

船体振動と付加質量

松 浦 義 一

1. 緒言

船体は極めて複雑な構造物であるが、その全体的な弾性的挙動を理論的に解析する場合は、これを1つの巨大な両端自由の弾性棒として取扱うことができる。従って、船体の振動としては、弾性棒の場合と同様に、曲げ振動、振り振動および縦振動がある。このような船体全体としての振動を船体振動 (ship hull vibration) と呼び、船体を構成する各部材に生じる局部振動 (local vibration) とは区別して取扱う。船体振動としての曲げ、振りおよび縦振動のそれぞれにはまた無数の固有振動が存在する。

図-1はこれらの固有振動の型 (modes) の概形を最初の4つについて示したものであって、船体振動では振動の次数を節 (nodes) の数で表わし、1節振動、2節振動、3節振動、……と呼んでいる。

船体の固有振動を理論的に取扱うには、弾性棒の振動に対する運動方程式が基礎となる。すなわち、曲げ振動に対しては、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \frac{w(x)}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \cdots (1)$$

振り振動に対しては、

$$GJ(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{I_p(x)}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \cdots (2)$$

ここに、 t は時間、 x は船体の長さ方向の座標、 y は撓み、 ϕ は振れ角、 g は重力の加速度である。また、 $EI(x)$ および $GJ(x)$ は船体の曲げ剛性および振り剛性、 $w(x)$ および $I_p(x)$ は船体の単位長さ当りの重量および振り中心に関する船体の単位長さ当りの重量慣性モーメントを表わし、いずれも x の関数である。

さて、船体振動の特異性すなわち陸上構造物の振動との違いは、船体が水中において振動するという事情から生じ、上記の運動方程式(1)、(2)に対しては船体周囲の水の影響を考

慮に入れた取扱いをする必要がある。この影響はいわゆる付加質量効果であり、これは流体中を運

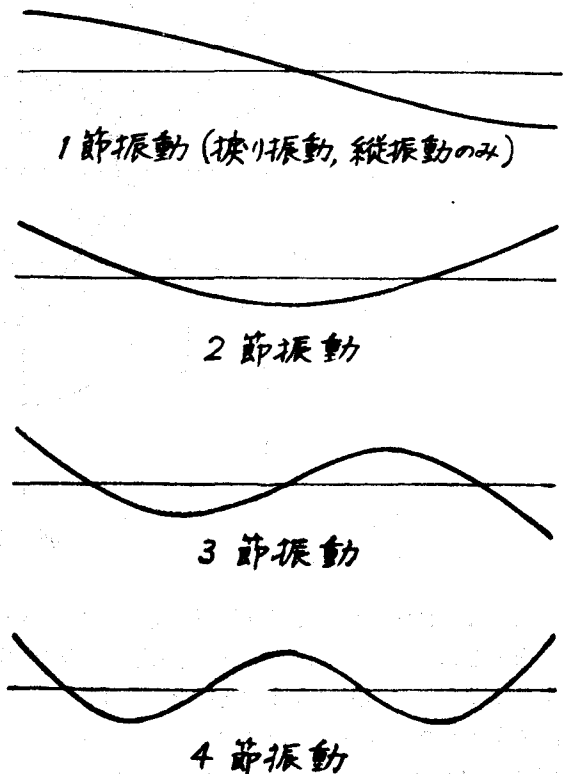


図-1

動する物体はその加速度に比例する抵抗を周囲の流体から受けるということに基づく見かけ上の効果であって、その物体の質量が増加したと考えてその運動を論ずればよいことを示すものである。

従って、船体振動の解析に際しては、上記運動方程式(1), (2)に含まれる $w(x)/g$ および $I_p(x)/g$ として、船体自身の質量に水の影響と等価な付加質量を加えたものおよび船体自身の慣性モーメントに水の影響と等価な付加慣性モーメントを加えたものを用いなければならない。なお、船体は細長い物体であるから、その縦振動における付加質量は實際上あまり問題とならない。従って本講義においては、船体の曲げ振動（上下振動および水平振動）および振り振動を対象として、その付加質量および付加慣性モーメントについて述べることにする。

2. 付加質量の定義

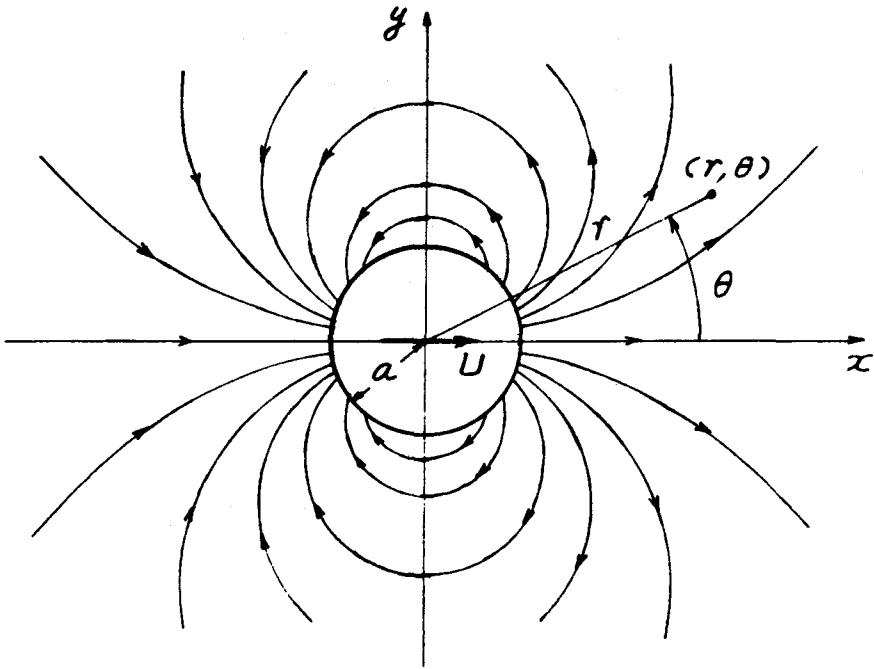


図 - 2

簡単な具体例について付加質量の算定を行なってみる。

図 - 2 に示すように、半径 a の無限長の円柱が静止した無限流体中を x 軸の方向に直進する場合を考える。流体の運動は 2 次元流として扱うことができ、流体力学において周知のように、完全流体を考えたとき流体の速度ポテンシャル ϕ および流れの関数 ψ は、Laplace の方程式、 $\nabla^2 \phi = 0$ および $\nabla^2 \psi = 0$ の解として

$$\phi = -\frac{a^2 U}{r} \cos \theta, \quad \psi = \frac{a^2 U}{r} \sin \theta \quad \text{----- (3)}$$

また、このときの複素ポテンシャルを Φ とすると

$$\Phi = \phi + i\psi = -\frac{a^2 U}{re^{i\theta}} = -\frac{a^2 U}{z}, \quad z = x + iy = re^{i\theta} \quad \text{----- (4)}$$

ここに、 r, θ は図-2に示す極座標、 U は円柱の速度であり、図-2にはこの場合の流線が示してある。

この円柱が x 軸に沿って運動するとき、周囲の流体からどのような力を受けるかを調べてみる。固定座標を x, y とし、任意時刻における円柱の中心の座標を x_0 とすれば、この時刻における流体の複素ポテンシャルは(4)の代わりに次式で与えられる。

$$\phi = -\frac{a^2 U}{z - x_0} \quad \text{----- (5)}$$

一方、流体内の各点における圧力 p を求めるには、圧力方程式

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{q^2}{2} + F(t) \quad \text{----- (6)}$$

が用いられる。ここに、 ρ は流体の密度、 q は流体の速度、 $F(t)$ は積分定数で時間 t のみの関数である。

$U = \dot{x}_0$ であることを考慮に入れ、(5)より $\partial \phi / \partial t$ を求め、その実部をとると $\partial \phi / \partial t$ が得られ、また(5)より $\partial \phi / \partial z$ を求めると、 $q^2 = u^2 + v^2 = |\partial \phi / \partial z|^2$ として q^2 が得られる。これらを(6)に代入して

$$\frac{p}{\rho} = \frac{a^2 \dot{U}}{r} \cos \theta + \frac{a^2 U^2}{r^2} \cos 2\theta - \frac{a^4 U^2}{2r^4} + F(t) \quad \text{----- (7)}$$

ただし、ここで用いる極座標は $z - x_0 = re^{i\theta}$ とおいたものである。

(7)において $r = a$ とくと円柱表面の圧力 $[p]_{r=a}$ が得られる。図-3に示すように、円柱表面に作用する流体圧 $[p]_{r=a}$ の合力の x 方向および y 方向成分を P_x および P_y とすると

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -\left\{ \int_0^{2\pi} [p]_{r=a} \cos \theta \cdot a d\theta \right. \\ &\quad \left. = -\rho \pi a^2 \dot{U} \right\} \\ P_y &= -\left\{ \int_0^{2\pi} [p]_{r=a} \sin \theta \cdot a d\theta = 0 \right\} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (8)}$$

すなわち、円柱は運動方向に加速度を妨げるような向きに、そのときの加速度の大きさに比例する力を流体から受けることになる。この比例定数を m_1 とすれば、(8)より

$$m_1 = \rho \pi a^2 \quad \text{----- (9)}$$

これは円柱の単位長さの部分が無視した流体の質量に等しい。

以上のことより、流体中を x 方向に直進する円柱は流体より

$$P_x = -m_1 \dot{U} = -m_1 \frac{d^2 x_0}{dt^2} \quad \text{----- (10)}$$

なる力を受けることがわかる。これは円柱の慣性力と同じ形であるから、結局流体中を x 方向に直進する円柱の運動を論ずるには、円柱の単位長さ当たりの質量を m とすれば、円柱の質量が見かけ上単位長さ当たり $m + m_1$ になったと考え

$$(m + m_1) \frac{d^2 x_0}{dt^2} = F \quad \text{----- (11)}$$

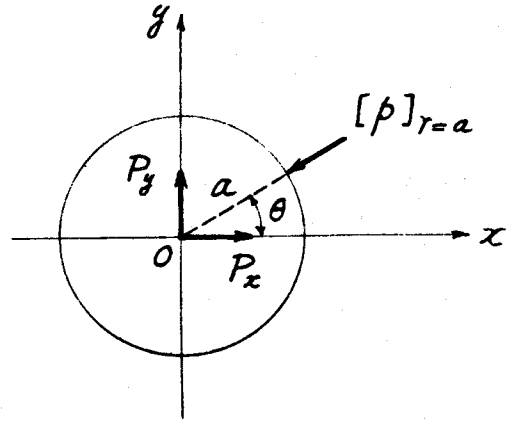


図-3

なる運動方程式を取扱えばよいことになる。ここに、 F は円柱の単位長さ当りに作用するすべての力を表わす。(11)のような取扱ができるとき、 $m+m_1$ を見かけ質量 (virtual mass) といい、 m_1 を付加質量 (added virtual mass) と呼んでいる。

