

浮 遊 砂

芦 田 和 男

1. はしがき

浮遊砂は乱流拡散現象によって輸送される形態の流砂である。浮遊砂を伴う流れは、固液混相流の代表的なもので水理学的に興味深いばかりでなく、貯水池や河口部浚渫個所の埋没、河床変動などに大きな影響を与え、実際上も重要な問題であって、従来から数多くの研究がなされてきた。それらは、流体の流れの特性に関するものと、砂れきの輸送量に関するものに大別できる。このように、浮遊砂を含む流れの諸問題は非常に広範多岐にわたるが、ここでは主として、浮遊砂量と浮遊砂による河床変動の問題に重点をおいて述べることにする。もちろん、それらの基礎を与えるものとして、浮遊砂の運動や濃度分布などについても言及するつもりである。

浮遊砂に関連する問題は、この水工学夏期研修会でも幾度か取りあげられている。それらとできるだけ重複しないように努めたので、必要に応じてそれらの文献を御参照していただければ幸である。

2. 乱流中における粒子の運動

乱流中における微小な粒子の運動は、Tchenによって定式化され、Corrsin, Lumley⁵⁾, Hinze⁶⁾, Soo⁷⁾などによって展開されてきた。乱流中における粒子の運動に関するTchenの仮定は、i) 乱流は一様でかつ定常である。 ii) 粒子は球形で、乱れの最小渦径よりも小さい。 iii) 粒子の運動期間中は同じ流体素分が粒子の近傍にある。こうした仮定を用いると、粒子の運動方程式は次のように記述される。

$$\frac{\pi}{6} d^3 \sigma \frac{d u_p}{dt} = \frac{1}{2} \rho C_D |u_f - u_p| (u_f - u_p) \frac{\pi}{4} d^2 + \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} d^3 \rho \left(\frac{d u_f}{dt} - \frac{d u_p}{dt} \right) + \frac{\pi}{6} d^3 \rho \frac{d u_f}{dt} + \frac{3}{2} d^2 \sqrt{\pi \rho \mu} \int_0^t d\tau \frac{(d/d\tau)(u_f - u_p)}{\sqrt{t - \tau}} + F_e \quad \dots\dots (2.1)$$

ここに、 u_p , u_f はそれぞれ粒子および流体の速度のベクトル表示、 d : 粒径、 σ , ρ はそれぞれ粒子および流体の密度、 μ : 粘性係数、 C_D : 粒子に働く抗力係数、 F_e : ポテンシャル場による外力である。この式の各項の意味はつぎのようである。左辺は粒子を加速するための力、右辺の第1項は粒子に働く抗力、第2項は仮想質量を加速するための力、第3項は圧力勾配によって生じる力、第4項はいわゆるBasset項で、非定常な運動をしている粒子に作用する抵抗と定常な粒子に作用する抵抗との相異に基因する項、第5項はポテンシャル場による外力である。

Corrsin, Lumley やHinze によれば、(2.1)式が成立するためには、

$$\frac{d^2}{\nu} \frac{\partial u_f}{\partial x_i} \ll 1, \quad \frac{u_p}{\nu} \frac{\partial u_f / \partial x_i}{\partial^2 u_f / \partial x_i^2} \gg 1 \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

の条件が存在しなければならないが、これは、Tchenの仮定ii)が成立し、かつ十分に乱流が発達していれば成立する。

いま、粒子の鉛直方向の運動を考え、鉛直上向きの流体および粒子の速度を w_f , w_p とし、粒子は非常に小さくStokesの抵抗法則が用いられ、かつ簡単のために、Basset 項が省略できるものとすれば、

(2.1)式は次のようになる。

$$\frac{\pi}{6} d^3 \sigma \frac{d w_p}{dt} = 3\pi \mu d (w_f - w_p) + \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} d^3 \rho \left(\frac{d w_f}{dt} - \frac{d w_p}{dt} \right)$$

$$+ \frac{\pi}{6} d^3 \rho \frac{dw_f}{dt} - \frac{\pi}{6} d^3 (\sigma - \rho) g \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

8) 道上是(2.3)式を用いて粒子と流体の速度変動の2乗平均の関係を次のように求めている。

(2.3)式は線型であるので、外力の項を省略しても一般性は失なわれないから、この項を省略した次式を用いて検討している。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw_p}{dt} &= b \frac{dw_f}{dt} + a (w_f - w_p) \\ \text{ここに,} \\ a &= \frac{36\mu}{(2\sigma + \rho)d^2}, \quad b = \frac{3\rho}{2\sigma + \rho} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.4)$$

いま、流体のラグランジュ的相関係数を $R_{fL}(t) = \exp(-t/t_*)$ と仮定すると、粒子の速度変動の2乗平均 $\overline{w_p^2}$ と流体のそれ $\overline{w_f^2}$ との関係は次式で表わされる。

$$\overline{w_p^2} = \overline{w_f^2} \frac{at_* + b^2}{at_* + 1} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

ここに、 t_* : ラグランジュ的な積分時間スケールであり、 $t_* \sim L/u_* \sim h/u_*$ の程度である。砂粒に対しては、 $b^2 = 0.23$ であるから、(2.5)式から粒子の速度変動の2乗平均は流体のそれよりも小さくなる事がわかる。しかしながら、われわれが対象としている砂粒では、 $a = 100 \sim 500 \text{ sec}^{-1}$ 、 $t_* = 1 \sim 10 \text{ sec}$ の程度であるので、

$$\overline{w_p^2} \approx \overline{w_f^2} \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

と考えることができる。

つぎに、河床に静止している粒子が運動を開始する場合を考え、 $t=0$ 、 $w_p=0$ の初期条件のもとに(2.4)式を解いて、粒子の速度 $w_p(t)$ と定常状態における速度 w_{ps} との関係を次のように求めている。

$$\overline{w_p(t)^2} = \overline{w_{ps}^2} \{ 1 - 2 \exp(-at) + \exp(-2at) \} \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

砂粒が粒径の距離 d を沈降速度 w_o で落下する時間を粒子の特性時間として、

$$T_* = d/w_o \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

と表わす。砂粒が移動を開始してから T_* 時間後の砂粒の速度と定常状態における速度との関係は、(2.7)式から図-2.1のように求められる。

$$\text{いま, } \frac{\overline{w_p(T_*)^2}}{\overline{w_{ps}^2}} \doteq \frac{\overline{w_p(T_*)^2}}{\overline{w_f^2}} = \beta_1^2 \quad \dots\dots (2.9)$$

と表わすと、 $w_o < 1 \text{ cm/sec}$ では $\beta_1 \doteq 1$ であり、水流の乱れにきわめてよく追従することが知られる。また、 $w_o = 2 \text{ cm/sec}$ では $\beta_1^2 = 0.7$ 程度である。

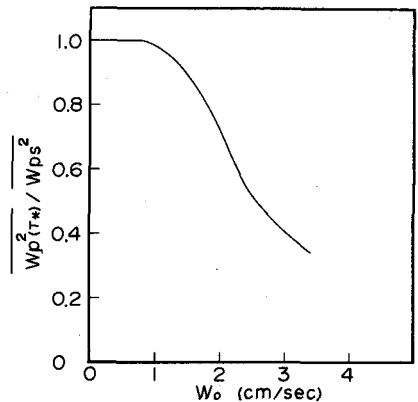


図-2.1 $\overline{w_p(T_*)^2} / \overline{w_{ps}^2}$ と沈降速度との関係 ($\mu = 0.01$) (道上的による)

3. 浮遊砂の濃度分布の基礎方程式

浮遊砂の濃度分布の基礎方程式は流体および浮遊砂の質量保存則によって表わされる。流体成分および浮遊砂成分の質量保存則はそれぞれつぎのように表わされる。^{9)~11)}

$$\frac{\partial(1-c)\rho}{\partial t} + \frac{\partial(1-c)\rho u_f}{\partial x} + \frac{\partial(1-c)\rho v_f}{\partial y} + \frac{\partial(1-c)\rho w_f}{\partial z} = 0 \quad \dots (3.1)$$

$$\frac{\partial c\sigma}{\partial t} + \frac{\partial c\sigma u_p}{\partial x} + \frac{\partial c\sigma v_p}{\partial y} + \frac{\partial c\sigma w_p}{\partial z} = 0 \quad \dots (3.2)$$

ここに、 c ：浮遊砂の体積濃度、 ρ 、 σ はそれぞれ流体および浮遊砂の密度、 u 、 v 、 w は x 、 y 、 z 方向の速度、添字 f 、 p はそれぞれ流体および浮遊砂成分に対するものを表す。濃度および速度を時間平均値と変動値とにわけば、 $c = \bar{c} + c'$ 、 $u = \bar{u} + u'$ 、 $v = \bar{v} + v'$ 、 $w = \bar{w} + w'$ … (3.3)

また、粒子の平均速度は次のように表わされるものとする。

$$\bar{u}_p = \bar{u}_f - u_o, \quad \bar{v}_p = \bar{v}_f - v_o, \quad \bar{w}_p = \bar{w}_f - w_o \quad \dots (3.4)$$

