

地下密度流について

嶋 祐 之

1. はじめに

地下水の密度流現象は海岸地下水を中心として Bordon, Ghyben, Herzberg らにより先駆的な研究が行なわれたが、さらに Nomitsu, Toyohara, Kamimoto (1927)¹⁾ によって解析的な手法による研究が行なわれ、その定常流としての特性が初めて明らかにされた。その後、地下水の過剰揚水による地盤沈下や海水浸透の問題が深刻化するとともに、深透機構についての基礎的研究や Recharge Well による地下水のかん養などの応用的研究がしだいに活発となって行った。また最近では、新しい水資源の開発方式の一つとして河口湖開発の計画が各所で検討されるにつれ、湖内の水質維持や周辺地下水の塩害防止のためのさらに詳細な研究が進められている。

地下密度流の概念から言えば、上記海岸地下水のような淡塩密度流のみならず、温泉のまわりの熱対流、土壌内の不飽和浸透流あるいは油井および注入井のために生じる油層内の流れなども含まれる。また、境界面が不安定となる条件や、その結果として生ずる混合、拡散の問題、あるいはいくつかの成分からなる気相および液相が媒質内で共存して流れたり、熱力学的な条件で互に他へ遷移したりする現象も対象となる。したがって、地下密度流の現象は土木工学、土質工学、採油工学、化学工学などの各分野から注目されており、現象の基礎概念や解析手法についての活発な討議が共通の場で行なわれるようになっている。すなわち、1969年には Haifa (Israel) で、1971年には Calgary (Canada) で、また 1972 年には Guelph (Canada) で多孔媒質流の国際シンポジウムが開催され、それぞれの分野間の情報交換や先導的な研究成果の発表が行なわれた。

このような情報交換や新しい知見をいかに土木工学の分野に取り入れて行くかは今後の課題であり、また研究の進展もこの方向に沿うことが予想される。ここでは、比較的土木工学の分野に関連の深いものだけをとり上げ、地下密度流の解析的手法について概説する。

2. 準一様定常流

地下密度流の基礎方程式から具体的な境界条件、初期条件を満足する厳密解が導かれる場合は極めて稀である。それは方程式の非線型性、従属変数の増加、境界条件の複雑さ等によるものである。しかし、鉛直流速が水平流速に比し無視できる場合には、層内の圧力は静水圧分布をなし、鉛直断面内では水平流速は一様であると見なされるので、解析的な解の得られる場合が少なくない。このような条件を満足する流れを準一様な流れと呼ぶ。


$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{Q_1}{h_1 + \zeta} = -K \frac{d\zeta}{dx} \\ u_2 &= \frac{Q_2}{h_2} = -K \left\{ (1-\varepsilon) \frac{d\zeta}{dx} + \varepsilon \frac{dh_2}{dx} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

		上 層	下 層
水	深	$\zeta + h_1$	h_2
密	度	ρ_1	ρ_2
流	速	u_1	u_2
海岸線水深		h_{10}	h_{20}
流	量	Q_1	Q_2
透 水 係 数		K	無次元密度差 $\epsilon = \Delta \rho / \rho$
海 の 水 深		$h_s = h_1 + h_2$	

海岸附近では、上層を陸側からの淡水 ($Q_1 = Q_L$) が流れ、下層では海側から塩水がくさび状に浸入し、定常状態では静止している。

$$\zeta = \varepsilon h_1 \dots \dots \dots (2)$$

(2)を(1)の第1式に代入すれば、境界面形状およびくさびの長さ l は直ちに求められ次式で示される。

$$\frac{h_1^2}{2} = \frac{|Q_L|}{\varepsilon(1+\varepsilon)K} x, \quad L = \frac{K\varepsilon(1+\varepsilon)h_1^2}{2|Q_L|} \dots\dots\dots (3)$$

上記の解では、 $x=0$ で $h_1=0$ ，すなわち上層流速 u_1 が無限大となる不都合が生ずる。また、現実の流れでも図—1で示す h_{10} が存在する。この原因は、海岸線附近では境界面の勾配がきつく鉛直流速が無視できないにもかかわらず、準一様流の仮定を適用しているためである。Henry²⁾ は Hamel³⁾ が地下水流に適用したホドグラフ法（後述）を用い二次元流としての厳密な解析を行っており、また

Glover⁴⁾ は類似の境界条件に対する近似解を与えている。

一方、Rumer & Harleman⁵⁾ は有限域の場合に対し、準一様流の仮定から出発して近似解を求め、実験と比較して良好な結果を得ている。野満⁶⁾ らも(a)で行なった先駆的研究に引続いて、海岸線附近での鉛直流速効果の検討を行なった。

いま、淡水層の任意点の鉛直流速を w_1 とすれば、連続の式より

$$w_1 = - \int_{-\zeta}^z \frac{\partial u_1}{\partial x} dz + \{w_1\}_{z=-\zeta} \dots\dots\dots (4)$$

(1)の第1式および(2)より $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ を求め、上式に代入して積分すれば、 w_1 を次式のように示すことができる。

$$w_1 = - \frac{Q_L^2}{K} \frac{1+\epsilon}{\epsilon} \frac{z+\zeta}{(h_1+\zeta)^3} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、自由表面上での鉛直流速 $\{w_1\}_{z=-\zeta}$ は小さいとして無視する。

上式と鉛直方向の Darcy 法則から w_1 を消去し、さらに淡水層内での圧力分布を求めれば

$$p_1 = \rho_1 g(z+\zeta) + \frac{\rho_1 g Q_L^2}{2k^2} \frac{1+\epsilon}{\epsilon} \frac{(z+\zeta)^2}{(h_1+\zeta)^3} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $x=0$ 、 $z=h_{10}$ で淡水層側から測った圧力の強さと、海側から測ったそれとが等しいという条件を適用すれば、海岸線における上層水深 h_{10} は次式のように示される。

$$h_{10} = \frac{|Q_L|}{K} \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{2}} = \frac{|Q_L|}{\sqrt{2\epsilon K}} \dots\dots\dots (7)$$

また、 h_{10} の存在を考慮すれば境界面形状は次式のように示される。

$$\frac{h_1^2}{2} = \frac{|Q_L|}{\epsilon(1+\epsilon)K} x + \frac{h_{10}^2}{2} \dots\dots\dots (8)$$

(7)を考慮しながら(8)を無次元化したものが次式である。

$$\frac{\epsilon K}{|Q_L|} h_1 = \left(\frac{\epsilon K}{|Q_L|} x + 0.5 \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (9)$$

図-2 は、(9)の解と Henry および Rumer & Harleman の解の比較を行なったもので、いずれの解も良く似た結果を与えることが知られる。

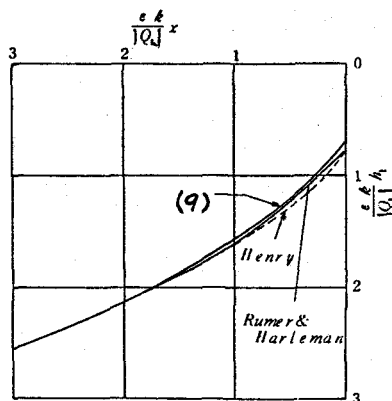


図-2 境界面形状について各解の比較

(c) 定常二層流

図-3のように淡水湖と海とが幅Lの透水層によって連絡している場合、湖面高 ξ_L が ϵh_s より低くなれば、塩水くさびは湖側に侵入し二層流が発達する。嶋⁷⁾はこのような流れに対し次のような取扱いを行なった。

(1)において、 ζ の流量に対する寄与は h_1 に比して小さいとし、また ϵ の二次以上を省略する。さらに $h_s = h_1 + h_2$ を考慮することにより、境界面形状ならびに自由表面形状を規定する二つの無次元化された微分方程式が次のように導かれる。

$$\frac{d\eta}{d\xi} = (1-\lambda)\mu \frac{1-\lambda-\eta}{(1-\eta)\eta} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{d\bar{\zeta}}{d\eta} = \frac{\epsilon(1-\eta)}{1-(1-\lambda)\eta} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -\frac{Q_2}{Q_1}, & \mu &= \frac{-Q_1 L}{K \epsilon h_s^2} \\ \xi &= x/L & \eta &= h_1/h_s \\ \bar{\zeta} &= \zeta/h_s \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

