbf{V})$ の右辺を介して満すようにしているが、最近の方法ではより直接的に p を求めている。

MAC のアプローチ

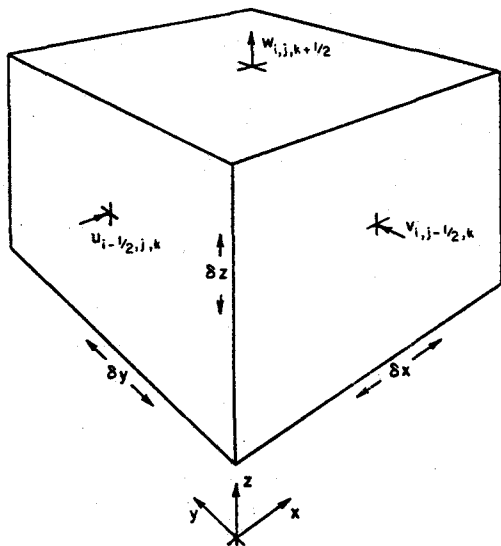
- ① メッシュおよび流速成分は各成分方向軸に直角なセルの面の中央に、圧力はセルの中心に図-2 のようにとる。このようにすれば三次元の場合にもメモリーはそれほど必要ではない。
- ② 流速および圧力を次の 2 ステップの iteration により決定する。

③ 前の時間ステップの (u, v, w, p) を用いて運動量方程式から流速成分の第 1 近似を前進差分により求める。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

④ 初期の MAC では上式の第一式を x 、第二式を y で偏微分して加え合せ、圧力 p に関する Poisson 方程式より圧力を求めている。



Location of velocity components on a typical Eulerian cell (i, j, k) .

図 - 2

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -R$$

$$R = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} - \left[\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]$$

上式右辺の最後の二項は連続の方程式 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ を含むが、②の計算で求められた $u \cdot v$ は第1回の計算ではこれを満たさないで初期のMACではこれらの項を付けておく。

③ Hirtらは $(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})$ を含ませた②の計算のかわりに次のような圧力および流速修正方法を提案している。連続の方程式を満たすことに対する補正として圧力の第 ℓ 回 iteration 値を次式で求める。

$$p_{i,j,k}^{\ell+1} = p_{i,j,k}^{\ell} + \delta p_{i,j,k}$$

こゝに $\delta p_{i,j,k}$ は本来零となるべき連続の方程式の未満足分 D に比例するようにとる。

$$\delta p_{i,j,k} = -\beta D_{i,j,k}$$

$$\beta = \beta_0 / 2 \delta t [(1/\delta x)^2 + (1/\delta y)^2 + (1/\delta z)^2]$$

こゝに、 β は relaxation factor で、一般に $\beta_0 \approx 1.7$ が使われる。

上の p の値を用いて、流速の第 ℓ 回 iteration の修正値を求める。例えば、 u については

$$\left. \begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{\ell+1} &= u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{\ell} + (\delta t / \delta x) \delta p_{i,j,k} \\ u_{i-\frac{1}{2},j,k}^{\ell+1} &= u_{i-\frac{1}{2},j,k}^{\ell} - (\delta t / \delta x) \delta p_{i,j,k} \end{aligned} \right\}$$

なお、自由表面に隣り合う cell の圧力は次の内・外挿により求める。

$$p_{i,j,k} = \eta p_a + (1 - \eta) p_{i,j,k-1}$$

こゝに、 p_a : 境界での与えられた圧力、 $\eta = \delta z / d$, d : 自由表面と一つ下の cell の中心との距離。

④ $D \rightarrow 0$ になるまで③の操作をくりかえす。

③ 自由表面の方程式

$$\partial h / \partial t = w - u \partial h / \partial x - v \partial h / \partial y$$

より自由表面の高さ h を求める。上式を前進型中心差分で近似する。この場合には truncation error が negative diffusion の作用をするので計算不安定を消すために、artificial positive diffusion 項として

$$r [\partial^2 h / \partial x^2 + \partial^2 h / \partial y^2]$$

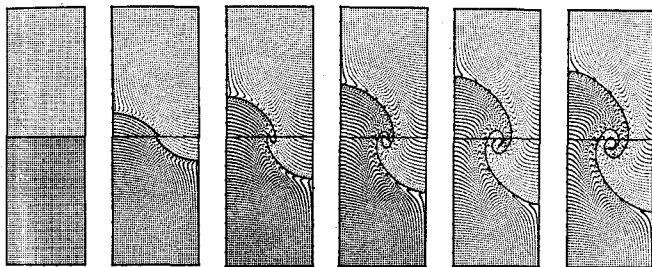
を付加する、計算が安定であるためには r は

$$r > \text{Max} (u^2, v^2) \delta t / 2$$

でなければならない。

b) 計算例

Los Alamos 研究所の研究者を中心にして MAC 法により多数の問題が解かれている。最初は二次

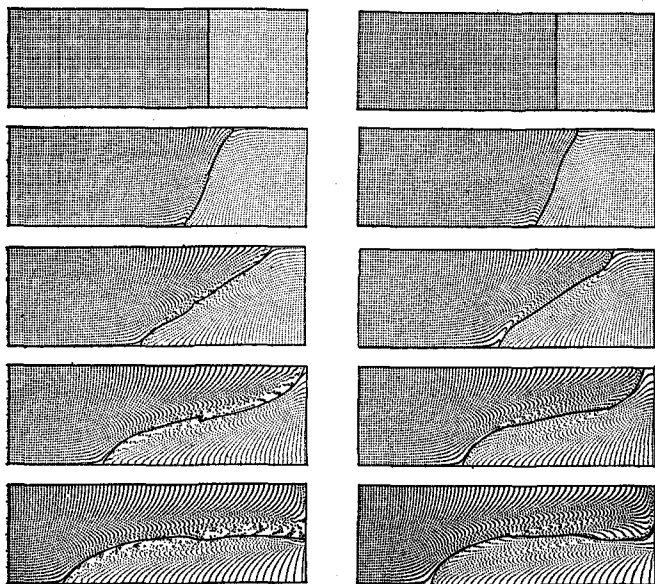


(The Physics of Fluid, Feb. 1967, による)
“レイリー-テラー不安定”の成長過程

元問題に限られていたが、最近では Nichols と Hirt により三次元の問題も解かれ透視図表示しうようになった。

図-3 は上層の重い流体・下層の軽い流体が接している場合のいわゆる Rayleigh - Taylor 型不安定の成長過程であり、図-4 は密度舌の侵入（前線や塩水楔）のシミュレーションである。

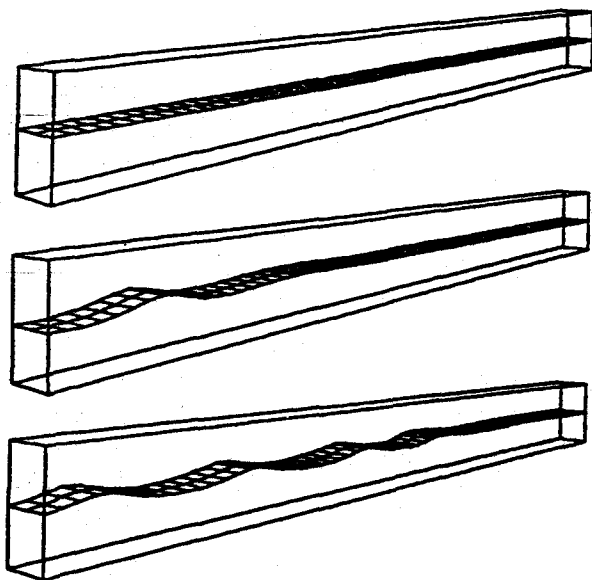
図-5 は MAC 法により解かれた水槽の左端のピストンにより発生させた波の伝播、図-6 は開水路流れの角柱まわりの自由表面の形を示す。