ここに、 u_o 、 v_o 、 w_o はそれぞれ沈降速度の各座標成分である。

(3.3)、(3.4)式を(3.1)、(3.2)式に代入し、時間平均操作を行なって連立に解けば、次のような濃度分布の基礎方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_f \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v}_f \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{w}_f \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} &= (1 - \bar{c}) \left\{ u_o \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + v_o \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + w_o \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right\} \\ &+ (1 - \bar{c}) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_{sx} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon_{sy} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_{sz} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}) \right\} \\ &+ \bar{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_{wx} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon_{wy} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_{wz} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}) \right\} \quad \dots (3.5) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} -\overline{c' u'_f} &= \epsilon_{wx} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}, & -\overline{c' v'_f} &= \epsilon_{wy} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}, & -\overline{c' w'_f} &= \epsilon_{wz} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \\ -\overline{c' u'_p} &= \epsilon_{sx} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}, & -\overline{c' v'_p} &= \epsilon_{sy} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}, & -\overline{c' w'_p} &= \epsilon_{sz} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \quad \dots (3.6) \end{aligned}$$

いま、 $\bar{c} \ll 1$ 、 $\epsilon_s \doteq \epsilon_w$ 、 $u_o = 0$ 、 $v_o = 0$ とし、記号を簡略化するために、 $\bar{c} = C$ 、 $\bar{u}_f = u$ 、 $\bar{v}_f = v$ 、 $\bar{w}_f = w$ とすれば、(3.5)式は、

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = w_o \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_{sx} \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon_{sy} \frac{\partial C}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_{sz} \frac{\partial C}{\partial z}) \quad \dots (3.7)$$

のように書ける。(3.7)式が通常用いられる濃度分布の基礎方程式である。

流れの方向に x 軸をとり、等流の場合を考えると、 $v = w = 0$ であるから、(3.7)式を積分すると、

$$\epsilon_{sz} \frac{\partial C}{\partial z} + w_o C = 0 \quad \dots (3.8)$$

となる。(3.8)式は沈降速度で下方に落ちる砂量と乱流拡散により上方に輸送される砂量が平衡しているときの濃度分布の基礎式である。拡散係数 ϵ_{sz} が与えられると、(3.8)式によって濃度分布を求めることができる。拡散係数を知るためには、濃度変動と速度変動の相関を測定しなければならない。しかし一般には、拡散係数 ϵ_{sz} が渦動粘性係数 ϵ に比例するものとして、

$$\epsilon_{sz} = \beta \epsilon \quad \dots (3.9)$$

として取り扱われている。ここに、 β ：比例定数である。 ϵ として、

$$\epsilon = \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{h} \right) \quad \dots (3.10)$$

を用いると、(3.8)式からRouse¹²⁾の濃度分布式が求められる。

$$\frac{C}{C_a} = \left(\frac{h-z}{z} \cdot \frac{a}{h-a} \right)^Z \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

$$Z = w_o / \beta \kappa u_*$$

ここに、 z ：流路床からの距離， h ：水深， C_a ： $z=a$ における濃度， κ ：Kármán の定数， w_o ：砂粒の沈降速度，また， ϵ を一定としてその平均値 $\kappa h u_* / 6$ を用いれば，Lane・Kalinske¹³⁾の濃度分布式が得られる。

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left\{ -6Z \frac{z-a}{h} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

^{14), 15)}

芦田，道上是濃度分布式 (3.11) および (3.12) の適合性について実験的検討を行なった。実験用砂は A 砂 (中央粒径 $d_{50} = 0.16 \text{ mm}$ の混合砂)，B 砂 ($d_{50} = 0.09 \text{ mm}$ の比較的均一砂)，C 砂 ($d_{50} = 0.08 \text{ mm}$ の比較的均一砂) の 3 種類で河床砂と同一の砂を給砂器によって補給し，実験中勾配が変化しないようにした。ついで，実際河川でよく見受けられるように浮遊砂の粒径に比して河床砂のそれがかなり粗い場合を対象として，補給砂としては A 砂，河床砂としては A 砂と D 砂 ($d_{50} = 1.77 \text{ mm}$ の粗砂) との混合割合を種々変化させた場合についても実験を行なった。実験条件は，勾配や流量を種々変化させて，Upper Regime の平坦河床から Lower Regime の砂堆河床のものまで含まれている。実験の結果次のことが知られた。

- i) 濃度分布は，河床が平坦な場合には，各粒径別に，(3.11)式あるいは(3.12)式で表わすことができるが，(3.11)式の方が適合性がよい。
- ii) (3.9) 式の β の値は 1.2 程度である。すなわち，濃度分布形を支配する Z の値は $Z = w_o / 1.2 \kappa u_*$ で与えられる。これは椿¹⁶⁾によって提案されたものと一致している。
- iii) 河床に砂堆が形成されている場合には，河床からかなりの高さまで濃度分布は一定の傾向を示さず，(3.11)式で表わすことができない。これは，河床の不規則性によって誘起される濃度変動や¹⁷⁾採水中における河床高の変化，拡散係数の場所的な変化に起因するものと考えられる。土屋，星畑は河床砂が形成された場合の河床近傍の流れによる土砂のまき上げの現象に注目して種々の検討を行なっているが，こうした現象も含めて，河床波上の濃度分布を的確に表示する方法については今後の研究に待たなければならない。
- iv) z 方向の浮遊砂の粒度分布 $f_z(w_i)$ は，つぎのように表わすことができる。

$$\frac{w_i}{u_*} < \alpha : f_z(w_i) = \frac{f_b(w_i) \left(\frac{h-z}{z} \cdot \frac{a}{h-a} \right)^{Z_i}}{\sum_i f_b(w_i) \left(\frac{h-z}{z} \cdot \frac{a}{h-a} \right)^{Z_i}} \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

$$\frac{w_i}{u_*} \geq \alpha : f_z(w_i) = 0$$

ここに， $f_b(w_i)$ ：河床砂の粒度分布， α は浮遊限界を表わす重要な値である。 α の正確な数値はわかっていないが，種々の実験結果から判断すると， $\alpha = 0.7 \sim 1$ 程度であるとみなされる。

図-3.1 は河床のすべての粒子に対して， $w_i/u_* < \alpha$ が満足されるような状態の浮遊砂の粒度分布の実験値と (3.13) 式による計算値とを比較したものであるが，両者はよく一致している。また，河床近傍 a 点において， $f_a(w_i) = f_b(w_i)$ の関係が成立していることも知られる。これに対して，図-3.2 は一部 $w_i/u_* \geq \alpha$ の砂れきが存在する場合の浮遊砂の粒度分布についての実験値と計算値の比較であるが， $f_a(w_i) \neq f_b(w_i)$ の関係にあり，河床砂の混合効果があらわれてくる。なお，(3.13) 式による計算値と実験値との一致は比較的良好である。

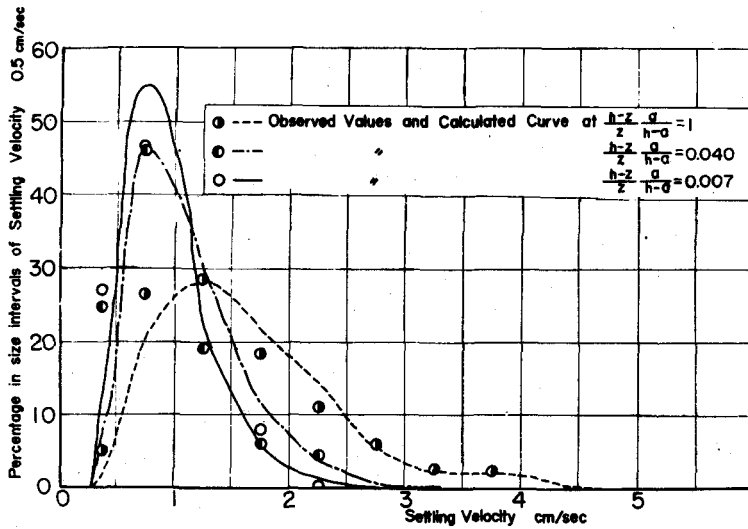


図-3.1 浮遊砂の粒度分布の実験値と計算値の比較 ($w_i/u_* < \alpha$)

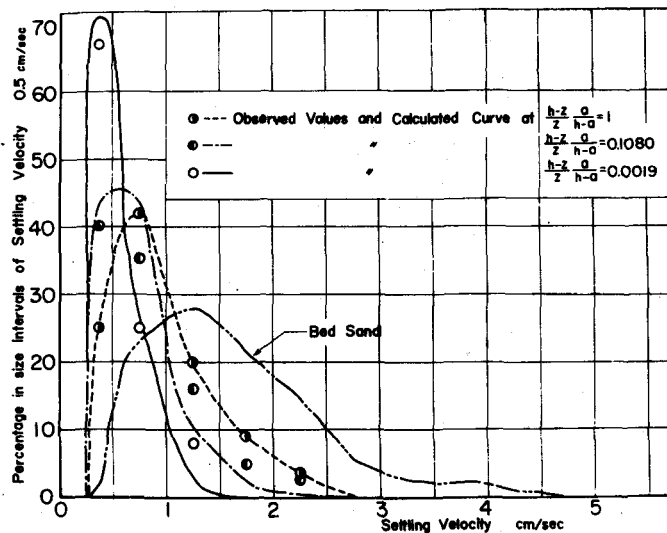
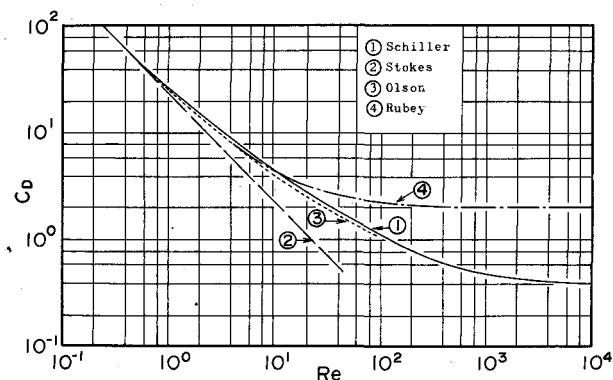