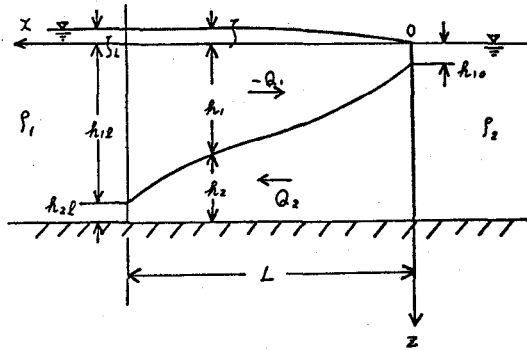


図-3 定常二層流

(10)および(11)を積分し、簡単のため境界条件を

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 0; & \eta &= 0, & \bar{\zeta} &= 0 \\ \xi &= 1; & \eta &= 1, & \bar{\zeta} &= \zeta_L/h_s = a \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

とおけば、二層流の定常特性を表す二つのパラメーター λ および μ （上下層の流量比および無次元上層流量）が a/ϵ の関数として示されることになる。また λ および μ が指定されれば、境界面形状および自由表面形状を求めることができる。

二層流は $a/\epsilon < 1$ で発達し、 a/ϵ の値に応じて λ および μ の値は図-4のようになる。

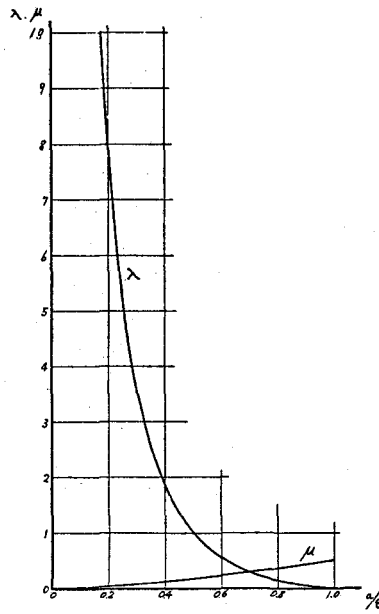


図-4 $a/\varepsilon - \lambda \cdot \mu$

また、岩佐⁸⁾らは Radial flow について考察を行ない、二重管の井戸でストレーナーの位置を適当に定めることにより、塩水と淡水の分離取水の問題を解析した。

(d) 降雨による塩水の遮断効果

雨が地中に浸透し、地下水面まで達すると、降雨の補給が十分であれば地下水面は上方に盛り上がり、雨水は淡水湖側へはもちろん海側に向っても流出する。このとき、図-5の示すように、塩水くさびが地下水面の最高となる断面 x_m より海側の $x = \ell$ の位置に上まっていれば、たとえ湖面が海面より低くても^{9), 10)}塩水は降雨によって遮断されることになる。

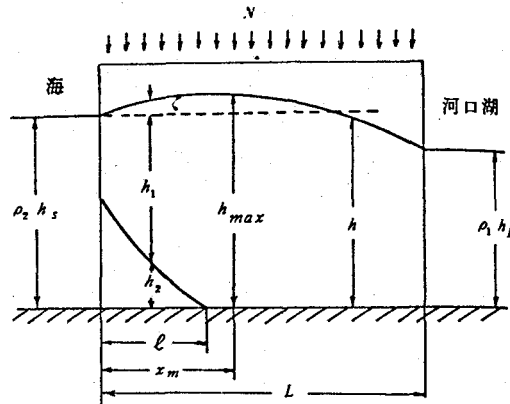


図-5 降雨補給のある塩水くさび

実際の降雨は連続的ではないが、ここでは平均的に考えることとし、また降雨量のうち蒸発あるいは表

面流出等の損失は除き地下水面に到達する単位時間あたりの有効降雨量をNとする。

0 < x < ℓ では連続の式は

$$\frac{d}{dx}\{u_1(h_1+\zeta)\}=N \qquad \dots\dots\dots (14)$$

で示される。(1)および(2)を用いて u₁ および h₁ を消去し上式を積分する。さらに、境界条件 x=0, ζ=0; x=ℓ, ζ=εh_s を代入すれば次式が求められる。

$$\zeta^2=\frac{N\epsilon}{K(1+\epsilon)}(\ell-x)x+\frac{\epsilon^2h_s^2}{\ell}x \qquad \dots\dots\dots (15)$$

一方 ℓ < x < L では、単一流であるので、連続の式は

$$\frac{d(uh)}{dx}=N \qquad \dots\dots\dots (16)$$

Darcy 法則を用いてu を消去し上式を積分する。さらに、境界条件 x=ℓ, h=(1+ε)h_s; x=L, h=h_Lを代入すれば次式が求められる。

$$h^2=(1+\epsilon)^2h_s^2+\frac{N}{K}(L-x)(x-\ell)-\frac{(1+\epsilon)^2h_s^2-h_L^2}{L-\ell}(x-\ell) \qquad \dots\dots\dots (17)$$

塩水くさびが降雨で遮断される限界はℓが x_mと一致する時である。したがって、(15)および(17)を微分して零とおき、それぞれ x_m=ℓ とおき、さらに両式から ℓ を消去すれば、次式のような遮断限界の条件式が導かれる。

$$\sqrt{\frac{N}{K}\frac{L}{h_s}}>\sqrt{(1+\epsilon)^2-\frac{h_L^2}{h_s^2}}+\sqrt{\epsilon(1+\epsilon)} \qquad \dots\dots\dots (18)$$

ここに L; 透水層の長さ, h_s; 海の水深, h_L; 淡水湖の水深

3. 二次元定常流

(a) ホドグラフ法 Helmholtz や Kirchhoff¹¹⁾ によって二次元の非圧縮, 非回転の不連続流に適用されたこの手法は, Hamel¹²⁾ により初めて地下水の自由表面および浸出面をもつ流れに導入された。その後 Dachler,¹³⁾ Davison,¹⁴⁾ Muskat,¹⁵⁾ Vedernikov,¹⁶⁾ Polubarinova-Kochina¹⁷⁾ ら多くの人々はこの手法を用い地下水流の各種の問題を解析した。Henry,¹⁸⁾ Bear & Dagan,¹⁹⁾ de Josselin de Jong²⁰⁾ らは、さらに地下密度流の境界面形状の解析にこの手法を拡張した。

一般に、地下密度流に現われる領域の境界は①自由表面, ②境界面, ③等ポテンシャル面, ④不浸透面, ⑤浸出面の5種類によって構成される。いま物理面を z, 複素ポテンシャル面を ζ であらわせば

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \phi+i\psi, \qquad z=x+iy \\ g_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad g_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{d\zeta}{dz} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dz} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dz} = -g_x + i g_y \end{aligned} \right\} \qquad \dots\dots\dots (19)$$

ここに g_x および g_y は Darcy 的平均流速の x および y の正方向の成分である。次に Darcy 単位の透水係数を k, 流れている流体の単位重量を r, 粘性係数を μ, 静止流体の単位重量を r', Δr=|r'-r| であらわし

$$K = \frac{r}{\mu} k, \quad K' = \frac{\Delta r}{r} K = \varepsilon K \quad \dots\dots\dots (20)$$

とおき、任意点の圧力を P とすれば、Darcy 法則により

$$\mathcal{G}_x = -K \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{r} + y \right), \quad \mathcal{G}_y = -K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{r} + y \right) \quad \dots\dots\dots (21)$$

であるから

$$\phi = K \left(\frac{P}{r} + y \right) + \text{const.} \quad \dots\dots\dots (22)$$