円柱の単位長さ当りの付加質量の値(9)は流体が円柱に及ぼす力を計算することによって得られたが、完全流体を取扱う場合は、流体の運動エネルギーを計算することによっても(9)を導くことができる。いまは2次元流の場合を考えているから、円柱の単位長さの部分についての流体の運動エネルギー T は

$$T = -\frac{\rho}{2} \int \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = -\frac{\rho}{2} \int \phi d\psi \quad \text{-----(12)}$$

ここに、積分は円柱の周に沿うものであり、 n は円柱表面の法線、 s は接線方向を示す。(3)を(12)に代入して積分を行なうと

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{a^2 U}{r} \cos \theta \right]_{r=a} \left[\frac{a^2 U}{r^2} \cos \theta \right]_{r=a} a d\theta \\ &= \frac{\rho a^2 U^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi a^2 U^2 = \frac{1}{2} m_1 U^2 \quad \text{----- (13)} \end{aligned}$$

となり、さきに求めた(9)と同じ m_1 が得られる。この計算例で明らかなように、付加質量は物体が受ける加速度に比例する抵抗力の比例定数として定義しても、また流体の運動エネルギーと等価な運動エネルギーを与えるような質量として定義しても、完全流体を考える場合にはいずれも同じ値となる。

3. 船体振動に対する付加質量の算定法

船体振動における付加質量の算定に際しては、次の事柄を考慮に入れなければならない。すなわち

- 1) 船体は有限長の可変断面棒である。
- 2) 船体振動は弾性体としての振動である。
- 3) 船体は水面に浮かんでいるから、水の自由表面の影響を考慮に入れなければならない。

これらの条件をすべて同時に満足する厳密解を求めることは極めて困難であるから、船体振動の解析においては、以下に述べる手順により各項目毎の考察を行ない、これらを組合わせてできるだけ正確な付加質量を求めるという近似計算法が用いられている。

(1) 境界条件

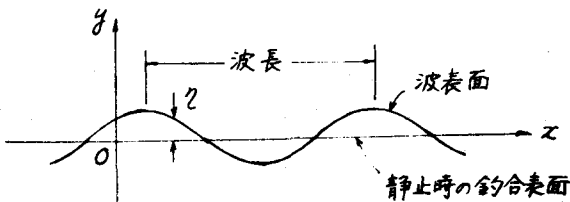


図 - 4

まず最初に水の自由表面における境界条件について考える。船体振動によって船体周囲の水に運動が起こると、水の自由表面には波を生じる（重力波）。船体振動の場合は水深は十分大きく、波の波長は水深に比べて十分小さいと考えてよい。

いま簡単のため、2次元運動を考え、図-4に示すように、静止時の水面に一致させて x 軸、これに垂直に y 軸をとる。完全流体を考えると、圧力方程式は一般に

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + V = F(t) \quad \text{----- (14)}$$

上式中の各記号は既に(6)において説明したものである。なお、 V は外力のポテンシャルであり、外力は重力による力のみであるから $V = gy$ となる。

船体振動によって起こされる波の波高は小さく、従って波運動の速度 q は十分小さいから、 q^2 の項は無視できる。また、 $F(t)$ は初期条件によって定まるが、初期条件を適当にとつて $F(t) = 0$ とすることができる。以上のことを考慮に入れ、境界条件として波表面では圧力 p は一定値すなわち大気圧に等しいということを用いると、流体力学において周知のように、(14)から次式が導かれる。

$$y = 0 \text{ において } \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{----- (15)}$$

さて、船体振動は一般に調和振動と考えてよい。従って船体周囲の水の速度ポテンシャル ϕ は、上の2次元流の場合について書けば

$$\phi(x, y, t) = \phi(x, y) \sin \omega t \quad \text{----- (16)}$$

これを(15)に代入すると

$$y = 0 \text{ において } \phi(x, y) = \frac{g}{\omega^2} \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \quad \text{----- (17)}$$

しかるに、船体振動の場合は振幅が小さく、振動数がかなり大きい(ω^2 が大きく、 $\partial \phi / \partial y$ が小さい)。従って、境界条件(17)は

$$y = 0 \text{ において } \phi = 0 \quad \text{----- (18)}$$

としても実際には十分正確と考えられ、(17)の代わりに(18)が用いられるのが普通である。

次に弾性体の接水面における境界条件についてであるが、完全流体を考えているから、弾性体表面に接する流体の法線速度が弾性体表面の運動の法線速度 v_n に等しいという条件、すなわち

$$\text{接水面において } v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} \left(= \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \quad \text{----- (19)}$$

によって与えられる。ここに、 n は弾性体表面における外向きの法線方向、 s は接線方向を示し、 ϕ は流れの関数である。

(2) 楕円断面棒の付加質量

楕円断面をもつ無限長の棒が、その長さ方向の軸を水面に一致させて半没水状態にあり、各種の剛体的な運動をする場合の付加質量を計算してみる。図-5に示すように、楕円の主軸に一致させて x, y 軸をとり、次式で与えられる楕円座標 ξ, η を導入する。すなわち

$$x + iy = c \cosh(\xi + i\eta) \quad \text{----- (20)}$$

これより、

$$\left. \begin{aligned} x &= c \cosh \xi \cos \eta \\ y &= c \sinh \xi \sin \eta \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (21)}$$

ここに、 c は原点 O と楕円の焦点 F の間の距離であり、 $c^2 = a^2 - b^2$ の関係がある。また、 $\xi = \text{const}$

なる曲線群は焦点Fを共有する楕円群, $\eta = \text{const}$ なる曲線群は焦点Fを共有する双曲線群を示す。

(a) 上下振動の場合

図-6に示すように, y 軸を水面に一致させ, x 軸の正の方向に速度 U で運動するものとする。 $\xi = \xi_0$ が楕円棒の周を表わすものとすれば, 流体の領域は $\xi \geq \xi_0$, $-\pi/2 \leq \eta \leq \pi/2$ となる。自由表面および接水面における境界条件を満足する解として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -Ub \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} e^{-\xi \cos \eta} \\ \psi &= Ub \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} e^{-\xi \sin \eta} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

楕円棒の単位長さについての流体の運動エネルギー T は

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\rho}{2} \int \phi d\psi = \frac{\rho}{2} U^2 b^2 \\ &\quad \times \frac{a+b}{a-b} e^{-2\xi_0} \\ &\quad \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \eta d\eta \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho \pi b^2}{2} U^2 \quad \dots\dots (23) \end{aligned}$$

これより楕円棒の単位長さ当りの付加質量 m_V は

$$m_V = \frac{1}{2} \rho \pi b^2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

(b) 水平振動の場合

図-7に示すように, x 軸を水面に一致させ, x 軸の正の方向に速度 U で運動するものとする。 $\xi = \xi_0$ で楕円の周を表わせば, 流体の領域は $\xi \geq \xi_0$, $0 \leq \eta \leq \pi$ となる。自由表面および接水面での境界条件を満足する解は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{4Uc}{\pi} \sinh \xi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} e^{-2n(\xi-\xi_0)} \sin 2n\eta \\ \psi &= -\frac{4Uc}{\pi} \sinh \xi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} e^{-2n(\xi-\xi_0)} \cos 2n\eta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

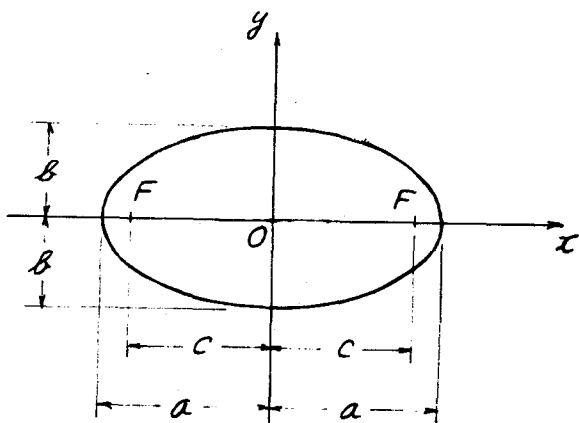


図-5

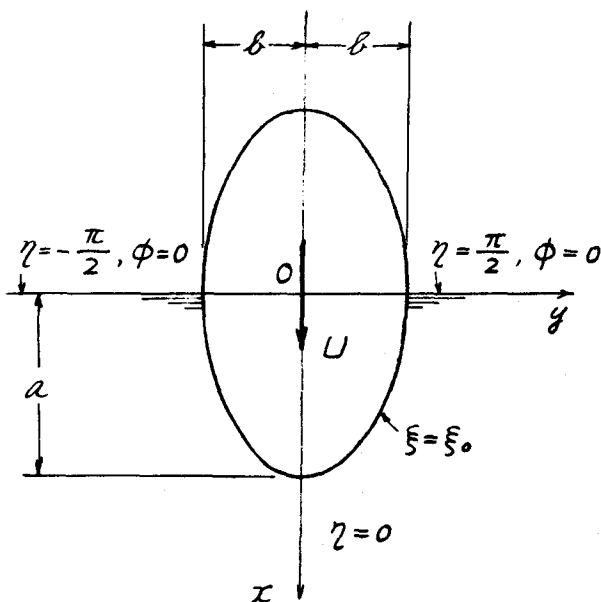


図-6

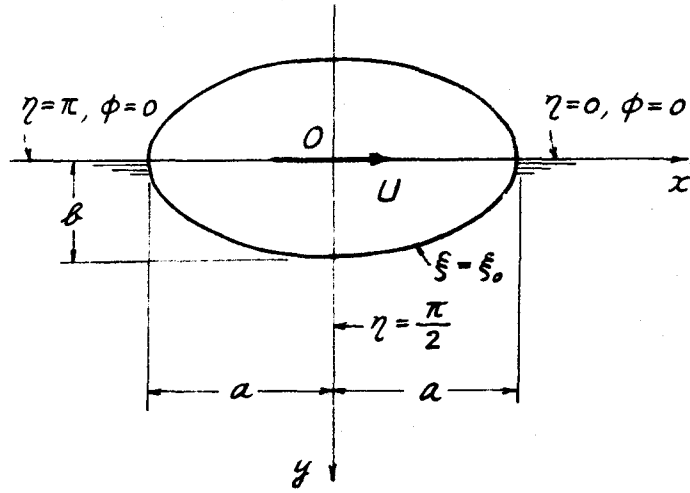


図 - 7

また、楕円棒の単位長さについて計算した流体の運動エネルギー T は

$$T = -\frac{\rho}{2} \int \phi d\psi = \frac{2\rho U^2 c^2}{\pi} \sinh^2 \xi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(4n^2 - 1)^2} \quad (26)$$