図-3.2 浮遊砂の粒度分布の実験値と計算値の比較 (一部 $w_i/u_* \geq \alpha$ の砂を含む)

4 粒子の沈降速度

粒子の沈降速度は浮遊現象に直接関係する重要なものである。静水中において一定速度で落下する粒子の沈降速度は粒子に働く抵抗力と重力との釣り合い条件から求めることができる。すなわち、粒子の運動方程式 (2.1) 式において、 $u_f = 0$, $-u_p = w_o$, $F_e = -(1/6)\pi d^3 (\sigma - \rho) g$ とおいて次式がえられる。

$$w_o = \sqrt{\frac{4}{3} d \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g / C_D} \dots\dots\dots (4.1)$$



図一 4. 1 球の抵抗係数と Reynolds 数の関係

抵抗係数 C_D が与えられると沈降速度 w_0 が求められる。 C_D は Reynolds 数 ($w_0 d / \nu$) の関数であり、これについては従来理論的、実験的研究が数多く行なわれている。その一部を示すと図 4. 1¹⁸⁾ のとおりである。

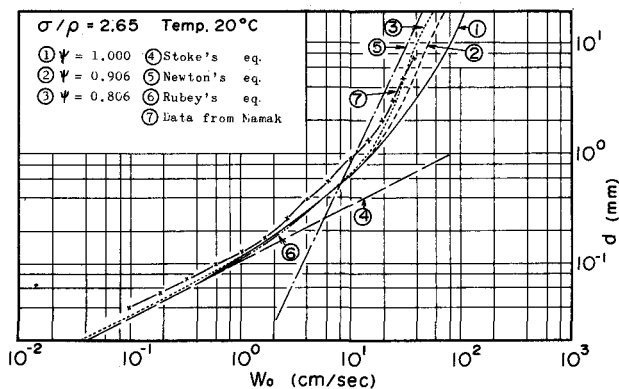
①は Schiller による実験値を示したものであり、広範囲の Reynolds 数に対して用いることができる。

②は Stokes が理論的に導いたもので次式で与えられ、 $Re < 1$ の範囲で適用できる。

$$C_D = 24 / Re \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

③は Olson による実験式で次式で与えられ、 $Re < 100$ の範囲でかなりよい結果を与える。

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (4.3)$$



図一 4. 2 砂粒子の粒径と沈降速度の関係

④は沈降速度の算定によく用いられる Rubey¹⁹⁾ の半理論式で次式で与えられる。

$$C_D = \frac{24}{Re} + 2 \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

Re 数の大きい所で実験値とかなり相違し、そのために後述するように沈降速度を若干過少に評価することになる。

流体の密度と粘性係数および粒子の直径と密度が与えられれば図一 4. 1 と (4. 1) 式を用いて試算により沈降速度を求めることができる。いま、実用上の便宜のため、粒子の比重 $\sigma / \rho = 2.65$ 、水温 20°C の条件のもとでの粒径と沈降速度の関係を図一 4. 2²⁰⁾ に示しておく。温度が変化すると沈降速度は変化するが、

図一 4.2 によって沈降速度の大略を知ることができる。自然砂は球形でないで、沈降速度は球形の場合と若干相異なるが、同図にはその影響も示されている。図中 Ψ は Pettyjohn 等によって定義された球形度

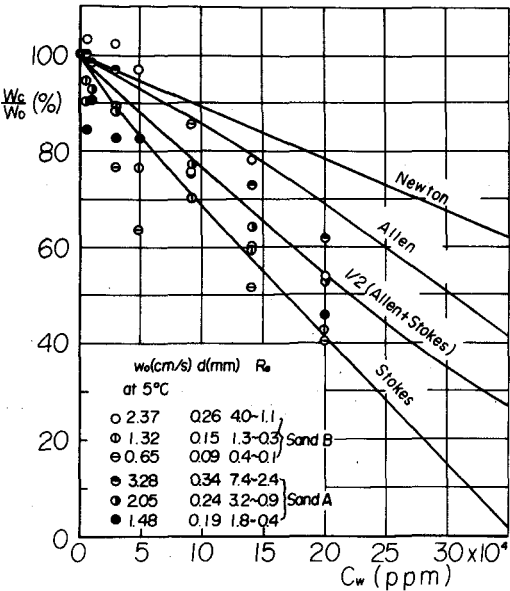
$$\Psi = A_s / A_{sN} \dots\dots\dots (4.5)$$

である。ここに、 A_s ：粒子と同体積の球の表面積、 A_{sN} ：粒子の実際の表面積であり、球： $\Psi = 1.0$ 、八面体： $\Psi = 0.906$ 、立方体： $\Psi = 0.806$ である。図一 4.2 には Mamak による自然砂に対する data も示されているが、 $\Psi = 0.806$ の曲線に近い。以上のように、実際の砂粒子の沈降速度は、球形として求めたものと Rubey の式によるものとの中間の値を示す。

浮遊砂の沈降速度としては、洪水時のように微細な土粒子を含む流体の中でかつ乱流中における値が問題である。沈降速度に及ぼす乱れの影響については、まだ十分に解明されていないので、実用上、静水中の沈降速度が用いられており、一般には支障がないものと考えられる。微細粒子の存在が沈降速度に及ぼす影響については、微細粒子を含む流体の粘性係数の増大によって清水中のものよりは沈降速度がかなり減少することが認められている。これは、粒子を含む流れにおける粘性係数の問題に帰着できるが、これについて Einstein は理論を展開し、次式を誘導している。

$$\frac{\mu_c}{\mu_0} = 1 + 2.5 C \dots\dots\dots (4.6)$$

ここに、 μ_c および μ_0 はそれぞれ容積濃度 C の見かけ粘性係数および清水の粘性係数である。しかし、粘土やシルトのような微細な土粒子を含む流体では、粒子間に働く電気化学的な作用によってフロックが形成され、粘性係数は (4.6) 式よりはるかに大きく変化することが大同によって指摘され、次式が与えられている。



図一 4.3 微細粒子を含む流体中での沈降速度と濃度の関係

$$\frac{\mu_c}{\mu_0} = 1 + \frac{3}{(1/\beta_s C - 1/0.52)} \dots\dots\dots (4.7)$$

ここに、 β_s ：比例定数で土粒子の化学的成分と粒径によって変化する。
 道上、田中は $d_{50} = 0.036 \text{ mm}$ の微細粒子を含む水中での沈降速度を測定して、(4.7) 式が成立するこ

とを明らかにするとともに、 $\beta_s = 2$ という結果をえた。この値を用いて濃度と沈降速度との関係を求めたものが図-4.3である。同様な関係はNordin²³⁾によっても明らかにされているが、Nordinの結果は図-4.3に示すものよりも大幅な沈降速度の減少を示しており、 β_s の値が土粒子の性質によって大きく変化することが知られる。

なお、微細粒子を多量に含む流体では、ニュートン流体から非ニュートン流体への移行がおこりStress-Strainの関係が直線でなくなり一義的な粘性係数を定義できなくなる場合も生じてくる。

5. 浮遊砂濃度によるKarman 定数の変化

乱流中における混合長 $\ell = \kappa z$ におけるKarman 定数 κ は流速分布や濃度分布を決定する重要な要素であるが、浮遊砂を含む流れでは濃度とともに κ が減少し、速度勾配や濃度勾配が増加し、抵抗や浮遊砂量に変化を与えるという事実が、Vanoni²⁴⁾ 以来数多くの実験によって確かめられてきた。こうした事実を説明するための最初の試みは、Einstein と Chien²⁵⁾ によって始められた。彼らは、乱れのエネルギーが土砂の浮遊のために消費されるという考え方に基づき、 κ は土砂粒子を浮遊させるために消費されるエネルギー $(\sigma - \rho) g w_o \bar{c} h$ と流れの失なう平均エネルギー $\rho g h u I$ の比の関数になると予想して実験値を整理し、両者の間に相関があることを見出した。その後、椿²⁶⁾ は粒子の浮遊を考慮した乱れのエネルギー方程式から出発し、乱れの存在によっても渦の寿命時間が変化しないと仮定して理論的な考察を加えた。志村²⁷⁾ は同じくエネルギー方程式から出発し、乱れの強度が変化しないと仮定して理論的な考察を加え、 κ の変化について次式を求めた。

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_o} + \frac{\alpha \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g w_o \bar{c} (h - \delta)}{u_*^3 (2.3 \log_{10} h / \delta - 1)} \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

ここに、 κ_o : 清水の場合の κ の値 (0.4)、 $\bar{c}$: 平均体積濃度、 u_* : 摩擦速度、 h : 水深、 δ : 粘性底層の厚さ (= $11.6 \nu / u_*$) あるいは粗度の高さ、 α は定数で $\alpha = 4.8$ である。