であらわされる。そこで前にのべた 5 種類の境界のうち①の自由表面では圧力は大気圧であるから

$$\phi - Ky = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (23)$$

が成立する。したがっていま s を自由表面にそって流れの方向にとれば

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} - K \frac{\partial y}{\partial s} = 0 \quad \text{or} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)^2 - K \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

が成立する。ここで $\partial \phi / \partial s$ は S の正方向の合速度であり、 $(\partial \phi / \partial s)(\partial y / \partial s)$ はその成分であるから

$$\mathcal{G}_x^2 + \mathcal{G}_y^2 - K \mathcal{G}_y = 0 \quad \text{or} \quad \mathcal{G}_x^2 + \left(\mathcal{G}_y - \frac{K}{2} \right)^2 = \left(\frac{K}{2} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (25)$$

が得られ、

$$\tilde{w} = -\mathcal{G}_x + i \mathcal{G}_y \quad \dots\dots\dots (26)$$

で定義されるホドグラフ上において、自由表面は、中心が $(0, k/2)$ で、半径 $k/2$ の円で、あらわされる。

また、②の境界面では、圧力を静止流体側で考えれば、式 (22) より

$$\phi + K'y = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (27)$$

したがって式 (24) と同様にして

$$\mathcal{G}_x^2 + \mathcal{G}_y^2 + K' \mathcal{G}_y = 0 \quad \text{or} \quad \mathcal{G}_x^2 + \left(\mathcal{G}_y + \frac{K'}{2} \right)^2 = \left(\frac{K'}{2} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (28)$$

が成立し、ホドグラフ上において境界面は、中心が $(0, -K'/2)$ で、半径 $K'/2$ の円であらわされる。

その他の 3 種の境界③、④、⑤はホドグラフ上では、領域の境界が直線であればやはり、直線上にあらわされる。

次に

$$\mathcal{G} = \sqrt{\mathcal{G}_x^2 + \mathcal{G}_y^2} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\tilde{w}' = \frac{K'}{\tilde{w}} = K' \frac{dz}{d\zeta} = -\frac{K'}{\mathcal{G}} \left(\frac{\mathcal{G}_x}{\mathcal{G}} + i \frac{\mathcal{G}_y}{\mathcal{G}} \right) \quad \dots\dots\dots (30)$$

とおき、適当な媒介平面 ξ を導入すれば

$$z = \int \frac{\tilde{w}'(\xi)}{K'} \cdot \frac{d\xi}{d\xi} d\xi + \text{const.} \quad \dots\dots\dots (31)$$

が得られ、求める複素ポテンシャル ζ と物理面 との関係が得られる。また境界面においては、その性質から $\mathcal{G} = K' \frac{\partial y}{\partial s}$ とおけるので $K' \mathcal{G}_y / \mathcal{G}^2 = 1$ となる。図-6 はホドグラフ法を用いた場合の一連の等角写像のプロセス $z_{p\ell} \rightarrow \tilde{w}_{p\ell} \rightarrow \tilde{w}'_{p\ell} \rightarrow \xi_{p\ell}$, $z_{p\ell} \rightarrow \zeta_{p\ell} \rightarrow \xi_{p\ell}$ を示すものである。すなわち $\tilde{w}_{p\ell}$ と $\xi_{p\ell}$ との関係は Schwarz - Christoffel の定理によって

$$\tilde{w}'(\xi) = A \int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi} \sqrt{1-\xi}} + B, \quad A, B \text{ は const.} \quad \dots\dots\dots (32)$$

であらわされ、同様に ζ_{pe} と ξ_{pe} との関係は

$$\zeta(\xi) = M \int \frac{d\xi}{\sqrt{(-1-\xi)}\sqrt{1-\xi}} + N, \quad M, N \text{ は const.} \quad \dots\dots\dots (33)$$

であらわされるので (31), (32) および (33) によって ζ 面と z 面の関係がわかる。

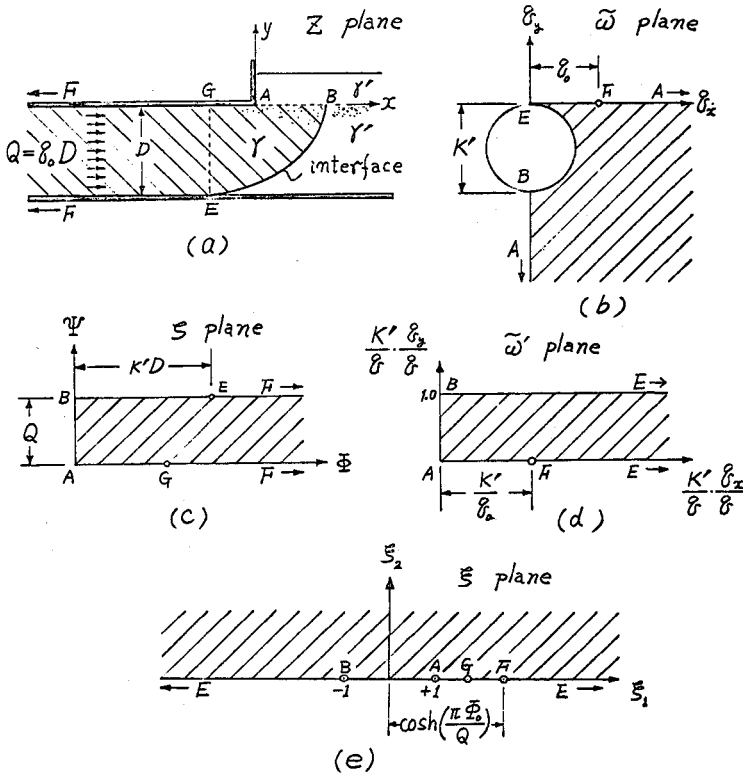


図-6 ホドグラフ法

(b) Zhukovsky 関数の応用 境界が水平な等ポテンシャル面、鉛直な固体壁および境界面により構成されている場合には

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \phi + K'y, & \Omega_2 &= \psi - K'x \\ \Omega &= \Omega_1 + i\Omega_2 = \zeta - iKz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

で定義される Zhukovsky 関数を用いると便利である。すなわち境界面および水平等ポテンシャル面は Ω 面では Ω_2 軸に平行な線に変換され、また鉛直固体壁は Ω_1 軸に平行な線に変換されるので、 z 面の流れの領域は Ω 面の多角形領域の内部に写像することができる。一方、浸出面をもたない流れの ζ 平面は一般に長方形領域で表わされるから、 ζ 面と Ω 面とを適当な媒介平面 t を導入して結びつけば問題を解くことができる。Ackermann²¹⁾ はこの手法を用いて、図-7の $H_w = 0$ の場合を解き、上田、崎山²²⁾ は $H_w = 0$ の場合を注水溝による河口貯水池の塩水遮断条件と関連させて解いた。

すなわち、図-7(a)に対応する ζ 面は図-7(b)のようになり、また Ω 面は図-7(c)のようになる。これを t の上半面に写像すれば、Schwarz-Christoffel の定理によって、