上式は次の関係

$$b = c \sinh \xi_0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{1}{2}$$

を用いて整理すると

$$T = \frac{1}{2} \frac{2\rho b^2}{\pi} U^2 \quad (27)$$

従って、楕円棒の単位長さ当りの付加質量 m_H は

$$m_H = \frac{2}{\pi} \rho b^2 \quad (28)$$

(c) 回転振動の場合

図 - 8 に示すように、 x 軸を水面に一致させ、原点 O を通る長さ方向の軸のまわりに角速度 Ω で回転する場合を考える。 $\xi = \xi_0$ で楕円の周を表わせば、流体の領域は $\xi \geq \xi_0$, $0 \leq \eta \leq \pi$ である。自由表面および接水面での境界条件を満足する解として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{1}{4} \Omega (a+b)^2 e^{-2\xi} \sin 2\eta \\ \psi &= -\frac{1}{4} \Omega (a+b)^2 e^{-2\xi} \cos 2\eta \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

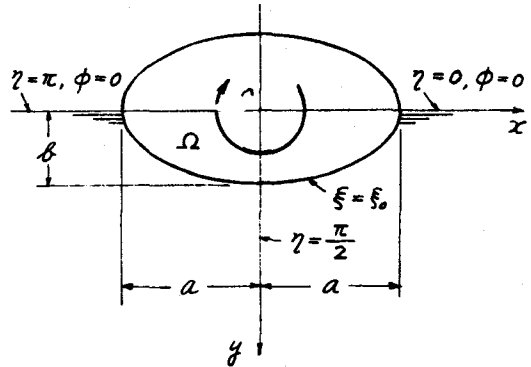


図 - 8

楕円棒の単位長さについての流体の運動エネルギー T は

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\rho}{2} \int \phi d\psi = \frac{1}{16} \rho \Omega^2 (a+b)^4 e^{-4\xi_0} \int_0^\pi \sin^2 2\eta d\eta \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho \pi c^4}{16} \Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho \pi (a^2 - b^2)^2}{16} \Omega^2 \end{aligned} \quad (30)$$

これより、楕円棒の単位長さ当りの付加慣性モーメントは

$$I_T = \frac{1}{16} \rho \pi (a^2 - b^2)^2 \quad (31)$$

(3) 付加慣性係数

前項で示した楕円断面棒についての計算結果より類推して、任意形状の断面をもつ無限長の棒が水の自由表面において剛体的な運動をする場合の付加質量および付加慣性モーメントはそれぞれ次の形で表わされたと考えてよい。すなわち、船体振動への応用が目的であるので、棒の没水部の横断面は左右対称であるとし、図-9に示すように、水線における断面の幅を B ($=2b$)、吃水を d とすれば、棒の単位長さにつき

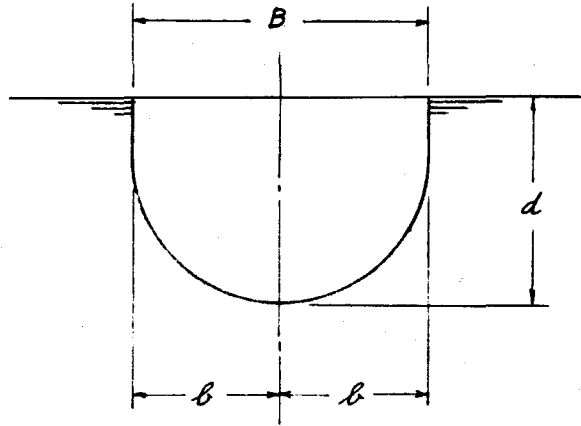


図-9

$$\text{上下振動} \quad m_V = \frac{1}{2} C_V \rho \pi b^2 \quad (32)$$

$$\text{水平振動} \quad m_H = \frac{1}{2} C_H \rho \pi d^2 \quad (33)$$

$$\text{回転振動(振り振動)} \quad I_T = C_T \rho \pi d^4 \quad (34)$$

として付加質量および付加慣性モーメントを表わすことができる。ここに、 C_V 、 C_H は付加質量係数、 C_T は付加慣性モーメント係数と呼ばれ、いずれも断面の形状のみによって定まる定数であり、理論解析または実験によって求められる。なお、これら C_V 、 C_H 、 C_T を総称して付加慣性係数 (inertia coefficient) という。楕円断面棒の場合の付加慣性係数は、前項で示した計算結果より

$$C_V = 1, \quad C_H = \frac{4}{\pi^2} = 0.405, \quad C_T = \frac{1}{16} \left\{ \left(\frac{b}{d} \right)^2 - 1 \right\}^2 \quad (35)$$

となる。

楕円以外の断面形状については、等角写像 (conformal transformation) の方法により速度ポテンシャル ϕ および流れの関数 ψ を求めることができ、種々の断面形につき上に定義した付加慣性係数が得られている。特に直線の折れ線よりなる多角形断面については、その写像関数を求めるのに Schwarz-Christoffel の公式が有用である。ここでは、比較的利用頻度の高い矩形断面についての付加慣性係数の計算値を示す。

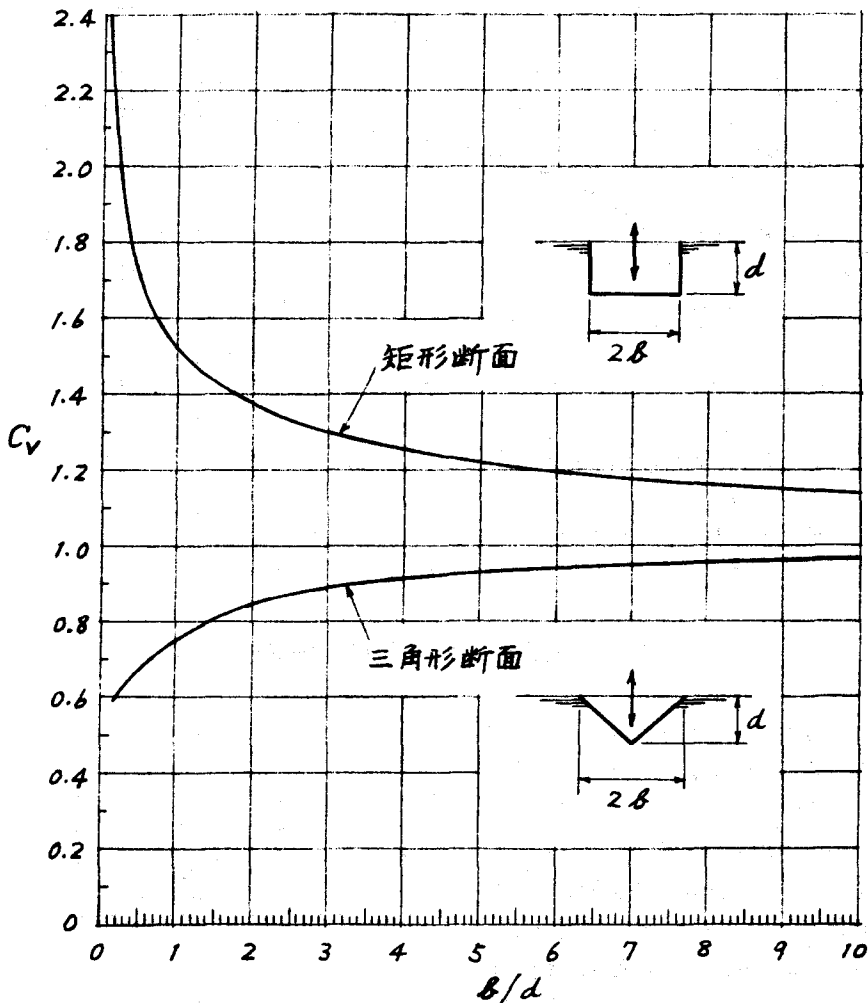


図-10 矩形断面および三角形断面に対する C_v

まず、矩形断面棒の上下振動についてはLewis⁽¹⁾が C_v の値を計算しており、図-10に b/d の値に対し C_v の値が変化の様子が示してある。なお、同図にはLewis⁽¹⁾によって計算された二等辺三角形断面の場合の C_v の値が参考までに示してある。

次に矩形断面棒の水平振動についてはWendel⁽²⁾および筆者他⁽³⁾による C_H の計算値がある。図-11は筆者他⁽³⁾による計算値であって、 $b/d = 0 \sim 4.5$ の間での C_H の値の変化の様子を示したものである。矩形断面棒の回転振動（振り振動）については、やはりWendel⁽²⁾および筆者他⁽³⁾による C_T の計算値がある。ここでは、回転中心の位置が C_T の値に及ぼす影響等を調べた筆者他⁽³⁾の計算結果を示す。

図-12に示すように、棒の横断面の回転中心Qがy軸上水面から y_0 の距離にあるとし、このQ点の位置 y_0 によって C_T の値がどのように変化するかを調べたものである。このことは、船体横断面中の振り中心の位置が船体の構造により各船で異なることを考慮に入れたものであって、次に述べるような興味ある結果が得られている。