日野²⁸⁾ は、比重が γ に等しい中立粒子流においてもKarman 定数は濃度とともに減少することを示す Elata. Ippen²⁹⁾ の実験結果に注目し、一般の粒子流では、その乱流構造が粒子を浮遊させる仕事のほかに、乱れエネルギーを散逸させる有効体積の減少や混合長の減少によるエネルギー生成の増加に規定されるものとし、乱れエネルギー方程式の各項を上立場から検討し、さらに、乱れ加速度の平衡方程式を用いて次式を導いた。

$$\frac{\kappa_o}{\kappa} = \frac{(1 + \alpha' \bar{c})}{2} \left\{ 1 + \left\{ 1 + 4 B \kappa_o (1 + \alpha' \bar{c}) S_1 \right\}^{1/2} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

$$S_1 = \frac{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g w_o \bar{c} (h - \delta)}{u_*^3 \ell_n h / \delta}$$

ここに、 $\alpha' = 2.0$ 、 $B = 13$ である。その他の記号は (5.1) 式と同じである。(5.1) 式あるいは (5.2) 式は実験値と比較的よく一致することが認められている。しかしながら、微細粒子を多量に含む流れでは乱流構造が大きく変化し、流速の対数分布そのものが成立しなくなる場合も生じてくる。そのような場合には、流れの特性の変化をKarman 定数の変化で論議することができなくなり、乱れの内部構造の変化や流速分布形そのものについての検討を加えていかなければならない。

6. 浮遊砂量

浮遊砂量は濃度と流速の積を浮遊限界点 $z = a$ から水面 $z = h$ まで積分して求められる。

$$g_s = \int_a^h u C dz \quad \dots\dots\dots (6.1)$$

ここに、 g_s は単位幅当りの浮遊砂量（容積）である。

流速分布は次に示す対数分布式で表わすことができる。

$$\frac{u}{U} = 1 + \frac{1}{\kappa} \frac{u_*}{U} + \frac{1}{\kappa} \frac{u_*}{U} \ell_n \frac{z}{h} \quad \dots\dots\dots (6.2)$$

ここに、 U は平均流速である。濃度分布として (3.11) 式あるいは (3.12) 式を用いることにすれば流砂量式はそれぞれ次のように表わされる。

$$g_s = g C_B \left(\frac{a}{h-a} \right)^2 \left[\left(1 + \frac{1}{\kappa} \frac{u_*}{U} \right) \int_{a/h}^1 \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)^2 d\eta + \frac{1}{\kappa} \frac{u_*}{U} \int_{a/h}^1 \ell_n \eta \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)^2 d\eta \right] \quad \dots\dots\dots (6.3)$$

$$g_s = g C_B e^{\frac{6a w_o}{\kappa u_* h}} \int_{a/h}^1 \left(1 + \frac{1}{\kappa} \frac{u_*}{U} + \frac{1}{\kappa} \frac{u_*}{U} \ell_n \eta \right) e^{-\frac{6 w_o}{\kappa u_*} \eta} d\eta \quad \dots\dots\dots (6.4)$$

ここに、 g ：単位幅当りの流量、 C_B ：底面付近の濃度 $C_B = C_a$ 、 $\eta = z/h$ である。上式から知れるように、浮遊砂量の算定は、基準に取るべき a の値およびその点の濃度 C_B の算定の問題に帰着し、これについての研究が行なわれてきた。 C_B のうちで、河床砂と交換しながら流下する粒径範囲の流砂いわゆる Bed Material Load に対しては河床砂れきの粒度分布と底面付近の水量とから決定されと考えられ、いろいろな算定モデルが提案されているが、従来からよく知られているのは次の2つである。

- i) 鉛直方向の速度変動と河床付近の濃度とを関連づける方法 (Lane, Kalinske のモデル)
- ii) 河床付近の濃度を掃流砂濃度に接続させる方法 (Einstein のモデル)

Lane, Kalinske は (6.4) 式において $\kappa = 0.4$ とし、 $a \ll h$ として、

$$g_s = g \cdot C_B \cdot P_1$$

$$P_1 = \int_0^1 \left(1 + 2.5 \frac{u_*}{U} + 2.5 \frac{u_*}{U} \ell_n \eta \right) e^{-\frac{15 w_o}{u_*} \eta} d\eta \quad \dots\dots\dots (6.5)$$

を与え、上の考え方により C_B を算定し、米国諸河川の実測結果と比較して、

$$C_B = 5.5 \Delta F \left\{ \frac{1}{2} \frac{u_*}{w_o} \exp \left(- \frac{w_o}{u_*} \right)^2 \right\}^{1.61} \quad \dots\dots\dots (6.6)$$

を提案した。ここに、 ΔF ：沈降速度 w_o なる土粒子の河床物質中に占める割合（%単位）、 C_B は (ppm 単位)

芦田、道³¹⁾上は (6.6) 式を実験的に検討した。それによると、 C_B の値は同じ u_*/w_o に対しても河床形態によって大きく相異し、砂堆が形成された場合は平坦な河床の場合よりはかなり小さくなるが、こうした点は (6.6) 式では説明することができない。また、実験値は (6.6) 式と大幅（10～100倍）に相違する場合があるが、これは河床形態の相異に基因するものであって、同式を一般的に適用することは困難である。Einstein³²⁾は、浮遊砂量式として (6.3) 式を与え、計算を簡便にするための図表を作成している。

Einstein は浮遊限界の高さ $a = 2d$ とし、この点での C_B を掃流砂の濃度に等しいとして掃流砂量式から求める方法を提案した。Einstein による掃流砂量式は細かい粒径範囲の砂れきに対する遮蔽係数を過大に評価することが認められているが、そのために、Einstein による浮遊砂量の計算値は、沈降速度の小さい砂粒子に対して実験値との相違が顕著となる。

このように、Lane・Kalinske 式および Einstein 式とも問題が多く、精度よく浮遊砂量を算定することができないので、さらに精度よく C_B を求めるための努力が重ねられてきた。その中の 2, 3 について説明しよう。

³³⁾ 道上は Lane・Kalinske のモデルに準じて以下のように河床付近の濃度の表示式を求めた。

粒径の高さにおける砂粒の鉛直方向の速度変動の分布が正規分布であると仮定すれば、

$$f(w_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{w_p}{\sigma_p}\right)^2\right\} \quad \dots\dots\dots (6.7)$$

である。ここに、 σ_p^2 : 砂粒の速度変動の分散である。

粒子の運動方程式は (2.3) 式のように線型であるとする、重力の効果を考慮に入れた粒子の速度 w_{pg} は

$$w_{pg} = w_p - w_o \quad \dots\dots\dots (6.8)$$

で与えられる。粒径の高さの点から浮き上がる砂粒の平均速度は、

$$\bar{w}_{pg} = \frac{\int_0^\infty (w_p - w_o) f(w_p) dw_p}{\int_0^\infty f(w_p) dw_p} \quad \dots\dots\dots (6.9)$$

で与えられ、河床の単位面積から単位時間に浮き上がる量 g_{su} は、

$$g_{su} = K_1 N \frac{\pi}{6} d^3 \sigma \frac{\bar{w}_{pg}}{d} \int_0^\infty f(w_p) dw_p \quad \dots\dots\dots (6.10)$$

となる。ここに、 N : 単位面積当りの砂粒の露出個数、 $N = 1 / (\pi d^2 / 4)$ 、 K_1 : 比例定数である。一方単位面積の河床に沈降する砂の量 g_{sd} は、河床付近の濃度を C_B とすると、

$$g_{sd} = C_B w_o \sigma \quad \dots\dots\dots (6.11)$$

で与えられる。平衡状態においては $g_{su} = g_{sd}$ であるので、(6.7)、(6.9)、(6.10) および (6.11) 式から

$$C_B = \frac{2}{3} K_1 \frac{1}{w_o} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_p} \int_0^\infty (w_p - w_o) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{w_p}{\sigma_p}\right)^2\right\} dw_p \quad \dots\dots\dots (6.12)$$

がえられる。いま、

$$\xi = w_p / \sigma_p, \quad \xi_o = w_o / \sigma_p \quad \dots\dots\dots (6.13)$$

とおけば、(6.12) 式はつぎのように表わされる。

$$C_B = K \left[g(\xi_o) / \xi_o - G(\xi_o) \right] \quad \dots\dots\dots (6.14)$$

ただし

$$g(\xi_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_o^2\right) \quad \dots\dots\dots (6.15)$$

$$G(\xi_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_o}^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi$$

(6.14) 式において重要な役割を果すパラメータ ξ_o は次のように考えることができる。砂粒の浮き上が

る基準面を砂粒の高さの点にとっているの、その点における砂粒の変動速度の標準偏差は(2.9)式に示したように、

$$\sigma_p = \sqrt{w_p^2(T_*)} = \beta_1 \sqrt{w_f^2} \dots\dots\dots (6.16)$$

で表わすことができると考える。底面近傍における $\sqrt{w_f^2}$ はLaufer やKlebanov³⁴⁾の平板上の実験値から求めると、 $0.9 u_*$ 程度である。また、 β_1 の値は図-2.1に示したように、 $w_0 = 2 \text{ cm/sec}$ 程度の粒子に対しては $\beta_1 = 0.83$ 程度であるので、これを用いると、

$$\sigma_p = 0.75 u_* \dots\dots\dots (6.17)$$

となる。(6.17)式を(6.13)式に代入して ξ_0 を求め、これを用いて(6.14)式から濃度 C_B が算定できる。ただし K の値は実験値より求めなければならない。

