

非線型波動論

首 藤 伸 夫

1 摂動法

1. 非線型とは何か。

$y = ax$ という方程式を考えてみよう。ひとつの解として (y_1, x_1) の組合せが、他の組合せとして (y_2, x_2) があつたとき、両者の線型結合 $(y_1 + y_2, x_1 + x_2)$ も解となっている。この時、方程式は線型であるという。

所が、 $y = ax^2$ という方程式ではこうはならない。 x^2 が非線型であるからである。

水の波の場合、連続の式は線型である。速度ポテンシャルを用いて書くと、

$$\Delta \phi = 0$$

というラプラスの式となり、 ϕ_1, ϕ_2 が解ならば、 $\phi_1 + \phi_2$ も解となる。だが、境界条件や運動の方程式には非線型項が含まれている。例えば、運動の方程式の中で、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2)$$

は、あきらかに非線型項である。

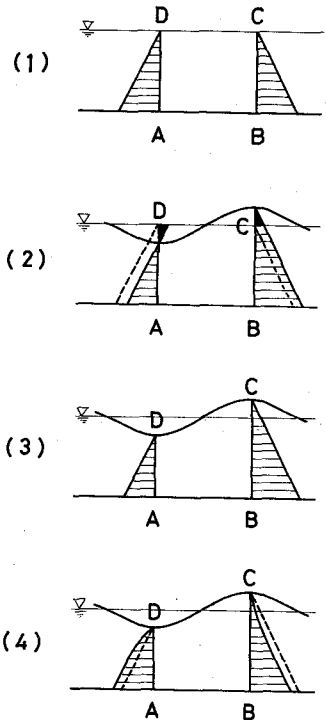
非線型項の効果を、長波近似での圧力を例にとってしらべてみよう。図-1-(1)は、波運動のない静水時である。水塊ABCDは長方形をしており、両端に働く水圧はバランスしている。

おなじく(2)は、微小振幅波（線型波）が働いた時の水圧分布である。線BCに働く水圧は静水圧分布をしていて、水位上昇分だけ大きな水圧となる。図中、点線より右側の部分がこれである。波高は非常に小さいので、図中黒塗りの部分は高次項となり、不確かなものである。波面と静水面の差は微小であり、長方形をした水塊ABCDに影線をつけた区域で与えられる水圧が働く。

有限波高であるとする(3)となり、(2)では不確かであった黒塗りの部分が生かされてくる。また、AB、CD間の水塊は、波状の表面をもつものとなる。ただし、まだ静水圧分布である。

(4)では、水粒子の軌跡が直線とことなる効果が入っている。波頂直下では、上に凸な曲線となる結果、重力と反対方向に遠心力が働き、圧力は減少する。水底近くでは、軌跡は直線に近くなって、静水圧分布に近くなる。断面BCに働く水圧は、(3)にくらべて小さくなる。(4)の点線と実線との差がこの減少分にあたる。

この例でわかる通り、非線型性を考えに入れる程、現実により近い状態を再現することができるのである。



(1) 静止時
(2) 微小振幅波
(3) 波高の有限性
(4) 曲率の効果

図-1 非線型の効果

2 摂動法

非線型の方程式を直接解くことは、特別の場合をのぞいて、まず難しい。そこで、摂動法を使って線型方程式群に書きあらためる。

運動は小さく、その程度はパラメタ ϵ で代表されとする。表面波の場合、これは波形勾配 H/L に相応する。砕波する時でも H/L は 0.142 であるから、 ϵ は確かに小さな量である。

浅海では、波形勾配の他に、相対水深 h/L や、水底勾配の波形勾配に対する比 $(dh/dx)/(H/L)$ など、摂動のパラメタになりうる。

対象とする現象毎に適当なパラメタを選ばないと摂動法を用いる利益が少くなる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \cdots \cdots (1-2)$$

を例としてとりあげる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \cdots \\ p &= \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \cdots \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (1-3)$$

のように、展開のパラメタ ϵ をつかって、一次近似項 u_1 、2 次近似 u_2 、……の和として u が与えられるとする。(1-2) に代入すると、

$$\epsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \cdots = -\epsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} - \epsilon^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \cdots$$

となる。 $O(\epsilon)$ の項はそれ自身で等号を満足せねばならない。したがって、

$$O(\epsilon) : \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \quad \cdots \cdots (1-4)$$

$$O(\epsilon^2) : \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial x} = -u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad \cdots \cdots (1-5)$$

などをうる。(1-4) は確かに線型の方程式である。(1-5) の右辺は非線型であるが、既に解かれている u_1 を使って書かれるから、未知の量 u_2 、 p_2 に対しては線型の方程式となっている。

上の例では、 u が ϵ によって展開されるとしただけで、演算そのものの持つ重要性は考えに入れていなかった。連続の方程式は $\partial u / \partial x$ と $\partial v / \partial y$ とからなるが、たとえば長波運動下ではそれぞれの比重が同じではない。波長が非常に長く、水深は非常に浅いから、 $\partial u / \partial x$ の方がどうしても小さくなる。これを考えに入れて展開すると、結果として得られる方程式群は、上に求められた式群と当然異なったものとなる。

それにともない、解も異ってくるから、摂動法を採用する限り、解の一意性は証明できない。さらに、特別の例外をのぞき、級数解の収束性も証明できない。

たとえば、線型長波の浅水変形については、有名なグリーンの式があって、波高が水深の $1/4$ 乗に逆比例して変化する結果を与えるが、同じ問題をハンケル関数を使って解くこともできる。水深が非常に浅くなっていくと、両者の差は急速に大きくなって行く。¹⁾

えられた解の適用範囲は、現地観測や水理実験の結果と比較して始めて決定される。

水の波に摂動法を適用する際のもうひとつの難しさは、境界のひとつである水面波形が前もっては与

えられていないことにある。これはテイラー展開をつかって解決する。

たとえば、表面の圧力条件は

$$y = \eta \quad \text{で} \quad p = 0 \quad \dots\dots (1-6)$$

であるが、 η が小さいものとするとき、

$$p(\eta) = p(0) + \eta p_y(0) + \frac{\eta^2}{2!} p_{yy}(0) + \dots\dots (1-7)$$

のように $y = 0$ での式に書きなおせる。その上、

$$\eta = \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \dots, \quad p = \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots\dots (1-8)$$

として代入すると、(1-7)の各項は、

$$p(0) = \epsilon p_1(0) + \epsilon^2 p_2(0) + \dots$$

$$\begin{aligned} \eta p_y(0) &= (\epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \dots) (\epsilon p_{1y}(0) + \epsilon^2 p_{2y}(0) + \dots\dots) \\ &= \epsilon^2 \eta_1 p_{1y}(0) + \dots \end{aligned}$$

などとなるので、

$$\left. \begin{aligned} O(\epsilon) ; \quad p_1 &= 0, & y=0 \quad \text{で} \\ O(\epsilon^2) ; \quad p_2 &= -\eta_1 p_{1y}, & y=0 \quad \text{で} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1-9)$$

のように、 $y = 0$ での線型式群に書きなおされる。

3 摂動法の破綻と対策

後節でみるように、長波に対する一次近似、二次近似の方程式が²⁾ (Ⅲ章(3-16)式、(3-17)式参照)

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} - g d \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots (1-10)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} - g d \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = g d \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{3}{2} \frac{\eta_0^2}{d} \right\} \quad \dots\dots (1-11)$$

と与えられる。(1-10)式は

$$\eta_0 = a \sin(kx - \sigma t) \quad \dots\dots (1-12)$$

という解をもつ。これを代入すると(1-11)式は、

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} - g d \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = 3 g a^2 k^2 \cos(kx - \sigma t) \quad \dots\dots (1-13)$$

であり、その解は、

$$\eta_1 = \left(-\frac{3}{4} \frac{a^2 k^2}{\sigma} g t + B \right) \sin 2(kx - \sigma t) \dots\dots (1-14)$$

となる。右辺第一項は永年項といわれ、 t の増大とともに振幅が増大し、やがては第一近似項を上まわるものとなる。摂動の際の条件は、第一近似 > 第二近似 であったから、この関係が逆転することは、もちいた摂動法がもはや適当なものでないことを意味している。

対策としては、摂動法を変えればよい。のちにそのいくつかの例をしめすが、ここでは(1-10)(1-11)から第一近似が非線型である式をつくること、および平均法と呼ばれるものを紹介する。

(1-11)に展開のパラメタ ϵ をかけて(1-10)と加えると、

$$\frac{\partial^2 (\eta_0 + \epsilon \eta_1)}{\partial t^2} - g d \frac{\partial^2 (\eta_0 + \epsilon \eta_1)}{\partial x^2} = \epsilon g d \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{3}{2} \frac{\eta_0^2}{d} \right)$$

をうる。ここで、 $\eta = \eta_0 + \epsilon \eta_1$ とかくと、上式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g d \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= \epsilon g d \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{3}{2d} (\eta^2 - 2 \epsilon \eta \eta_1 + \epsilon^2 \eta_1^2) \right\} \\ &= \epsilon g d \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{d} \right\} + O(\epsilon^2) \dots\dots (1-15) \end{aligned}$$

である。(1-14)の結果から、 $O(\epsilon)$ の項が急速に大きくなりうることがわかっているから、(1-15)式の左辺と右辺第一項が釣合っているとして問題を解く。しかし、第一近似が、もはや線型ではないことになる。

平均法³⁾とは、次のようなものである。 ϵ が小さいと、

$$\sin(\omega + \epsilon)t = \sin \omega t + \epsilon t \sin \omega t - \dots\dots$$

のように展開できる。(1-14)の永年項も、もともとはこうした性質のものであろうから、非線型項の影響を、基本振動数や基本振幅に対する修正として取入れることを考える。

説明を簡単にするために、小さな非線型項のある

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \dots\dots (1-16)$$

という振動の式をとりあげる。右辺が零ならば線型振動となって、

$$x = a \cos \psi = a \cos(\omega t + \theta), \quad a, \omega \text{ は常数} \dots\dots (1-17)$$

が解である。

$\epsilon \rightarrow 0$ なら、右辺の振動力によって、この振動系にエネルギーが供給(吸収)され、それにともない振幅が系統的に増大(減少)することになるが、この効果は $\epsilon \rightarrow 0$ ではなくなくなってしまい、上の線型解に到達しなければならない。(1-16)式の解を

$$x = a \cos \psi + \epsilon u_1(a, \psi) + \dots\dots (1-18)$$

とし、また

$$\begin{aligned} da/dt &= \epsilon A_1(a) + \dots\dots \\ d\psi/dt &= \omega + \epsilon B_1(a) + \dots\dots \end{aligned} \quad (1-19)$$

とおく。

したがって、 a, ψ に、時間によって変動する適当な関数を採用すれば、(1-18)が解となるのである。 A_1, B_1 を決定する際の任意性をなくすために、 $u_1, \dots\dots$ は $\cos \psi, \sin \psi$ という基本振動を含まないものとする。基本振動を含むものはすべて、 a や ψ の変化の中に吸収してしまう。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} \cos \psi - a \frac{d\psi}{dt} \sin \psi + \epsilon \frac{du_1}{dt} + \dots\dots \\ &= -a \omega \sin \psi + \epsilon \left\{ A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right\} + \dots\dots \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -a \omega^2 \cos \psi + \epsilon \left\{ -2 \omega A_1 \sin \psi - 2 \omega a B_1 \cos \psi + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \right\} \dots\dots \\ \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) &= \epsilon f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + \dots\dots \end{aligned}$$

となり、 $O(\epsilon)$ の項から

$$\omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + u_1 \right) = f(a \cos \psi, -a \sin \psi) + 2 \omega A_1 \sin \psi + 2 \omega a B_1 \cos \psi$$

をうが、右辺に $\sin \Psi$, $\cos \Psi$ があると永年項を生ずるので、これがなくなるように A_1 , B_1 をきめる。

f をフーリエ級数に展開してえられる $\sin \Psi$, $\cos \Psi$ の係数を打ち消すようにするのである。これには、

$$\left. \begin{aligned} A_1(a) &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \Psi, -a\omega \sin \Psi) \sin \Psi d\Psi \\ B_1(a) &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \Psi, -a\omega \sin \Psi) \cos \Psi d\Psi \end{aligned} \right\} \dots\dots (1-20)$$

とする。

u_1 などは基本振動を含まないけれども、 a , Ψ が時間的に変動するので、第一近似解は正弦振動からはなれ、歪んだ形となる。

II 表面波

1 表面波としての摂動

二次元問題とし、速度ポテンシャルをつかうと、

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots (2-1)$$

運動の式と表面圧力条件から

$$y = \eta \text{ で } -\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad \dots\dots (2-2)$$

$$\text{波形連続条件} \quad y = \eta \text{ で } \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \dots\dots (2-3)$$

$$\text{水平床上} \quad y = -d \text{ で } \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots (2-4)$$

ここで、

$$\phi = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \dots, \quad \eta = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots\dots (2-5)$$

とすると、

$$\left. \begin{aligned} O(\varepsilon) \quad & \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0 \\ & \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - g\eta_1 = 0 \quad \text{on } y=0 \\ & \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y=0 \\ & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y=-d \end{aligned} \right\} \dots\dots (2-6)$$