(Daly, Phy. Fluid, Vol. 11, による)

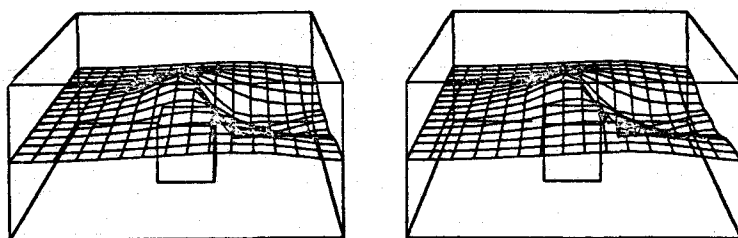
密度舌の侵入

図 - 4

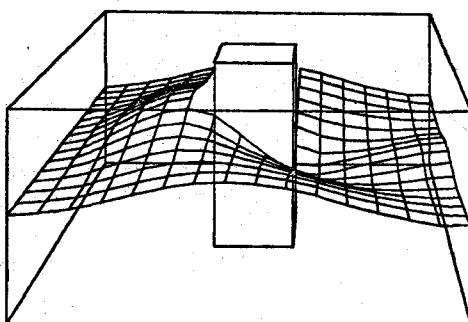


Perspective view of the surface configuration generated by a periodic piston at times 0., 10., and 24.

図 - 5



The two perspective views appear as a single stereo picture when viewed with eyes "slightly crossed."



Perspective view of the surface configuration resulting from flow past a rectangular pile.

図 - 6

IV FFTによる解法

偏微分方程式の数値解は格子点数が増加するにつれてコンピューター・メモリーおよびマシン・タイムが急激に増加する。

ところで、1965年Cooley & Tukey は計算時間を驚異的に短縮する（有限）

Fourier 変換法—Fast Fourier Transform (FFT)—を発表した。このためそれまで尨大な計算時間を必要とした相関関数およびスペクトルの計算法が一変してしまった。

Fourier 級数展開は偏微分方程式の解析的解法にしばしば用いられる手法である。Hockneyはこの点に着目しFFTを応用する Laplace および Poisson 方程式の効果的な計算法を示した。FFT による計算法はこれ以外の物理学に現われる偏微分方程式の解法にも適用しうる。

なお、最初Cooley & Tukey により発表されたときにはFFT操作を適用するデータ数 M は $M = 2^g$ (g : 整数) であることと云う制約が付けられていたが、その後この条件を除く方法が他の人々により研

a) Laplace および Poisson 方程式

まずPoissonの方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \rho(x, y) \quad \dots\dots\dots (1)$$

を境界条件

$$\phi(0, y) = 0$$

$$\phi(\ell, y) = 0$$

のもとで解く場合についてFFTによる方法を解説する。

$\phi(x, y)$ を x, y それぞれの方向にFourier 級数で展開する方法もあるが、この方法は時間がかゝりむしろ一方に関してのみFourier 展開する方が良い。すなわち、

$$\phi(x, y) = \sum_k \bar{\phi}_k(y) \sin \frac{\pi k x}{\ell} \quad \dots\dots\dots (2)$$

これは、 $\ell = M \Delta x$, $x = i \Delta x$ と置けば

$$\phi(x, y) = \sum_k \bar{\phi}_k(y) \sin \frac{\pi k x}{M} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $\bar{\phi}_k$ は k -harmonic の振幅である。また、Poisson 方程式の右辺についても同様に Fourier 展開表示ができる。

$$\rho(x, y) = \sum_k \bar{\rho}_k(y) \sin \frac{\pi k x}{\ell} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$\rho(x, y)$ は与えられた関数ゆえ、FFT により $\bar{\rho}_k(y)$ を計算する。これらの Fourier 級数展開を式(1)に代入し、sin 関数の直交性を利用すれば、すなわち両辺に $\sin \pi k x / \ell$ を掛け、 x について $(0 \sim \ell)$ の区間で積分すれば、Fourier 展開の振幅 $\bar{\phi}_k$ に関する連立常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \bar{\phi}_k(y)}{dy^2} - \left(\frac{\pi k}{M \Delta x} \right)^2 \bar{\phi}_k(y) = \bar{\rho}_k(y) \quad \dots\dots\dots (5)$$

上式によれば各 harmonics は独立でそれぞれについて $\bar{\phi}_k(y)$ を解けば良い。

x 方向に連続な関数を取扱う場合には、Fourier 展開の項数は ∞ に採る必要があるけれども、 x 方向にメッシュを組む場合には展開の項数はメッシュ数と同じだけ採れば良い。

式(5)は y 方向に差分化 ($y = j \Delta y$) すれば

$$\bar{\phi}_k(j-1) - \left\{ 2 + \left(\frac{\pi k}{M} \right)^2 \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right\} \bar{\phi}_k(j) + \bar{\phi}_k(j+1) = (\Delta y)^2 \bar{\rho}_k(j) \quad \dots\dots\dots (6)$$

($1 \leq k \leq M-1$)

と表わされる。これは直ちに

$$\begin{bmatrix} a_k & 1 & 0 & & \\ 1 & a_k & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & & \ddots & \\ & & a_k & \ddots & \\ 0 & & & 1 & a_k & 1 \\ & & & 0 & 1 & a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{k,1} \\ \bar{\phi}_{k,2} \\ \vdots \\ \bar{\phi}_{k,M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \Delta y^2 - \phi_0 \\ \rho_2 \Delta y^2 \\ \vdots \\ \rho_{M-1} \Delta y^2 - \phi_M \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$a_k = -2 - \left(\frac{\pi k}{M} \right)^2 \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

と行列表示される。左辺の $\bar{\phi}$ に掛かる行列は単純な tri-diagonal 型であり、種々の解法ライブラリーが利用しうる。

$\bar{\phi}_k$ が求まれば、式(2)の Fourier 変換により解 $\phi(x, y)$ が求められる。

メッシュを $(N \times N)$ とするとき種々の計算方法に要する演算の推定回数は表-3 のようになる。

表-3

計 算 法	SOR	Tensor Tensor Product	ADI	Fourier
演 算 回 数	$14 N^3 \log N$	$4 N^3$	$40 N^2 \log^2 N$	$\frac{N^3}{18} + 15.5 N^3$

上表によれば Fourier 展開の方法は加速リープマン法 (SOR = Successive overrelaxation) および二重 Fourier 展開 (tensor product) に較べて常に有利であり、また $N < 10,000$ の範囲 (これは実用範囲に他ならない) で ADI (alternating direction implicit method) よりも秀れている。