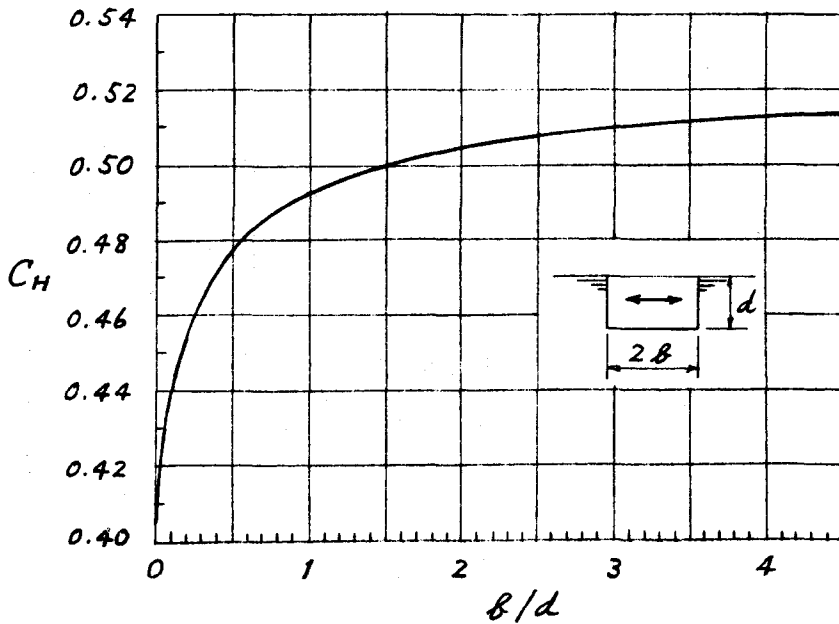


図 - 11 矩形断面水平振動の付加質量係数 C_H

図 - 13は、 $b/d = 1$ の矩形断面につき、回転中心 Q の位置 y_0 を種々に変えたときの C_T の値を示したもので、 C_T の値が最小となるような回転中心の位置がある。このような C_T の値が最小値を示すような回転中心を筆者等は付加水中心 P と呼んでいる。なお、付加水中心 P の位置は b/d の値によって変り、矩形断面の場合は $b/d \div 2$ のとき水面に一致し、 b/d が 2 より小さいときは水中にあり、 b/d が 2 より大きいときは水面より上にある。

図 - 14は、 $b/d = 0 \sim 5$ の範囲について、付加水中心まわりの C_T すなわち $C_{T(P)}$ および原点 O のまわりの C_T すなわち $C_{T(O)}$ を計算した結果を示したものの(曲線A)であり、 b/d の小さい範囲ではグラフが読みにくいので、 $b/d = 0 \sim 2$ の範囲を特に拡大して曲線Bとして示してある。

船体振動に対する付加慣性係数としては、実際の船体横断面の形によく似た形状の断面についての値が必要であるが、これについては後に改めて述べることにする。

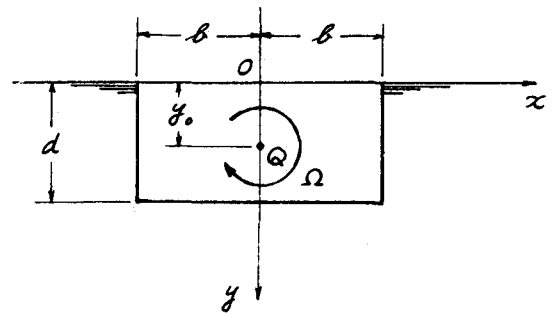


図 - 12

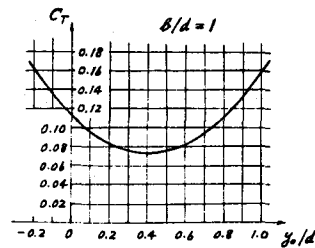


図 - 13

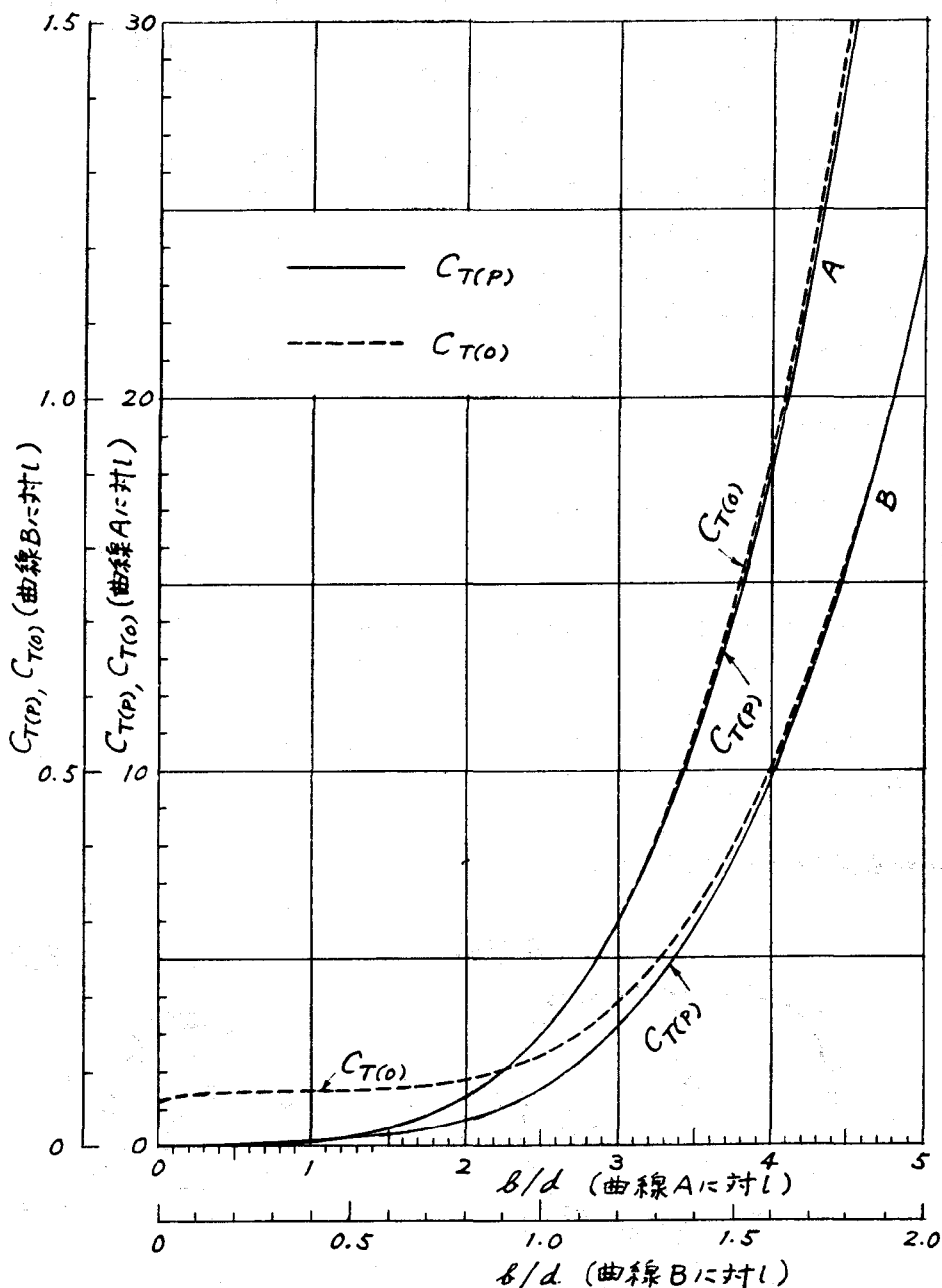


図 - 14 矩形断面振り振動の付加慣性モーメント係数 C_T

(4) 3次元運動修正係数

有限長の変断面棒が水中で弾性振動をする場合を考える。棒の各横断面の水面下の部分の形状により付加慣性係数すなわち C 値が定まるから、(32)~(34)により2次元付加質量または2次元付加慣性モーメントの値が定まる。しかし、弾性棒の周囲の水は、棒が有限長であること、可変断面棒で

あることおよび弾性振動をすることのため実際には3次元運動となる。従って、上に得られた2次元付加質量または2次元付加慣性モーメントに対しては、流体の3次元運動の影響を考慮した修正を行なう必要がある。これは次のような修正係数を求め、これを上述の2次元付加質量または2次元付加慣性モーメントに掛けることによって行なわれる。

$$J = \frac{\text{弾性体を囲む流体の3次元運動による実際の運動エネルギー}}{\text{弾性体を囲む流体の運動を2次元流と仮定した運動エネルギー}} \quad \dots (36)$$

上式(36)によって定義される修正係数 J を3次元運動修正係数 (three-dimensional factor) といひ、上下、水平、振り (回転) 振動についてのものをそれぞれ J_V , J_H , J_T とすれば、弾性棒 (船体) の単位長さ当りの付加質量および付加慣性モーメントは

$$\left. \begin{array}{ll} \text{上下振動} & m_V = \frac{1}{2} J_V C_V \rho \pi b^2 \\ \text{水平振動} & m_H = \frac{1}{2} J_H C_H \rho \pi d^2 \\ \text{振り振動} & I_T = J_T C_T \rho \pi d^4 \end{array} \right\} \dots (37)$$

として求められる。ここに、 b は考えている横断面の水線における半幅、 d は吃水である。(図-9参照)

さて、3次元運動修正係数 J の求め方であるが、実際の船体の形状に対しては勿論のこと、かなり簡単な形状の棒についてもこれを解析的に求めることは極めて困難である。そこで、解析的な取扱いが可能なごく簡単な形状のものをえらび、これについて(36)で定義した修正係数 J を理論的に求め、これを船体に対する近似修正係数として用いる方法が採られている。これらの修正係数 J の計算法および数値については後に改めて述べることにする。