以上のモデルは平坦な河床を対象として考えられたものであるの、砂漣や砂堆などの河床波を伴う場合にはそのままでは適用できないと考えられる。河床波が形成されると、上昇流による河床砂のまき上りが無視できなくなることが観察されているが、上のモデルはこうした場合の現象を必ずしも十分に表わしておらず、さらに適切なモデルの開発が望まれる。しかし、現状では、そのような現象を的確に数量化したモデルを作ることは困難である。というのは、河床波が形成された場合の河床面近傍の乱れの知識が十分ではないためである。そこで、道上是掃流砂の場合に用いられる有効摩擦速度の概念を用いて、(6.17)式を河床波が形成された場合にも拡張して適用することを考えた。すなわち、

$$\sigma_p = 0.75 u_{*e} \dots\dots\dots (6.18)$$

ここに、 u_{*e} は有効摩擦速度で芦田、³⁵⁾道山上によれば次式で与えられる。

$$\frac{U}{u_{*e}} = 6.0 + 5.75 \log_{10} \frac{R}{d(1 + 2\tau_*)} \dots\dots\dots (6.19)$$

$$\tau_* = u_*^2 / sgd$$

河床波が形成されている場の流れの全抵抗は、河床面の砂粒による表面抵抗と河床波による形状抵抗とからなるが、前者が砂れきの移動に有効な掃流力という意味で有効掃流力とよばれる。Einsteinがこの概念を掃流砂量式に導入して以来、数多くの研究者によってとりあげられ、掃流砂量は有効掃流力の関数で比較的よく表わしうることが知られている。浮遊砂については、その運動を支配するものは鉛直方向の速度成分であるので、掃流砂に対するのと同様に有効掃流力を用いることができるかどうかについては検討の余地がある。この点に関して直接的な検討を加えるためには河床波が形成されている場の河床近傍の乱れの測定資料が必要であるが、間接的には、このようなモデルによる結果が実測値をどの程度統一的に説明しうることによってモデルの妥当性を判定することもできる。ここでは、そういう立場がとられている。

(6.13)式と(6.18)式とから、 $\xi_0 = w_0 / \sigma_p = 0.75 w_0 / u_{*e}$ として、実験資料を図-6.1に示すようにプロットし、これから比例定数 $K = 0.025$ が得られた。すなわち河床付近の濃度は、

$$C_B = 0.025 [g(\xi_0) / \xi_0 - G(\xi_0)] \dots\dots\dots (6.20)$$

ただし、 $\xi_0 = 0.75 w_0 / u_{*e}$

一方、混合砂に対しては、Lane、Kalinskeの式と同様に、河床付近の濃度は、対象としている粒子の河床に占める割合に比例するとして、

$$C_B = 0.025 \cdot \Delta F(w_0) [g(\xi_0) / \xi_0 - G(\xi_0)] \dots\dots\dots (6.21)$$

のように書ける。ここに、 $\Delta F(w_0)$ ：河床において沈降速度 w_0 の粒子が占める割合である。この C_B を浮遊砂量式(6.3)式に入れて、浮遊砂量を算定することができる。これを次式で表わして、計算に便利のように図表が作られている。

$$g_s = g \cdot C_B \left[\left(1 + \frac{1}{\kappa} \frac{u_*}{U} \right) A_1 + \frac{1}{\kappa} \frac{u_*}{U} A_2 \right] \quad \dots\dots\dots (6.22)$$

ただし,

$$A_1 = \left(\frac{a}{h-a} \right)^Z \int_{a/h}^1 \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)^Z d\eta \quad \dots\dots\dots (6.23)$$

$$A_2 = \left(\frac{a}{h-a} \right)^Z \int_{a/h}^1 \ell_n \eta \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)^Z d\eta \quad \dots\dots\dots (6.24)$$

$$Z = w_o / 1.2 \kappa u_* \quad \dots\dots\dots (6.25)$$

図-6.2および-6.3は(6.23)式および(6.24)式を数値計算したものである。浮遊砂量の算定にあたって問題となるのは河床付近の濃度を河床からどの高さで与えるかということである。 a/h が小さくなるに従って、 A_1 と $|A_2|$ は小さくなり、これが流砂量に及ぼす影響は少ない。道上は $a/h = 0.05$, $\kappa = 0.4$ として、従来の資料と上述の流砂量式とを比較検討した結果、ほとんどの資料は計算値の0.5~3倍の範囲に入り、両者はほぼ一致することが知られた。

³⁶⁾ 平野は、底面付近の濃度の算定に、EinsteinのモデルとLane・Kalinskeのモデルの中間的なモデルを提案している。すなわち、河床近傍を掃流砂層と浮遊砂層とに分け、両層の砂粒の交換によって、浮遊砂層の濃度が定まるとする考え方である。いま、浮遊砂層および掃流砂層の濃度をそれぞれ C_B および C_* とし、掃流砂層と浮遊砂層の境界での垂直乱れ速度を w 、その確率密度関数を $f(w)$ 、とすれば、掃流砂層からとび出す砂の量および浮遊砂層から掃流砂層に沈降してくる砂の量はそれぞれ

$$C_* \int_{w_o}^{\infty} (w - w_o) f(w) dw \quad \text{および} \quad C_B \int_{-w_o}^{\infty} (w + w_o) f(w) dw$$

となる。平衡状態において両者は等しく、

$$C_* \int_{w_o}^{\infty} (w - w_o) f(w) dw = C_B \int_{-w_o}^{\infty} (w + w_o) f(w) dw \quad \dots\dots\dots (6.26)$$

$f(w)$ として正規誤差関数を用いると、上式より次式がえられる。

$$\frac{C_B}{C_*} = \frac{\varphi(\sigma) - F(\sigma)}{\varphi(\sigma) + 1 - F(\sigma)} \quad \Bigg|$$

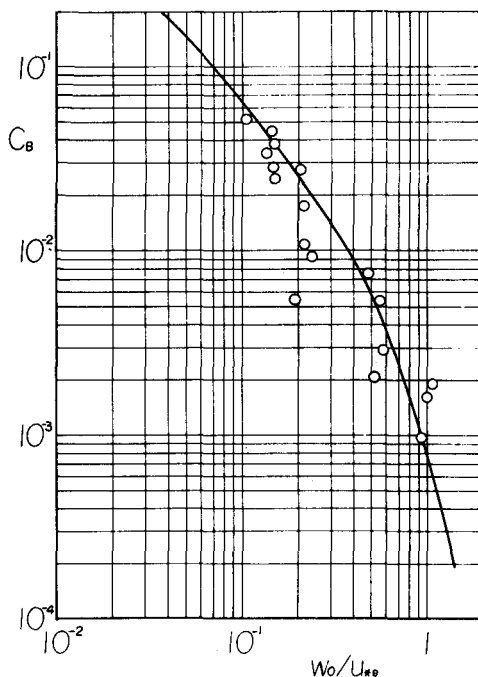


図-6.1 河床付近の濃度(容積濃度)(道上による)

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \quad \dots\dots\dots (6.27)$$

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ここに、 $\sigma = \sqrt{w^2}$ である。河床付近では $\sqrt{w^2} = 0.93 u_*$ であるから、

$$\sigma = w_0 / 0.93 u_* \quad \dots\dots\dots (6.28)$$

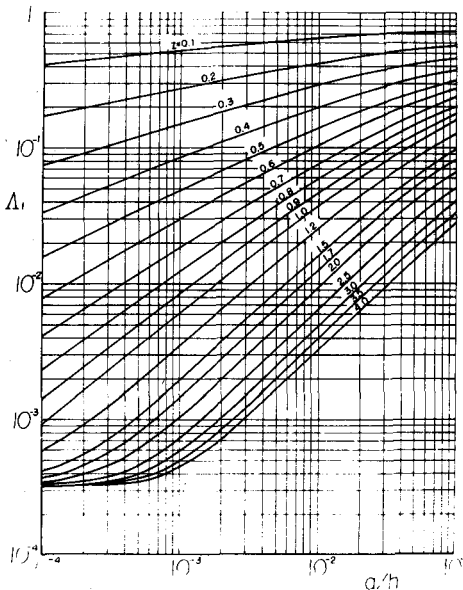


図-6.2 A_1 の数値計算結果 (道上による)

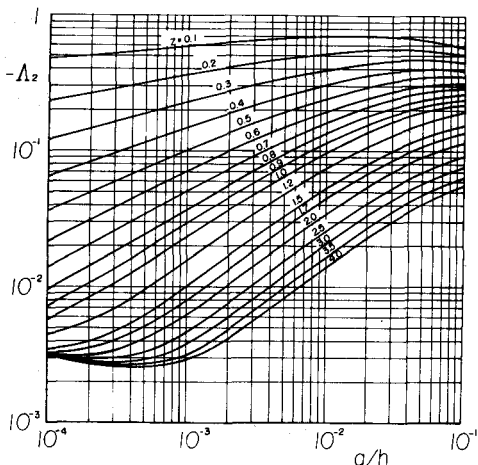


図-6.3 A_2 の数値計算結果 (道上による)