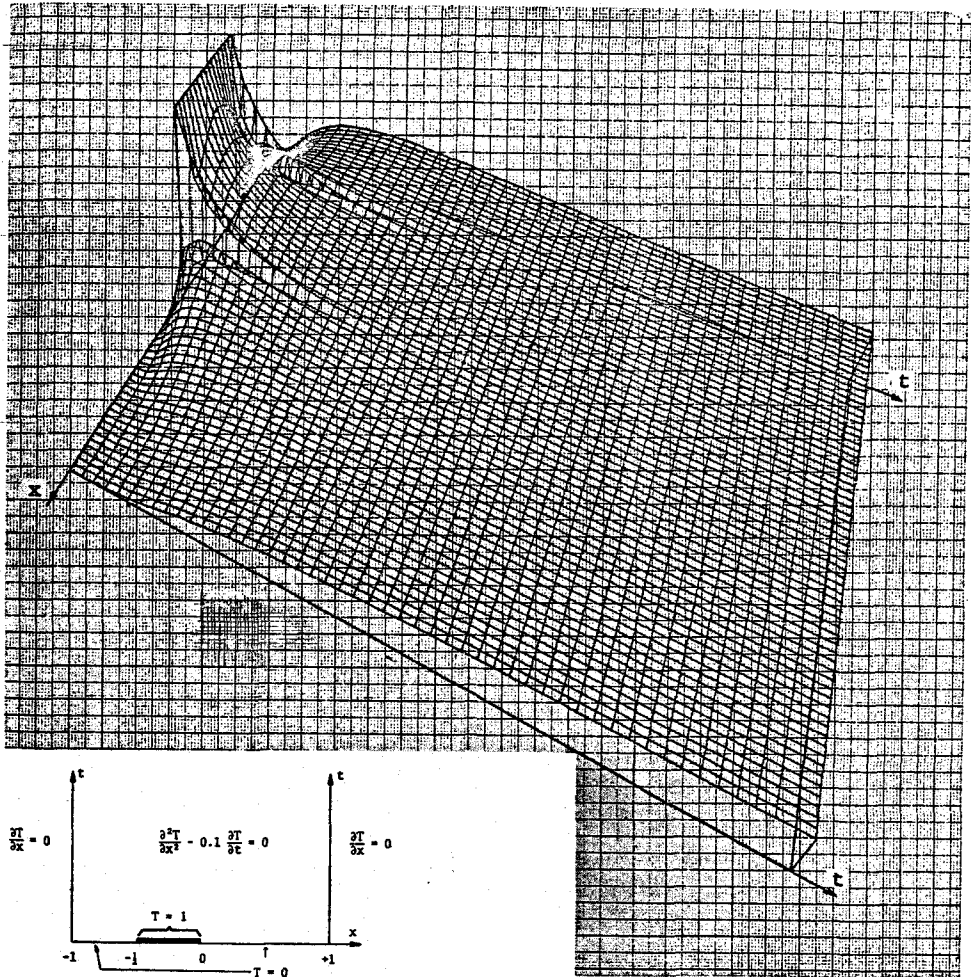


図 - 7

b) 発展方程式, 拡散方程式

時刻 t に関する偏微分を含む発展型方程式 (evolute equation) についても全く同様に F F T による解法を応用しうる。 $\Phi(x, t)$ を x 方向に Fourier 展開表示

$$\Phi(i, j) = \sum_{k=1}^{M-1} \bar{\Phi}_k(j) \sin\left(\frac{\pi i k}{M}\right) \quad (1 \leq k \leq M-1) \quad \dots\dots\dots (9)$$

すれば, 展開係数 $\bar{\Phi}_k(j)$ について次の連立一次方程式を得る。

$$\begin{aligned} 2\left[\cos\left(\frac{\pi k}{M}\right) - 1 + a^2\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right)\right] \bar{\Phi}_k(j-1) + 2\left[\cos\left(\frac{\pi k}{M}\right) - 1 - a^2\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right)\right] \bar{\Phi}_k(j) \\ = \bar{\rho}_k(j-1) + \bar{\rho}_k(j) \quad (1 \leq k \leq M-1) \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

図-7 は次の熱伝型方程式を

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 0.1 \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} 1 & (-\frac{1}{2} \leq x \leq 0) \\ 0 & (x > 0, \quad x < -\frac{1}{2}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (12)$$

の初期条件を与えて、次の境界条件のもとに F F T の方法により解いたものである。

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (x = \pm 1) \quad \dots\dots\dots (13)$$

上の境界条件は棒の両端で熱の出入がないことに対応している。それゆえ、時間が経過するにつれて棒の一部分に与えられた熱が棒全体に均一に分布するようになる。

V. 有限要素法

a) 定差法と有限要素法の比較

微分方程式の数値解法の一つとして最近注目を集めているのが有限要素法¹⁾ (FEM, finite element method) である。

i) 一般に行われる定差法の差異は定差法が元微分方程式の変数の Taylor 展開近似にもとづいているのに反し、F E M は元微分方程式をなんらかの方法で積分方程式形に表現し直した上で数値解法を行っているところにある。微分方程式で表わされている物理法則の多くは変分原理により導かれることは良く知られていることである。それゆえ、定差解法と F E M は本質的には等価なものである。²⁾ にもかゝらず、F E M と定差法の間には、なお、次のような差異を挙げることができる。

ii) 定差法では普通計算メッシュは等間隔で格子状に組まれるが、F E M では簡単に任意の形・大きさの要素に分けて取扱われる。したがって、必要なところのみ要素を細くすることが容易である。もちろん定差法でも変間隔の格子を用いることも行われているが一般的ではない。

iii) F E M が構造力学の分野で発達したのは、複雑な形状の構造物の応力解析が必要であったという現実的な要請の他に、基礎方程式が線型単純でマトリックス形式で記述するとき、剛性マトリックスの性質が良く大行列の計算も可能な点にある。流体の問題でも線型問題であるポテンシャル流 (地下水・free nap 等) の解法にいち早く応用された。

定差法による解法でも行列表示が可能であり実際しばしば行われるから、単にマトリックス演算を用い

表 - 4 : 定差法と F E M の比較 (日野, 1974)

	定 差 法	F E M
格 子 網	一般に等間隔格子 (矩形格子網)	任意の形・大きさの要素 (一般に三角要素)
近 似 法	Taylor 展開, 点近似・差分近似	変分原理 Weighted residual 法, Galerkin 法, 面近似
演 算	逐次演算 (S . O . R .), (行列演算)	行列演算
特 性	非線型 急激な, または不連続な変化	線型 (非線型) 局所的变化, 不均一・集中的変化, 複雑な形の境界
有利な問題 の 例	衝撃波 乱 流	地下水 ポテンシャル流 拡 散
そ の 他		Shape function を高度な関数形に選んで Crank-Nicolson, Lax-Wendroff 等の定差形に帰着 させることができる。

ることが F E M の特徴ではない。

vi) F E M の流体問題への応用は未だ緒についた段階であり、その特質について断定的な決論を云々す

る時期ではないが、一応次のように考えて良いであろう。元微分方程式が線形ないしは準線形であるが、境界条件が複雑な形の場合とか局所的に変数変化が急な場合にF E Mは偉力を発揮する。しかし、強い非線形性にもとづく場の急激な変化(乱流・衝撃破)に対しては収束のための繰り返し計算が必要でありマトリックス演算による直接的な解は求まらなくなる。

b) Galerkin 法

F E Mによる解をすゝめるのに、変分原理にもとづく方法、Galerkin法による方法等があるが本質的には同じであるので、こゝでは後者の方法により説明する。Galerkin法は“weighted residual method”の典型的なもので、解を未知係数を含む任意の完全関数系で近似し、これを元方程式に代入した際の残差(residual)に先の完全関数を掛けて加重平均を採り、これを最小にするよう未知係数を決定する(残差を展開関数系と直交させる)近似解法である。

いま未知変数 $T(x)$ に関する微分演算子を L とし、方程式が次の形に与えられているとする。

$$L(T(x)) = f(x) \tag{1}$$

このとき、未知関数を既知の関数系 $\varphi_i(x)$ により次のように展開する。

$$T(x) = \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(x) + \varphi_0 \tag{2}$$

こゝに

$$\int \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij} \tag{3}$$

式(2)を式(1)に代入すれば残差Residual R が生じる。

$$R(x; C, \varphi) = f - L(\varphi_0 + \sum C_j \varphi_j(x)) \tag{4}$$

Galerkin法では残差 R を展開関数系 φ_i と直交させるようにとる。すなわち

$$\int_D R(x; C, \varphi) \varphi_k dD = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{5}$$

上式は n 個の未定係数 C_k についての n 個の連立一次方程式でこれより C_k を決定しうる。

c) 温排水の拡散

1) 基礎方程式

F E Mが有利な問題は、基礎方程式が線型ないしは準線型であるが、変数の変化が局所的に集中している問題である。例えば、熱や汚染質の流れの場での拡散のように、sourceでは温度や濃度の変化が急激でその近くでは細かな格子で場を覆なければならないが、多少離れた所では温度・濃度の変化がゆるやかで格子網を粗くして良い場合である。拡散方程式は線型であり、F E Mにはうって付けの問題と云える。