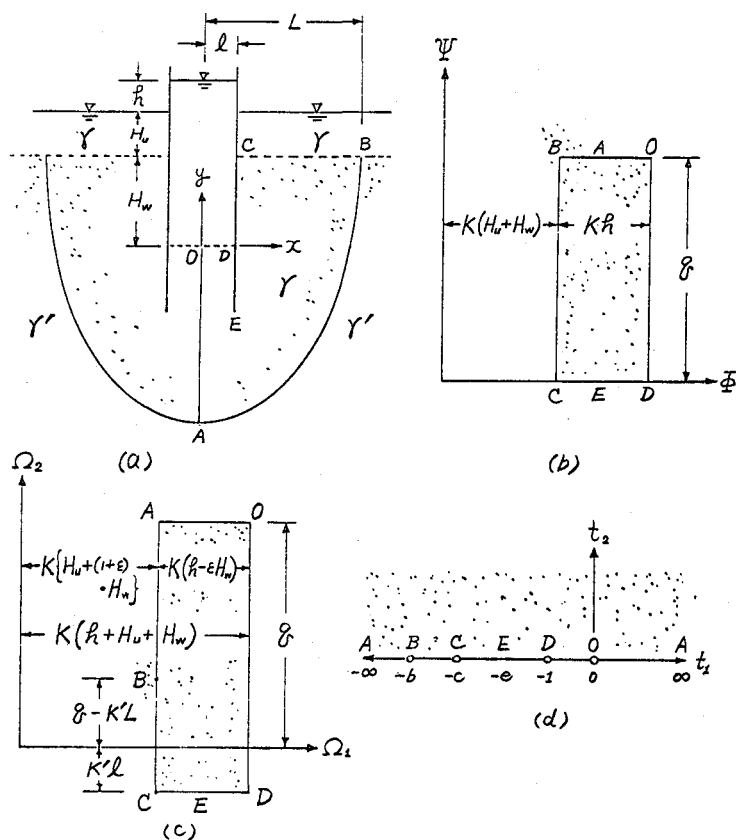


図-7 Zhukovsky 関数による写像

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= A \int \frac{dt}{\sqrt{-b-t} \sqrt{-c-t} \sqrt{-1-t} \sqrt{-t}} + B \\ \Omega &= M \int \frac{dt}{\sqrt{-c-t} \sqrt{-d-t} \sqrt{-t}} + N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

となる。ここに A, B は ζ 面の大きさ、 M, N は Ω 面の大きさによって決まる定数であり、 b, c, e はその相似性によって決まる定数である。したがって ζ 面と Ω 面は t を媒介平面として関係づけられ、これから ζ 面と Ω 面との関係が得られる。また崎山²³⁾は河口貯水池底面の上層地盤内の淡水を二次元溝により取水する場合の塩水混入限界について検討を加え、さらに上田・杉尾²⁴⁾は円形暗きょから海水を取水した場合の境界面低下および淡水を注入した場合の境界面形状の問題を取り上げて検討した。²⁵⁾

次に、上田、杉尾²⁵⁾は円形暗きょからの淡水注入による淡塩境界面について、次のような近似的手法を示した。

すなわち、海水飽和地盤中に考えた淡水のポテンシャルは $k\epsilon$ のこう配で鉛直上方に減少する。したがって、海水側を鉛直上方に向う淡水の等速平行流におきかえて、この流れと、暗きょから流出する流れとの重ね合わせによってえられる。2つの流れの境界面を淡塩境界面とするものである。この結果は前述の Zhukovsky 関数による厳密解とよい一致を示している。

(c) 従属変数と独立変数を交換させる方法 この種の境界値問題では、 ϕ および ψ を x および y の関数として求めるのが普通であるが、逆に x および y を ϕ および ψ の関数として求めても差支えない。すなわち二次元定常流においては

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad d\psi = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \quad \dots\dots\dots (36)$$

が成立するが、関数行列式

$$\mathcal{J}^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \mathcal{J}_x^2 + \mathcal{J}_y^2 \neq 0 \quad \dots\dots\dots (37)$$

が成立するので

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} = 0, \quad dx = \frac{\partial y}{\partial \psi} d\psi - \frac{\partial y}{\partial \Phi} d\psi \quad \dots\dots\dots (38)$$

も成立する。そこで境界面に相当する ζ 面での y の値が容易に規定され、また等ポテンシャル面や固体壁に相当する ζ 面での境界で y の値やその微係数が与えられればこれを境界条件として、式(38)に示す y に関する Laplace の式を解くことができる。さらに x の値も Φ あるいは ψ 一定の条件でそれぞれ ψ あるいは Φ に関して積分すれば求めることができる。²⁶⁾ところが、複雑な領域の流れにおいては、 ζ 面の特異点における Φ あるいは ψ の値はあらかじめ与えられてはいない。そこで ζ 面ではこれらの値を推定して、前述の y に関する Laplace の式を解くことになるが、この推定にあたって²⁷⁾崎山は次の方法を提案している。すなわち境界面を形成させたい位置に固定境界面を想定し、地下密度流の特性を考慮した擬似的 ζ 面を導入し、この ζ 面で式(36)を解き、特異点の Φ および ψ を求める。次にこれらを実際の ζ 面に対応する ζ 面に第一近似値として適用し、まず式(38)をみたとす y を求め、次に x を求める。このようにすれば若干の試行で目的にかなった ζ 面がえられる。具体的な計算には電算機を利用することとなるが、前記(a)、(b)の方法では解決されない複雑な領域にまで適用できることが利点である。いま計算例についてのべてみよう。図-8(a)に示す流れは河口貯水池内の淡水水位が下がった場合に河口せき底下に淡水を注入してウォーターカーテンを形成させ、塩水をしゃ断しようとするものである。この流れの ζ 面は図-8(c)のようになるが、ここでは矢板先端など ζ 面の特異点 B, C, L, K および G の Φ 、海側と貯水池側への流出量 ψ_L と ψ_R はあらかじめわかっていないのでこれらの特異点の ζ 面の位置と ζ 面の大きさがわからない。したがって図-8(b)のような、ほぼウォーターカーテンとして希望する境界面を固体壁でおきかえた擬似的 ζ 面を導入し、この中で通常の Φ に関する Laplace の式(36)を数値解により解く。この場合、矢板、淡水注入圧などを変えて、F, H 点の Φ がこの位置の海水側の Φ と一致する解をとる。次いでこの場合の ψ を求める。これによってえられた図-8(a)の ζ 面の特異点 B, C, L, K および G 点の Φ の値と ψ_L および ψ_R によって、これら特異点の図-8(c)の ζ 面上の位置と、 ζ 面の大きさが定まる。これより y を、Laplace の式(38)の数値解により求め、次いで x を求めることができる。こうしてえられたウォーターカーテンは所期のものとはほぼ一致する。したがってこの手法によれば、河口せきより離れて貯水池内に淡水注入溝を作った場合、海水側に淡水が流出しないようなウォーターカーテンを作ることでもでき、現地で適用されるような複雑な境界条件のもとでの目的のウォーターカーテンを比較的容易に求められる。

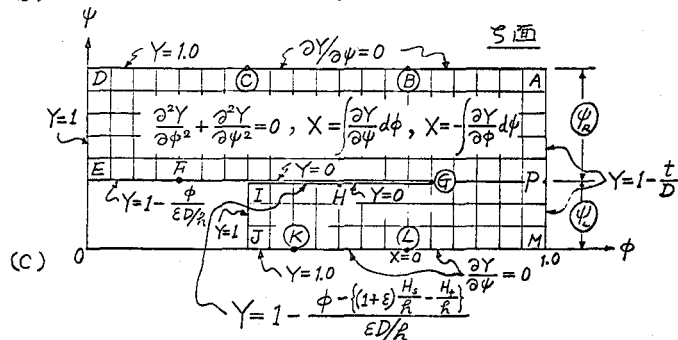
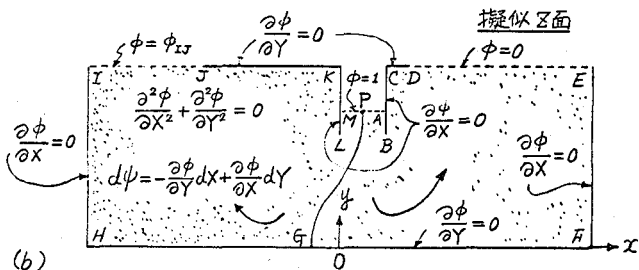
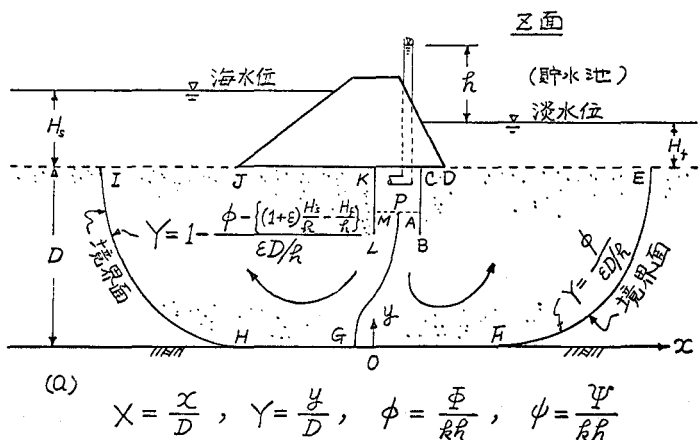