(6.27)式から C_B/C_* と w_0/u_* との関係を求めると、図-6.4 のようである。これより、 w_0/u_* が小さい場合は C_0/C_* ≈ 1 となり、Einstein の仮定のように浮遊砂底面濃度は掃流砂層の濃度に接続するとみなされるが、 w_0/u_* が大きくなるにつれて C_B は C_* より急激に小さくなることがわかる。

(6.27)式を (6.5) 式あるいは (6.22)式に代入すれば浮遊砂量を算定することができる。平野は、 C_* の算定に当って、掃流砂量式として篠原・椿式³⁷⁾

$$\begin{aligned} \frac{q_B}{\sqrt{sgd^3}} &= 25 \psi_e^{2.3} (1 - \psi_c / \psi_e) \\ \psi_e &= u_*^2 / (sgd \cdot \phi_0 / \varphi) \quad \dots\dots\dots (6.29) \\ \phi_0 &= 6.0 + 5.75 \log_{10} \frac{h}{d} \\ \psi_c &= u_*^2 c / sgd, \quad u_* c : \text{限界摩擦速度} \end{aligned}$$

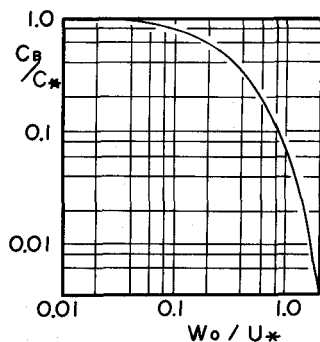


図-6.4 C_B/C_* と w_0/u_* の関係 (平野による)

を用い、掃流層の厚さとして、Einstein にしたがって $2d$ を用い、(6.5) 式によって浮遊砂量を算定し実測値とかなりよく一致することを示している。さらに、椿・平野・渡辺³⁸⁾は、河床に形成される Sand wave による乱れ作用を考慮して上の考察を発展させ、水路実験資料の他に河川の浮遊砂測定資料を用い

て、流砂量式を提案している。

上述の算定法はBed material に対するものであって、河床材料中にほとんど見出されないような粒径範囲の土砂いわゆるwash load には適用できない。しかし、わが国の河川では、このwash load が浮遊砂の大部分を占めており、貯水池や浚渫個所の埋没などにきわめて大きな影響を与えるので、その量を的確に知ることは實際上重要である。現状では、実測による以外その量を的確に知る方法がない。wash loadは w_0 が小さいので、(3.11)式からも知れるように、鉛直方向に比較的一様な濃度分布を示し、全断面の平均濃度を知ることは比較的容易である。そこで、できるだけ多くの流量条件に対して濃度測定を行ない、流量一流砂量の関係を求めることが望ましい。

wash load の生産源は主として流域内の崩壊地などの裸地斜面であり、その量はこれらの場所における表面流出成分やその地点の勾配、wash load となる粒径範囲の占める割合などに支配される。したがって、観測地点の流量が同じであっても、降雨の地域的な分布や全流量のうちで表面流出成分の占める割合によって濃度は変化する。したがって、同一地点における流量と浮遊砂量の関係は一義的ではなく、出水の増水期は減衰期よりも濃度が高いという観測結果も出されており、こうした点にも留意して観測結果を整理することも必要である。しかし、わが国における河川の実測値を平均的に見ると、流量 Q とwash loadが大部分を占める浮遊砂量 Q_s の間には、はづつぎのような関係がある。

$$Q_s = \alpha Q^2 \quad \dots\dots\dots (6.30)$$

$$\alpha = 4 \times 10^{-8} \sim 6 \times 10^{-6} \quad (\text{m}^3/\text{sec 単位})$$

α の値は河川により、また観測地点により変化し、現状では実測によらなければならない。

wash load をその生産地である裸地斜面における表面流量と勾配から水理学的に算定しようとする試み⁴⁰⁾や、それらの計算の基礎となる裸地斜面上の流れの分布や侵食の機構に関する研究も行なわれており、現地観測と相俟ってwash load を的確に算定する方法が開発されていくものと思われる。

7. 浮遊砂の洗掘、堆積、分散

浮遊砂が貯水池に流入すると、 $w_0 \geq u_*$ のところで堆積が生ずる。このような場合には、濃度の距離的变化や堆積量を知ることが必要になってくる。その他、非平衡の場合として、固定河床から移動河床に移り変わる場合の河床砂の浮遊洗掘の問題や浮遊物質の分散の問題などいろいろと考えられるが、これらはいずれも、浮遊砂濃度の基礎方程式(3.7)式を与えられた初期条件と境界条件のもとに解くことに帰着する。(3.7)式をそのままで解くことは困難であり、また、必ずしもその必要もないので目的によって基礎方程式に種々の省略が行なわれている。この際、できるだけ厳密な解を得ようとする数値計算に多大の労力を必要とし、またあまり単純化すると解を得ることは容易となるが実測値との適合性が悪くなるので、どの程度の単純化を行なうのがよいかはきわめて重要な問題となる。以下、2, 3の場合について説明しよう。

Kalinske⁴¹⁾ は、(3.7)式の中次に示す項のみを取り上げて基礎方程式とし、 $\epsilon = \text{const}$ として解を求めている。

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + w_0 \frac{\partial C}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (7.1)$$

⁴²⁾ 合田は

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \epsilon \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + w_0 \frac{\partial C}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (7.2)$$

を基本式として、各種の境界条件に対する解を求めているが、このうち(7.1)式についてはつぎの境界条

件を用いている。

$$\left. \begin{aligned} z=0 \quad & -\varepsilon \frac{\partial C}{\partial z} = k w_o C \\ z=h \quad & \varepsilon \frac{\partial C}{\partial z} + w_o C = 0 \\ x=0 \quad & C = C_o(z) \\ k > 1 : & \text{洗掘の傾向} \\ k = 1 : & \text{平衡} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7.3)$$

$0 < k < 1$ 堆積の傾向, $k = 0$: 純堆積

(7.3) 式に示す境界条件において、特に問題になるのは $z=0$ における条件である。貯水池において堆砂が進行しつつある状態では $\partial C / \partial z \neq 0$ になることが実験的に確かめられており、また、その他の条件についても k の値が上述の傾向を示すことは定性的には理解できる。しかし、計算に際してはさらに定量的な表現にしておかなければならない。また、(7.1)式では $\varepsilon = \text{const}$ とされているが、一般には

(3.10)式に示すように、 $\varepsilon(x, z)$ としなければならない。したがって、洗掘や堆積を生ずる場合の浮遊砂の濃度分布の基礎式として、二次元定常流れを対象とし、かつ微小と考えられる項を省略して、次式が与えられる。

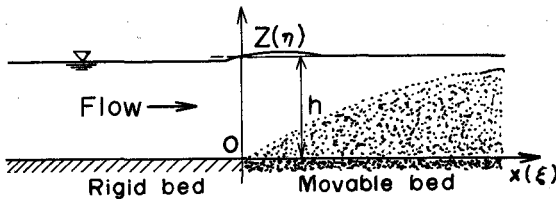
$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial C}{\partial z} \right) + w_o \frac{\partial C}{\partial z} \dots\dots\dots (7.4)$$

境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} z=0 \quad & -\varepsilon \frac{\partial C}{\partial z} = w_o C_B \\ z=h \quad & \varepsilon \frac{\partial C}{\partial z} + w_o C = 0 \\ x=0 \quad & C = C_o(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7.5)$$

で与えられる。ここに、 C_B は w_o および u_* で定まる平衡状態における底面濃度であって、(6.21)式あるいは(6.27)式のように w_o および u_* の関数として与えられる。平衡状態においては $C_{z=0} = C_B$ であるから $k=1$ であり、 $w_o / u_* > 1$ の範囲では $C_B \neq 0$ であって $\partial C / \partial z = 0$ すなわち $k=0$ となる。一般に堆積傾向のところでは、 $C_{z=0} > C_B$ であって、 $k < 1$ 、洗掘傾向のところでは、 $C_{z=0} < C_B$ であって $k > 1$ となり、(7.3) 式に示した傾向と一致する。

(7.4) 式を(7.5) 式の条件のもとで数値計算することにより、堆積あるいは洗掘を伴う場合の濃度分布の距離的变化や堆積量あるいは洗掘量を求めることができる。



図一7.1 濃度分布発達の過程

⁴⁴⁾ Yalin は、図一7.1に示すような場合の濃度分布の発達の過程を(7.4)式にもとづいて検討している。

(7.4) 式の u および ε はそれぞれ次のように表わされる。

$$u = u_* \left(B + \frac{1}{\kappa} \ell_n \frac{z}{k_s} \right) \quad \dots\dots\dots (7.6)$$

$z_{\min} < z < h$: $z_{\min}$ は k_s あるいは粘性底層の厚さ δ_L

$$\varepsilon = \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{h} \right) \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

境界条件として $z = z_0$ において $C = C_0$ とする。ここに, $z_{\min} < z_0 \ll h$ である。いま, 一般的な性質を知るために次のような無次元化を行ない, (7.4) 式を無次元の方程式にする。

$$\left. \begin{aligned} \xi = x/h, \quad \eta = z/h \\ \bar{C}(x, y)/C_0 = \bar{f}(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7.7)$$