二次元の熱拡散の方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (K \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K \frac{\partial T}{\partial y}) - \frac{Q_0}{\rho C_w H_w} \tag{6}$$

と表わされる。こゝに

- x, y : 水平面内にとった直交座標系
- u, v : それぞれ x および y 方向の流速成分
- t : 時間
- T : 温度上昇分
- K : 拡散係数
- ρ : 流体の密度
- C_w : 流体の比熱
- H_w : 水深
- Q_0 : 流体表面よりの熱移動

式(6)の左辺は単位面積の流体の Lagrange 的熱量変化 (とくに $u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}$ の項は流体の移流による周囲よりの熱輸送量と呼ばれる), 右辺の第一, 二項は流体の分子運動および乱流運動による周囲よりの熱輸送量, 第三項は流体表面からの熱放出量で, 式(6)は熱エネルギーの保存則を表わしている。

解法の解説を簡単にするために次の仮定を置く。

- i) 場は定常状態にある。
- ii) 水深は一定で, 水深方向の温度変化は無視しうる。
- iii) 拡散係数は各要素内では一定である。
- vi) 密度は温度変化に無関係で一定である。
- v) 表面よりの熱損失は温度に比例する ($Q_o = B_o T$)。

以上の仮定により基礎方程式より演算子 $L(T)$ を定義する。

$$L(T) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] - \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left(\frac{B_o T}{\rho C_w H_w} \right) = 0 \quad \dots (7)$$

2) 近似関数 (Shape function)

さて, 熱拡散場を大きさや形の異なる三角形の小要素で覆う。その一つの小要素 a 内の温度上昇分 $T^a(x, y)$ を

$$T^a(x, y) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x, y) \quad \dots (8)$$

と表わす。近似関数 (これを Shape function という) $\varphi_i(x, y)$ は任意に選べるが, FEM では普通未定係数 C_i を要素の各頂点 nodal point i での変数値 (温度) となるように次のような条件を付している。

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

この関係を式(8)に代入すれば, 直ちに

$$C_i = T^a(x_i, y_i) = T_i \quad \dots (9)$$

上の条件を満たす Shape function は次のようにして決定しうる。小要素を三角形に選んだので, nodal point は $n=3$ すなわち, 式(8)は次式のように平面近似となる。

$$T^a(x, y) = a + bx + cy \quad \dots (10)$$

近似関数は各 nodal point でその点の温度であることより

$$\begin{bmatrix} T_1^a \\ T_2^a \\ T_3^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \dots (11)$$

でなければならない。これを行列表示すれば

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z} \mathbf{A} \quad \dots (12)$$

となる。したがって, 式(10)の係数 $\mathbf{A} = (a, b, c)^T$ は

$$\therefore \mathbf{A} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{T} \quad \dots (13)$$

のように求まる。式(10)と(13)より

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (1, x, y) \mathbf{A} \\ &= (1, x, y) \mathbf{Z}^{-1} \begin{bmatrix} T_1^a \\ T_2^a \\ T_3^a \end{bmatrix} \\ &= \sum T_i \varphi_i(x, y) \\ &= [\varphi] \{T\} \end{aligned} \quad \dots (14)$$

こゝに、 $\{ \}$ は列ベクトル、 $[\]$ は行ベクトル表示を示す。

$$\{ \varphi \} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (15a)$$

$$[\varphi] = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \quad \dots\dots\dots (15b)$$

上式より shape function $[\varphi] = (1, x, y) \mathbf{Z}^{-1}$ は次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= -[(x_2 y_3 - y_2 x_3) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] / \Delta \\ \varphi_2(x, y) &= -[(x_3 y_1 - y_3 x_1) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_2)y] / \Delta \\ \varphi_3(x, y) &= -[(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] / \Delta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

こゝに Δ は小要素の面積である。

3) Galerkin 法による F E M 解法

式(8)を式(7)に代入すれば残差は

$$\begin{aligned} R(x, y) &= L(T^a(x, y)) \\ &= \sum_1^n T_i L[\varphi_i(x, y)] \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

となる。これを Shape function と直交するようにする。

$$\int_D R(x, y) \varphi_k(x, y) dD = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

すなわち、

$$\sum_1^n T_i \int L[\varphi_i(x, y)] \varphi_k(x, y) dD = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(7)(18) には 2 階偏微分の項 $\partial^2 T / \partial x^2$, $\partial^2 T / \partial y^2$ が含まれている。Shape function を一次関数で近似する場合には 2 階微分まで表現しえないという欠点を除くために微分の次数を下げ、さらに境界条件を式中に導入する目的で、式(18)に Green の公式を適用する。

$$\begin{aligned} &\int_S \left\{ u \{ \varphi \} \frac{\partial \{ \varphi \}}{\partial x} + v \{ \varphi \} \frac{\partial \{ \varphi \}}{\partial y} + K \frac{\partial \{ \varphi \}}{\partial x} \frac{\partial \{ \varphi \}}{\partial x} + K \frac{\partial \{ \varphi \}}{\partial y} \frac{\partial \{ \varphi \}}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_0}{\rho C_w H_w} \{ \varphi \} [\varphi] \right\} \{ T \} dS - \oint_{C'} \left\{ K \{ \varphi \} \frac{\partial \{ \varphi \}}{\partial n} \right\} \{ T \} dC' \\ &= K \int_B \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^P \{ \varphi \} dB \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

こゝに右辺の項は境界 B 上の積分で温度の上昇分 $\partial T / \partial n$ の境界条件により荷せられ、 $\partial T^a / \partial n$ は近似値、 $(\partial T / \partial n)^P$ は与えられた境界値を意味する。

上の行列表示ではわかりにくいと思われるので第 e 要素について具体的に表わすと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} F_{11}^e & F_{12}^e & F_{13}^e \\ F_{21}^e & F_{22}^e & F_{23}^e \\ F_{31}^e & F_{32}^e & F_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \\ T_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (20)$$

もし node 1^k が境界点で温度上昇 T_1^k が与えられているならば

$$\begin{bmatrix} -1 & F_{12}^k & F_{13}^k \\ 0 & F_{22}^k & F_{23}^k \\ 0 & F_{32}^k & F_{33}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ T_2^k \\ T_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{11}^k T_1^k \\ B_2 - F_{21}^k T_1^k \\ B_3 - F_{31}^k T_1^k \end{bmatrix}$$

こゝに

$$F_{ij}^e = \int_S \left[u \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + v \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + K \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + K \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{B_0}{\rho C_w H_w} \varphi_i \varphi_j \right] dS - \oint_{C'} \left[D \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \right] dC' \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$B_i = K \int_B \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^p \varphi_i dB \quad \dots\dots\dots (22)$$

C'は各要素の辺より境界部分を除いた積分路、Bは境界上の積分を意味する。こゝでは、流れの場は与えられているとして取り扱った。もし各 nodal point での流速が求められているときにはu、vをTと同じ形のShape function により

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum u_i \varphi_i(x, y) \\ v(x, y) &= \sum v_i \varphi_i(x, y) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