図-8 変数を変換させる方法

4. 非定常流

(a) 境界面条件

いま、単位重量と粘性係数の異なる二種の流体が、互に混合することなく、明瞭な境界面を形成して非定常運動をしていると考える。この時の移動境界面の条件は以下のように示される。

境界面形状を

$$F(x, y, z, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0 \quad \dots \dots \dots (39)$$

とおけば、境界面上は常に同一の流質によって占められることから

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla F) = 0 \quad \dots \dots \dots (40)$$

が満足される。ここに、 $\mathbf{V}$ は流体分子の移動速度のベクトルであって、Darcy 法則

$$-q = \frac{k r}{\mu} \nabla \left(z + \frac{p}{r} \right) = \frac{k r}{\mu} \nabla \varphi \quad \dots\dots\dots (41)$$

で示される q とは次のような関係にある。

$$V = q / n \quad \dots\dots\dots (42)$$

ここに

k ; ダルシー単位の透水係数

μ ; 粘性係数

r ; 流体の単位重量

p ; 圧力の強さ

n ; 空隙率

(39)~(42) より、境界面においては流体 1 および流体 2 についてそれぞれ次の条件が成立することが導かれる。

$$\left. \begin{aligned} n \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{k r_1}{\mu_1} \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\} &= 0 \\ n \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{k r_2}{\mu_2} \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (43)$$

さらに、境界面において表面張力 P_c が働くものとすれば、

$$P_2 - P_1 = P_c \quad \dots\dots\dots (44)$$

あるいは、(41) で示した φ を用いて表わせば

$$z = \frac{r_2}{\Delta r} \varphi_2 - \frac{r_1}{\Delta r} \varphi_1 - \frac{P_c}{\Delta r} = \alpha_2 \varphi_2 - \alpha_1 \varphi_1 - \frac{P_c}{\Delta r} \quad (z = \zeta) \quad \dots\dots\dots (45)$$

ここに

$$\alpha_i = \frac{\mu_i}{k \Delta r}, \quad \varphi_i = \frac{k r_i}{\mu_i} \varphi_i = K_i \varphi_i \quad \dots\dots\dots (46)$$

$\Delta r = r_2 - r_1, \quad K_i$; 透水係数

(39) を考慮して (45) の関係を (43) に代入すれば、境界面条件は次式のように示される。

$$\left. \begin{aligned} n \left(\alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \alpha_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right) - \alpha_1 (\nabla \varphi_1)^2 + \alpha_2 (\nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= 0 \\ n \left(\alpha_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \alpha_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right) + \alpha_2 (\nabla \varphi_2)^2 - \alpha_1 (\nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (47)$$

同様な関係式は非等方性の媒質の場合にも導かれる。

(b) 一次元的な流れ

採油工学の分野では、老衰した油田を回復させるため、注入井より他の液体を圧入させ、油層中の油を油井へと導くことがしばしば試みられている。ここでは、その最も簡単な例として、水平な一次元的な流²⁸⁾を取扱う。

いま、長さ L の媒質の両端に $P_1 - P_2$ の圧力差を与え、透水性 k_2/μ_2 の流体を透水性 k_1/μ_1 の流体で置き換えるとき、境界面の移動特性を考えることとする。

境界面の位置を原点から $\xi(t)$ とすれば、(39) に対応して

$$F(x, t) = x - \xi(t) = 0 \quad \dots\dots\dots (48)$$

また (42) に対応して、次式が得られる。

$$n \frac{\partial \xi}{\partial t} - g_x = 0 \quad \dots\dots\dots (49)$$

一方、Darcy 法則と連続の条件より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} &= 0 \quad ; \quad 0 < x < \xi(t) \\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} &= 0 \quad ; \quad \xi(t) < x < L \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

がそれぞれの領域で成立する。

境界面上 $x = \xi(t)$ では

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_2 \quad (p_c \text{ を無視}) \\ \frac{k_1}{\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} &= \frac{k_2}{\mu_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} = -g_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

さらに、境界条件

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \quad ; \quad p_1 = p'_1 \\ x &= L \quad ; \quad p_2 = p'_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

上記の 4 条件の下で、(50) を解けば、 p_1 および p_2 に対しそれぞれ次式が求められる。

$$p_1 = -\frac{p'_1 - p'_2}{ML + (1-M)\xi} + p'_1, \quad p_2 = \frac{p'_1 - p'_2}{ML + (1-M)\xi} M(L-x) + p'_2 \quad \dots\dots\dots (53)$$

また

$$g_x = \frac{k_1}{\mu_1} \frac{p'_1 - p'_2}{ML + (1-M)\xi} \quad \dots\dots\dots (54)$$

ここに、 M は Mobility Ratio と呼び、次式で定義される。

$$M = \frac{k_1}{\mu_1} / \frac{k_2}{\mu_2} \quad \dots\dots\dots (55)$$

(54) を (49) に代入して解けば、境界面の移動特性は次式で与えられる。

$$t = \frac{\mu_1 n (1 - S_1 - S_2)}{k_1 (p'_1 - p'_2)} \left\{ ML\xi + \frac{1}{2} (1-M)\xi^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (56)$$

ここに $n(1 - S_1 - S_2)$; 有効な空隙率

上式より、特性はパラメータ M に大きく支配され、 $M = 1$ であれば移動速度は一定であるが、 $M > 1$ では加速され、 $M < 1$ では減速されることが知られる。

軸対称一次元流²⁹⁾ については、Muskat や Scheidegger が取扱い、境界面の位置を

$$F(r, t) = r - \rho(t) = 0 \quad \dots\dots\dots (57)$$

とするとき、 ρ の時間的特性は次式で与えられることを示した。

$$\frac{4k(p_e - p_w)}{\mu_1 r_e^2 n} t = \left(\frac{\rho}{r_e} \right)^2 \left\{ \log \left(\frac{\rho}{r_e} \right)^2 - M \log \left(\frac{\rho}{r_w} \right)^2 + M - 1 \right\} - M \log \left(\frac{r_w}{r_e} \right)^2 - (M - 1) \quad \dots\dots (58)$$

ここに、境界条件 ($r_e > r_w$) は次式で与える。

$$r = r_e ; \quad p = p_e$$

$$r = r_w ; \quad p = p_w$$

また、透湿度は μ のみに支配されるとしている。

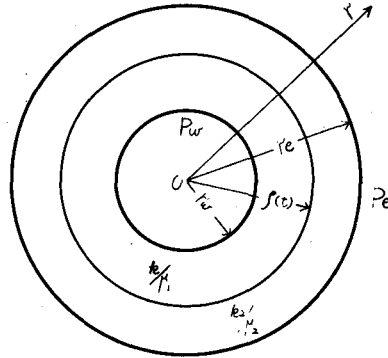
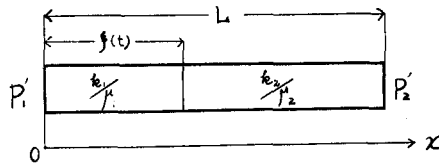


図-9 一次元的な流れ

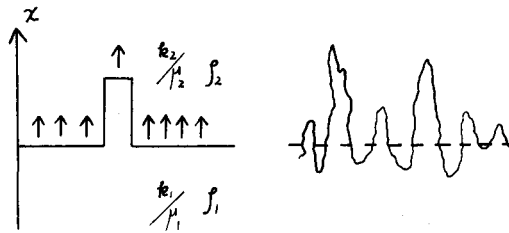
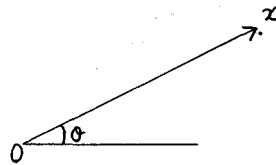