4. Lewis断面に対する付加慣性係数

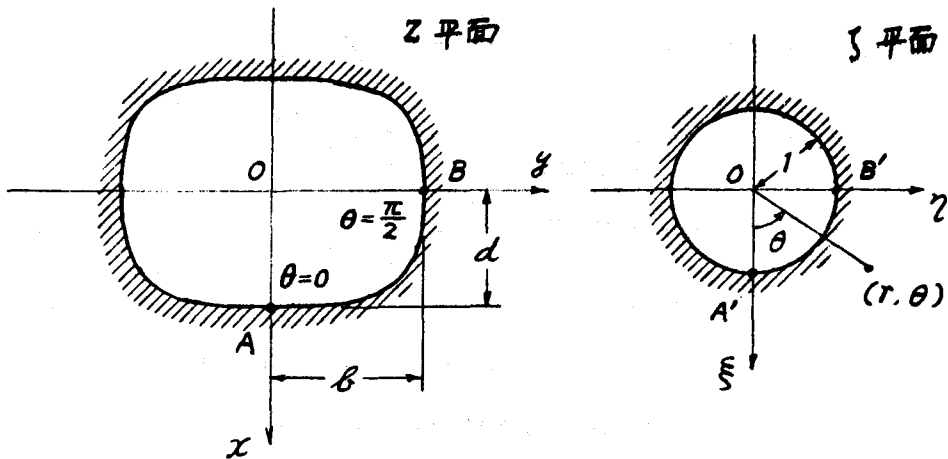


図-15

任意の断面形状をもつ棒の付加慣性係数を求めるには等角写像の方法が用いられる。Landweber⁽⁴⁾が示したように、図-15に示すような z 平面上の任意図形 (ただし上下対称) を ζ 平面上の単位

$$\frac{b}{d} = \frac{1 - a_1 + a_3}{1 + a_1 + a_3} \quad (44)$$

すなわち、係数 a_1 、 a_3 が与えられると断面図形の b/d が定まる。

以下、Lewis断面について計算された上下振動、水平振動および捩り振動に対する付加慣性係数の理論値を示すことにする。

(1) 上下振動付加質量係数 C_V

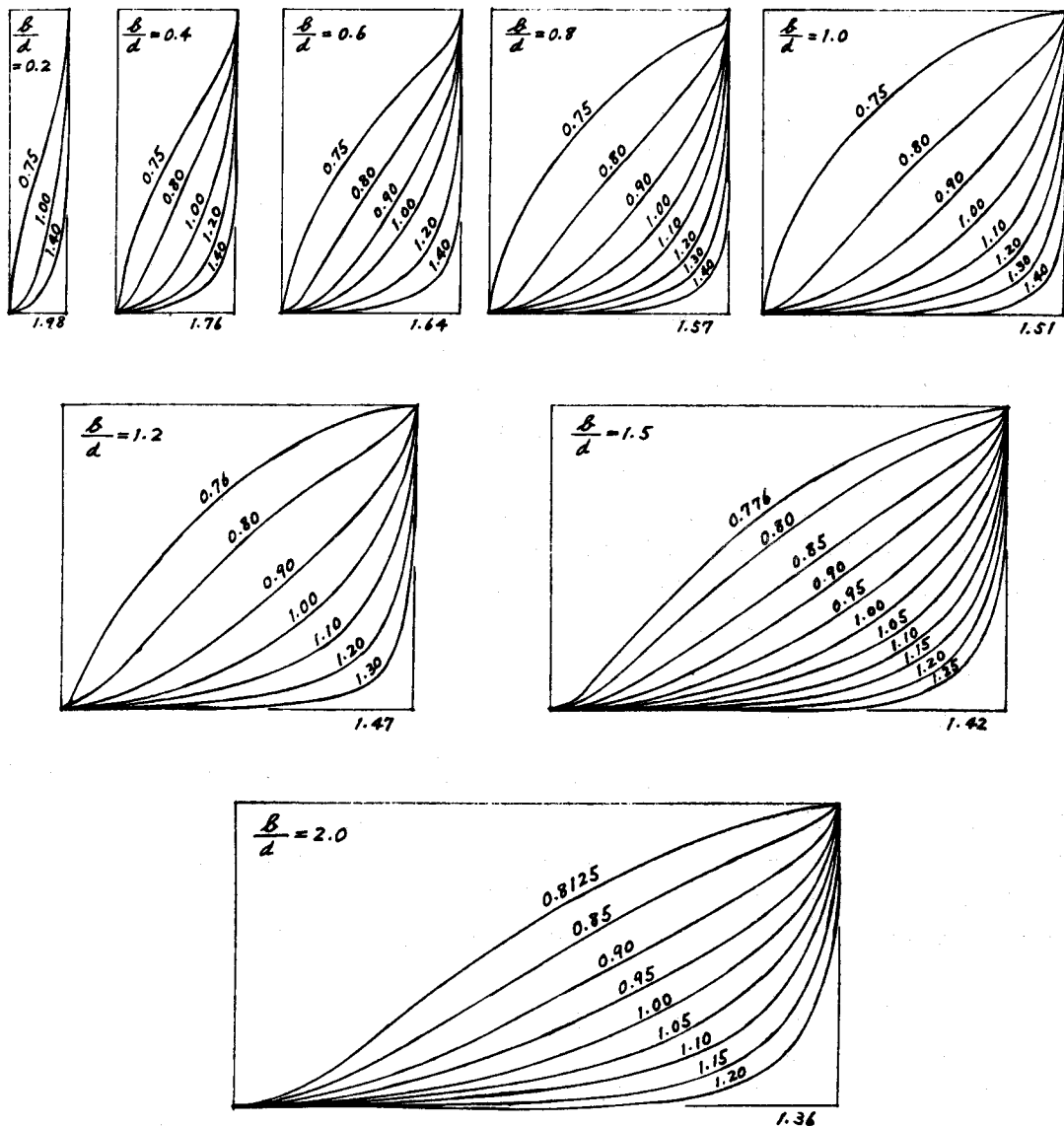


図 - 16 Lewis 断面上下振動の付加質量係数 C_V

円に写像し、かつ z 平面上の図形の外部の領域を ζ 平面の単位円の外部に写像する関数は一般に次の形で表わされる。

$$z = \zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \frac{a_3}{\zeta^3} + \cdots + \frac{a_n}{\zeta^n} + \cdots \quad (38)$$

ここに $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta = re^{i\theta}$

上式右辺の各項の係数 a_n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) は実数値である。特に図形が左右対称の場合 (船体横断面の場合はこれに当る) は (38) の右辺は ζ の奇関数となり, $a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = 0$ となる。

さて、写像関数が (38) で与えられたとき、我々が問題とする流体の運動に対する複素ポテンシャルは一般に次の形で表わされる。⁽⁴⁾

$$\Phi = \phi + i\psi = \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \frac{b_3}{\zeta^3} + \cdots + \frac{b_n}{\zeta^n} + \cdots \quad (39)$$

ここに、 b_n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) は一般に複素定数である。(39) を実部と虚部に分けると、速度ポテンシャル ϕ と流れの関数 ψ は

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (b_n e^{-in\theta} + \bar{b}_n e^{in\theta}) \\ \psi &= \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (b_n e^{-in\theta} - \bar{b}_n e^{in\theta}) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

ただし、 $\bar{b}_n$ は b_n に共役な複素数である。

棒の断面図形が与えられて写像関数が定まり、棒の運動 (上下、水平、回転) が与えられると、前述の境界条件を満足するように b_n , $\bar{b}_n$ が決定され、係数 a_n および運動の型の関数として定まる。このようにして ϕ と ψ が確定すると、(12) によって流体の運動エネルギー T が求められ、これより棒の単位長さについての付加質量または付加慣性モーメントが得られる。またこれらの結果を前述の (32)~(34) の形に整理すると付加慣性係数 C_V , G_H , C_T が得られる。

さて、図-15の z 平面上の図形が船体の横断面に類似の形となるように種々の試みがなされているが、従来よく用いられている図形は (38) の右辺の最初の3つの奇関数の項で表わされる写像関数

$$z = \zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_3}{\zeta^3} \quad (41)$$

によって与えられる図形である。これはLewis⁽¹⁾ が船体上下振動の付加質量係数 C_V を求めるために最初に用いたもので、この図形には特にLewis formまたはLewis断面の名が付いている。なおこのほか船体振動への応用を考えた図形としてはProhaska form⁽⁵⁾ およびthree parameter form⁽⁶⁾ があるが、これらの写像関数はいずれも (38) の中に特別の場合として含まれている。

Lewis断面の方程式は次のようになる。極座標を用い

$$\zeta = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (42)$$

とおけば、 ζ 平面上の単位円上では $r = 1$ であるから、(41) は実部と虚部に分けて

$$\left. \begin{aligned} x &= (1 + a_1) \cos \theta - a_3 \cos 3\theta \\ y &= (1 - a_1) \sin \theta - a_3 \sin 3\theta \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

これが θ をパラメーターとした z 平面上の図形すなわちLewis断面の方程式であって、図形としては隅を丸めた矩形が得られる (図-16参照)。

なお、図-15において、 $\theta = 0$ のとき $x = d$, $\theta = \pi/2$ のとき $y = b$ とおけば、(43) より

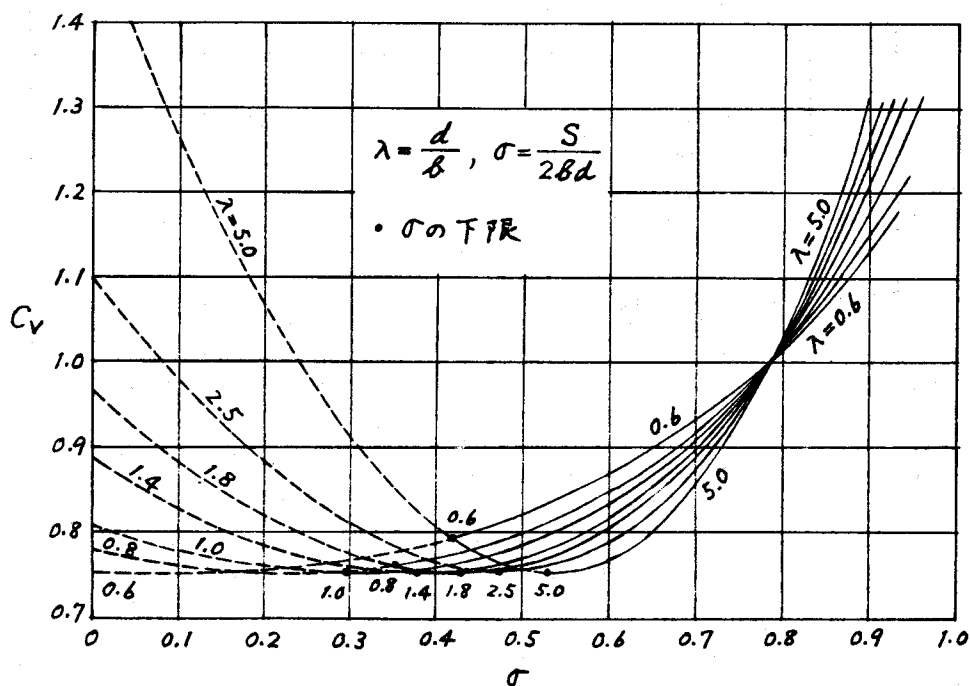


図 - 17 Lewis 断面 上下振動の付加質量係数 C_V

Lewis⁽¹⁾は船体横断面の近似図形を与える写像関数(41)を用い、 $b/d=0.2\sim 2.0$ の範囲で付加質量係数 C_V の計算を行ない、その結果を図-16に示すような形で表わした。図中の数値はそれぞれの図形に対する C_V の値を示す。なお、各図の右下の数値は矩形断面に対する C_V の値であり、また各図中の $C_V=1.00$ の図形は楕円である（写像関数(41)において $a_3=0$ の場合に当る）。