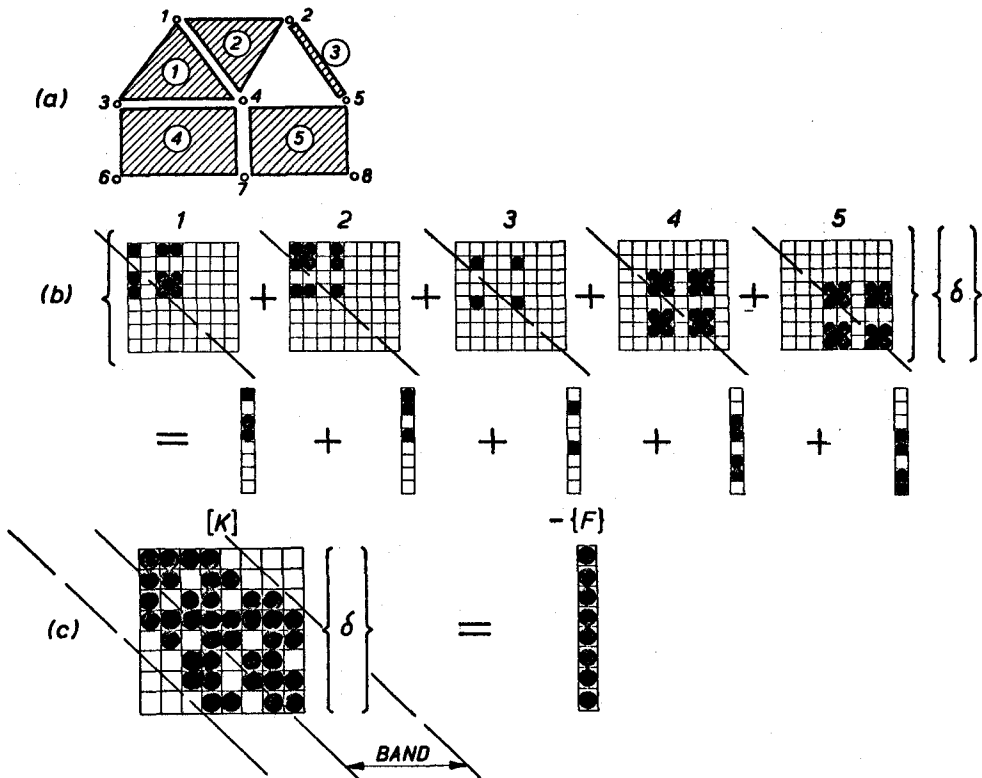
と表わして式(19)または(20)の計算をすゝめると良い。各要素ごとに式(19)または(20)の関係式すなわち

$$\{F^e\} \{T\} = \{B^e\}$$

が成立するから、全要素についてこの関係を求め行列的に加算して連立一次方程式系

$$\{F\} \{T\} = \{B\}$$

を作り、行列演算によりこれを解けば、場の温度分布が容易に決定される。図-8に各要素ごとの行列的加算について図示する。たゞし、この例では三角要素の他棒および四辺形も使われている。

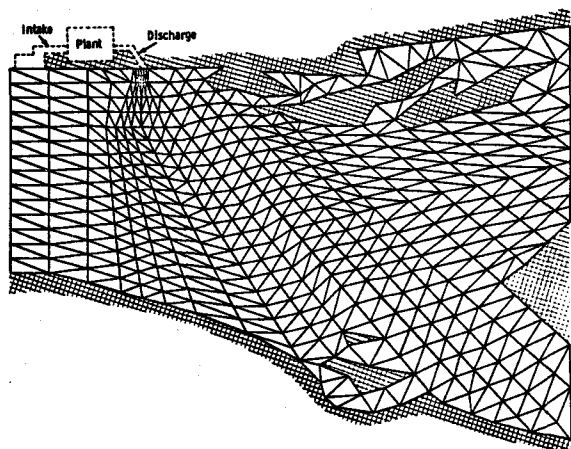


The general pattern

図 - 8

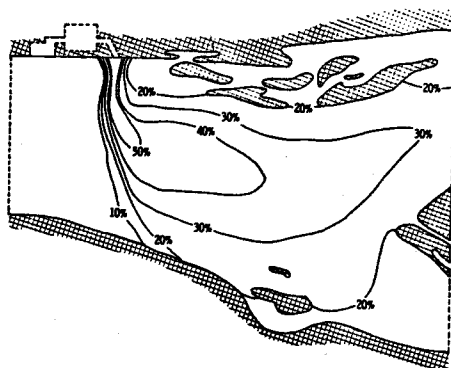
4) 計算例

発電所の熱交換器よりの冷却水の拡散計算の場合には、温度勾配がきつい放水口附近で三角形要素を小さくし、離れると粗い要素で領域を分割する必要がある。F E Mは境界の形が不規則な場合や格子を局所的に細かくしなければならないこのような場合に極めて有利である。有限要素網・（温水放出のない場合の）河川流の状況のF E M解および温排水による温度分布のF E Mによる計算結果について図-9に載せる。



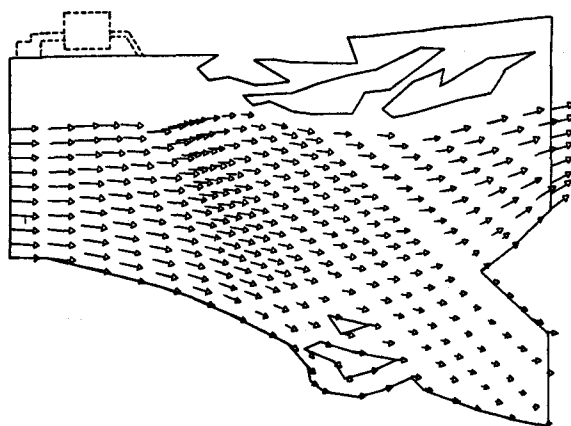
FINITE ELEMENT REPRESENTATION FOR RIVER PROBLEM

図 - 9 (a)



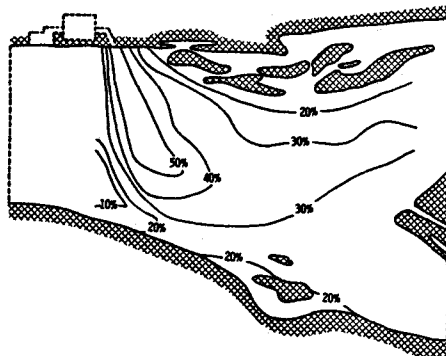
SURFACE ISOTHERMS FROM FINITE ELEMENT MODEL

図 - 9 (c)



VELOCITY FIELD DETERMINED BY FINITE ELEMENT METHOD

図 - 9 (b)



SURFACE ISOTHERMS FROM LABORATORY MODEL

図 - 9 (d)

VI 特性曲線法—（津波ランアップ）—

特性曲線法は偏微分方程式の有力な一般解法の一つである。偏微分方程式を解析的に解くには、これを常微分方程式化するのが原則である。その最もポピュラーな方法に変数分離法である。特性曲線法も偏微分方程式の常微分方程式化という解法の原則に沿ったものである。しかも、変数分離法の適用が線型の場合に限られるのに反し、特性曲線法は非線型の場合にも適用するという特徴がある。

したがって、特性曲線法は本来非線型現象である流体の流れの解法として広く用いられる。特に、水深とか圧力・流速が急激にあるいは不連続的に変化する流れの解析は特性曲線法の独壇場であり、次のような例を挙げることができる。

i) 波・津波の海岸近くでの変形（有限振幅浅水波）

ii) 内部波

iii) 管路流の水撃圧（Water hammer）

iv) 開水路の波、射流の衝撃波

v) 圧縮性流体の衝撃波

こゝでは、有限振幅浅水波の海岸近くでの変形を例にとって述べる。

a) 基礎方程式

座標系を汀線を原点とし陸向きに x 軸、静止水面から上向きに津波潮位 $\eta(x, t)$ 、静止水面から下向きに水深 $d(x)$ と採る。用いる方程式は水深方向に平均化された浅水波方程式（Shallow water eq.）で流体粒子速度 $u(x, t)$ ・波高 $\eta(x, t)$ に関して次式のように表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f \frac{u|u|}{d+\eta} - \frac{d+\eta}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2 \partial x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(d+\eta)u] + \frac{(d+\eta)u}{b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