$O(\varepsilon^2)$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = 0 \\ & \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - g\eta_2 = \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial y} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right], \text{ on } y=0 \\ & \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = -\eta_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial x}, \quad \text{on } y=0 \\ & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y=-d \end{aligned} \right\} \dots\dots (2-7)$$

がえられる。

一次近似の表面波形が,

$$\eta_1 = a \cos(kx - \sigma t)$$

のとき,

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= -a \frac{\sigma}{k} \frac{\cosh k(y+d)}{\sinh kd} \sin(kx - \sigma t) \\ u_1 &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = a \sigma \frac{\cosh k(y+d)}{\sinh kd} \cos(kx - \sigma t) \\ v_1 &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = a \sigma \frac{\sinh k(y+d)}{\sinh kd} \sin(kx - \sigma t) \\ \frac{p_1}{\rho} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - g z = a g \frac{\cosh k(y+d)}{\cosh kd} \cos(kx - \sigma t) - g z \end{aligned} \right\} \dots (2-8)$$

である。これを(2-7)式の右辺に入れると、非線型項(自己干渉)を計算でき、二次近似の解をうる。この手続きを更に高次の項へと進めて行けば、計算は複雑ではあるが、原理的にはいくらでも高次項を決定できる。

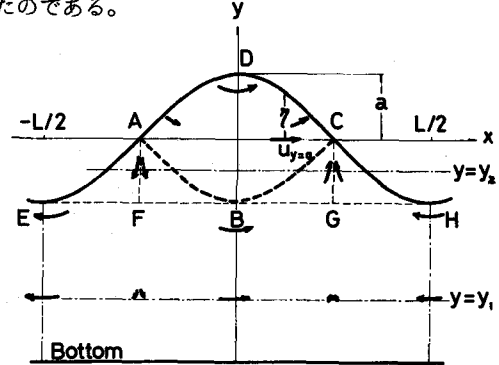
2 質量輸送と余剰運動量束 (Radiation stress)

線型解(2-8)は、 $-d \leq y \leq -a$ の範囲では、地点を一定に保つとき、時間に関して正弦的である。 $|y| < a$ では周期的ではあるが、正弦的ではない。正弦解からのズレは、線型解より高次の量である。線型解では波表面での条件を満たすようにしたとき、 $y = \eta$ のかわりに $y = 0$ で満たすとした。つまり、条件の入れ方に $O(\eta) = O(a)$ のズレがあったのである。

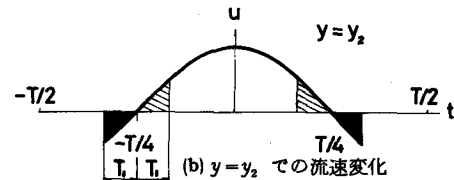
図-2(a)は、或る瞬間の波形を描いたものである。波は x の正方向に進んでいる。図中、矢印はこの瞬間の水粒子の動きをしめしている。高さ y_1 ($y_1 \leq -a$)の地点で水平流速を測定すると、図-2(c)となり、全く正弦的に変化するから、一周期間で平均すると零となる。平均流は存在しない。

$|y| \leq a$ での記録は、図-2(b)となる。 $t = -\frac{T}{4} - T_1$ の時点で、流速計は空中より水中に入り、負の流速から次第に増加し、波峯下で最大の正の流速を記録する。 $-T/4$ の点をはさんで両側にそれぞれ T_1 をとってみると、黒く塗った部分の面積は斜線部の面積と相殺するが、その他の部分は正の u として残る。つまり、一周期にわたって平均すると、波進行方向への質量輸送となる。

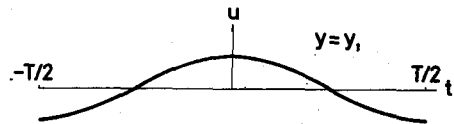
図-2(a)で、線EFGH以下の部分で



(a) 波形と流速分布



(b) $y = y_2$ での流速変化



(c) $y = y_1$ での流速変化

図-2

は(c)と同じ現象となる。また、AFEとAFBは相殺、CGBとCGHは相殺する。したがって、質量輸送は、ABCDの部分に対して計算すれば十分である。

xを固定するとき、ABCD内の縦距離に対応するt時の鉛直長さは 2η で、その時の水平流速は、 2η にわたって $y=0$ でのuと与えられる。 $y=0$ でのuと、 $y=\eta$ でのuには差があるが、uがO(a)であるから、この差はO(a²)となるので、今は問題にしなくともよい。

一周期間の質量輸送の平均値 $\bar{u}$ は、

$$\begin{aligned}\rho \bar{u} &= \frac{\rho}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} 2\eta u dt = \frac{2\rho}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} a^2 \sigma \coth kd \cos^2(kx - \sigma t) dt \\ &= \frac{1}{2} \rho a^2 \sigma \coth kd = \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{k}{\sigma} = \frac{E}{c} \quad \dots\dots (2-9)\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\sigma^2 = gk \tanh kd$, $c = \sigma/k$ をつかっている。

これにより、非回転運動下での質量輸送がえられる。境界面の近くでは粘性などにもとづく質量輸送があり、それを考慮に入れなければならない。⁴⁾

水平方向の運動量をとってみても、質量輸送と同じく、波進行方向に運ばれる非周期的な成分があると推定される。^{5), 6)}

或る鉛直断面を通る水平方向の運動量束 $(p + \rho u^2)$ を計算する。運動のない状態(圧力 p_0)を基準とし、一周期にわたる平均を— であらわすと、

$$S_{xx} = \overline{\int_{-d}^{\eta} (p + \rho u^2) dy} - \int_{-d}^0 p_0 dy \quad \dots\dots (2-10)$$

が求める量である。これを三つにわけ、

$$S_{xx} = \overline{\int_{-d}^{\eta} \rho u^2 dy} + \overline{\int_{-d}^0 (p - p_0) dy} + \overline{\int_0^{\eta} p dy} \quad \dots\dots (2-11)$$

とする。右辺第三項は図-1(2)で黒く塗った部分に対応する。右辺第一項の被積分関数 u^2 はO(a²)であるから、積分下限よりO(a²)、上限よりO(a³)を生ずるので、上限は零とおいて差支えない。右辺第二項は、圧力についてO(a²)まで正確に求められていなければならない。(2-7)をとく代りに、鉛直方向の平均運動量束から次のようにして求めることができる。

図-3のように幅 Δx の水柱に対し、側面、底面に働く力と水柱重量の釣合いを考える。一周期にわたって平均すると側面に働く力は零であるから、

$$\overline{p + \rho v^2} = \overline{\rho g (\eta - y)} = -\rho g y = p_0 \quad \dots\dots (2-12)$$

が成立し、

$$\overline{p - p_0} = -\overline{\rho u^2} \quad \dots\dots (2-13)$$

で, $O(a^2)$ である。

これを代入すると,

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \int_{-d}^0 \rho(u^2 - v^2) dy + \int_0^\eta p dy \\ &= \int_{-d}^0 \frac{\rho a^2}{2} \frac{\sigma^2}{\sinh^2 kd} \{ \cosh^2 k(d+y) - \sinh^2 k(d+y) \} dy \\ &\quad + \int_0^\eta \rho g(\eta-y) dy = \frac{\rho g a^2 k d}{\sinh 2kd} + \frac{1}{4} \rho g \bar{\eta}^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho g a^2 \left[\frac{2kd}{\sinh 2kd} + \frac{1}{2} \right] = \frac{E}{c} \left[2C_G - \frac{1}{2} c \right] \end{aligned}$$

..... (2-14)

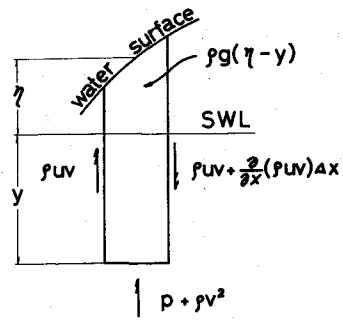


図-3 鉛直方向運動量束のバランス

この余剰運動量束をRadiation stressという。これの保存を考えると、沿岸でのサーフ・ビート、平均水面の変化などを与えることができるが、最も華やかな応用例は、Bowen⁷⁾にはじまる沿岸流発生理論であろう。

3 共鳴干渉^{6), 8), 9), 10)}

(1) 波数ベクトル

x の正の方向に進む波は, $kx - \sigma t = \frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t$ のように距離座標, 時間座標が結びつけられている。

静水面上に x, z 軸をとったとき, x の正の方向と α の角度をもって進行する波は $(\frac{2\pi}{L_x}x + \frac{2\pi}{L_z}z - \frac{2\pi}{T}t)$ の組合せによって表現される。 L_x, L_z は, それぞれ x, z 軸に沿って測った見掛けの波長である。図-4 から, 実際の波長 L をつかって

$$L_x = \frac{L}{\cos \alpha}, \quad L_z = \frac{L}{\sin \alpha} \quad \text{..... (2-15)}$$

となるから, 上の表現は,

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{L} \cos \alpha \cdot x + \frac{2\pi}{L} \sin \alpha \cdot z - \frac{2\pi}{T}t &= \\ &= k \cos \alpha \cdot x + k \sin \alpha \cdot z - \frac{2\pi}{T}t \\ &= k_x x + k_z z - \sigma t \quad \text{..... (2-16)} \end{aligned}$$

とかける。

大きさ k を波進行方向に沿ってとってみよう。このとき, その x 成分は, $k_x = k \cos \alpha$ となり, 上式の表現方法と一致するから, 波数をベクトルで表現する。波数の大きさと波進行方向がまとめて表現されたことになる。 (x, z)

は, その地点にいたる距離ベクトル $\mathbf{X}$ の x, z 成分であるから,

$$k_x x + k_z z - \sigma t = \mathbf{K} \cdot \mathbf{X} - \sigma t \quad \text{..... (2-17)}$$

と, ベクトルの内積をつかって書ける。

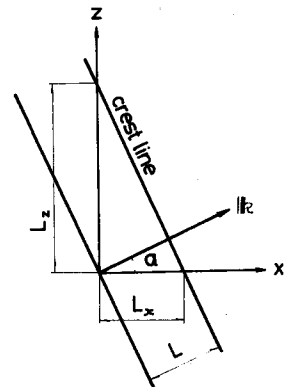


図-4 波数ベクトル

(2) 共鳴干渉の原理

ある振動系の運動は、外力のない場合、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \dots\dots (2-18)$$

であたえられる。解は、 $x = A \exp(i\omega t)$ で、 A は振幅、 ω はこの振動系に特有の振動数であって例えばバネの強さなどからきまるものである。この系に外力を加えて平衡状態をくずしたのち、外力をとりはらうと、系は $T = 2\pi/\omega$ という固有周期で自由振動する。

この系に繰返し外力 $c \exp(ipt)$ が加えられたとする。外力はその振動数 p で系を強制振動させようとし、系はその固有振動数 ω で振動しようとする。その兼ね合いで、振動の振幅がきまる。この時、

方程式 $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = c \exp(ipt)$ は解 $x = \frac{c}{\omega^2 - p^2} \exp(ipt) \quad \dots\dots (2-19)$

である。 $p = \omega$ となったとき、外力のエネルギーが系に蓄えられて共鳴が起り、振幅は非常に大きくなる。

水の波の場合、振動系の特性 ω に対応する量をきめる特性式は、周波数と波数の関係であり、深海波では、

$$\sigma^2 = g k = g |\mathbf{K}| \quad \dots\dots (2-20)$$

である。

自由振動をする波、自由波は、すべてこの関係をみたしている。さて、三つの自由波 $\exp i(\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{X} - \sigma_1 t)$, $\exp i(\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{X} - \sigma_2 t)$, $\exp i(\mathbf{K}_3 \cdot \mathbf{X} - \sigma_3 t)$ があつたとする。それぞれが (2-20) の関係をみたしている。この三つが重なりあつて、

$$\exp i\{(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3) \cdot \mathbf{X} - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)t\}$$

となったとき、これが (2-19) 式の右辺と同じ働きをして、新たな振動をつくりだす。この波は

$$\exp i(\mathbf{K}_4 \cdot \mathbf{X} - \sigma_4 t)$$

であり、

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3, \quad \sigma_4 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad \dots\dots (2-21)$$

である。 $\mathbf{K}_4$, σ_4 は、(2-19) の p に対応するが、必ずしも (2-20) 式をみたすとは限らない。しかし、もし $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の組合せが (2-20) 式を満足するように選ばれているならば、(2-19) 式で $\omega = p$ となったのと同じ原因により共鳴が起る。その結果、1, 2, 3 の波のエネルギーが、4 の波に移行して行く。

(3) 三次干渉によってエネルギー移行の生ずる理由

ここで、ふたつの自由波の干渉によって、第三の波にエネルギーが移行することもあるのではないかという疑問が生ずる。二次干渉ではエネルギー移行は生じない。その理由は次の通りである。

$\mathbf{K}_i$ の絶対値を k_i , x 軸となす角を α_i とする。波 1, 2 は自由波であるから、

$$\sigma_1^2 = g |\mathbf{K}_1| = g k_1, \quad \sigma_2^2 = g |\mathbf{K}_2| = g k_2 \quad \dots\dots (2-22)$$

が成立している。共鳴が起るためには、

$$\sigma_3^2 = g |\mathbf{K}_3|, \quad \sigma_3 = \sigma_1 \pm \sigma_2, \quad \mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_1 \pm \mathbf{K}_2 \quad \dots\dots (2-23)$$