図-16 によるときは、船体の実際の横断面の形と比較しながら C_V の値を挿間法によって求めるという手数のかかる方法となる。その後、Landweber 他⁽⁴⁾はこのような不便を除くために、 C_V を2つの変数すなわち $\lambda (=d/b)$ と面積比 σ の関数としてグラフに表わし、図-17 を示した。ここに、 λ は b/d の逆数であり、面積比 σ は矩形 $2b \times d$ の面積に対する Lewis 断面没水部の断面積 S の比

$$\sigma = \frac{S}{2bd} \quad \text{----- (45)}$$

を表わしている。従って、船体横断面の形が与えられると、 λ および σ の値が定まるから、図-17 によって C_V の値が求められる。

なお、図-17 において黒丸の点で示した σ の下限とは、Lewis 断面の図形が矩形 $2b \times 2d$ の内部にあるための σ の限界値であって、これより小さい面積比の図形はこの条件が満たされないので、実際の船体横断面への適用については注意が必要であろう。同様な意味で σ の上限があり、これは各曲線の右端の点が表示している。

(2) 水平振動付加質量係数 C_H

Landweber 他⁽⁴⁾により、上下振動の場合と同様に、付加質量係数 C_H が λ と σ の関数として理論的に求められ、図-18 に示すような形で表わされている。水平振動の場合は、 C_H の値は実用範囲では

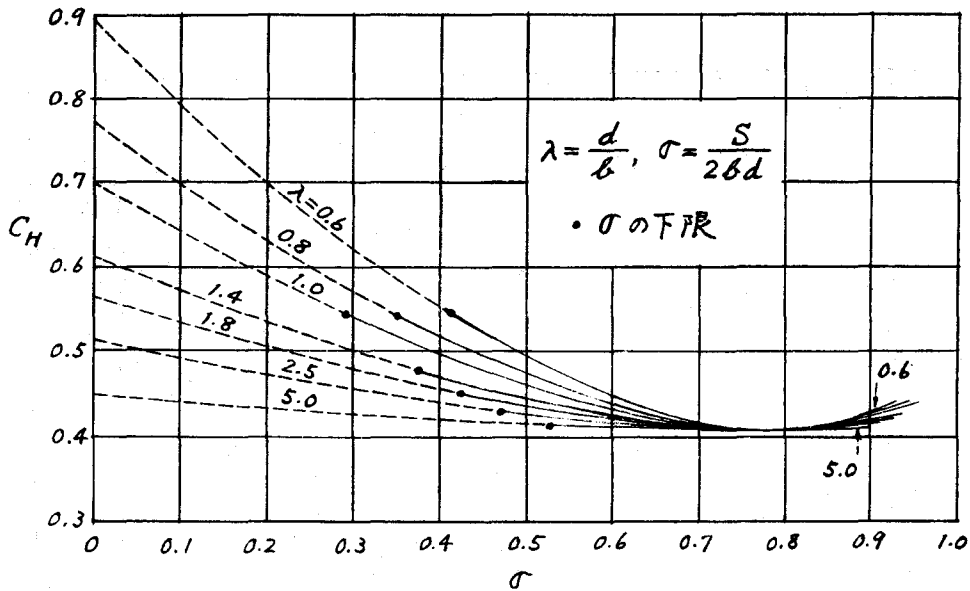


図 - 18 Lewis断面 水平振動の付加質量係数 C_H

σ の値によってあまり急激な変化はなく、また楕円断面棒の C_H の値と大差ないことがわかる。また図中の黒丸の点は図-17の場合に述べたと同じ意味の σ の限界値である。

(3) 振り振動付加慣性モーメント係数 C_T

図-12および図-13において矩形断面の場合について述べたと同様に、船体の振り振動の場合にも船体の振り中心軸の位置が付加慣性モーメント係数 C_T の値に影響を及ぼすことになる。熊井⁽⁷⁾はLewis断面に対し、回転中心すなわち振り中心の位置が種々に変わった場合について C_T の理論値を求め、図-19に示すグラフの形で表わした。図中 y_0/d は水面から回転中心までの距離 y_0 と吃水 d の比であり、回転中心が水面より上方にあるときを正にとっている。図中のそれぞれの曲線はすべて放物線であり、 y_0/d のある値においてそれぞれ C_T の最小値が現われる。このような回転中心がさきに矩形断面の場合に定義した付加水中心Pであり、この点まわりの C_T の値を $C_{T(P)}$ で表わす。

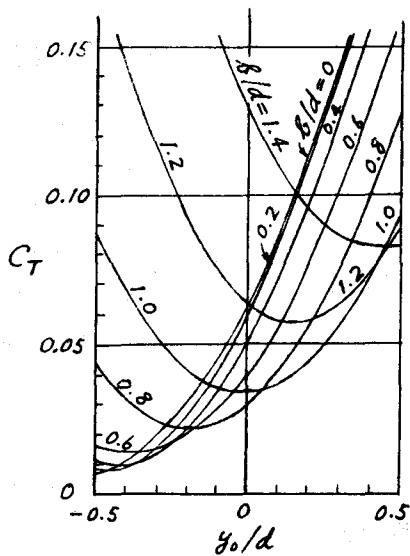
なお、付加水中心には次のような興味ある性質がある。すなわち、左右対称の任意断面棒が断面の対称軸上の任意点のまわりに回転運動をするときの棒の単位長さ当りの2次元付加慣性モーメント I_T は、同じ棒が水平振動をする場合の単位長さ当りの2次元付加質量を m_H 、付加水中心まわりの2次元付加慣性モーメント（単位長さ当り）を $I_{T(P)}$ 、回転中心と付加水中心の間の距離を e とするとき

$$I_T = I_{T(P)} + e^2 m_H \quad \text{----- (46)}$$

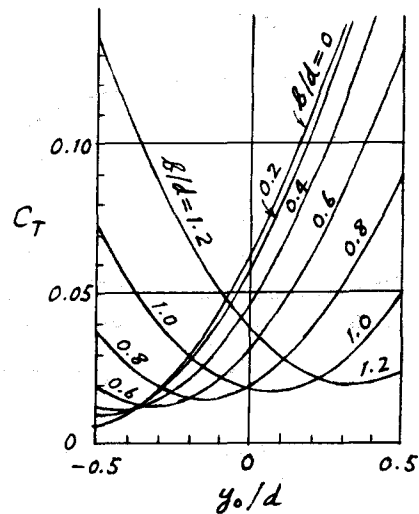
となる。⁽⁸⁾すなわち、付加水中心は形式上物体の重心と同じような性質をもつ点であることがわかる。従って、与えられた図形（左右対称とする）について、 m_H 、 $I_{T(P)}$ および付加水中心の位置を求めておけば、対称軸上の任意点まわりの I_T の値は(46)によって直ちに計算できることになる。なお、(46)は付加慣性係数で表わすと次のようになる。

$$C_T = C_{T(P)} + \frac{1}{2} C_H \left(\frac{e}{d} \right)^2 \quad \text{----- (47)}$$

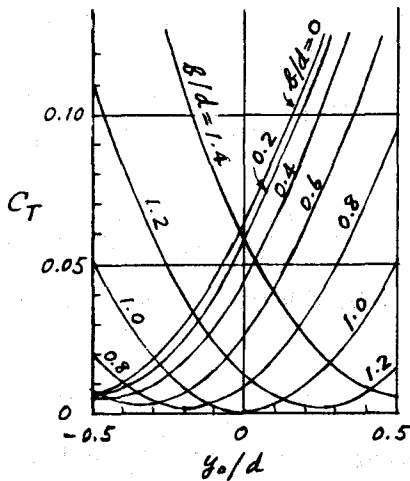
ここに、 d は吃水である。



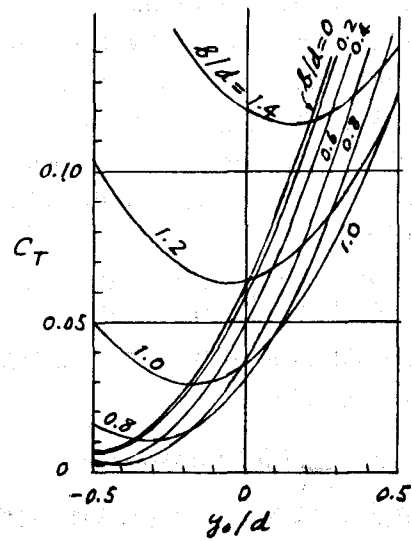
(a) $\sigma = 0.5$ の場合



(b) $\sigma = 0.6$ の場合



(c) $\sigma = 0.785 (= \pi/4, \text{ 積円})$ の場合



(d) $\sigma = 0.95$ の場合

図 - 19 Lewis断面 振り振動の付加慣性モーメント係数 C_T

5. 3次元運動修正係数

船体振動の解析への応用を目的として、弾性体の振動すなわち棒としての変形（上下曲げ、水平曲げ、振り）を考慮し、さらに棒（船体）が有限長であることを考慮に入れた3次元流としての理論計算が行なわれ、(36)で定義した3次元運動修正係数 J が求められている。以下、上下、水平、振