こゝで、 d は水深、 $b(x)$ は河口部の幅、式(1)の右辺の最後の項は鉛直方向加速度の補正項である。

b) 特性曲線

式(1)(2)における η を

$$C = \sqrt{g(d+\eta)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

について表現し、その後両式の和および差を作ると

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial T} + (U+C) \frac{\partial}{\partial X} \right\} (U+2C-GT) = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial T} + (U-C) \frac{\partial}{\partial X} \right\} (U-2C-GT) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

を得る。こゝに、

$$G = -S - f(U/C)^2 - \frac{C^2}{3} C_{TTX} \pm UC B_x/B \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$S = d_x \quad (\text{水底勾配})$$

また、変数は基準水深 d_1 と重力加速度 g を用いて次のように無次元化してある。

$$\left. \begin{aligned} X &= x/d_1 \\ T &= C_* t/d_1 \\ U &= u/C_* \\ C &= C/C_* \\ B &= b/d_1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$C_* = \sqrt{g d_1} \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(4)・(5)の左辺の $\{\partial/\partial T + (U \mp C) \partial/\partial X\}$ はLagrange 微分オペレーターで流体粒子とともに速度 $(U \mp C)$ で移動する系からみた変化率を表わしている。すなわち、注目している流体粒子の時刻Tにおける位置をXとすれば

$$\frac{DX}{DT} = U \mp C \quad \dots\dots\dots (9)$$

で表わされる曲線に沿う流体実質部の変化を表わしている。この曲線を**特性曲線** (Characteristic line) という。式(4)・(5)はこの曲線上で $(U \mp 2C - GT) = \text{const}$ すなわち、

$$\frac{D}{DT} (U \mp 2C) = G \quad \dots\dots\dots (10)$$

の関係が成立することを示している。

特性曲線法は、式(9)の曲線上で式(10)の関係が成立することを利用して解を求める方法である。

i) まずX-T面を作る。この面上の流速と波速 U_1, C_1, U_2, C_2 が既知の近い2点1および2を考える。この2点からそれぞれ勾配が $U_1 - C_1, U_2 + C_2$ の直線を引き、交点3の座標 X_3, T_3 を求める(図-10)

ii) 直線1-3, 2-3上では式(10)の関係

$$\left. \begin{aligned} (U_3 - 2C_3) &= (U_1 - 2C_1) + G\Delta T \\ (U_3 + 2C_3) &= (U_2 + 2C_2) + G\Delta T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

が成立するから、これより点3での U_3, C_3 を決定しうる。

c) 津波波頭の陸上へのランアップ

津波が岸に這い上がるその先端では、 $\eta = -d$ であるから $C = 0$ で特性曲線は

$$\frac{dX}{dT} = U \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。式(6) (9) (10) より

$$d(U + 2C) = -\left[S + f\left(\frac{U}{C}\right)^2\right] \frac{dX}{U + C} \quad \dots\dots\dots (13)$$

が成立する。

津波波頭を鉛直なboreで近似し、そこで

$$C = AU \quad \dots\dots\dots (14)$$

を仮定すれば、

$$U dU = -\frac{(S + f/A^2)}{(HA)(1 + 2A)} dX \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。これを積分して

$$U = \left[U_f^2 - B(X - X_f)\right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (16)$$

の関係がえられる。こゝに、 X_f でのwave frontの流速を U_f と記した。また、Bは

$$B = \frac{2(S + f/A^2)}{(1 + A)(1 + 2A)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

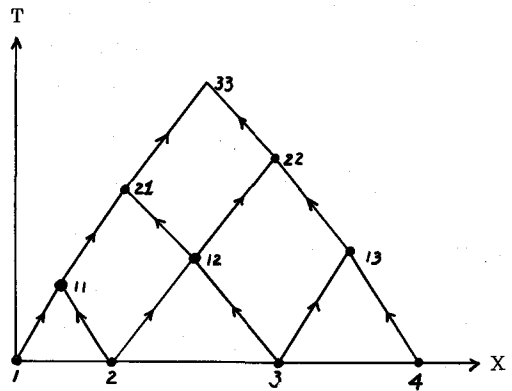


図 - 10

式(12)に式(10)(17)を代入し、

$$dT = \frac{dX}{\{U_f - B(X - X_f)\}^{1/2}} \dots\dots\dots (18)$$

これを積分して

$$T - T_f = \frac{2}{B} \{U_f - \{U_f^2 - B(X - X_f)\}^{1/2}\} \dots\dots\dots (19)$$

すなわち

$$X = \left\{U_f - \frac{B}{4}(T - T_f)\right\}(T - T_f) + X_f \dots\dots\dots (20)$$

の関係を得る。

d) 計算の実手順

特性曲線法の作図計算の原理はb)および図-10に示した通りである。通常の計算法では、この原理に従い、特性曲線の菱形格子網を作りつつ、順次計算を行う。しかし、この方法では波形波速が計算される点のX、Tが一定の規則的配列をせず不便である。

この点を解決するには図-11のように、あらかじめ定められたX点で同一時刻Tの波形波速が計算しうるようにすれば良い。この方法では、特性曲線の時間ステップnでの出発点 X_{iL} ・ X_{iR} が最初は不明であり、したがって特性曲線の勾配 $(U \pm C)_i$ も未定である。そのためまず、出発点 X'_{iL} ・ X'_{iR} を仮定してこの点を狭む格子点の値の比例配分によりそれらの点の $U \cdot C$ を求め、次の時間ステップ(n+1)の X_i 点より逆に特性曲線を引いて、n時間ステップでのX軸との交点 X_{iL} ・ X_{iR} を求める。最初に仮定した出発点 X'_{iL} ・ X'_{iR} と X_{iL} ・ X_{iR} が一致するまでこの計算を繰り返す。特性曲線の出発点 X_{iL} と X_{iR} とは、図-12のように X_i と X_{i-1} ・ X_{i+1} の間にあるとは限らないので、電子計算機で計算をすゝめるときは注意が必要である。

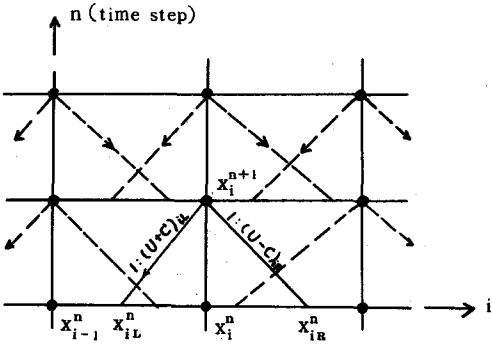
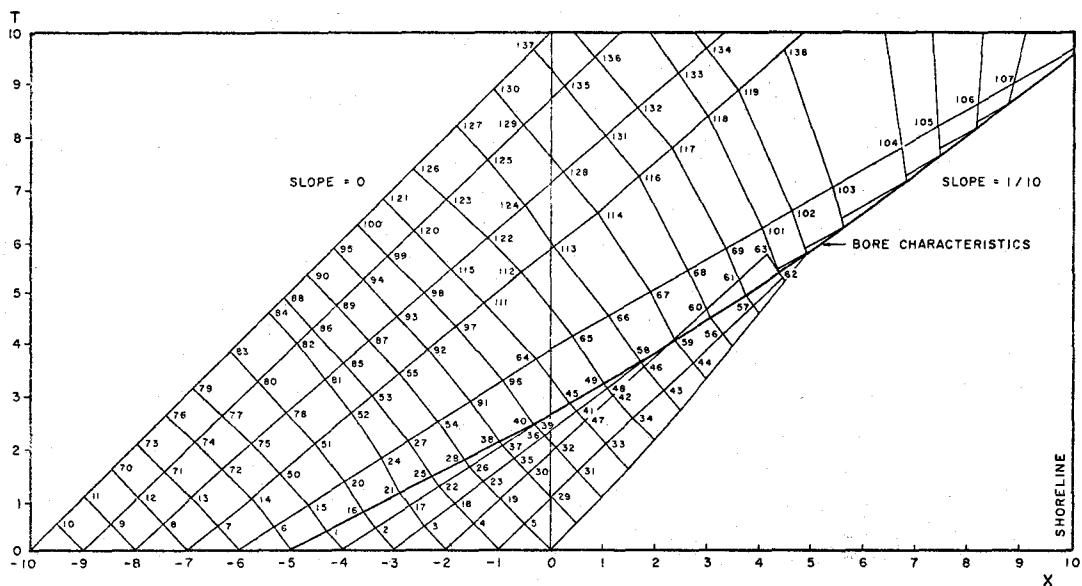