が成立すればよい。つまり、

$$(\sigma_1 \pm \sigma_2)^2 = g |\mathbf{K}_1 \pm \mathbf{K}_2| \quad \dots\dots (2-24)$$

である。両辺の自乗をつくり (2-23) を代入する。

$$\begin{aligned} [(\sigma_1 \pm \sigma_2)^2]^2 &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \pm 2 \sigma_1 \sigma_2)^2 = (gk_1 + gk_2 \pm 2g(k_1 k_2)^{\frac{1}{2}})^2 \\ &= g^2 [k_1^2 + k_2^2 + 6k_1 k_2 \pm 4(k_1 k_2)^{\frac{1}{2}}(k_1 + k_2)] \\ g^2 [|\mathbf{K}_1 \pm \mathbf{K}_2|^2] &= g^2 [\sqrt{(k_1 \cos \alpha_1 \pm k_2 \cos \alpha_2)^2 + (k_1 \sin \alpha_1 \pm k_2 \sin \alpha_2)^2}]^2 \\ &= g^2 [k_1^2 + k_2^2 \pm 2k_1 k_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \end{aligned}$$

したがって、(2-24) が成立するためには、

$$6k_1 k_2 \pm 4(k_1 k_2)^{\frac{1}{2}}(k_1 + k_2) = \pm 2k_1 k_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

つまり、

$$3 \mp \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \mp 2 \left(\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}} \right) \quad \dots\dots (2-25)$$

をみたまふ組合せがあればよい。左辺の値は 4 と 2 の間にあるが、右辺の絶対値は 4 以上の値をとる。したがって、この式をみたす解はただふたつ、つまり、 $\alpha_1 = \alpha_2$ または $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi$ で、しかも $k_1 = k_2$ である場合に限られる。最初の例は同一方法に進む大きさの同じ波の干渉（進行波としての自己干渉）、第二の例は重複波としての自己干渉であって、異なる波群間のエネルギーのやりとりを意味するものではない。

では、三つの自由波による共鳴干渉は起りうるだろうか。簡単のために、ふたつの波群は同一方向に同じ大きさの波数を持ち、それに第三の波が加わった例をしらべよう。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_4 &= 2\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_3 \\ \sigma_4 &= 2\sigma_1 - \sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (2-26)$$

としたとき、 $\sigma_4^2 = g |\mathbf{K}_4|$ が成立する条件を求める。若干の計算の結果

$$6 + \cos(\alpha_1 - \alpha_3) = 2 \left[-\frac{3}{2} \left(\sqrt{\frac{k_1}{k_3}} \right)^2 + 4 \sqrt{\frac{k_1}{k_3}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{k_1}{k_3}}} \right] \quad \dots\dots (2-27)$$

をうる。たとえば、

$$\sqrt{\frac{k_1}{k_3}} = 1.2 \text{ とするとき、 } \alpha_1 - \alpha_3 \doteq 20^\circ$$

であれば、共鳴干渉が生ずる。

(4) 共鳴干渉

深海での表面波をとりあげる。のちに速度ポテンシャルの形を、ラプラスの式をみたし、 $y \rightarrow -\infty$ での条件を満足するように想定するので、表面条件がどんな形に書かれるかをしらべてみる。

表面圧力条件

$$\phi_t + g \eta + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = 0 \quad \text{on } y = \eta(x, z, t)$$

を静水面のまわりにテイラー展開すると、 η について、

$$\eta = -\frac{1}{g} \phi_t \quad \dots\dots - \frac{1}{2g} |\nabla \phi|^2 - \frac{1}{2g} \eta \{ |\nabla \phi|^2 \}_y \quad \dots\dots$$

$$= -\frac{1}{g} \phi_t \dots - \frac{1}{2g} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2g^2} \phi_t \{ |\nabla \phi|^2 \}_y + \dots \quad (2-28)$$

となる。他の項は、ここでやる議論に必要なので省略した。波形連続条件は、

$$\eta_t + \eta_x \phi_x + \eta_z \phi_z = \phi_y \quad \text{on } y = \eta$$

である。これに (2-28) を代入して η を消去すると、

$$\phi_{tt} + g \phi_y = -\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2} g^{-1} \{ \phi_t (|\nabla \phi|^2)_y \}_t + \dots \quad (2-29)$$

が表面条件となる。

解の形として

$$\begin{aligned} \phi = & \sum_l \{ A_l(t) e^{i \mathbf{K}_l \cdot \mathbf{X}} + A_{-l}(t) \cdot e^{-i \mathbf{K}_l \cdot \mathbf{X}} \} e^{|\mathbf{K}_l| y} \\ & + \sum_{l, m} \{ A_{l, m}(t) e^{i (\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_m) \cdot \mathbf{X}} + A_{-l, -m}(t) \cdot e^{-i (\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_m) \cdot \mathbf{X}} \} e^{|\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_m| y} \\ & + \sum_{l, m, n} \{ A_{l, m, n}(t) e^{i (\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_n) \cdot \mathbf{X}} + A_{-l, -m, -n}(t) e^{-i (\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_n) \cdot \mathbf{X}} \} \\ & \times e^{|\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_n| y} \end{aligned} \quad \dots (2-30)$$

を想定する。 $A_{-l}(t) e^{-i \mathbf{K}_l \cdot \mathbf{X}}$ は $A_l(t) e^{i \mathbf{K}_l \cdot \mathbf{X}}$ とは共役な量である。これは連続の式、および $y \rightarrow -\infty$ で流速零の条件をみたしている。あとは、表面条件 (2-29) をみたすことを考えればよい。

(2-30) では、 A_l は一次、 $A_{l, m}$ は二次、 $A_{l, m, n}$ は三次の項で、当然 $|A_l| > |A_{l, m}| > |A_{l, m, n}|$ が成立することを前提としている。

(2-29) の右辺の最低次は二次であるから、一次の項に対しては、

$$\frac{d^2 A_l}{dt^2} + g |\mathbf{K}_l| A_l = 0, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots (2-31)$$

となり、その解は、例えば

$$A_l = a_l e^{-i \sigma_l t}, \quad \sigma_l^2 = g |\mathbf{K}_l| \quad \dots (2-32)$$

である。

三次干渉を考えればよいから、(2-29) 式右辺の第二項のみ取出して議論を進める。一次の解が

$$\phi = a_l e^{-i \sigma_l t} e^{-i \mathbf{K}_l \cdot \mathbf{X}} e^{|\mathbf{K}_l| y} \quad \dots (2-33)$$

の形をしているから、 $y=0$ では、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2g} \left[\phi_t \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\}_y \right]_t &= \frac{1}{2g} \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} (a_l e^{-i \sigma_l t}) e^{i \mathbf{K}_l \cdot \mathbf{X} + |\mathbf{K}_l| y} \right. \\ &\quad \times \left. \{ a_m a_n (-k_{m, x} - k_{n, x}) e^{-i (\sigma_m + \sigma_n) t + i (\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_n) \cdot \mathbf{X} + \{ |\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_n| \} y} \} \right]_y \\ &= \alpha \cdot a_l a_m a_n e^{i (\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_n) \cdot \mathbf{X}} e^{-i (\sigma_l + \sigma_m + \sigma_n) t} \quad \dots (2-34) \end{aligned}$$

となる。 α は、この演算の結果生じた係数で、干渉の強さを表す係数で実数値をとる。

これから、三次の振幅 $A_{l, m, n}$ は、

$$\frac{d^2 A_{l, m, n}}{dt^2} + g |K_l + K_m + K_n| A_{l, m, n} = \alpha a_l a_m a_n e^{-i(\sigma_l + \sigma_m + \sigma_n)t} \quad \dots (2-35)$$

をとけば与えられることが分るが、この式は(1-13)と同じ形式で、解として永年項をふくみ、時間の経過とともに $|A_{l, m, n}| > |A_l|$ となって摂動を破綻せしめる。

そこで、平均法³⁾を採用することとし、一次の解 $a_k e^{-i\sigma_k t}$ の振幅 a_k が時間とともにゆっくりと変化するとおく。

(2-31)式は、このとき

$$\{-\sigma_k^2 a_k + g |K_k| a_k\} e^{-i\sigma_k t} - i\sigma_k \frac{da_k}{dt} e^{-i\sigma_k t} + \dots = 0$$

とかける。最初の中括弧は一次項をまとめてある。第二項は(2-35)式に編入してやり、永年項をもたらさないためには、(2-35)式の右边が零、つまり

$$\sigma_k \frac{da_k}{dt} = i\alpha a_l a_m a_n, \text{ただし, } \sigma_k = \sigma_l + \sigma_m + \sigma_n \quad \dots (2-36)$$

という条件を満足せしめればよい。

さて、 $K_k = K_l + K_m + K_n$ 、 $\sigma_k = \sigma_l + \sigma_m + \sigma_n$ をみたすもののうち、 $k=l$ 、 $m=-n$ というもののだけを取上げてみよう。 a_m の共役複素数 a_{-m}^* を a_m^* とかくと、(2-36)式は

$$\sigma_k \frac{da_k}{dt} = i\alpha a_k a_m a_m^*, \text{ 解は } a_k = a_k(0) e^{i\frac{\alpha}{\sigma_k} a_m a_m^* t} \quad \dots (2-37)$$

となり、もとの表現に戻すと、

$$A_k(t) = a_k(0) \exp \left[-i \left(\sigma_k - \frac{\alpha}{\sigma_k} a_m a_m^* \right) t \right] \quad \dots (2-38)$$

で、非線型干渉の結果、周波数変調が生じている。

つぎに、 $K_l = K_k - K_m - K_n$ 、 $\sigma_l = \sigma_k - \sigma_m - \sigma_n$ をみたすものに対して、

$$\sigma_l \frac{da_l}{dt} = i\beta a_k a_m^* a_n^* \quad \dots (2-39)$$

がえられる。 β は新たな干渉の強さをしめす実係数である。(2-37)式に a_k^* をかけ、(2-39)式と共役なものに a_l をかけると、

$$\frac{\sigma_k}{\alpha} a_k^* \frac{da_k}{dt} = i a_k^* a_l a_m a_n, \quad \frac{\sigma_l}{\beta} a_l \frac{da_l}{dt} = -i a_l a_k^* a_m a_n$$

がえられるので辺々相加えて

$$\frac{\sigma_k}{\alpha} \frac{d}{dt} |a_k|^2 + \frac{\sigma_l}{\beta} \frac{d}{dt} |a_l|^2 = 0 \quad \dots (2-40)$$

つまりは、

$$\frac{\sigma_k}{\alpha} |a_k(t)|^2 + \frac{\sigma_l}{\beta} |a_l(t)|^2 = \frac{\sigma_k}{\alpha} |a_k(0)|^2 + \frac{\sigma_l}{\beta} |a_l(0)|^2 \quad \dots (2-41)$$

となる。基本波 l から、 k へのエネルギー移行は、エネルギー総和が一定だという法則のもとに生じている。

共鳴干渉によると、第四の波の振幅は、時間 t に比例して増大する。このため、摂動法の欠陥に基づく誤った結論ではないのかという批判もあったが、Longuet-Higgins 等¹¹⁾ McGoldrick 等¹²⁾ の

実験により、実証された。

図-5は、McGoldrick等の実験結果の一例である。基本波は互いに直交し、 f_1 、 f_2 という周波数をもっている。図で f_1 、 f_2 に他にくらべて大きなエネルギーが集中しているのはこのためである。共鳴点は $2f_1 - f_2$ で、これは三次項であるにもかかわらず、 $f_1 - f_2$ 、 $2f_1$ など二次項より大きなエネルギーを有しており、確かに共鳴干渉により生じたことが認められた。

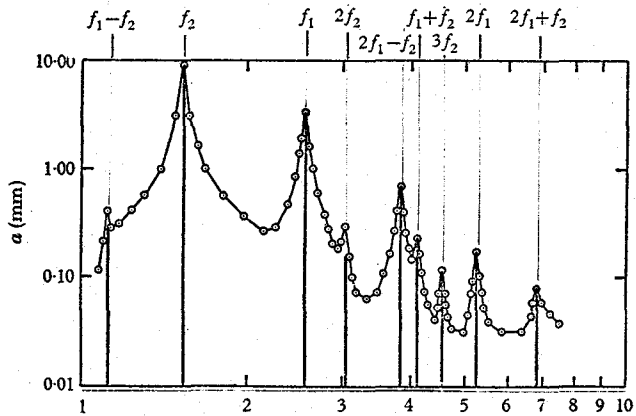


図-5 共鳴干渉によるエネルギー移行

海洋波のスペクトルで、異なる波群がエネルギーを交換するメカニズムとして重要視されている。

III 長波

1 長波の摂動

三つの特性長、 h_0 (水深)、 l_0 (波長)、 a (波高)をもちいて、各項の相対的な重要性を比較する²⁾

次元をもつ量に'をつけると、

$$x' = l_0 x, \quad y' = h_0 y, \quad u' = \frac{a}{h_0} \sqrt{gh_0} u, \quad v' = \frac{a}{h_0} \frac{1}{h_0} \sqrt{gh_0} v$$

$$p' = \rho gh_0 p, \quad \eta' = a \eta, \quad t' = \frac{l_0}{\sqrt{gh_0}} t, \quad d' = h_0 d$$