(7.6), (3.10) および (7.7) 式を用いると, (7.4) 式は,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varphi_k(\eta) \frac{\partial \bar{C}}{\partial \eta} + \frac{w_0}{u_*} \bar{C} \right) &= \varphi_u(\eta) \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \\ \text{ここに, } \varphi_u(\eta) &= \frac{1}{\kappa} \ell_n \left(\eta \frac{h}{k_s} \right) + f_B(u_* k_s / \nu) \\ \varphi_k(\eta) &= \kappa \eta (1 - \eta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7.8)$$

となる。境界条件は,

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}(0, \eta) &= 0, \quad \bar{f}(1, \xi) = 0 \\ \bar{f}(\eta_0, \xi) &= 1, \quad \partial \bar{f}(\eta, \infty) / \partial \xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7.9)$$

ここに, $\eta_0 = z_0/h$ である。(7.9) 式の条件のもとに (7.8) 式を解くと次のような形で表わされるはずである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{C} &= \phi \left(\eta, \frac{u_*}{w_0}, \frac{x}{h} [\varphi_u(\eta)]^{-1} \right) \\ \bar{C}_\infty &= \phi_\infty \left(\eta, \frac{u_*}{w_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7.10)$$

すなわち,

$$\frac{C}{C_\infty} = \Psi \left(\eta, \frac{u_*}{w_0}, \frac{x}{h} [\varphi_u(\eta)]^{-1} \right) \quad \dots\dots\dots (7.11)$$

いま, $C/C_\infty = 0.95$ になる地点を $x = X_\eta$ とすれば,

$$\Psi \left(\eta, \frac{u_*}{w_0}, \frac{X_\eta}{h} [\varphi_u(\eta)]^{-1} \right) = 0.95 = \text{一定}$$

$$\text{すなわち, } \frac{X_\eta}{h} [\varphi_u(\eta)]^{-1} = \Psi \left(\eta, \frac{u_*}{w_0} \right) \quad \dots\dots\dots (7.12)$$

となる。Yalin は (7.10) 式, (7.12) 式の関数形を計算によって求める代りに実験によって求めている。行なわれた実験条件は次のとおりである。

σ / ρ	d (mm)	w_0 (cm/s)	h (cm)	S	$\frac{u_*}{w_0}$
2.65	0.350	4.64			
2.50	0.135	0.90	4 ~ 14	0.001 ~ 0.002	0.73 ~ 6.10
1.05	1.400	1.50			

(7.10) 式から $\bar{C}$ は u_*/w_0 をパラメーターとして η および ξ の関数として示されるが, 実験値の 1 例を $u_*/w_0 = 4.31$ の場合について示したものが図-7.2 である。また, 濃度分布が十分発達するに必要な距離 X_η は (7.12) 式の関数で示されるが, 実験の結果これを求めたものが図-7.3 である。これらから濃度分布が十分に発達するに必要な距離ならびにその途中における発達の過程を知ることができる。

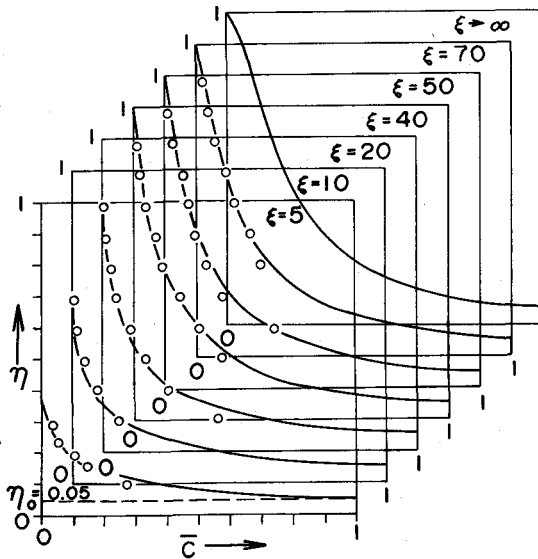


図-7.2 濃度分布の距離的变化

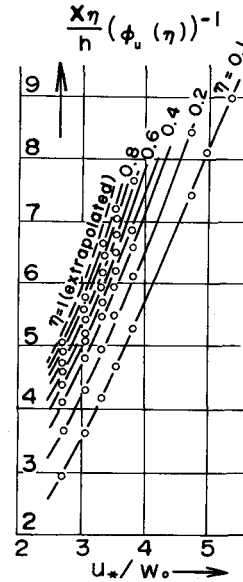


図-7.3 濃度分布が十分発達するに要する距離

45) Sayre は、ある地点に面源で与えられた Silt 物質の分散の過程を検討している。流れを二次元等流のせん断流れであるとするとき濃度分布の基礎式 (3.7) 式は次のように簡略化される。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + w_0 \frac{\partial C}{\partial z} + \epsilon_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (7.13)$$

いま、 u および ϵ を次のようにおく。

$$u(z) = \bar{u} (1 + \chi(z)) \quad \dots\dots\dots (7.14)$$

$$\epsilon_x = \epsilon_z = D \Psi(z) \quad \dots\dots\dots (7.15)$$

さらに、次のように無次元化をはかる。

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x - \bar{u}t}{h} & \mu &= \frac{\bar{u}h}{D} \\ \eta &= \frac{z}{h} & \nu_s &= \frac{w_0 h}{D} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7.16)$$

$$\tau = \frac{Dt}{h^2} \quad C(\xi, \eta, \tau) = \frac{h^2}{M} C(x, z, t)$$

ここに、 M ：単位幅当りの silt 物質の総量、 h ：水深である。

(7.14)～(7.16)式を用いると、濃度分布の基礎式 (7.13) 式は次のような無次元量の方程式になる。

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \mu \chi \frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Psi \frac{\partial C}{\partial \eta} + \nu_s C \right) + \Psi \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \quad \dots\dots\dots (7.17)$$

初期条件は、

$$\left. \begin{aligned} \tau = 0 : \quad C(\xi, \eta, 0) &= 0 & \text{for } \xi \neq 0 \\ C(\xi, \eta, 0) &= \infty & \text{at } \xi = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi, \eta, 0) d\xi &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7.18)$$

境界条件は、

$$\eta = 1 \quad : \quad \Psi \frac{\partial C}{\partial \eta} + \nu_s C = 0 \quad \dots\dots\dots (7.19)$$

$$\eta = 0 \quad : \quad \Psi \frac{\partial C}{\partial \eta} + (1 - \alpha) \nu_s C + rW = 0 \quad \dots\dots\dots (7.20)$$

で与えられる。ここに、 α は河床に沈降したものがそこに堆積する確率を表わす係数で、極端な場合として、完全に堆積してしまう場合は $\alpha = 1.0$ ，河床で完全に反射して堆積しない場合には $\alpha = 0$ である。

$W(\xi, \tau) = (h/M) W(x, t)$ は河床単位面積に貯留されている堆積物の量を規格化したもの、 r は堆積物の連行係数、 rW は単位時間に連行される堆積物質の量を表わす。堆積したまま移動しない場合は $r = 0$ である。堆積物の量 W の分布を与える方程式は境界条件(7.20)式から

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \mu \frac{\partial W}{\partial \xi} = \alpha \nu_s C(\xi, 0+, \tau) - rW \quad \dots\dots\dots (7.21)$$

で与えられ、このシステムの中でのsilt物質の全量が一定であることから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 C(\xi, \eta, \tau) d\eta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi, \tau) d\xi = 1 \quad \dots\dots\dots (7.22)$$

が得られる。

上式を連立に解いて、silt物質の分散ならびに堆積の過程が計算できる。YotsukuraとFiering, Fischerは(7.17)式の数値計算を高速度計算機によって行なっているが、 $\nu_s = 0$ ， $W = 0$ ， $\varepsilon_x = 0$ という単純な条件のもとでも計算にかなりの時間を要している。したがって、(7.17)式と(7.21)式とを同時に解くというもっと一般的な場合を取り扱うことはかなり困難であることが推察される。そこで、Sayreはもっと簡単な方法として、Arisによるモーメント変換法を用いて分散の様子を調べ、十分目的に沿いうる方法を示しているので次にその大要だけを示しておこう。Arisによるモーメント変換は次のように定義される。

$$C_p(\eta, \tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \xi^p C(\xi, \eta, \tau) d\xi \quad \dots\dots\dots (7.23)$$

$$m_p(\tau) \equiv \int_0^1 C_p(\eta, \tau) d\eta \quad \dots\dots\dots (7.24)$$

$$W_p = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^p W(\xi, \tau) d\xi \quad \dots\dots\dots (7.25)$$

(7.17)式に ξ^p を乗じて $-\infty$ から ∞ まで積分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial C_p}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Psi \frac{\partial C_p}{\partial \eta} + \nu_s C_p \right) + p\mu \chi C_{p-1} + p(p-1)\Psi C_{p-2} \quad \dots\dots\dots (7.26)$$

初期条件は、

$$\begin{aligned} \tau = 0 \quad : \quad C_p(\eta, 0) &= 1 \quad \text{for } p = 0 \\ C_p(\eta, 0) &= 0 \quad \text{for } p > 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7.27)$$

であり、境界条件は、

$$\eta = 1 \quad : \quad \Psi \frac{\partial C_p}{\partial \eta} + \nu_s C_p = 0 \quad \dots\dots\dots (7.28)$$

$$\eta = 0 \quad : \quad \Psi \frac{\partial C_p}{\partial \eta} + (1 - \alpha) \nu_s C_p + rW_p = 0 \quad \dots\dots\dots (7.29)$$