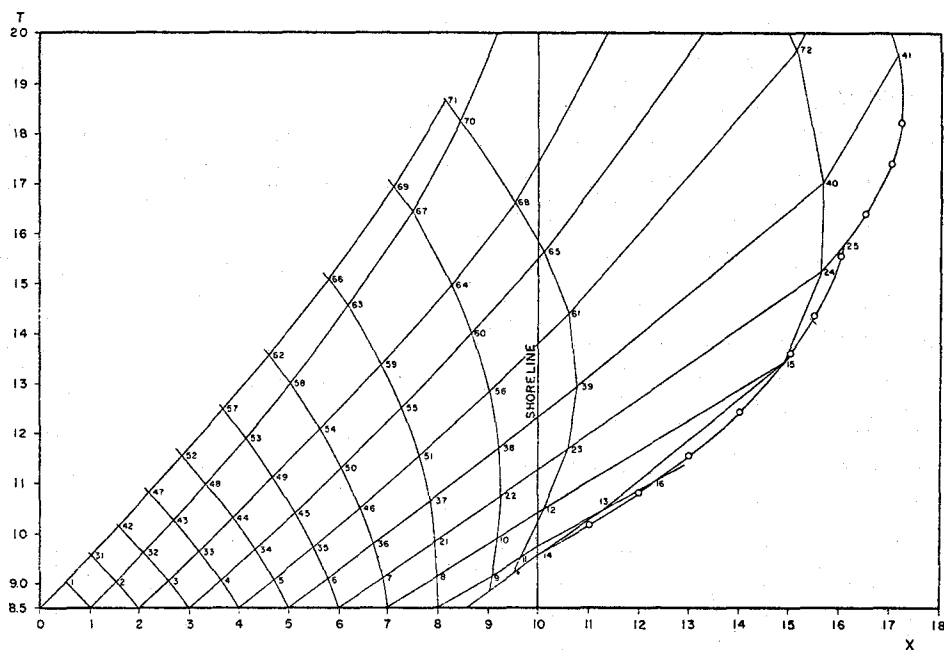
図 - 11

津波が岸に近づきあるいは遡上するにつれて、特性曲線の勾配がゆるやかになり、始めに設定した時間きざみDTが不適当になる。このような場合には、計算過程で自動的にDTを変更するような配慮も行う必要がある。



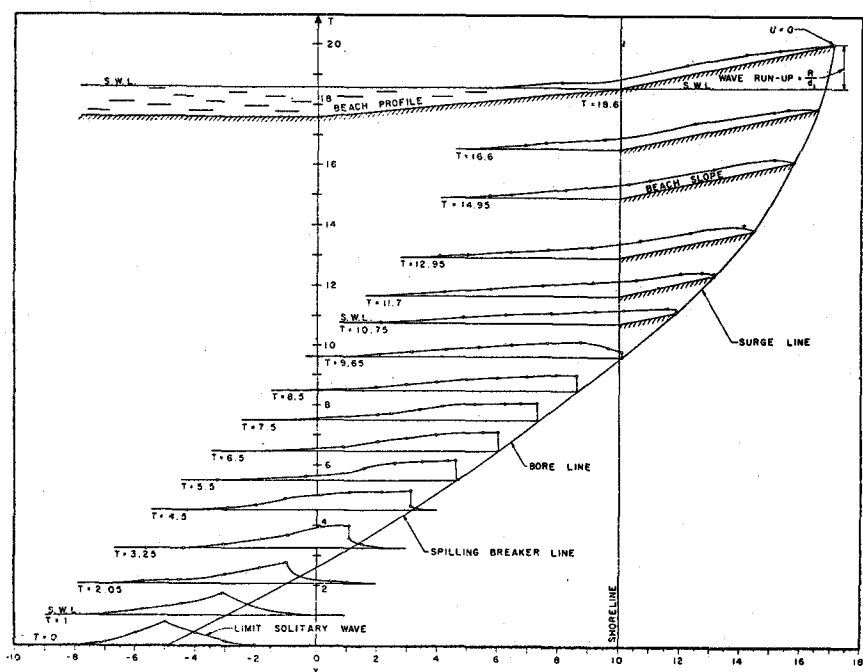
APPLICATION OF THE METHOD OF CHARACTERISTICS WITH BORE

图 - 12 (a)



SURGE OVER A DRY BED BY THE METHOD OF CHARACTERISTICS—APPLICATION WITH $A=0.2$ AND $f=0.01$

图 - 12 (b)



TIME-HISTORY OF THE WAVE PROFILE CLIMBING OVER A BEACH

図 - 12 (c)

VII. モンテ・カルロ法

これまで述べて来た数値シミュレーションの方法は、いずれも現象や問題を一度偏微分方程式により、一般的な形で表現したのち与えられた境界条件・初期条件のもとにこれを数値的に解くという方法である。

数値シミュレーションの方法として、現象を微分方程式に帰着することなく、直接的にシミュレートする方法がある。これは現象が複雑であってメカニズムが十分理解されていないか、あるいは微分方程式表示が困難な問題であるとか、確率性が強くたとえ微分方程式が立てられても決定論的な解が適当でない場合とかである。例えば、流れによる砂粒子の輸送・乱流拡散・不規則波などである。

こうした場合、個々の流体粒子やトレーサ・砂粒子のランダムな動きをシミュレートして現象の模擬実験を行って解を求めることが行われる。乱数を用いて確率論的な、あるいは決定論的な問題を解く方法をモンテカルロ法という。

海岸工学の分野では、波力や越波の問題と関連して不規則波のシミュレーションの研究が盛んになって来た。また、乱流拡散はFickの拡散方程式の数値解として求められることが多いが、これは本来確率性の強い現象であるので、モンテカルロ・シミュレーションの応用に適している問題でもある。

参 考 文 献

Ⅱ 章 参考文献

- 1) 日野幹雄：コンピューターと流体力学，土木学会誌，56巻，11号，45-52（1971）

差分法

- 2) 藤井宏・伊藤剛：差分近似の数学的背景，“数値解析の応用と基礎（水理学を中心として）”第10章，アテネ出版（1971）
- 3) Crank, J. and Nicholson, P. : Proc. Cambridge Phil. Soc. , vol. 43, 50 (1947)
- 4) Lax, P.D. and Wendroff, B. : Systems of conservation laws, Comm. Pure Appl. Math. vol. 13, 217 - 237 (1960)
- 5) Roberts, K. V. and Weiss, N. O. : Convective difference scheme, Math. Comp., vol. 20, no. 94 (1966)
- 6) Strang, W. G. : On the constuction and comparison of difference schemes, SIAM J. Numer. Anal. , vol. 5, no. 3, 506 - 517 (1968)

差分法—とくに ADI (Alternating Direction Implicit method)

- 7) Douglas, J. : On the numerical integration of $U_{xxx} + U_{yy} = U_t$ by implicit methods, J. Soc. Ind. Appl. Math, Vol. 3, 42 - 65 (1955)
- 8) Peaceman, D. W. and Rachford, H. H. : The numerical solution of parabolic and elliptic difference equations, J. Soc. Ind. Appl. Math. , vol. 3, 28 - 41 (1955)
- 9) Brian, P. L. T. : A finite - difference method of high - order accuracy for the solution of three - dimensional transient heat conduction problems, AIChE, J. , vol. 7, no. 3, 367 - 370 (1961)
- 10) Douglas, Jr. J. : Alternating direction method for three space variables, Numerische Mathematik , vol. 4, 41 - 63 (1962)