により、無次元変数 x, y etc を導入して式を書きあらためる。たとえば、水平方向の運動の式

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'}$$

$$\text{を, } \frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{\frac{a}{h_0} \sqrt{gh_0}}{\frac{l_0}{\sqrt{gh_0}}} \frac{\partial u}{\partial t} = g \frac{a}{l_0} \frac{\partial u}{\partial t}$$

などと変換すると、

$$g \frac{h_0}{l_0} \left[\frac{a}{h_0} \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{a}{h_0} \right)^2 u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right] + g \frac{a^2 l_0}{h_0^3} v \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

をうる。これに h_0/l_0 を乗じ、 $\delta = h_0^2/l_0^2$ 、 $\epsilon = a/h_0$ とすると、水平方向の運動の式は

$$\delta \{ \epsilon u_t + \epsilon^2 u u_x + p_x \} + \epsilon^2 v u_y = 0 \quad \dots (3-1)$$

である。同じ操作により、鉛直方向の運動の式

$$\delta \{ \epsilon v_t + \epsilon^2 u v_x + 1 + p_y \} + \epsilon^2 v v_y = 0 \quad \dots (3-2)$$

$$\text{連続の式: } \partial u_x + v_y = 0 \quad \dots\dots (3-3)$$

$$\text{非回転の条件 } u_y = v_x \quad \dots\dots (3-4)$$

$$\text{波形連続の条件 } \partial \{ \epsilon \eta_t + \epsilon^2 u \eta_x \} = \epsilon v \quad \text{on } y = \epsilon \eta \quad \dots\dots (3-5)$$

$$\text{表面圧力条件 } p = 0 \quad \text{on } y = \epsilon \eta \quad \dots\dots (3-6)$$

$$\text{水底境界条件 } v = 0 \quad \text{on } y = -d \quad \dots\dots (3-7)$$

をうる。

$\delta < \epsilon$ であれば, $\kappa = \delta / \epsilon = h_0^3 / a l_0^2$ を展開のパラメタに選べる。 k^{-1} は Ursell のパラメタである。上式中の δ を $\kappa \epsilon$ としたのち,

$$u = u_0 + \kappa u_1 + \dots\dots\dots \quad \dots\dots (3-8)$$

とし, 表面条件を $y = \epsilon \eta_0$ でのものを書きなおすと, κ^0 の項から

$$v_0 \equiv 0, \quad u_0 = u_0(x, t), \quad p_0 = 0 \quad \text{on } y = \beta \eta_0 \quad \dots\dots (3-9)$$

がえられ, $o(\kappa)$ として

$$\left. \begin{aligned} \epsilon u_{0t} + \epsilon^2 u_0 u_{0x} + p_{0x} \\ 1 + p_{0y} &= 0 \\ \epsilon u_{0x} + v_{1y} &= 0 \\ u_{1y} &= v_{1x} \\ \epsilon \eta_{0t} + \epsilon^2 u_0 \eta_{0x} - v_1 &= 0 \quad \text{on } y = \epsilon \eta_0 \\ p_1 + \epsilon \eta_1 p_{0y} &= 0 \quad \text{on } y = \epsilon \eta_0 \\ v_1 &= 0 \quad \text{on } y = -d \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (3-10)$$

(3-9)₃ と (3-10)₂ より

$$p_0 = \beta \eta_0 - y \quad \dots\dots (3-11)$$

と静水圧分布になる。

連続の式と海底での条件から,

$$v_1 = -\epsilon u_{0x}(d + y) \quad \dots\dots (3-12)$$

である。 η_0, u_0 をとくために, さらに

$$\eta_0 = \eta_0^{(0)} + \epsilon \eta_0^{(1)} + \dots\dots (3-13)$$

などと展開して, (3-11), (3-12) を (3-10) に入れると,

$$O(\epsilon) \quad \left. \begin{aligned} u_{0t}^{(0)} + \eta_{0x}^{(0)} &= 0 \\ \eta_{0t}^{(0)} + d u_{0x}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (3-14)$$

$$O(\epsilon^2) : \left. \begin{aligned} u_{0t}^{(1)} + \eta_{0x}^{(1)} &= -u_0^{(0)} u_{0x}^{(0)} \\ \eta_{0t}^{(1)} + d u_{0x}^{(1)} &= -u_0^{(0)} \eta_{0x}^{(0)} - \eta_0^{(0)} u_{0x}^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (3-15)$$

であり, (3-14) から

$$\frac{\partial^2 \eta^{(0)}}{\partial t^2} - d \frac{\partial^2 \eta^{(0)}}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots (3-16)$$

という線型の長波の式をうる。その解のひとつ,

$$\eta_0^{(0)} = \eta_0^{(0)}(x - \sqrt{d}t), \quad u_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{d}} \eta_0^{(0)}$$

を代入して,

$$\frac{\partial^2 \eta_0^{(1)}}{\partial t^2} - d \frac{\partial^2 \eta_0^{(1)}}{\partial x^2} = d \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{3}{2} \frac{(\eta_0^{(0)})^2}{d} \right\} \quad \dots\dots (3-17)$$

が、第二近似を解くための式として得られる。

$\epsilon = 1$ のときの展開を Friedrichs の展開という。¹³⁾

$$u = u_0 + \delta u_1 + \dots\dots$$

のようにおくと、 $O(\delta^0)$ の項から、

$$v_0 \equiv 0, \quad u_0 = u_0(x, t), \quad p(x, \eta_0, t) = 0 \quad \dots\dots (3-18)$$

をうる。ここで $\eta_0 = \eta_0(x, t)$ としているが、 $\eta_0 \equiv \text{const}$ とすると Laitone の展開¹⁴⁾となる。

u_0, η_0 を求めるための式は次元を有する形で

$$\left. \begin{aligned} u_{0t} + uu_{0x} + g \eta_{0x} &= 0 \\ \eta_{0t} + [u_0(d + \eta_0)]_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3-19)$$

とかけ、波高の有限性まで含めた浅水理論と呼ばれるものである。

Johnson¹⁵⁾の展開では、Horiguchi の展開とは違い

$$v' = \frac{a}{l_0} \sqrt{gh_0} v, \quad p' = \rho g h_0 - \rho g y' + \rho g a p$$

とおく。また、進行している波を中心に考える。波は局地的な水深によってきまる波速 $\sqrt{gd}$ で進む。

これとともに移動する座標系から眺めると、波形の変化はかなりゆっくりと生ずるであろう。このふたつを表現するため、

$$\xi = \int \frac{dx}{\sqrt{d}} - t, \quad X = r \epsilon x \quad \dots\dots (3-20)$$

という新しい座標系でかきなおす。 $\delta = \kappa \epsilon$ として、基本式群は、

$$-u_\xi + \epsilon u \left[r \epsilon u_x + \frac{1}{v_0} u_\xi \right] + \epsilon v u_y + \left[r \epsilon p_x + \frac{1}{v_0} p_\xi \right] = 0$$

$$\kappa \epsilon \left[-v_\xi + \epsilon u \left\{ r \epsilon v_x + \frac{1}{v_0} v_\xi \right\} + \epsilon v v_y \right] + p_y = 0$$

$$r \epsilon u_x + \frac{1}{v_0} u_\xi + v_y = 0$$

$$1 - y + \epsilon p = 0 \quad \text{on } y = 1 + \epsilon \eta$$

$$v = -\eta_\xi + \epsilon u \left\{ r \epsilon \eta_x + \frac{1}{v_0} \eta_\xi \right\} \quad \text{on } y = 1 + \epsilon \eta,$$

$$\frac{v}{u} = \sigma \epsilon H \left(\frac{\sigma}{r} X \right) \quad \text{on } y = H \left(\frac{\sigma}{r} X \right) \quad \dots\dots (3-21)$$

である。ここで $v_0 = \sqrt{d}$, H は水底を表し、 H' は $\sigma X / r$ についての微分、 $d = 1 - H$ である。

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \dots\dots$$

と展開して、

$$r \eta_{0x} + \frac{3}{2} d^{-\frac{3}{2}} \eta_0 \eta_{0\xi} + \frac{\kappa}{6} d^{\frac{1}{2}} \eta_{0\xi\xi\xi} + \frac{\sigma}{4} \frac{d_x}{d} \eta_0 = 0 \quad \dots\dots (3-22)$$

がえられる。

有限振幅の影響を表す第二項を基本にとり、線型項（第一項）、分散項（第三項）、水深変化の項（第四項）の相対的比重を r, κ, σ であらわしてある。 $r = \kappa = \sigma = 1$ のとき、上式は角谷の式¹⁷⁾と呼ばれる。

この式には、水路幅の影響なども入れることができ、また相対的比重を変化せしめて、種々な条件下での浅水変形の法則を求めうる。¹⁸⁾

2 浅水理論（うちあげ高）

（3-19）式を特性曲線をつかって解くことができる。¹³⁾ 時には海底摩擦の効果まで入れて、特性曲線法を用いた数値計算さえ行われている。

運動している物体とともに動きながら、その物体に特有の量 F を測定しよう。時間 t に位置 x にあるとする。 x は勿論時間 t の関数である。 F の変化率は

$$\frac{dF(x, t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x}$$

である。 dx/dt はその物体の速度である。

例えば、山のおもとを早朝に出発して気温 F を測りながら登山するとしよう。出発時、ふもとでは 10°C 、山頂では 4°C であった。日の出とともに気温は上昇し、山頂に登りついたとき、山頂で丁度 10°C 、ふもとで 20°C であった。登山速度を旨く調節すると、携行している温度計は、常に一定値 10°C をしめすようにできるであろう。このように歩けば、

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

である。逆にいうと、

$$\frac{\partial F}{\partial t} + f(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

が与えられたとき、 $dx/dt = f(x, t)$ できまる速度で歩けば F が一定値となる。この速度は (x, t) 一平面内の曲線をあたえ、特性曲線と呼ばれる。

一様傾斜面上での波を、解析的にといたのは Carrier と Greenspan である。¹⁹⁾ $c^2 = d + \eta$ を（3-19）式に入れ、和と差をつくると、普通の教科書によく見られる形で、

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \right\} (u+2c-t) &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \right\} (u-2c+t) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots (3-23)$$

とかかれる。 $\alpha = u + 2c - t$ は、前進特性曲線 ($dx/dt = u+c$) 上で一定値、 $-\beta = u - 2c + t$ は後退特性曲線上で一定値である。

上式をとくことは、 (x, t) の組合せに対して u, c の値をきめることである。これは (x, t) 平面を特性曲線群で覆うことによって行われる。各特性曲線は、固有の α, β の値をもっているから、 (α, β) の値をきめれば、それに (x, t) の点が対応する。この対応を 1 対 1 であるような変換をすると、 u, c を (α, β) の関数として解いてもよいことになる（図-6 参照）。

前進特性曲線上では α は一定値で β のみが変化する。したがって、これに沿っては、特性曲線を与える式

$$\frac{dx}{dt} = u + c \quad \text{を} \quad \frac{dx}{d\beta} \bigg/ \frac{dt}{d\beta} = u + c \quad \dots\dots (3-24)$$

とできる。同じく後退特性曲線に沿って、

$$\frac{dx}{d\alpha} \bigg/ \frac{dt}{d\alpha} = u - c \quad \dots\dots (3-25)$$

をうる。新変数として、

$$\lambda = \alpha - \beta = 2u + 2t, \quad \sigma = \alpha + \beta = 4c \quad \dots\dots (3-26)$$

を定義する(図-6)。(3-24), (3-25)は、

$$-x_\lambda + x_\sigma = (u + c) (-t_\lambda + t_\sigma)$$

$$x_\lambda + x_\sigma = (u - c) (t_\lambda + t_\sigma)$$

となり、和および差をつくって、

$$x_\sigma = u t_\sigma - c t_\lambda, \quad x_\lambda = u t_\lambda - c t_\sigma$$

をうる。前式を λ , 後式を σ で偏微分し、 $x_{\lambda\sigma}$ を消却するとともに、(3-26)を λ, σ で偏微分してえられる関係をつかって、

$$\sigma (t_{\sigma\sigma} - t_{\lambda\lambda}) + 3 t_\sigma = 0$$

また(3-26)の第一式をつかって、

$$\sigma (u_{\sigma\sigma} - u_{\lambda\lambda}) + 3 u_\sigma = 0 \quad \dots\dots (3-27)$$

という線型の式をうる。

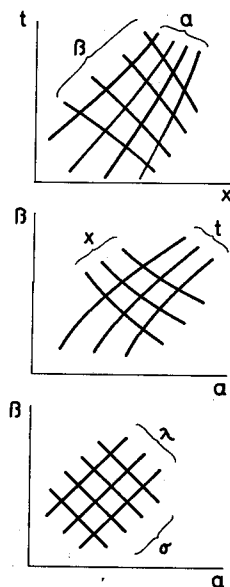


図-6 (x, t) と (α, β) の変換

いま、 $u = A(\lambda)B(\sigma)$ と変数分離をしてみる。²¹⁾

$$A_{\lambda\lambda} + n^2 A = 0, \quad B_{\sigma\sigma} + \frac{3}{\sigma} B_\sigma + n^2 B = 0$$

となり、基本解として、

$$A(\lambda) = \sin n\lambda, \quad \cos n\lambda, \quad B(\sigma) = \frac{1}{\sigma} J_1(n\sigma), \quad \frac{1}{\sigma} N_1(n\sigma)$$