図-10 境界面の不安定現象

(c) 境界面の不安定現象 (Fingering)

透水性が k_2/μ_2 の流体2の中へ透水性 k_1/μ_1 の流体1が浸入して行くとき、境界面の一部が図-10に示されるように不安定となる場合が生ずる。すなわち、境界面の移動速度が一樣でなく、局部的に速い速度で浸入する。この現象を Fingering と呼び、これが発達すると前述の置換を行ったときの採油効率が著しく低下することになる。

いま、流れを水平な一次元流であるとすれば、境界面の移動速度は、(49) および (54) より

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{k_1(p'_1 - p'_2)}{\mu_1 n(1 - S_1 - S_2) \{ML + (1 - M)\xi\}} \quad \dots\dots\dots (59)$$

ここで、境界面の一部が $\xi + \epsilon$ の位置に先行したとすれば、その部分でも一次元的な流れが成立してい

るので、その移動速度は次式で示される。

$$\frac{d(\xi + \epsilon)}{dt} = \frac{k_1(p'_1 - p'_2)}{\mu_1 n(1 - S_1 - S_2) \{ML + (1 - M)(\xi + \epsilon)\}} \quad \dots\dots\dots (60)$$

(59) および (60) より、 $\epsilon < \xi$ を考慮すれば

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{-k_1(p'_1 - p'_2)(1 - M)\epsilon}{\mu_1 n(1 - S_1 - S_2) \{ML + (1 - M)\xi\}^2} \quad \dots\dots\dots (61)$$

が求められる。したがって

$$M > 1 \quad \dots\dots\dots (62)$$

であれば、 ϵ は時間の経過につれ指数関数的に増加し、境界面は不安定となることが指摘される。

さらに、もし一次元的な流れが、水平線に対し θ だけ傾いた面内に起きているとすれば、重力（密度差）の影響が加わることになる。 x 軸を面内の流れの進む方向にとれば、境界面上での条件は (51) の第 2 式の代りに次式が充たされる。

$$\frac{k_1}{\mu_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \rho_1 g \sin \theta \right) = \frac{k_2}{\mu_2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} + \rho_2 g \sin \theta \right) \quad \dots\dots\dots (63)$$

その他は、基礎方程式も境界面条件および境界条件も同一である。この場合の境界面の移動速度は

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{k_1 \{p'_1 - p'_2 - (\rho_2 L + (p_1 - \rho_2)\xi) g \sin \theta\}}{\mu_1 n(1 - S_1 - S_2) \{ML + (1 - M)\xi\}} \quad \dots\dots\dots (64)$$

となる。前と全く同じ方法で $d(\xi + \epsilon)/dt$ を求め、さらに $d\epsilon/dt$ を導けば次式のようなになる。

$$\frac{d\epsilon}{dt} = - \frac{k_1 \{ (1 - M)(p'_1 - p'_2 - \rho_2 L g) + M(\rho_1 - \rho_2) g L \sin \theta \}}{\mu_1 n(1 - S_1 - S_2) \{ML + (1 - M)\xi\}^2} \xi \quad \dots\dots\dots (65)$$

したがって分子の $\{ \}$ 内が負であれば境界面内は不安定となる。そこで、(54) より $p'_1 - p'_2$ を求め、境界面での Darcy 的平均流速 $\mathcal{G}_x = \frac{d\epsilon}{dt} n(1 - S_1 - S_2)$ を考慮して、 $\{ \}$ 内の $p'_1 - p'_2$ を消去すれば、境界面と不安定となる条件は次式のように表わされる。

$$(M - 1) \left[\mathcal{G}_x + \frac{k_1 (\rho_1 - \rho_2) g \sin \theta}{\mu_1 (1 - M)} \right] > 0 \quad \dots\dots\dots (66)$$

なお、上記不安定現象の解析は Scheidegger³⁰⁾ Marle, Hawthorne らによって行なわれた。³¹⁾

(d) 曲線座標系を用いる方法

Muskat³²⁾ らは水平な二次元的な流れの境界面の移動を近似的に評価するため、曲線座標系を用いる解法を示した。

境界面の条件式 (43) は次式のようにも表わされる。

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{K^{(\alpha)}}{n} \frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (67)$$

ただし、 (α) は流体 1 および 2 に対しそれぞれ成立することを示し、 K は透水係数を表わす。また、 $x_i \dots\dots x, y, z,$

いま、直交曲線座標系

$$\xi_1 = \xi_1(x, y, z); \xi_2 = \xi_2(x, y, z); \xi_3 = \xi_3(x, y, z) \quad \dots\dots\dots (68)$$

を導入すれば、直交条件より

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = 0 \quad \dots\dots\dots (69)$$

したがって

$$\frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \left[\sum_i \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right)^2 \right]$$

ここで、 $\xi_1(x, y, z) = \text{Const}$ を等ポテンシャル面と一致させれば

$$\frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} |\nabla \xi_1|^2$$

したがって、(67) は

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{K^{(\alpha)}}{n} |\nabla \xi_1|^2 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} = 0 \quad \dots\dots\dots (70)$$

となる。そこで、もし $\nabla \xi_1$ を ξ_1, ξ_2, ξ_3 の関数として表現できれば、(70) は積分可能となり、次式が移動境界面の解となる。

$$F = t + \frac{n}{K^{(\alpha)}} \int \frac{d \xi_1}{|\nabla \xi_1|^2} + g(\xi_2, \xi_3) = \text{const} \quad \dots\dots\dots (71)$$

具体的な問題として、図(11)に示すように、 $y=0$ が等ポテンシャル面であり、 $x=0, y=d$ に流入点のある場合、 $t=0$ で $y=0$ にあった流体の実質部分が時間の経過と共にどのように移動するかを注目する。

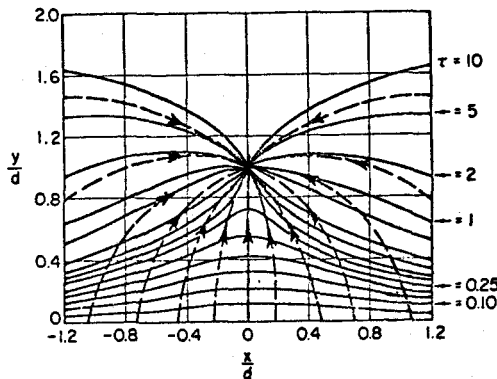


図-11 暗渠への流れ

ここでは、流体の性質の相違はないとし、水平な二次元定常流が起きているとする。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \varphi(x, y) \\ \xi_2 &= \phi(x, y) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (72)$$

とすれば(71)は次式のようになる。ここに、 ϕ は流関数である。

$$F(\varphi, \phi, t) = t + \frac{n}{K} \frac{d \varphi}{|\nabla \varphi|^2} + g(\phi) = \text{const} \quad \dots\dots\dots (73)$$

上記の流れの場合では、流入量をQとすれば

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 - \varphi &= \frac{Q}{4\pi k} \log \frac{x^2 + (y-d)^2}{x^2 + (y+d)^2} \\ \phi &= -\frac{Q}{2\pi k} \tan^{-1} \frac{-2dx}{x^2 + y^2 - d^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (74)$$

いま

$$\frac{2\pi k(\rho - \rho_0)}{Q} = \xi_1, \quad -\frac{2\pi k\Psi}{Q} = \xi_2 \quad \dots\dots\dots (75)$$

とおけば (74) より

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + d^2 &= 2yd \coth \xi_1 \\ x^2 + y^2 - d^2 &= -2xd \cot \xi_2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (76)$$

一方

$$|\nabla \xi_1|^2 = \frac{4d^2}{(x^2 + y^2 + d^2)^2 + 4x^2d^2} \quad \dots\dots\dots (77)$$

であるから, (76) を用いて x, y を消去すれば

$$|\nabla \xi_1|^2 = \frac{(\cosh \xi_1 + \cos \xi_2)^2}{d^2} = \left(\frac{2\pi k}{Q}\right)^2 |\nabla \zeta|^2 \quad \dots\dots\dots (78)$$