海岸工学における数値シミュレーション

- 11) 日野幹雄・伊藤剛：高潮の計算，“数値解析の応用と基礎”第1章，アテネ出版（1971）
- 12) 和田明：工業用水取・排水の問題，“数値解析の応用と基礎”第2章，アテネ出版（1971）
- 13) 堀口孝男：拡散の数値解法における差分化について，第20回海岸工学講演会論文集，203 - 207（1973）

Ⅲ 章 参考文献 (MAC 法)

- 1) Chan, R. K - C. and Street, R. L. : J. Comput. Phys. , vol. 6, 68 (1970)
- 2) Chan, R. K. - C. , Street, R. L. and Fromm : Proc. Second Int. Conf. Num. Methods in Fluid, Dynamics Berkeley, p. 429 (1970)
- 3) Daly, B. R. and Pracht, W. E. : Numerical study of density - current surges, Phy. of Fluids , vol. 11, 15 - 30 (1968)
- 4) Harlow, F. H. and Welch, J. E. : Numerical calculation of time - dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, Phys. Fluids vol. 8, 2182 - 2189 (1965)
- 5) 日野幹雄：マック法：数値解析法講座16，応用編，流体解析 (I V)，土木学会誌 no. 4, 81 (1973)
- 6) Hirt, C. W. and Cook, J. L. : Calculating three - dimensional flows around structures and over rough terrain, J. Compt. Phy. vol. 10, 324 - 340 (1972)

- 7) Nicholas, B. D. & Hirt, C. W. : Calculating three-dimensional free surface flows in the vicinity of submerged and exposed structures, J. Compt. Phys. vol. 12, 234-246 (1973)

IV章 参考文献 (FFTを利用する解法)

- 1) Cooley, J. W. and Tukey, J. W. : An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, Mathematics of Computation, vol. 19 no. 90, 297-301 (1965)
- 2) Hockney, R. W. : A fast direct solution of Poisson's equation using Fourier analysis, J. Ass. of Computing Mach., vol. 12, 95-113 (1965)
- 3) Le Bail, R. C. : Use of fast Fourier transforms for solving partial differential equations in physics, J. Comp. Phys., vol. 9, no. 3, 440-465 (1972)
- 4) Ogura, M. : A direct solution of Poisson's equation by dimension reduction method, J. Met. Soc., Japan, vol. 47, 319-323 (1969)

V章 参考文献 (有限要素法)

解法一法

- 1) Zienkiewicz, O. C. : The Finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw-Hill, (1971)
- 2) 坂井藤一 : 土木学会論文報告集, 12月 (1973)

拡散

- 3) Loziuk, L. A., Anderson, J. C. and Belytschko, T. : Hydro-thermal analysis by finite element method, J. Hydr. Div., Proc. ASCE, vol. 98, no. HY11, 1983-1998 (1972)
- 4) Tayler, C. and Davis J. : Finite element numerical modelling of flow and dispersion in estuaries, IAHR Symposium on River Hydraulics, Bangkok, (1973)

浅水波・長波

- 5) Gallagher, R. H., Liggett, J. A. and Chan, S. T. K. : Finite element shallow lake circulation analysis, J. Hydr. Div., Proc. ASCE, vol. 99 no. HY 7, 1083-1096 (1973)
- 6) 坂井藤一・河合三四郎 : 波動解析への有限要素法の適用, 第20回海岸工学講演会論文集, 393-396 (1973)

地下水

- 7) Zienkiewicz, O., Mayer, P. & Cheung, Y. K. : Solution of anisotropic seepage by finite elements, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., vol. 92, EMI, 111 (1966)
- 8) Bruch, Jr., J. C. : Nonlinear equation of unsteady ground-water flow, J. Hydr. Div., Proc. ASCE, vol. 99, no. HY 3, 395-403 (1973)
- 9) Neuman, S. P. : Saturated-unsaturated seepage by finite elements, J. Hydr. Div., Proc. ASCE, 2233-2250 (1973)

完全流体

- 10) Chan, S. T. K. and Larock, B. E. : Fluid flows from axisymmetric orifices and valves, J. Hydr. Div., Proc. ASCE vol. 99, no. HY 1, 81-97 (1973)
- 11) Chan, S. T. K., Larock, B. E. and Herrmann, L. R. : Free-surface ideal fluid flows by finite elements, J. Hydr. Div., Proc. ASCE, 959-974 (1973)

Navier - Stokes eqs .

- 12) Cheng, R. T-S. : Numerical solution of the Navier-Stokes equation by finite-element method, *Phy. of Fluids*, vol. 15, no. 12 2098-2105 (1972)
- 13) Taylor, C. and Hood, P. : A numerical solution of Navier-Stokes equations using the finite element technique, *Computers & Fluids*, vol. 1, 73-100 (1973)

V章 参考文献

津波ランアップ (特性曲線法による)

- 1) Freeman, J. C. and LeMéhauté, B. : Wave Breakers on a beach and surges on a dry bed, *Proc. ASCE*, vol. 90, no. HY2, 187-216 (1964)
- 2) 岩垣雄一: 海堤防論, 1964 水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会
- 3) 岩崎敏夫・富樫宏由: 遡上津波先端の境界条件と計算法, 第16回海岸工学講演会講演集, 359-364 (1969)
- 4) Wylie, E. B. : Unsteady free-surface flow computations, *J. Hydr. Div., Proc. ASCE*, vol. 96, no. HY11, 2241 (1970)
- 5) Heitner, K. L. and Housner, G. W. : Numerical model for Tsunami run-up, *J. Water ways, Harbors and Coastal Eng. Div., Proc. ASCE*, vol. 96, no. WW3, 701 (1970) [この論文は特性曲線法を用いていない]

内部波 (特性曲線法による)

- 6) Abbott, M. B. : On the spreading of one fluid over another, *La Houille Blanche*, vol. 16, 622-635, 847-856 (1961)
- 7) Abbott, M. B. and Torbe, I. : On flows and fronts in a stratified fluid *Proc. Roy. Soc. (A)*, vol. 273, 12-40 (1963)
- 8) Abbott, M. B. and Ionescu, F. : On the numerical computation of nearly-horizontal flows, *J. Hydraulics*, vol. 5, no. 2 97-110 (1967)
- 9) Grubert, J. and Abbott, M. B. : Numerical computation of stratified nearly horizontal flows, *J. Hydr. Div., Proc. ASCE*, vol. 98, no. HY10, 1847-1866 (1972)

VII章 参考文献 (モンテカルロ法)

不規則波

- 1) 日野幹雄: 波浪の予測フィルター・変換フィルター, 第14回海岸工学講演会講演集 (1967)
- 2) Borgman, L. E. : Ocean wave simulation for engineering design, *J. Waterways and Harbors, ASCE*, vol. 95, no. WW4, 557 (1969)
- 3) 日野幹雄: 波浪への統計的解析の応用, 水工シリーズ70-02, 土木学会水理委員会 (1970)
- 4) 富永正昭・橋本宏: 造波機による不規則波の発生, 第17回海岸工学講演会論文集, 415-419 (1970)
- 5) 岩垣雄一・木村晃: 任意のスペクトル形を有する現地波浪のシミュレーション法に関する研究, 第20回海岸工学講演会論文集, 463-468 (1973)

乱流拡散

- 6) 日野幹雄: モンテカルロ法による乱流拡散の二, 三の計算について, 第9回水理講演会講演集, (1965)
- 7) Bugliarello, G. : Some examples of stochastic modeling for mass and momentum transfer, *Stochastic Hydraulics*, edited by C.-L. Chiu, 39-55 (1971)