がえられ、周期的な波で反射率1.0のとき、次元をもつ形で

$$g_\eta = \frac{a}{4} J_0(4n \sqrt{g_\eta - mx}) \sin 2n(u + mt) - \frac{1}{2} \frac{a^2}{\sigma^2} \cos^2 2n(u + mt) J_1^2(4n \sqrt{g_\eta - mx}) \quad \dots\dots (3-28)$$

となる。有限振幅の影響は第二項がつけ加わったこと、および mt の代りに $u + mt$ となったことなどに表われている。

例として

$$\eta = \sin(u + mt), \quad \text{ただし、} u = a\eta \quad \dots\dots (3-29)$$

をとってみよう。 $a = 0$ のとき、 η は線型解に対応し全く正弦的に変化する。ある高さ η_1 の出現時間 t_1 は、位相 mt_1 に対応している。非線型振動で η_1 の生ずる時間 t_n はやはり位相 mt_1 を与えなければならぬ。よって

$$mt_1 = a\eta_1 + mt_n, \quad t_n = t_1 - \frac{a}{m} \eta_1$$

で、 t_n の方が a ， η_1 とも正ならば小さくなる。図-7の如く波形は前傾化する。

波の先端では $c=0$ ，つまり $\sigma=0$ で、

(3-28)式は

$$g\eta = \frac{a}{4} \sin n\lambda - \frac{a^2 n^2}{8} \cos^2 n\lambda$$

最大うちあげ高 $\eta_{\max}$ は、

$$\eta_{\max} = \frac{a}{4g} \quad \dots\dots (3-30)$$

で与えられる。

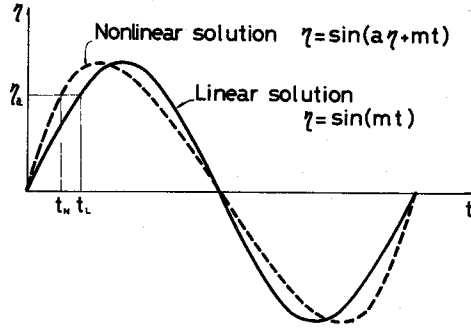


図-7 非線型効果による波形の前傾化

展開のパラメタに H/L や H/d をつかうと、汀線附近では H/d が大きくなるため、非線型を入れないでは話ができない。特殊な場合に限り、上記の如き面倒な変換を使用して、問題を線型化できたのである。

うちあげ高の問題を見方を変えて考えよう。静水時に、斜面と水面の交点にあった水粒子は、斜面にそって運動するので、これからうちあげ高が求まる筈である。しかも、長波という条件では、この水粒子の鉛直方向移動量は水平方向移動量より小さいだろうから、この比を展開のパラメタに選べば、話は簡単になるに違いない。ただし、粒子について運動をみなければならないから、ラグランジュ型の運動方程式を使用する。この結果、第一近似の線型方程式でうちあげ高をとくことができる。(22), (23), (24)

3 KdVの波

(1) GGMの線型化²⁵⁾

角谷の式で $d_x=0$ のとき、次元をもつ形では、

$$\eta_x + \frac{3}{2}g^{-\frac{1}{2}}d^{-\frac{3}{2}}\eta\eta_\xi + \frac{1}{6}g^{-\frac{3}{2}}d^{\frac{1}{2}}\eta\xi\xi_\xi = 0$$

となるが、

$$\eta = -2.9^{-\frac{1}{10}}d \cdot u, \quad \xi = 9^{-\frac{1}{5}}\sqrt{\frac{d}{g}}x, \quad x = 2.9^{-\frac{1}{10}}d \cdot t$$

という変換により、 u ， x ， t の式になおすと、

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad \dots\dots (3-31)$$

というKdV方程式の標準形にできる。ただし、上の変換の第一式からみて 弧立波 $\eta = a \operatorname{sech}^2 \xi$ に対応して $u = -A \operatorname{sech}^2 Bx$ と負号のつく解になっている。

非線型であるKdV方程式を直接解く代りに、これと関係のある線型方程式をとき、その解からKdVの解をつくる方法が発見された。²⁵⁾ (3-31)式の解 u をエネルギーポテンシャル関数とするSchrodinger方程式を考える。

$$\Psi_{xx} + [\lambda - u]\Psi = 0 \quad \dots\dots (3-32)$$

λ は固有値で時間の関数でもありうる。これは u を新変数 Ψ に変換する関係だともてよい。

u を Ψ であらわし、KdV方程式に代入すると、

$$\lambda_t \psi^2 + [\psi Q_x - \psi_x Q]_x = 0 \quad \dots (3-33)$$

$$\text{ただし, } Q \equiv \psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda) \psi_x$$

となる。 $|x| \rightarrow 0$ で、 $\psi, \psi_x, \dots$ などが零に近づくとき、上式を $-\infty$ から $+\infty$ の間で積分して

$$\lambda_t = 0 \quad \text{つまり} \quad \lambda \text{は定数} \quad \dots (3-34)$$

であることがわかる。それ故2回積分して、積分常数C, Dを使って

$$\psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda) \psi_x = C\psi + D \int \frac{dx}{\psi^2} \quad \dots (3-35)$$

を解けば ψ がえられる。ただし ψ は正規化してあるものとする。

(3-35)には u が入っているので簡単に行かないようにみえるが、Gel'fand-Levitan²⁶⁾の結果を用いれば、無限遠での u の形に対する上式の解 ψ さえ分れば、それを延長して、いついかなる場所での u を組立てることができるというのがGardner等の結論である。

固有値 λ が負の実数 $\lambda_n = -k_n^2$ の場合を考える。任意の λ_n に対して解が存在する訳でなく、 λ_n は分離スペクトルをしている。この点については、後に例を示す。

$|x| \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow 0$ であるから、固有関数 ψ_n は、

$$\psi_t + \psi_{xxx} + 3k_n^2 \psi_x = 0 \quad \dots (3-36)$$

をみatus。なぜなら、 $\lambda_t = 0$ のとき(3-33)を一度積分して、

$\psi_x Q - \psi Q_x = D$ だが、 $|x| \rightarrow \infty$ で $\psi \rightarrow 0$ となるので、 $D = 0$ である。もう一度積分すると、 $|x| \rightarrow \infty$ で

$$\frac{\psi}{\psi_x} = \frac{Q}{Q_x} \quad \text{より} \quad C\psi = Q = \psi_t + \psi_{xxx} - 3\lambda \psi_x \quad \text{であり}$$

この両辺に ψ をかけて積分すると、

$$\begin{aligned} C \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2 dx &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \psi_{xxx} dx - 3\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \psi_x dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2 dx \end{aligned}$$

右辺第二項は部分積分をおこなって処理している。正規化しているので右辺は零、結局 $C = 0$ でなければならない。

このようにして、 ψ_n の無限遠での解は(3-36)を解けばえられる。

$$\psi_n \approx C_n(t) e^{k_n x}, \quad \text{for } x \rightarrow -\infty$$

などすると、解として

$$\left. \begin{aligned} \psi_n &= C_n(0) e^{-4k_n^3 t} e^{k_n x}, \quad \text{for } x \rightarrow -\infty \\ &= C_n(0) e^{4k_n^3 t} e^{-k_n x}, \quad \text{for } x \rightarrow +\infty \end{aligned} \right\} \quad \dots (3-37)$$

が無限遠で $u \rightarrow 0$ に対応して得られる。

Gel'fand-Levitanの重要な結果は、このようにして与えられた ψ に対応する u は、次のG-L方程式

$$R(x+y) + K(x, y) + \int_{-\infty}^x R(y+z) \cdot K(x, z) dz = 0, \quad x \geq y$$

$$\text{ただし} \quad R(x+y) = \sum_{n=1}^N C_n^2(t) \cdot e^{k_n(x+y)} \quad \dots (3-38)$$

の解 $K(x, y)$ から

$$u = 2 \frac{d}{dx} K(x, x)$$

として与えられるというのである。

KdV の解として孤立波があることを知っているので、GGKMのやり方でこれが出てくるかを調べてみよう。いうまでもなく無限遠で $u \rightarrow 0$ である。また、 t_0 時に波頂は x_0 にあり、波頂にひいた接線は水平であるとする。

$n = 1$ のとき²⁷⁾

$R(x+y) = Ce^{-4k^3t} e^{k(x+y)}$ で、また $K(x, y) = f(x, t) e^{ky}$ とおく。 $f(x, t)$ は $G-L$ の式

$$Ce^{-4k^3t} e^{k(x+y)} + f e^{ky} + \int_{-\infty}^x Ce^{-4k^3t} e^{k(y+z)} f e^{kz} dz = 0$$

から、

$$f(x, t) = -Ce^{-4k^3t} e^{kx} / \left[1 + \frac{C}{2k} e^{-4k^3t} e^{kt} \right]$$

となるので

$$u = 2 \frac{d}{dx} K(x, x) = -4k Ce^{-4k^3t} e^{2kx} / \left[1 + \frac{C}{2k} e^{-4k^3t} e^{2kx} \right]$$

となる。

波頂での条件

$$\partial u / \partial x \big|_{t=t_0, x=x_0} = 0$$

から、

$$C = 2k e^{4k^3t_0} e^{-2kx_0}$$

をうるから、これを入れてかきなおすと、

$$u = -2k^2 \operatorname{sech}^2 \left[k \{ (x - x_0) - 2k^2 (t - t_0) \} \right] \dots\dots (3-39)$$

となって、確かに満足されることが示される。

(2) ソリトンの衝突

数値実験の結果から、²⁸⁾ふたつのソリトン（孤立波）が同一方向に進行するとき、次のような面白い現象がみられた。波高の大きいソリトンは早い波速で進むので、やがて小さいソリトンに追いつき、追越して行く。

追い付いたソリトンの波高が他にくらべ非常に大きいと、大きいソリトンは小さい方を呑みこみ、やがてうしろに吐きだして追いつて行く。しばらく離れると、ソリトンの形状は衝突以前のものに戻る。このように、非線型でありながら、衝突前後の波形は不変であるという面白い性質をもつ。波形それ自身は非線型の影響のもとにきまっている（自己干渉）が、衝突による両者間の干渉（相互干渉）は、しばらく離れると全くみられない。

さて、追い付いたソリトンの波高が、小さいソリトンの波高と同じオーダーの場合、奇妙なことが起る（図-8）。後からきたソリトンの山が小さなソリトンの山と重なることはないまま、大きなソリトンの振幅は減少し、前にあるソリトンの振幅は増大する。当初の振幅の大小関係が入れかわってしまうのである。そして、ふたつは離れて行く。これは、速度の異なる2個の球の弾性衝突に似ている。後から追い付いた球が衝突により前の球に運動量変化を生ぜしめ、その結果衝突後は速度が入れ変っ

てしまうのである。

この現象は、2 個のソリトンの場合には解析的にも証明された。²⁹⁾

この証明は厳密ではあるけれども非常に複雑で、n 個のソリトンへの拡張は殆んど不可能である。

n 個のソリトンの場合、衝突時の詳細は示せないけれども、衝突前後

を通じてソリトン群の重心の速度は不変であることが証明されている。³⁰⁾ つまり、衝突による変化は各ソリトンの位相のズレだけにあらわれるが、その総和は不変であるというのである。

K d V 方程式の解 $u(x, t)$ としてソリトンを取り、 u, u_x, u_{xx} などが $|x| \rightarrow \infty$ で零となるとする。(3-31) 式を x について $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すると、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t dx - 6 \int_{-\infty}^{+\infty} u u_x dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxx} dx = 0$$

から、 $\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = 0$, つまり $\int_{-\infty}^{+\infty} u dx = \text{const.} \dots\dots (3-40)$

がえられる。

同じく、K d V 方程式に u を乗じて積分すると、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx = \text{const.} \dots\dots (3-41)$$

がえられる。

さて、 $y_x(x, t) \equiv u(x, t)$ という新変数を導入すると、K d V 方程式は一度 x について積分したのち

$$y_t - 3y_x^2 + y_{xxx} = 0$$

となる。 y_t, y_x, y_{xxx} は無限遠で零となるとしている。この式から

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} y dx = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} y_x^2 dx - \int_{-\infty}^{+\infty} y_{xxx} dx = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx = \text{cont.}$$

であり、また

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} y dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^x u(x', t') dx'$$

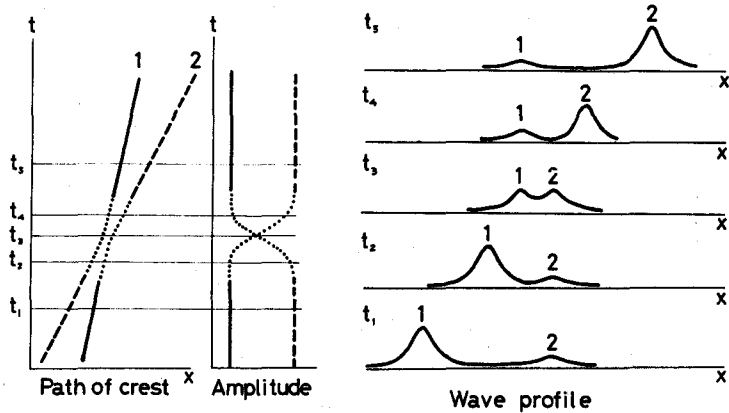


図-8 大きさのあまり違わないソリトンの衝突

$$= x \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^x u(x', t') dx' \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} x u(x, t) dx$$