(78) を (73) に代入すれば

$$F(\xi_1, \xi_2, t) = t + n \frac{2\pi d^2}{Q} \int \frac{d\xi_1}{(\cosh \xi_1 + \cos \xi_2)^2} + g(\xi_2) = \text{const} \quad \dots\dots\dots (79)$$

上式を積分し, 初期条件を考慮すれば

$$t = \frac{-2\pi d^2 n}{Q \sin^2 \xi_2} \left\{ \frac{\sinh \xi_1}{\cosh \xi_1 + \cos \xi_2} - 2 \cot \xi_2 \tan^{-1} \left(\tanh \frac{\xi_1}{2} \tan \frac{\xi_2}{2} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (80)$$

が求める解となる。いま $\tau = \frac{Qt}{2\pi nd^2}$ とし, 境界面の移動を追跡した結果が図-11の実線で示され, また流線群は点線で示されている。同様な解は, 注入井と取水井の二つの井戸から成る系に対しても与えられる。

(e) 準一様非定常流

密度や透水度の異なる流れの非定常現象は, 一次元流を除いては, ほとんど厳密解が得られていない。そこで条件を損はない範囲で何らかの省略を行なう必要が生ずる。

海岸附近の地下水 (塩水楔) では, 特別な場合を除いて鉛直流速が水平流速に比し小さいので準一様流的な取扱いが可能となる。

図-12で示される流れの場を考えれば, 上下層の流速 u_1, u_2 は鉛直断面内では一定となり, Darcy法則が満足されるとすればそれぞれ以下のように示される。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -K \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ u_2 &= -K \left\{ (1-\epsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (81)$$

連続の式は

$$\left. \begin{aligned} n \frac{\partial}{\partial t} (\zeta + h_s - h_2) + \frac{\partial}{\partial x} \{ u_1 (\zeta + h_s - h_2) \} &= 0 \\ n \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_2 h_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (82)$$

(81) および (82) より u_1 および u_2 を消去するとともに, ζ は h_s に対し ϵ の Order であるとし微小項を省略すれば, 準一様地下密度流の基礎方程式として次式が求められる。³³⁾

$$\left. \begin{aligned} -\frac{n}{K} \frac{\partial h_2}{\partial t} - h_s \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{n}{K} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(h_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 h_2^2}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (83)$$

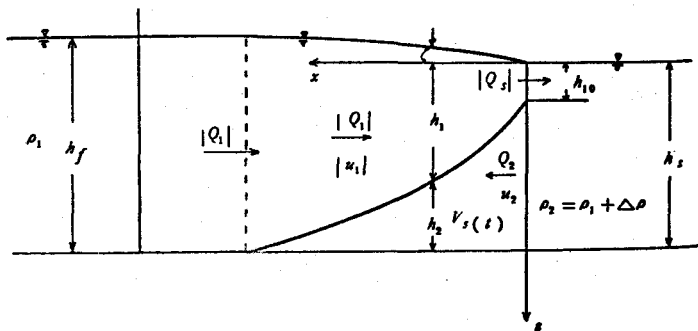


圖-12 準一樣地下密度流

(i) 逆転流

図-13のように $-\infty < x < \infty$ に透水層が自由表面を持たない状態で存在し、密度差のみによって $x=0$ に關し対称な流れの生ずる場合を逆転流と呼ぶことにする。

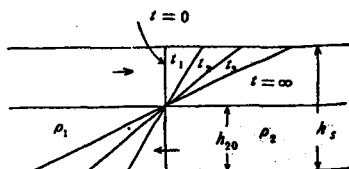


圖-13 逆轉流

この場合には、上層および下層の流量をそれぞれ Q_1 および Q_2 とするとき

$$Q_1 + Q_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (84)$$

一方 (83) の第 1 式と第 2 式を加えて積分すれば

$$h_s \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial h_2^2}{\partial x} = C(t)$$

となるが、 $C(t)$ は $Q_1 + Q_2$ を意味しているので、逆転流の場合には $C(t) = 0$ とすればよい。したがってこの結果を (83) に代入すれば

$$\frac{n}{K} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \frac{\epsilon}{2h_s} \frac{\partial}{\partial x} (h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x}) = 0 \quad \dots\dots\dots (85)$$

が基本式となる。

Rumer & Harleman,³⁴⁾ Bear & Dagan,³⁵⁾ 玉井・嶋ら³⁶⁾がこの問題を取扱ったが、最後の解析結果は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \text{いま } r &= h_2/h_{20}, \quad \beta = h_{20}/h_s \\ \xi &= \sqrt{\frac{n}{2K\epsilon h_{20}t}} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (86)$$

とおけば、(85)は次のような常微分方程式に される。

$$\frac{d^2 r^2}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dr}{d\xi} - \beta \frac{d}{d\xi} \left(r \frac{dr^2}{d\xi} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (87)$$

ここに、 h_{20} は $x=0$ の h_2 の値で不変とする。境界条件 $\xi=0$, $r=1$ の下に (87) の級数解を求めれば

$$r(\xi) = -e(\xi-e) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\beta e^2}{2}\right)(\xi-e)^2 + \left(-\frac{1}{72} + \frac{5}{18}\beta e\right)(\xi-e)^3 + \frac{5}{96}\beta(\xi-e)^4 + \dots\dots\dots (88)$$

ただし、 e は β の値によって次の値をとる。

β ;	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
e ;	1.048	1.033	1.014	1.009	0.996	0.986

ここに、 e はくさび先端での ξ の値を示すものであり、くさび先端の位置を x_t とすれば

$$x_t = e \sqrt{\frac{2\beta K\epsilon h_s}{n}} t \quad \dots\dots\dots (89)$$

(ii) 塩水とくさびの非定常課程

逆転流では(89)で示されるように、くさび先端の位置は時間の経過とともにどこまでも浸入を続けることになる。しかし現実の塩水くさびでは、陸側の地下水面のポテンシャルが密度差によって生ずる海側のポテンシャルより高いので、くさびの先端はある距離まで浸入し停止する。

Bear & Dagan,³⁷⁾ 玉井・嶋³⁸⁾ がこの場合を取扱ったが、さらに嶋³⁹⁾ は次のような手順を踏むことにより理論の厳密化を試みた。

- ① $x=0$ における鉛直流速効果を考慮することにより、海側と透水層の間で成立すべき圧力の釣合い条件をそれぞれ上層および下層に関し求め、このことより任意時刻における $x=0$ の境界面位置と淡水流量との関係を導いた。
- ② Bear & Dagan が淡水流量の場所的分布を与えた上層水深に関する線型仮定を拡張し、高次の項を入れることにより、現象の初期においては上向きに凸、以後においては下向きに凸となる実際現象に近い境界面形状が与えられるようにする。
- ③ これらを、準一様流の運動方程式あるいは連続の方程式と組み合わせることにより最終的な解を導く。
- ①、②および③を経て得られた結果は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{v}_s}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\bar{t}} &= \frac{(1-\alpha)(\alpha-\beta)}{\beta} \\ \bar{v}_s &= \frac{(1-\alpha)\beta}{(\eta-1)(\alpha-\beta)} \left\{ \frac{(1-\alpha)^2}{2} - \frac{(1-\alpha)}{\mu} - \frac{1-\mu}{\mu^2} \log \frac{1-\mu}{1-\mu\alpha} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (90)$$

(90) より $\bar{v}_s$ を消去して α と $\bar{t}$ の関係を求め次式に代入することにより

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{(1-\alpha)\beta}{(1-\eta)(\alpha-\beta)} \left\{ \frac{1}{\mu} \log \frac{1-\mu\alpha}{1-\mu\zeta} - (\zeta-\alpha) \right\} \\ \mu &= \frac{(1-\eta)(\alpha-\beta)}{\alpha \{1+\beta(\eta-1)-\eta\alpha\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (91)$$