り振動に対して得られている J 値について述べることにする。

(1) 上下振動に対する修正係数 J_V

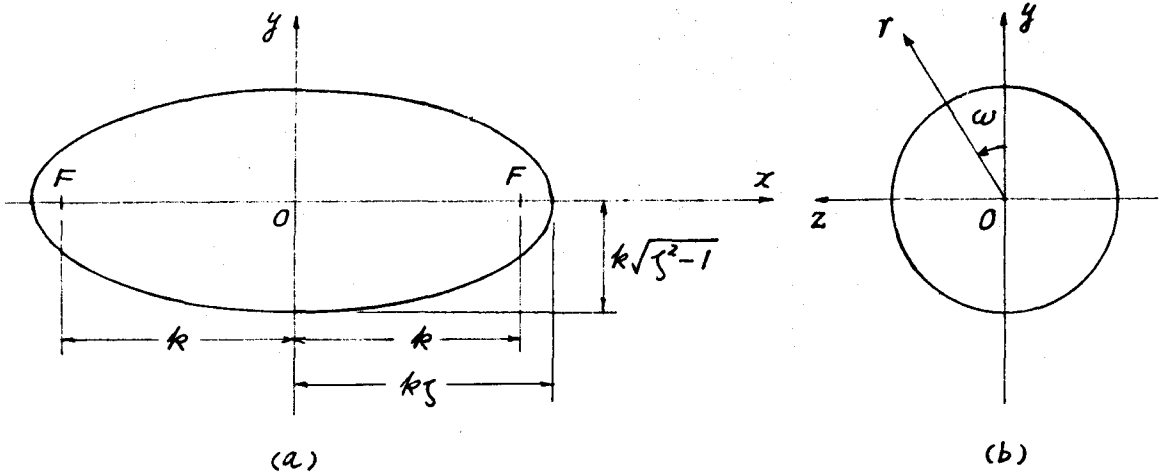


図 - 20

図 - 20 に示すように、 x 軸を回転軸とし、 x 軸方向に細長い回転楕円体 (ellipsoid of revolution) を考え、これが xz 面を水の自由表面とし、 xy 面内の上下曲げ振動を行なう場合につき、周囲の流体の 3 次元運動の速度ポテンシャル ϕ を理論的に求め、3 次元運動に対する流体の運動エネルギー T を計算し、(36) の定義に従って 3 次元運動修正係数 J_V が求められている。このような細長い回転楕円体について求められた修正係数 J_V は比較的やさせた船型に対して適用することができる。

回転楕円体の J_V の理論値としては、Lewis¹¹⁾ および J.L. Taylor⁹⁾ によるものおよび筆者¹⁰⁾ の計算がある。回転楕円体座標 ζ 、 μ 、 ω を用いると、速度ポテンシャル ϕ が満足すべき Laplace の方程式は、Lamb¹¹⁾ により

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right\} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ (\zeta^2 - 1) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right\} + \frac{\zeta^2 - \mu^2}{(1 - \mu^2)(\zeta^2 - 1)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} = 0 \quad (48)$$

である。回転楕円体が上述のような上下曲げ振動を行なう場合の (48) の解は、一般に無限級数解として与えられ、次式のようになる。

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n P_n^1(\mu) Q_n^1(\zeta) \cos \omega \quad (49)$$

ここに、 B_n は境界条件によって定められる定数、 P_n^1 および Q_n^1 はそれぞれ 1 位 n 次の第 1 種および第 2 種の Legendre 陪関数である。

さて、実際の計算においては、上下曲げ振動の撓み形を仮定し、(49) の最初の有限項を用いて近似解とするわけであるが、解として採った項数および境界条件の与え方の差などにより、計算された J_V の値に差が現われ、図 - 21 に示すように、Lewis, Taylor および筆者の J_V の値がそれぞれ少しずつ異なった値となっている。現在のところでは、Taylor⁹⁾ および筆者¹⁰⁾ の J_V の値が大体妥当な値とされており、このことは Townsin¹²⁾ によって行なわれた系統的な模型実験の結果によっても確かめられる。

なお、3 次元運動修正係数の性質として次のことがいえる。回転楕円体の長さを L 、中央断面の直径を B とするとき、図 - 21 よりわかるように、 L/B が大きいほどすなわち細長いほど J_V の値は大き

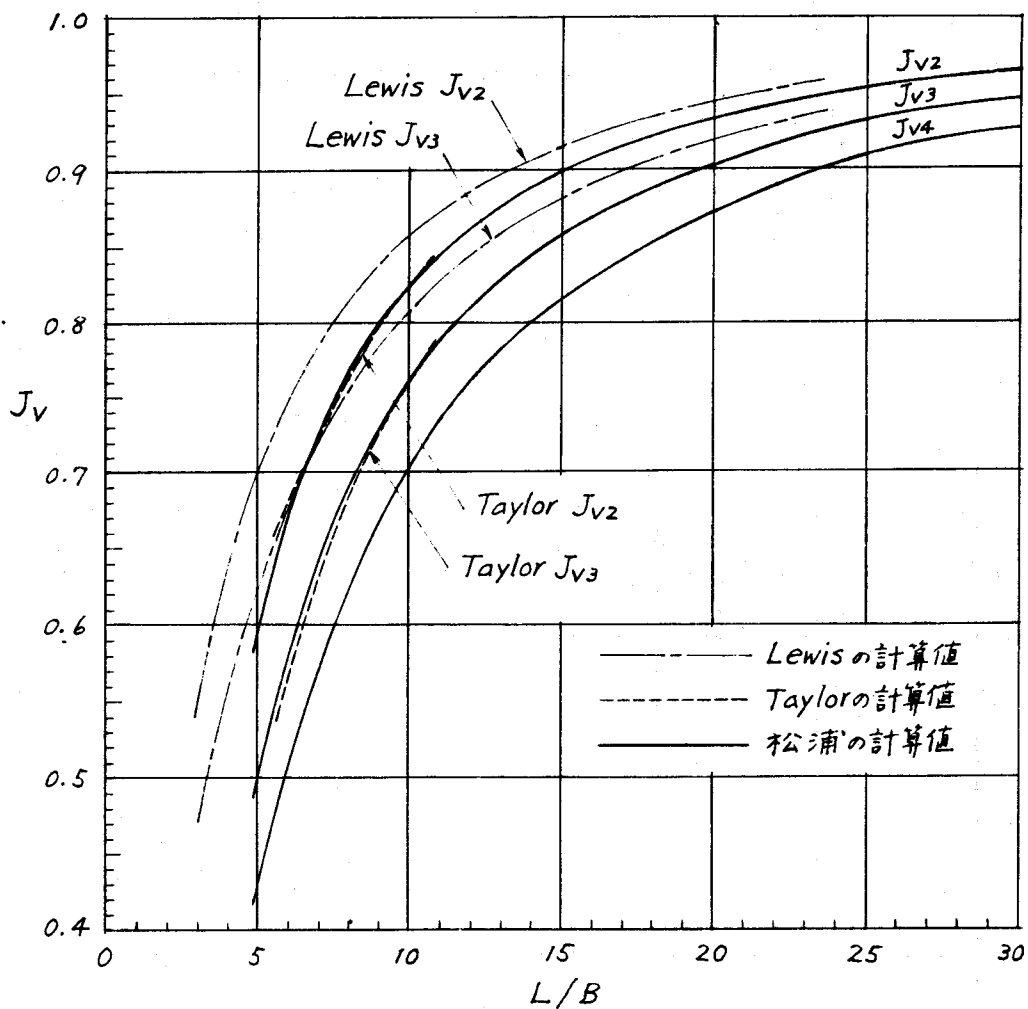


図 - 21 回転精円体 上下振動付加質量に対する3次元運動修正係数 J_v

くなって1に近づき、また高次振動になるほど J_v の値は小さくなる。

また、熊井¹⁹は有限長の丸棒が上下曲げ振動を行なう場合について J_v の理論値を求めている。この結果は肥えた船形（たとえばタンカー）に適用することができよう。丸棒の長さ方向に z 軸、横断面内に水の自由表面に一致させて x 軸、これに垂直下方に y 軸をとり、図 - 22 に示す極座標を用いると、流体の速度ポテンシャル ϕ が満足すべき Laplace の方程式は

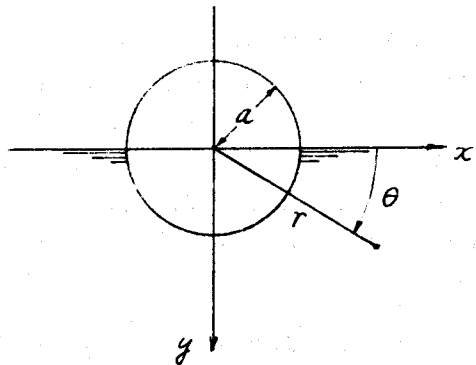


図 - 22

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{----- (50)}$$

熊井は、(50)の解として、半径 a 、長さ L の丸棒の振動撓み曲線が $\cos$ 曲線であると仮定して

$$\phi = \sin \theta \sum_{m=1}^{\infty} C_m k_1 \left(\frac{m\pi r}{L} \right) \sin \frac{m\pi z}{L} \quad \text{----- (51)}$$

を導いた。ここに、 K_1 は第2種1次変形Bessel関数、 C_m は任意定数であり、接水面の境界条件によって定められる。(51)を用いて流体の運動エネルギーを計算し、 J_v の値を求めた結果は図-23のようになる。