とも表わされる。このうち右辺第一項は、上の (3-40) 式と同じく評価されるから、 u^2, u_{xx} が $1/x$ より早く零になるならば、消えてしまう。その結果、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} y dx = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} x u dx = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx = \text{const} \quad \dots\dots (3-42)$$

である。重心位置 x_G は、

$$x_G = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x u dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} u dx} \quad \dots\dots (3-43)$$

であたえられるから、(3-40), (3-42), (3-43) から

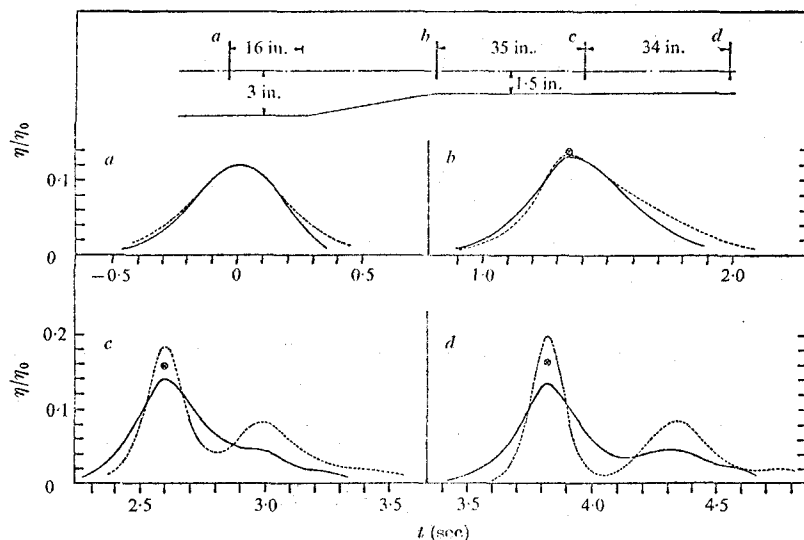
$$\frac{dx_G}{dt} = \text{const} \quad \dots\dots (3-44)$$

をうる。

Wadati - Toda は、位相差の和が一定となることの他に、ソリトンが衝突の前後を通じて安定で、もともとの波形を保持することをも証明している。

(3) ソリトンの分裂

図-9 は、Madsen - Mei³¹⁾ の実験結果である。ひとつの山をもつ波が、深い所から浅い場所に侵入すると、いくつかの山をもった波に分裂する。図中実線は実験値、点線は数値計算の結果である。このような現象を Zabusky は G G K M の理論を適用して解いた。³²⁾



Comparison between: ----, theory and —, experiment for initial amplitude to depth ratio, $\eta_0/h_0 = 0.12$. ⊗, estimated experimental amplitude for no viscous damping.

図-9 ソリトンの分裂の実験

Schrodinger 方程式

$$\psi_{xx} + [\lambda - u] \psi = 0 \quad \dots\dots (3-45)$$

をとく。図-10(a)のように、エネルギー・ポテンシャル u は、 $x=0$ で最小値をもつ負の関数で、 y 軸に関し対称であるとする。固有値 λ も負の数である。固有関数 ψ は連続で、特異点をもたないとする。

$\lambda = \lambda_1$ のとき遠方の方から ψ を組立てる。これは G G K M の方法で、まず遠方の u に対し ψ をつくりあげることと対応する。

$0 > \lambda_1 > u_{\min}$ であるから、十分遠方では、 $\lambda_1 - u < 0$ である。つまり

$$\psi_{xx} / \psi = -(\lambda_1 - u) > 0$$

で

$$\left. \begin{array}{ll} \psi > 0 & \text{なら} \quad \psi_{xx} > 0 \\ \psi < 0 & \text{なら} \quad \psi_{xx} < 0 \end{array} \right\} \dots\dots (3-46)$$

であるから、いずれにせよ図-10(b) にしめすように、解曲線は x 軸に対し凸なものとなる。

$x=0$ に向って曲線を作っていくと、そのうち、 $\lambda_1 = u$ が成立し、 $\psi_{xx}=0$ となる転移点 (T.P.) に到達する。

この点より内側では、

$$\psi_{xx} / \psi < 0 \quad \dots\dots (3-47)$$

が成立し、曲線は x 軸に凹となって、 y 軸上で出会うけれども、図-11(a)の場合には、両者の勾配は絶対値が同じでも符号が異なるため、 y 軸上に特異点をつくり、求める解ではない。

λ を λ_2 に増してやると、転移点が外側にずれ、 $\psi_{xx} / \psi < 0$ の領域が広がるため、 y 軸上で2曲線は $\psi_x = 0$ となって滑らかにつながる。これは解のひとつである。

さらに λ をふやしていくと、図-11(c)(d)のように変化するが、 ψ_x がつながらないため、解とはならない。 λ_5 のとき、 ψ 、 ψ_x とも滑らかにつながり、解のひとつである。

このように、 λ が u に対し特殊な関係をみたす場合にのみ、滑らかな解(固有関数)がえられるのである。

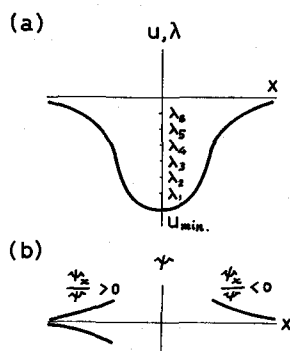


図-10 エネルギーポテンシャル, 固有値, 固有関数

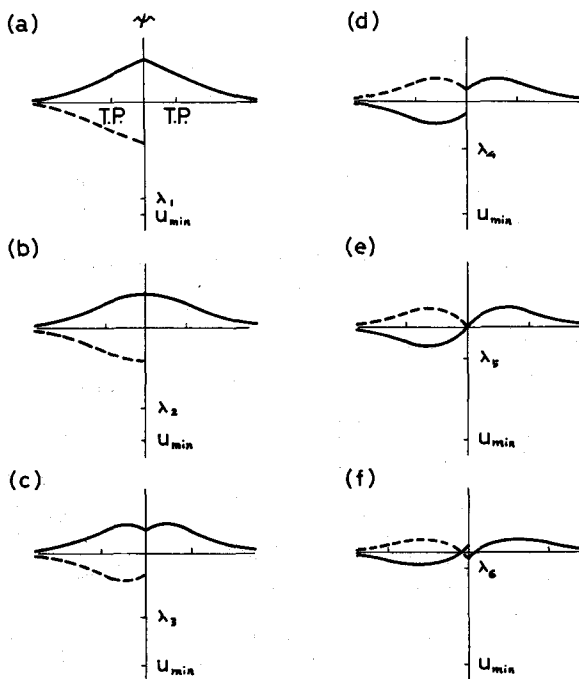


図-11 固有値と固有関数

$$u = -u_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x \quad \dots\dots (3-48)$$

と与えられる場合³³⁾,

$$\Psi_{xx} + [\lambda + u_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x] \Psi = 0 \quad \dots\dots (3-49)$$

の固有値 λ_n は

$$\lambda_n = -\frac{\alpha^2}{4} \left[-(1+2n) + \sqrt{1 + \frac{4u_0}{\alpha^2}} \right]^2 \quad \dots\dots (3-50)$$

である。ここで、 n は零、または正の整数である。

固有値 $\lambda_n = -k_n^2$ のとき、(3-39)から、ソリトンの振幅 A_n が、 $A_n = +2\lambda_n$ で与えられることがわかっている。また、KdV方程式にしたがう波では、運動量およびエネルギーが保存される。それ故、初期波形が有しているこれらの量は、時間が経過しても保存されねばならない。一方では、図-9のように水深が変化すると、それに制限をうけるために、ソリトンという形で存在できる波の個数は(3-50)式できまるので、前後の運動量等に過不足が生ずる。この分が、ソリトン背後に生ずる振動部分を作るのである。

初期波形を³²⁾

$$u(x, 0) = -p(p+1) \operatorname{sech}^2 x$$

とすると、固有値を与える(3-50)式は

$$\lambda_n = -(p-n)^2 = -(\epsilon - 1 + N - n)^2, \quad n = 0, 1, \dots\dots, (N-1) \quad \dots\dots (3-51)$$

となる。ここで、 N はソリトンとして存在できる波の総数であり、 $N \leq p+1$ をみたす最大の整数である。 ϵ は、 $0 \leq \epsilon \leq 1$ なる数であって、 $\epsilon = 1 + p - N$ である。

いま p が整数なら、 $\epsilon = 0$ で、波はソリトン群に分裂し、振動部分は存在しない。

もし p が整数でないとき、

$$\lambda_n = -2\epsilon^2, -2(\epsilon+1)^2, \dots\dots$$

のように、ソリトンの振幅がきまり、これらの運動量、エネルギーを初期の状態からひきさると、残りが振動部分に対応する量となる。

$p = 0.8$ ($\epsilon = 0.8$) に対応する例を表-1にしめす。数値計算でKdV方程式を直接解いた例とくらべ、上の推定値が非常によい一致を示している。図-12は、数値計算による波形をしめす。この例ではソリトンは最初の第一波だけで、あとは振動部分である。

同様の考えを適用すると³⁴⁾ 水深 h_1 から浅い水深 h_2 に一個のソリトンが侵入して、

$$N \text{ 個に分裂するとき、} N \text{ は } \\ N < \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 + 8r^{-\frac{9}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ r = h_2 / h_1$$

をみたす最大の整数で、それらの振幅 a_n は、

$$a_n = \frac{r^2}{2} \left[1 + 4r^{-\frac{9}{4}} + 2n(n-1) - (2n-1) \left(1 + 8r^{-\frac{9}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \dots\dots (3-52)$$

であたえられる(図-13参照)。

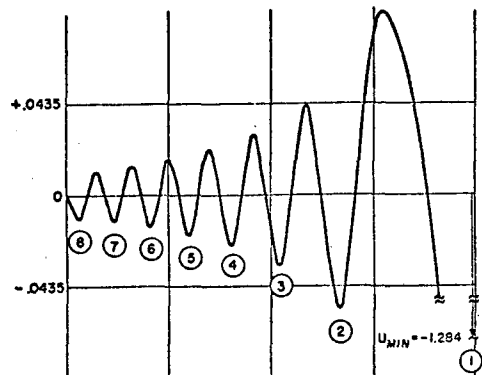


図-12 ソリトンの分裂幅 = 0.8

以上の取扱いには難点もある。
まず、水深変化がかなり急に生ずる必要のあることである。このとき、もともとの式(3-22)が、水深変化がゆるやかであるという仮定から導びかれたことと矛盾する。そのうえ、水深が急にかわると当然反射があり、これがソリトンの分裂や振動部分の発生と見間違われる可能性もある。

Schrödinger 方程式にもとづいて議論をすすめるのは、いささか物理的な像を画きにくい。KdV方程式から、運動量その他無限個の量の保存則が導きだされることがわかっている。³⁵⁾ 長島³⁶⁾が、運動量、エネルギー、三次の保存量($\frac{1}{3}u^3 - u_x^2$)を用いて振幅をきめると、Schrödinger の式からきめた振幅と必ずしも一致するとは限らないことをしめしている。

表 - 1

	理 論 解	p = 0.8 に対する	
		理 論 値	数値計算値
ソリトンの振幅	$-2\epsilon^2$	-1.28	-1.2838
全運動量	$-2p(p+1)$	-3.200	-3.155
全エネルギー	$+\frac{2}{3}p^2(p+1)^2$	-1.3653	-1.3648
振動部の運動量	$+\frac{2}{3}\epsilon(1-\epsilon)$	+0.3200	+0.7145
振動部のエネルギー	$+\frac{2}{3}\epsilon^2(1-\epsilon)^2$	-0.01707	-0.01633

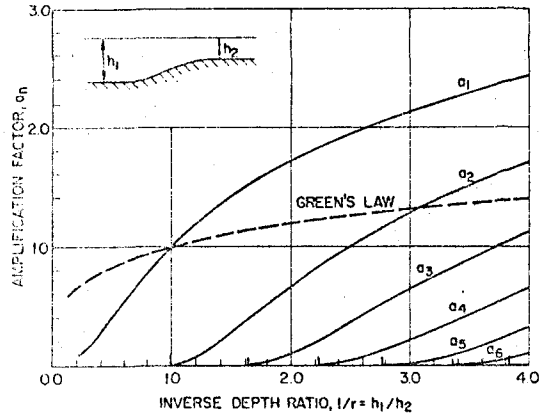


図-13 ソリトンの分裂と増幅

(4) 浅水増幅

水深変化がゆっくりしたものであれば、初期波形を維持したまま波高変化が生ずることもあろう。この方が、角谷の式を導いたもともとの仮定に合致している。

初期波形としてクノイド波を考えてもよいが¹⁸⁾ 簡単のために孤立波を取りあげる。¹⁶⁾ 角谷の式で $r = \kappa = 1$ とし、 σ だけは他より小さいとすると、

$$\eta_x + \alpha_1 \eta \eta_\xi + \alpha_2 \eta_\xi \xi + \sigma \alpha_3 \eta = 0 \quad \dots\dots (3-53)$$