任意時刻の境界面形状が求められる。

ここに

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_s &= \frac{|Q_L| \bar{V}_s}{K \epsilon h_s^3}, \quad \bar{t} = \frac{Q_L^2 t}{nk \epsilon h_s^3} \\ \bar{x} &= \frac{|Q_L| x}{K \epsilon h_s^2}, \quad \zeta = h/h_s \\ \alpha &= h_{10}/h_s, \quad \beta = (h_{10}/h_s)_{t=\infty} = \frac{|Q_L|}{\sqrt{2 K \epsilon h_s}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (92)$$

なお、 η は淡水流量の場所的分布を仮定するときに入る常数で、実験との比較では $\eta = 2$ とすれば良いことが知られる。

$t = 0$ で隔壁が取り除かれた後の、塩水くさびの浸入状況に関し、図-14は境界面の時間的変化の一例を示したものである。また、図-15はくさび先端の浸行状況を示す解析結果で、 $\beta = 0.1, 0.3, 0.5$ の場合に対しそれぞれ $\eta = 1$ および 4 とした結果を示している。なお、海岸線で境界面位置を不動とした ($\alpha = \text{const}$) 場合の解も比較のため示されている。

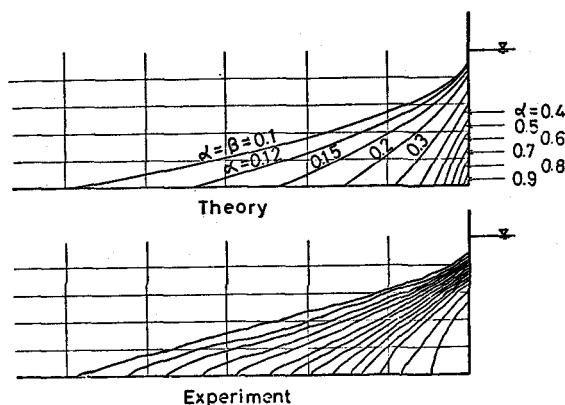


図-14 境界面の時間的変化

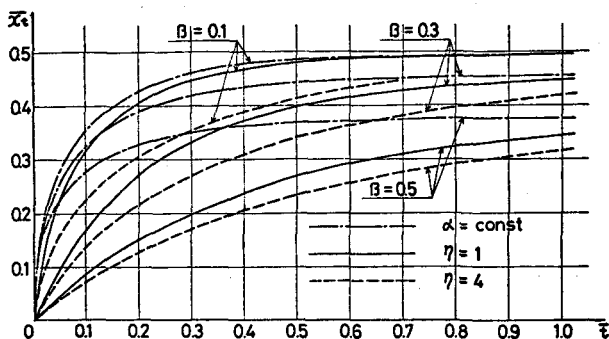


図-15 くさびの進行状況

参 考 文 献

- 1) Nomitsu, Toyohara, Kamimoto : On the contact surface of fresh and salt-water under the ground near a sandy sea shore, Memoires of Coll. , Kyoto Imperial Univ., A. vol. 10, No 7, pp. 279, 1927.
- 2) Henry, H. R. : Salt intrusion into fresh-water aquifers, Journ. Geophysics Res., Vol. 64, No 11, pp. 1911-1919, Nov., 1959.
- 3) Hamel G. : Über Grundwasserströmung, Z. A. M. M., XIV, pp. 129, 1934.
- 4) Glover, R. E. : The pattern of fresh-water flow in a coastal aquifer, Journ. Geophysics Res., Vol. 64, No 4, pp. 457-459, Apr. 1959.
- 5) Rumer R. R., Harleman D. R. F., Introduced salt-water wedge in porous media, Proc. of A. S. C. E., Vol. 89, No HY 6, Nov. 1963.
- 6) 野満 : 前出 1)
- 7) 嶋祐之 : 地下水 (密度流の諸問題), 土木学会水理委員会, 水工学に関する夏期研修会講義集 A-8-9, 1971.
- 8) Iwase Y., Takeuchi : Control of sea water level in coastal porous media by means of double pumping, Proc. of the 13th Congr. of I. A. H. R., 1969:
- 9) 山口柏樹 : 刈田地区工業用水道水源調査報告書, pp. 133, 1962.
- 10) 嶋祐之 : 河口湖工学, 日本工業用水協会, pp. 79, 1968, もしくは前出 7), A-8-12.
- 11) Kirchhoff, G. : Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, Grelle, t. IXX, Ges. Abh. pp. 416, 1869.
- 12) Hamel G. : 前出 3)
- 13) Dachler, R. : Grundwasserströmung, Springer, Wien, 1936.
- 14) Davison, B. B., Rosenhead, L. : Some cases of the steady two-dimensional percolation of water through ground, Proc. Roy. Soc. London, Vol. 175, No A. 962, pp 12, June, 1940.
- 15) Muskat, M. : Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media, McGraw-Hill, pp. 378, 1937.
- 16) Vedernikov, V. V., Seepage from Channels, (in Russian), Gosstoyzdat, Moscow, 1934.
- 17) Polubarinova-Kochina, P. Ya. : Theory of Ground Water Movement, (in Russian), Gos-tekhnizdat, Moscow, 1952.
(also English translation by De Wiest R. J. M., Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1962)
- 18) Henry, H. R. : 前出 2)
- 19) Bear, J., Dagan, G. : The use of the hodograph method for ground water investigations, Technion, Haifa. Dept. of Civil Eng., 1962.
- 20) De Josselin De Jong, G. : A many valued hodograph in an interface problem, Technische Hogeschool Delft, Atd., Weg-en Waterbouwkunde, 1964.
- 21) Ackermann, N. L., Sridurongkatum, P. : Salt water interface near a fresh-water canal

Proc. of A. S. C. E., HY. 6, 1964.

- 22) 上田年比古, 崎山正常 : 海水飽和地盤における淡水注入溝の浸透, 土木学会論文報告集, 第 135 号, Nov. 1966.
- 23) 崎山正常 : 淡塩二層地盤よりの二次元的淡水取水の一方法, 土木学会論文報告集, 第 208 号, Dec. 1972.
- 24) 上田年比古, 杉尾哲 : 淡塩二層地盤内の海水取水円形暗きょによる淡塩境界面, 第 26 回土木学会年次学術講演会講演集, 第 2 部, pp. 469-472, Oct. 1971.
- 25) 上田年比古, 杉尾哲 : 暗きょからの淡水注入による淡塩境界面の解析, 土木学会論文報告集, 第 225 号, May, 1974.
- 26) Charmonman, S. : Coastal parallel canals with intermediate drains, Proc. of A. S. C. E., HY Vol. 93, 1967.
- 27) 崎山正常 : 河口貯水池における海水排除に伴う定常地下密度流の解析について, 第 28 回土木学会年次学術講演会講演集, 第 2 部, pp. 380-381, Oct. 1973.
- 28) Muskat, M. : 前出 15), pp. 459-462.
- 29) Muskat, M. : 前出 15), pp. 462-466.
- 30) Scheidegger, A. E., Statistical hydrodynamics in porous media, Advan. Hydrosci. 1, pp. 161-181, 1964.
- 31) Collins, R. E. : Flow of Fluid through Porous Materials, Reinhold Pub. Corp., New York, pp. 196-200, 1961.
- 32) Muskat, M. : 前出 15), pp. 466-476.
- 33) 嶋祐之 : 前出 7), A-8-6.
- 34) Rumer, R. R., Harleman, D. R. F. : 前出 5)
- 35) Bear, J., Dagan G. : Moving interface in coastal aquifers, Proc. of A. S. C. E., Vol. 90, No HY 4, July, 1967.
- 36) Tamai, N., Shima, S. : Salt - water wedge in unconfined coastal aquifers, 土木学論文集, No 139, March, 1967.
- 37) Bear, J., Dagan, G. : 前出 35)
- 38) Tamai, N., Shima, S. : 前出 36)
- 39) Shima, S. : Transient characteristics of salt-water wedge, Proc. of 13th Congr. of I. A. H. R., Vol. 4, 1969.