で与えられる。同様に、(7.21)式に対する変換方程式は、

$$\frac{dW_p}{d\tau} = \alpha \nu_s C_p(0+, \tau) - P \mu W_{p-1} - r W_p \quad \dots\dots\dots (7.30)$$

初期条件は $W_p(0) = 0$ である。上の取扱いでは変数 ξ が消去されているのでこの新しい方程式を解くことは比較的容易である。もちろん、解は分布そのものではなくて分布のモーメントを与える。しかし、そのモーメントの挙動によって、silt 物質の物散の過程をかなり詳細に把握することが可能である。そのためには3次あるいは4次のモーメントまで取れば十分である。適当な $\Delta\eta$ および $\Delta\tau$ のメッシュに区分して(7.26)式、(7.30)式を数値計算することになるが、 $\Delta\eta = 0.05$ 、 $\Delta\tau = 0.0005$ のメッシュによって数値計算の安定性と収斂性が十分に確保されるという結果が得られている。なお、計算に用いられた拡散係数の値や流速分布形はつぎのとおりである。

$$\varepsilon_z = \kappa h u_* \eta (1 - \eta) \quad \dots\dots\dots (7.31)$$

$$D = \int_0^1 \varepsilon_z dz = \frac{\kappa}{6} h u_* \quad \dots\dots\dots (7.32)$$

$$\Psi = \varepsilon_z / D = 6 \eta (1 - \eta) \quad \dots\dots\dots (7.33)$$

$$\mu \chi = \frac{\bar{u} h}{D} \frac{u - \bar{u}}{\bar{u}} = \frac{6}{\kappa^2} (\ell_n \eta + 1) \quad \dots\dots\dots (7.34)$$

Sayre は沈降速度 w_0 、河床の吸着係数 α 、連行係数 r および流れの条件の組合せ約 50 種類について数値計算を行ない、それぞれの条件に対する分散の過程を明らかにしている。

8. むすび

以上、浮遊砂に関して、浮遊粒子の運動特性、濃度分布と流砂量ならびに浮遊砂の洗掘、堆積、分散などの問題について述べた。浮遊砂を伴う流れの内部構造や流体の性質については若干言及したに過ぎないが、非常に重要な問題であって、いままでにもかなりの研究がなされてきている。しかし未解明の問題も多く、測定技術の進展と相まって今後の研究の発展が期待されるところである。特に、微細粒子を含む流れでは、ニュートン流体から非ニュートン流体への移行が問題になるので、広範囲の条件について流体の性質を明らかにしていかなければならない。

浮遊砂量の算定法についてはかなり詳しく述べたが、これらはいずれも Bed Material を対象としたものであって、浮遊砂のかかなりの部分を占める wash load については的確な算定法がない。これについては現地観測が要望されるところであって、その重要性を本論において強調した。

堆積や洗掘を伴う場合の浮遊砂の濃度分布の変化や堆積量あるいは洗掘量の算定法について述べたが、こうした方法は、貯水池の堆砂量の予測など実際問題に幅広く適用できる。しかし、貯水池内の流れは非常に複雑であって、本論では述べなかった温度成層や泥水密度流の形成が浮遊砂の運動に重要な影響を持つてくる場合もあって、その適用には注意が必要である。しかし、現在これについては未解明の点が少なく、「貯水池における浮遊砂の水利」を系統的に研究する必要性が痛感される。

参 考 文 献

- 1) 芦田和男: ダムにおける Sedimentation, ダム上流の河床変動論, 1965 年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会
- 2) 椿東一郎: 流砂, 1966 年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会
- 3) 日野幹雄: 河川の乱流現象, 1966 年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会

- 4) 林泰造: 流水中における物質の移流と拡散, 1971 年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会
- 5) Corsin, S. and J. Lumley: On the Equation of Motion for a Particle in Turbulent Fluid, App. Sci. Res. Sec. A, Vol. 6, 1956, pp 114 — 116.
- 6) Hinze, J. O.: Turbulence, McGraw-Hill, 1959, pp 352 — 364
- 7) Soo, S. L.: Fluid Dynamics of Multiphase Systems, Blaisdell publishing Company. 1967, pp 31 — 42
- 8) 道上正規: 流砂と河床変動に関する基礎的研究, 京大学位论文, 昭 47. 10, pp. 97 — 98
- 9) Hunt, J. N.: On the Turbulent Transport of a Heterogeneous Sediment, Quarterly Jour. of Mechanics and App. Mathematics, Vol. 22, 1969, pp. 235 — 246
- 10) 矢野勝正・芦田和男・大同淳之・前田武志: 浮遊流砂による貯水池の堆砂に関する研究, 京大防災研年報, 第 7 号, 昭 39. pp. 348 — 364
- 11) 前出論文 8) pp. 74 — 76
- 12) Rouse, H.: Modern Conception of Fluid Turbulence, Trans. ASCE, Vol. 102, 1937, pp. 463 — 543
- 13) Lane, E. W. and A. A. Kalinske: Engineering Calculations of Suspended Sediment, Trans. AGU, Vol. 22, 1941, pp 603 — 607
- 14) 芦田和男・道上正規: 浮遊砂量に関する実験的研究, 京大防災研年報, 第 10 号 B, 昭 42, pp. 63 — 79
- 15) 芦田和男・道上正規: 浮遊砂に関する研究(1) — 河床付近の濃度 —, 京大防災研年報, 第 13 号 B, 昭 45, pp. 63 — 79
- 16) 前出文献 2)
- 17) 土屋昭彦・星畑国松: 浮遊砂の浮上機構について, 第 25 回土木学会年次学術講演会講演集, 第 2 部, 昭 45,
- 18) Graf W. H.: Hydraulics of Sediment Transport, McGraw-Hill Series in Water Resources and Environmental Engineering, 1971, p. 40
- 19) Rubey, W.: Settling Velocities of Gravel, Sand and Silt Particles, Amer. J. Sci, Vol. 225, 1933
- 20) 前出文献 18) p. 45
- 21) 大同淳之: 粘土を多量に含む流体の粘度と降伏値, 第 15 回水理講演会講演集, 昭 46
- 22) 道上正規・田中健二: 微細粒子が浮遊砂に及ぼす影響について, 土木学会 26 回年次学術講演会講演集, 第 2 部, 昭 46
- 23) Nordin, C. F.: A Preliminary Study of Sediment Transport Parameters, Rio Puerco near Bernad New Mexico, Prof. Paper 462 —C, U. S. Geol Survey, 1963
- 24) Vanoni, V. A.: Transportation of Suspended Sediment by water, Proc. ASCE, Vol. 70, 1944
- 25) Einstein, H. A. and N. Chien: Second Approximation of the Suspended Theory. Series 47. Issure No 2 Univ. of California, Berkley, 1952
- 26) 椿東一郎: 浮遊流砂が流れにおよぼす影響について, 土木学会誌, 40 巻 9 号, 1955
- 27) 志村博康: 浮流砂を有する水流の諸特性について, 土木学会論文集, 46 号, 1957
- 28) 日野幹雄: 固体粒子を浮流した流れの乱流構造の変化, 土木学会論文集, 92 号, 1963
- 29) Elata, C. and A. T. Ippen: The Dynamics of Open Channel Flow with Suspensions of Neu-

- trally Buoyant Particles , Tech. Rep. No 45 , Hyd. Lab. M. I. T. , 1951
- 30) Lane , E. W. and A. A. Kalinske : The Relation of Suspended to Bed Material in Rivers ,
 Tran. AGU, 1939
 - 31) 前出文献 14) , 15) ,
 - 32) Einstein , H. A. : The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flow,
 U. S. Dept. Agric. Tech. Bull. No. 1026 , 1950
 - 33) 前出文献 8)
 - 34) Monin , A. S. and A. M. Yaglom : Statistical Hydromechanics , 4th Edition, 1968 , p 209
 - 35) 芦田和男・道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第206号,
 1972 , 10
 - 36) 平野宗夫: 浮遊砂の流入による貯水池の堆砂過程, 九大工学集報, 第42巻, 第6号, 1970
 - 37) Shinohara , K. and T. Tsubaki : On the Characteristics of Sand waves formed upon the Beds
 of the Open Channels and Rivers , Reports of Research Institute for Applied Mechanics , Kyushu
 University , Vol. VII , No. 25 , 1959
 - 38) 椿東一郎・平野宗夫・渡辺訓甫: 開水路・河川における流砂量について, 第15回水理講演会講演集, 1971
 - 39) 須賀堯三: 浮遊流砂に関する雑考, 第22回土木学会年次学術講演会講演集, 第Ⅱ部, 昭42
 - 40) 村本嘉雄・道上正規・下島栄一: ウォッシュ・ロードの流下過程に関する数値解析, 第18回水理講演会講演集
 1974
 - 41) Kalinske , A. A. : Suspended Material Transportation Under Non-Equilibrium Conditions , Trans.
 A. G. U. 1939
 - 42) 合田健: 上水浄化における水理学上の基礎的諸問題, 京都大学学位論文, 昭31
 - 43) 前出文献 10)
 - 44) Yalin , M. S. and G. D. Finlayson : On the Development of the Distribution of Suspended Load,
 Proc. of IAHR, Vol. 1 , Turkey , 1973 , pp. 287 — 294
 - 45) Sayre , W. W. : Dispersion of Silt Particles in Open Channel Flow, Proc. ASCE HY 3, May ,
 1969 , pp 1009 — 1038