で、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は水深 $d(x)$ の関数である。

σ は小さいので、波形の概略は残りの三項できまるとする。これはKdV方程式そのものであるから、 α_1 等を定数とみなした解

$$\eta_0 = N \operatorname{sech}^2 \beta, \quad \beta = \left(\frac{N \alpha_1}{12 \alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\xi - \frac{1}{3} \alpha_1 \int N dx \right] \quad \dots\dots (3-54)$$

となる。これを $O(\sigma^0)$ の解とし、 $O(\sigma)$ まで求めることにする。

$$\eta = \eta_0 + \sigma \eta_1$$

とおき、 η_0 の N や α_1, α_2 が x によって変化する変化率は、平均法の応用を考えて、 $O(\sigma)$ であるとする。このとき、 η_x の項は、

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial x} = \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \Big|_{\beta=\text{const}} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \eta_0}{\partial \beta}$$

となって、右辺第一項は dN/dx をふくみ $O(\sigma)$ として繰り入れられる。第二近似 η_1 を求める式は、

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x} \Big|_{\beta=\text{const}} + L[\eta_1] = M[\eta_0],$$

ここで、

$$L[\eta_1] = -\frac{1}{3} \alpha_1 N \left(\frac{N \alpha_1}{12 \alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \eta_1}{\partial \beta} + \alpha_1 \left(\frac{N \alpha_1}{12 \alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \beta} (\eta_0 \eta_1) \\ + \alpha_2 \left(\frac{N \alpha_1}{12 \alpha_2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^3 \eta_1}{\partial \beta^3}$$

$$M[\eta_0] = \frac{dN}{dx} \text{sech}^2 \beta + \alpha_3 \eta_0 + \frac{\beta}{2N} \frac{dN}{dx} \frac{\partial \eta_1}{\partial \beta} + 2 \frac{\beta}{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)} \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \frac{\partial \eta_0}{\partial \beta} \\ - \frac{1}{3} \left(\frac{N \alpha_1}{12 \alpha_2} \right) \int^x N dx \cdot \frac{d \alpha_1}{dx} \cdot \frac{\partial \eta_0}{\partial \beta} \quad \dots\dots (3-55)$$

である。

η_1 の振幅は、どんなことがあっても η_0 の振幅より大きくってはならない。 η_1 が永年項（ここでは x に比例して大きくなる項）をもたないようにする。³⁷⁾ (3-55)式から、この条件をみたすようにするためには、次のような演算子 $L^*[v]$ をつくって考える。これは、 $L[u]$ と、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v L[u] d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} u L^*[v] d\beta \quad \dots\dots (3-56)$$

という関係で結ばれる。 $L^*[v] = 0$ の解 v をもとめ、これを (3-55)式の両辺にかけて積分すると、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \Big|_{\beta=\text{const}} \cdot d\beta + \int_{-\infty}^{+\infty} v L[\eta_1] d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot M[\eta_0] d\beta$$

になるが、(3-56)式を入れ、 $L^*[v] = 0$ をつかうと

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \Big|_{\beta=\text{const}} \cdot d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot M[\eta_0] d\beta \quad \dots\dots (3-57)$$

である。

η_1 を振幅部 $A(x)$ 、振動数部 $B(\beta)$ の積にかくと、

$$\frac{\partial A}{\partial x} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot B \cdot d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} v M[\eta_0] d\eta$$

である。もし、右辺が零になるように選べたならば、 A は定数となる。

(3-56)式の左辺を部分積分をつかって書き直すと、 $L^*[v]$ の形がきまり、視察から $v = \text{sech}^2 \beta$ である事がきめられる。ついで、(3-57)式の右辺が零である条件を求めると、

$$\frac{N_x}{N} + \frac{d}{dx} = 0 \quad \dots\dots (3-58)$$

で、この解は

$$Nd = \text{const} \quad \dots\dots (3-59)$$

である。

微小振幅のときの波高は水深の $-1/4$ 乗に比例するが孤立波形のまま変形する波は水深に逆比例する。この結果は、(3-52)式とも異り、いずれが適当かは、実験値との比較によって決定するより方法がない。

N 碎波現象（深水表面波）

1 波頂角³⁸⁾

進行波とする。水粒子の速度が波面の進行速度（波速）より大きくなると、水は表面よりとびだし碎波が起る。

進行方向への水平流速の最大値は波頂で生ずるから、これが波速と等しくなった条件が、正に碎波せんとする限界を与えるであろう。

波頂に原点を有し波速で移動する座標系からみると、波頂で水粒子の速度は零となる。流速の空間分布をきめてやることは、複素ポテンシャルの空間分布をきめることと等価である。波頂の近辺のみを考えると、原点で零となる関数は、原点からの距離 z をつかって z^n のようにあらわせる（図-14 参照）。

物理平面 z は

$$z = x + iy$$

複素ポテンシャル w は

$$w = \phi + i\psi$$

であるが、両者の対応は上のことから

$$w = Aie^{\frac{n\pi i}{2}} z^n \quad \dots\dots (4-1)$$

の形におく。 A , n はこれからきめる定数である。 z^n の係数を上のようにしたのは、今後の計算を楽にするためであって、特別な意味はない。

x , y を r , θ をつかって、

$$x = r \sin \theta, \quad y = -r \cos \theta$$

とかき、 w の表現に入れると、

$$\begin{aligned} w &= Aie^{\frac{n\pi i}{2}} (x + iy)^n = Aie^{\frac{n\pi i}{2}} (r \sin \theta - i r \cos \theta)^n \\ &= Aie^{\frac{n\pi i}{2}} r^n (-i)^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &= Aie^{\frac{n\pi i}{2}} r^n e^{-\frac{n\pi i}{2}} e^{in\theta} \\ &= Air^n [\cos n\theta + i \sin n\theta] \quad \dots\dots (4-2) \end{aligned}$$

これから、ただちに、

$$\phi = -Ar^n \sin n\theta, \quad \psi = Ar^n \cos n\theta \quad \dots\dots (4-3)$$

であることが知れる。

流関数は y 軸に関して対称となっている。自由表面は一本の流線となり、これを $\psi = 0$ とする。碎波の瞬間に波頂角が 2α になったとすると、 $\theta = \pm\alpha$ で $\phi = 0$ となるには、

$$n\alpha = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \text{つまり} \quad \alpha = \pm \frac{\pi}{2n} \quad \dots\dots (4-5)$$

であればよい。

さて、波頂にあった水粒子（初速度零）が波面に沿って、ほんの僅かの距離すべりおりたとする。位置のエネルギーが運動のエネルギーに変化するから、波面にそった速度 q は、

$$q^2 = 2gr \cos \alpha \quad \dots\dots (4-6)$$

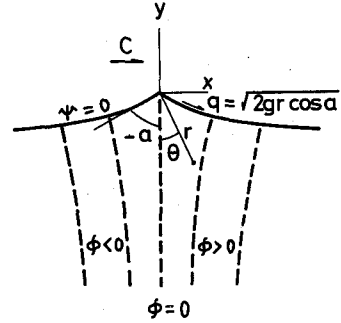


図-14 波頂近くでの z , w の対応

であたえられる。

もちろん、複素ポテンシャル (4-3) をつかっても、この点の流速が計算され、

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} = A n r^{n-1} \sin n \theta \\ v_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = A n r^{n-1} \cos n \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (4-7)$$

$$\text{から, } q^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = A^2 n^2 r^{2n-2} \dots\dots (4-8)$$

とえられる。(4-6) と (4-8) は一致しなければならないので、 r の指数から

$$\left. \begin{aligned} 2n-2 &= 1, \text{ つまり } n = \frac{3}{2}, \text{ よって } \alpha = \frac{\pi}{3} \\ \text{また } A &= \pm \frac{2}{3} \sqrt{g} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4-9)$$

である。 A に対しては負符号を採用する。

こうして、進行波が対称形を保ったまま崩れるとき、波頂角が 120° になることがしめされた。この議論は波頂の近傍のみに適用され、しかも曲率が大きくとも表面張力の影響は考えられてない。

2 波頂での加速度³⁹⁾

波頂附近の水粒子は、どのような加速度をもっているであろうか。

前節と同じ座標系をとると、波動は定常となるので、加速度として u_t の項はなく、 $uu_x + vv_y$ などをしらべれば十分である。

(4-1) 式から

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = -u + i v = A i e^{\frac{n\pi i}{2}} n z^{n-1} \\ &= A i e^{(n-1)\theta i} e^{\frac{\pi i}{2}} r^{n-1} \dots\dots (4-10) \end{aligned}$$

さらに x について偏微分して

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} &= A i e^{\frac{n\pi i}{2}} n \frac{\partial}{\partial x} (x + i y)^{n-1} \\ &= A i e^{\frac{n\pi i}{2}} n (n-1) r^{n-2} \dots\dots (4-11) \end{aligned}$$

である。(4-11) 式と共役な量をつくり (4-10) 式と乗ずると

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x}\right) (-u + i v) &= \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &= \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) + i \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) = a_x + i a_y \end{aligned}$$

をうる。ここで、連続の式、非回転の条件をつかっている。同様に (4-10), (4-11) 式の右辺をつかって計算すると、

$$\begin{aligned} a_x + i a_y &= A(-i) e^{-(n-2)\theta i} e^{-\pi i} n(n-1) r^{n-2} \\ &\quad \times A i e^{(n-1)\theta i} e^{\frac{\pi i}{2}} r^{n-1} \\ &= A^2 n^2 (n-1) e^{(\theta-\frac{\pi}{2})i} r^{2n-3} \\ &= \frac{g}{2} e^{(\theta-\frac{\pi}{2})i} = \frac{1}{2} g \sin \theta - i \frac{1}{2} g \cos \theta \dots\dots (4-12) \end{aligned}$$

となる。ここで、前節の結果を n , A に代入している。

(3) 最大波形勾配⁴⁰⁾

$$\eta = a \cos (kx - \sigma t)$$
$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right|_{\max} = a \sigma^2 = agk = \frac{2a}{L} \pi g \quad \dots\dots (4-13)$$
$$\frac{2a}{L} \pi g = \frac{g}{2} \text{ より, } \frac{2a}{L} = \frac{1}{2\pi} = 0.159 \quad \dots\dots (4-14)$$

Michell⁴⁰⁾ にしたがって最高波を求めてみる。座標系としては波速と共に動くものを考え、また y 軸は下方を正と取る (図-15)。 $y \rightarrow \infty$ の点では、この座標系からみて、水粒子は一定流速 (波速と同じ) で、波と逆方向に移動している。また、表面はひとつの流線となり、ここでは $\phi=0$ で、しかもベルヌーイの定理から $q^2 = 2gy$ が満たされている。 q は表面に沿って割った流速である。

もうひとつの定理は、関数 $f(z)$ が、 z - 平面の有限域において、無限に多くの点、 $a_1, a_2, \dots$ において一位の極をもつとき、各点での留数を $A_1, A_2, \dots$ とすれば、

$$f(z) \in \Sigma \frac{A^n}{z - a_n}$$

B-1-29

(1) 新変数 U の導入

砕波時に波頂はとがり、ここは特異点となる。

Stokes によると、この点は

$$w \propto z^{\frac{3}{2}} \quad \text{または} \quad z \propto w^{\frac{2}{3}}$$

であるので $\frac{dz}{dw} \propto w^{-\frac{1}{3}}$, 対数をとると $\log\left(\frac{dz}{dw}\right) \propto -\frac{1}{3} \log w$

さらに w で微分すると、

$$\frac{d}{dw} \left(\log \frac{dz}{dw} \right) \propto -\frac{1}{3w} \quad \dots\dots (4-15)$$

となって、(4-15)式が波頂 ($w=0$) で一位の極をもつ関数になることがわかり、上記の定理の応用が可能である。

したがって、

$$U = \log \frac{dz}{dw} \quad \dots\dots (4-16)$$

で定義される U を使うこととする。この U の利点は、まだある。ある流線にそっての速度を q , その水平線となす角度を θ とすると、水平、鉛直流速 u , v は

$$u = q \cos \theta, \quad v = q \sin \theta \quad \dots\dots (4-17)$$

であるから、

$$\frac{dw}{dz} = u - iv = q \cos \theta - i q \sin \theta = q e^{-i\theta} \quad \dots\dots (4-18)$$

つまり、

$$U = \log \frac{e^{i\theta}}{q} = -\log q + i\theta \quad \dots\dots (4-19)$$

となって、新変数 U の実部は流速の大きさ、虚部は流れの方向に対応した量となっている。

(2) U と w の写像関数

波面は流線 $\phi=0$ であるから、これに沿っては ϕ だけが変化する。したがって、波面上では、

$$\frac{dU}{dw} = \frac{dU}{d\phi} = -\frac{d(\log q)}{d\phi} + i \frac{d\theta}{d\phi} \quad \dots\dots (4-20)$$

が成立する。

このうち虚部は、波形との関連において、未定係数をふくむ級数に書くことができる。図-15に示す幾何学的条件から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \Delta \theta &= \cos \theta \cdot \Delta x + \sin \theta \cdot \Delta y = \frac{1}{q} [u \cdot \Delta x + v \cdot \Delta y] \\ &= \frac{1}{q} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta y \right] = \frac{\Delta \phi}{q} \quad \dots\dots (4-21) \end{aligned}$$

であるので、極限移行すると、

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\kappa}{q} \quad \dots\dots (4-22)$$

である。 $\phi=0$, $\phi=\pi$ は相隣る波頂に対応し、各波頂で波面は直線となり曲率は零、また流速も零であるから、このふたつの比は一定となる。また曲率は π なる周期で繰返されるから、

$$\kappa = q (a_0 + a_1 \cos 2\phi + a_2 \cos 4\phi + \dots) \dots\dots (4-23)$$

と表現されるであろう。

これを代入すると、波面上で、

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dw} &= -\frac{d(\log q)}{d\phi} + i(a_0 + a_1 \cos 2\phi + \dots) \\ &= -\frac{d(\log q)}{d\phi} + i(a_0 + a_1 e^{2\phi i} + \dots) + (a_1 \sin \phi + \dots) \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dw} - i(a_0 + a_1 e^{2wi} + \dots) &= -\frac{d(\log q)}{d\phi} + (a_1 \sin \phi + \dots) \\ &\dots\dots (4-24) \end{aligned}$$

の右辺は実軸 $\phi=0$ で実数となるので、Schwarz の鏡像の原理を使用できる。

また、左辺第二項は $w=0$ で特異点とならない。したがって、左辺全体の関数形を以下にきめることとする。

(3) 無限遠での条件

$y \rightarrow \infty$ では、流速は一定値、したがってその逆数の対数である U も一定値、それを微分すると零である。また、(4-24)式の左辺にふくまれる e^{2wi} の項は、 $\phi \rightarrow \infty$ ($y \rightarrow \infty$) で零となるから (4-24) 式左辺は常数 ($-ia_0$) となる。

(4) 展開の主要部

(4-24)式のうち、波頂 $w=0, \pi, \dots$ で特異点を生ずるのは、第一項である。前述した定理とそれに続く説明とから、

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dw} - i(a_1 e^{2iw} + a_2 e^{4iw} + \dots) &= -\frac{1}{3} \sum \frac{1}{w-n\pi} - \frac{i}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \cot w - \frac{i}{3} \dots\dots (4-25) \end{aligned}$$

と展開の主要部を使って書ける。ここで、右辺の常数は無限遠での条件をみたとすようにきめてある。無限遠では $\cot \phi = -i \coth \phi \rightarrow -i$ となることをつかっている。

(5) 複素速度 dw/dz

(4-25)式を一度積分すると、

$$U = \log \left\{ (-i \sin w)^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{i}{3}w} \right\} + a_0' + \frac{1}{2} a_1 e^{2iw} + \dots\dots$$

となる。ここで、 $-i \sin w$ となっているのは、 $\phi \rightarrow \infty$ のとき、 $-i \sin w \rightarrow -i \sin i\phi \rightarrow \sinh \phi$ となり実数値となるようにしたからである。また $\phi \rightarrow \infty$ は実数値でなければならないから、積分定数 a_0' も実数である。 a_0' 以下の級数を計算の便のため、新しく

$$\log A(1 + c_1 e^{2iw} + \dots\dots) \dots\dots (4-26)$$

とかくと、

$$\frac{dz}{dw} = A (-i \sin w)^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{i}{3}w} (1 + c_1 e^{2iw} + \dots\dots)$$

となる。常数Aは、無限速での流速Vのスケールを

$$V = 2^{-\frac{1}{3}} \dots\dots (4-27)$$

ととれば、A=1になる。上の式から

$$\frac{dw}{dz} = (-i \sin w)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}iw} (1 + b_1 e^{2iw} + \dots) \dots\dots (4-28)$$

がえられる。

(6) 係数の決定

(x, y) 平面内での速度の分布は、(4-28)式内の係数 b_n をきめれば求められる。また、表面波形をしるには(4-23)式の係数 a_n 、これは(4-26)式の係数 c_n 、つまりは(4-28)式の係数 b_n であるから、 b_n をきめれば良いことになっている。

いままでに使わなかった物理的条件は、波面上でベルヌーイの定理が成立するという条件である。

波面に沿ってqが変化するが、これは $\phi=0$ の線であるから、これに沿っては ϕ の値のみが変化する。それ故qはw-平面では ϕ のみの関数である。また、ベルヌーイの定理 $q^2 = 2gy$ から、z-平面ではyだけの関数である。したがって、波面に沿っては、

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{i} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{i} \frac{d\phi}{dy}, \quad q^2 = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = \left(\frac{d\phi}{dy} \right)^2 \dots\dots (4-29)$$

である。またベルヌーイの式を ϕ で微分して

$$\frac{dq^2}{d\phi} = 2g \frac{dy}{d\phi} = 2g \frac{1}{q^2} \frac{d\phi}{dy} \quad \text{あるいは} \quad \frac{dq^4}{d\phi} = 4g \frac{d\phi}{dy} \dots\dots (4-30)$$

となる。この両辺に(4-28)式を代入して、 $b_1, b_2, \dots$

をきめると、

$$\frac{dw}{dz} = (-i \sin w)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}iw} [1 + 0.0397e^{2iw} + 0.0094e^{4iw} + 0.0002e^{6iw} + \dots] \dots\dots (4-31)$$

がえられ、係数はかなり急速に収束している。

(7) 最大波形勾配

(4-30)式を計算して(4-31)式をうるとき、gのスケールをきめてやる必要がある。もちろんgは重力の加速度であるが、波速Vを $2^{-\frac{1}{3}}$ にとるなど、計算の便宜上、様々なスケールをとっているので(4-31)式に対応する重力の加速度は、

$$2g = 1.66 \dots\dots (4-32)$$

である。

(4-31)式から、波の谷に対応して $\phi = \pi/2$ であるから

$$q^2 = (1 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots)^2 = (0.9677)^2$$

山と谷との鉛直距離は、

$$\frac{q^2}{2g} = \frac{(0.9677)^2}{1.66} = H$$

である。また波長Lは、 $\phi = \pi$ が対応するので、

$$L = \frac{\pi}{V} = 2^{\frac{1}{3}} \pi \dots\dots (4-33)$$

したがって、波形勾配

$$\frac{H}{L} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}} \pi} \frac{(0.9677)^2}{1.66} = 0.142 \quad \dots\dots (4-34)$$

がえられる。

同種の計算を浅海波について行うことができ、Yamada - Shiotani のものが、もっとも精度が高い。⁴³⁾

V おわりに

非線型の波の理論の一部を紹介した。数学的演算の詳細よりも、物理的なイメージを明らかにすること、および数学演算の基本的な道筋の説明に重点をおいたつもりである。Ⅱの部分は盛んに応用がなされている事柄で、どうしても理解しておく必要があろう。Ⅲは現在発展しつつある部門で、理論の発展もさることながら、実験等による裏付けのされる事が望ましい事項である。またⅣは、すでに解決済みのように見えるが、実は非対称となって碎ける波に適用できる理論はなく、今後の研究が必要であろう。

引用文献

- 1) 堀川, 西村: 港湾の屈曲および断面変化に伴う長波の変形, 第20回海講, pp 173~178, 1973.
- 2) Horiguchi, T.: A note on Ursell's parameter for long waves, Rep. No 7, Port & Harbour Research Institute, pp.1~16, 1964.
- 3) ボゴリュエフ・ミトロポリスキー (益子正教訳): 非線型振動論, 共立出版, 昭和36年
- 4) Longuet-Higgins, M.S.: The mechanics of the boundary-layer near the bottom in a progressive wave, Proc. 6th Conf. on Coastal Engg., pp 184~193
- 5) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart: Radiation stress in waves, a physical discussions with application, Deep Sea Research, Vol. 11, pp 529~562, 1964
- 6) Phillips, O. M.: The dynamics of the upper ocean, Camb. Univ. Press, 1966
- 7) Bowen, A. J.: The generation of longshore currents on a plane beach, J. Marine Res., Vol. 27, No 2, pp 206~215, 1969
- 8) Longuet-Higgins, M. S.: Resonant interactions between two trains of gravity waves, J. Fluid Mech., Vol 12, pp 321~332, 1962
- 9) Longuet-Higgins, M. S. and O. M. Phillips: Phase velocity effects in tertiary wave interactions, J. Fluid Mech., Vol 12, pp 333~336, 1962
- 10) Benny, D. J.: Non-linear gravity wave interactions, J. Fluid Mech., Vol 14, pp 577~584, 1962
- 11) Longuet-Higgins, M. S. and N. D. Smith: An experiment on third order resonant wave interactions, J. Fluid Mech., Vol 25, pp 417~435, 1966
- 12) McGoldrick, L. F. et al.: Measurements of third-order resonant wave interactions, J. Fluid Mech., Vol 25, pp 437~456, 1966
- 13) Stoker, J. J.: Water waves, pp 27~32, Interscience, 1957
- 14) Laitone, E. V.: The second approximation to cnoidal and solitary waves, J. Fluid Mech., Vol 9, pp 430~444, 1960

- 15) Johnson , R . S . : On the development of a solitary wave moving over an uneven bottom
Proc . Camb . Phil . Soc , Vol 73 , pp 183 ~ 202 , 1973
- 16) Shuto , N . : Shoaling of deformation of nonlinear long waves , Coastal Engg in Japan ,
Vol 16 , pp 1 ~ 12 , 1973
- 17) Kakutani , T . : Effect of an uneven bottom on gravity waves , J . Phys . Soc . Japan ,
Vol 30 , No 1 , pp 272 ~ 276 , 1971
- 18) 首藤 : 非線型長波の変形 — 水路幅、水深の変化する場合 — , 第 2 1 回海講 , (投稿中)
- 19) Carrier , G . F . and H . P . Greenspan : Water waves of finite amplitude on a sloping beach , J . Fluid Mech , Vol . pp 1958
- 20) 犬井 : 応用偏微分方程式論 , pp 330 ~ 353 , 岩波書店 , 1951
- 21) 首藤・松村 : 長波について — 一様傾斜斜面へのうちあげ高 — 第 1 2 回海講 , pp 176 ~ 179 ,
1965
- 22) Shuto , N . : Run - up of long waves on a sloping beach , Coastal Engg in Japan , Vol 10
pp 23 ~ 38 , 1967
- 23) Shuto , N . : Three - dimensional behavior of long waves on a sloping beach , Coastal Engg in Japan , Vol 11 , pp 53 ~ 58 , 1968
- 24) Shuto , N . : Standing long waves in front of a dike , Proc of the 13th Coastal Engg ,
pp 1629 ~ 1647 , 1972
- 25) Gardner . C . S . et al : Method for solving the Korteweg - de Vries equation , Phys . Review Letters , Vol 19 , No 19 , pp 1095 ~ 1097 , 1967
- 26) Gel'fand , I . M . and B . M . Levitan : On the determination of a differential equation from its spectrum function , American Math . Soc . Translations , Ser 2 , Vol 1 , pp 253 ~ 304 ,
1955
- 27) Kay , I . and H . E . Moses : Reflectionless transmission through dielectrics and scattering potentials , J . Appl . Phys , Vol 27 , No 12 , pp 1503 ~ 1508 , 1956
- 28) Zabusky , N . J . : Asynergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction , Proc . Symp . on Nonlinear Partial Diff . Eqnations , pp 223 ~ 258 ,
Acad . Press , 1967
- 29) Lax , P . D . : Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves , Commu . Pure Appl . Math , Vol 21 , pp 467 ~ 490 , 1968
- 30) Wadati , M . and M . Toda : The exact N - soliton solution of the Korteweg - de Vries equation , J . Phys . Soc . Japan , Vol 32 , No 5 , pp 1403 ~ 1411 , 1972
- 31) Madsen , O . S . and C . C . Mei : Solitary wave over an uneven bottom , J . Fluid Mech ,
Vol 39 , pp 781 ~ 791 , 1969
- 32) Zabusky , N . J . : Solitons and bound states of the time - independent Schrödinger equation , Phy . Review , Vol 168 , No 1 , pp 124 ~ 168
- 33) Landau , L . D . and E . M . Lifshitz : Quantum Mechanics , p . 69 , Pergamon Press .
- 34) Tappert , F . D . and N . J . Zabusky : Gradient - induced fission of solitons , Phy . Review Letters , Vol 27 , No 26 , pp 1774 ~ 1771 , 1971

- 35) Miura , R. M. et al : Korteweg -de Vries equation and generalizations . II.Existence of conservation laws and constants of motion , Math. Physics , Vol .9, No 8 ,pp 1204 ~ 1209, 1968
- 36) 長島 : 非線型分散波と保存則, 日本海洋学会講演会要旨, 1973
- 37) Otto , E. and R. N. Sudan : Nonlinear theory of ion acoustic waves with Landau damping, Phys . Fluid , Vol 12, No 11, pp 2388 ~ 2394 , 1969
- 38) Lamb. H. : Hydrodynamics , p. Dover
- 39) Longuet -Higgins , M. S. : The generation of capillary waves by steep gravity waves , J . Fluid Mech , Vol .16, pp 138 ~ 159 , 1963
- 40) Michell , J . H. : The highest waves in water , Phil . Mag , Vol .36 , pp 430 ~ 437 , 1893
- 41) たとえば, スミルノフ : 高等数学教程, III巻第二部, p 81 , 共立出版
- 42) たとえば, 寺沢 : 数学概論, 岩波
- 43) Yamada , H. and T. Shiotani : On the highest watar waves of permanent type , Bull . Disas . Prev . Res . Inst , Kyoto Univ , Vol .18 , part 2 , No 135 , pp 1 ~ 23 , 1968