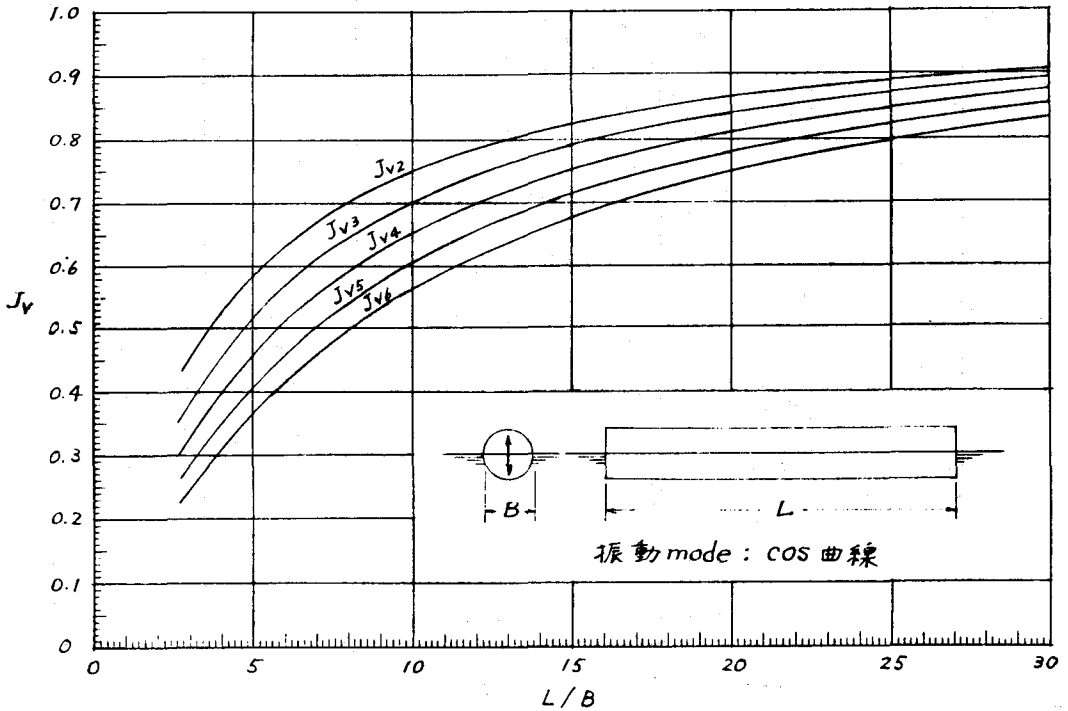


図-23 有限長丸棒 上下振動付加質量に対する3次元運動修正係数 J_v

(2) 水平振動に対する修正係数 J_H

船体はその長さ方向にわたり吃水はほとんど変わらないのが普通である。また、水平振動に対する付加質量係数の値は断面形状によってあまり変わらないことが知られている。これらの事柄を考慮に入れて、熊井¹⁰⁾は半径 a 、長さ L の有限長丸棒が自由表面において $\cos$ 曲線の撓み形で水平曲げ振動をするとして3次元運動修正係数 J_H を計算している。

流体の速度ポテンシャル ϕ が満足すべき基礎方程式はさきに示した(50)であり、解は次の形で与えられる。

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} A_{ms} K_{2s} \left(\frac{m\pi r}{L} \right) \sin 2s\theta \sin \frac{m\pi z}{L} \quad \text{----- (52)}$$

ここに、座標軸のとり方はさきに示した図-22と同じであり、 K_{2s} は第2種 $2s$ 次変形Bessel関数、 A_{ms} は接水面の境界条件で定められる定数である。

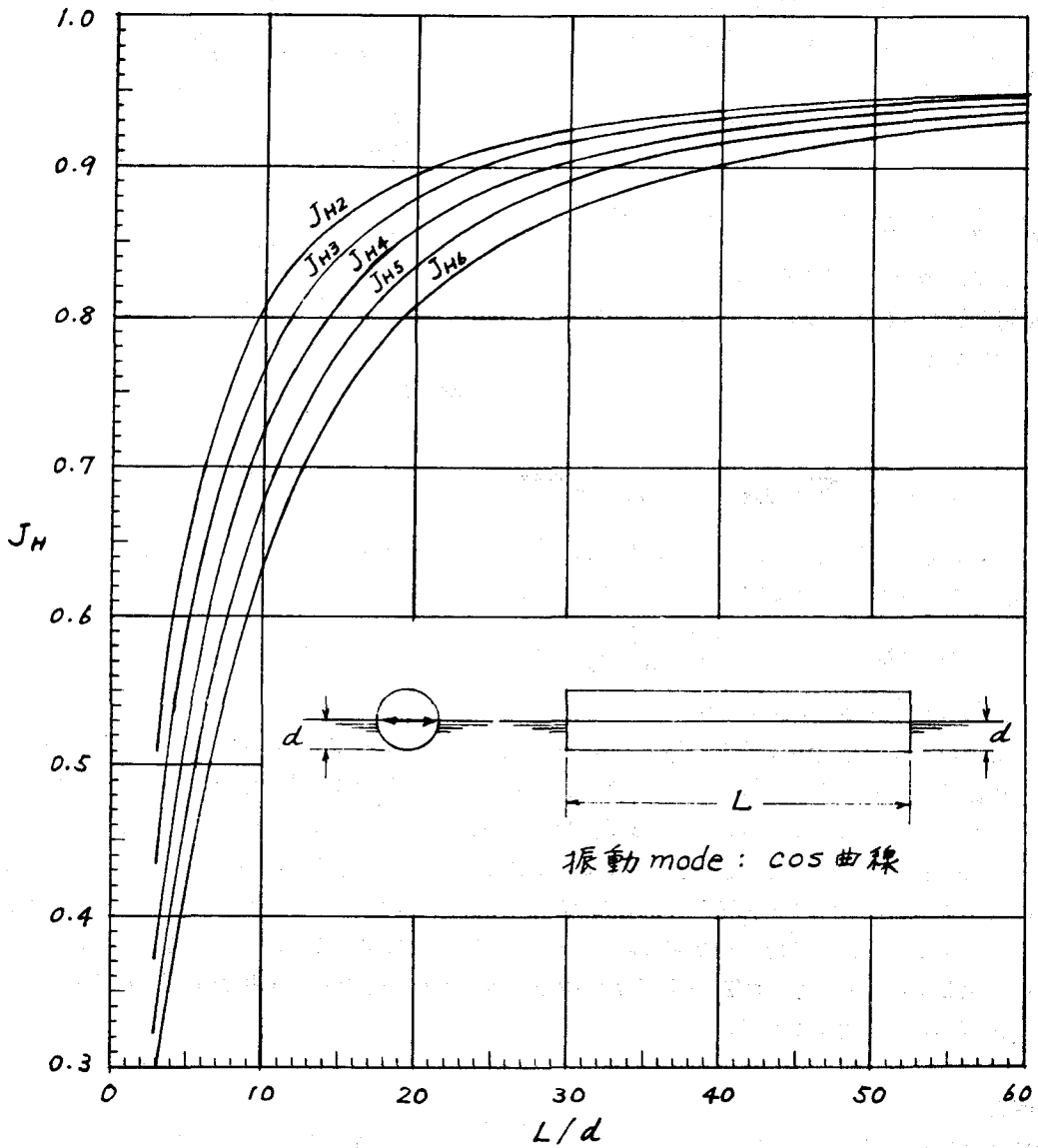


図-24 有限有丸棒 水平振動付加質量に対する3次元運動修正係数 J_H

(52)を用い、流体の運動エネルギーを計算することによって、(36)で定義した修正係数 J_H が得られ、 L/d に対してその値を図示すると図-24のようになる。ここに d は吃水である。図-24のより、 J_H の性質として、 L/d が大なるほどすなわち細長い棒ほど J_H の値は大きく、また高次振動になるほど J_H の値は小さくなることわかる。

(3) 振り振動に対する修正係数 J_T

熊井¹⁹⁾は、長さ L の楕円断面棒が、図-25に示すように、断面の主軸の1つが水面に一致した半

没水状態で、中心軸（ z 軸）まわりの振り振動をする場合の理論解析を行なって、船体振り振動に対する 3 次元運動修正係数 J_T の近似値を求めている。

流体の速度ポテンシャル ϕ に対する基礎方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (53)$$

の解として、楕円断面棒の捩れ角の分布が $\cos$ 曲線で与えられると仮定して、熊井は次式を導いている。

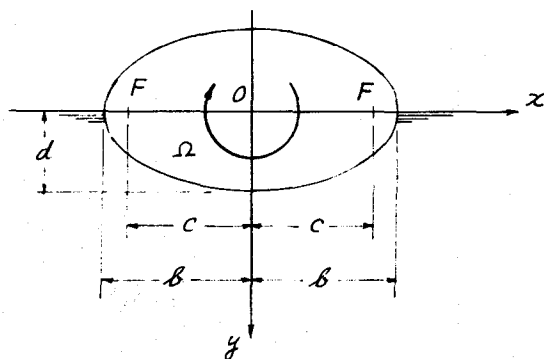


図 - 25

$$\phi = \sin 2\eta \sum_m C_m \text{Gek}_2(\xi, -q_m) \sin \frac{m\pi z}{L} \quad (54)$$

ここに、 ξ 、 η は楕円座標であって、さきに(21)に示したものであり、 Gek_2 は変形 Mathieu 関数¹⁶、 C_m は接水面の境界条件で定まる定数である。また q_m は次式で与えられる。

$$q_m = \kappa_m^2, \quad \kappa_m = \frac{1}{2} \frac{m\pi}{L} \frac{b}{\cosh \xi_0} \quad (55)$$

ここに、 ξ_0 は楕円断面の周を表わす。

(54)に基づいて 3 次元運動修正係数 J_T を求めるに際し、熊井は変形 Mathieu 関数 Gek_2 が変形 Bessel 関数の級数で表わされること¹⁶を利用して数値計算を行ない、図 - 26 に示す結果を得ている。図 - 26 にはいくつかの b/d の値について計算した修正係数 J_T の値が示してあるが、1 つの b/d の値に対して求められた J_T の値は、 b/d の値がその逆数 (d/b) に等しい楕円断面棒の J_T の値にもなっており、それぞれの図において L/d の尺度を読みかえることにより 1 つの図が 2 通りに使用できる。何となれば速度ポテンシャル ϕ として得られた(54)によって明らかのように、図 - 25 における x 軸 ($\eta = 0$ および $\eta = \pi$) 上および y 軸 ($\eta = \pi/2$ および $\eta = 3\pi/2$) 上で $\phi = 0$ となり、 x 軸および y 軸はともに流体の自由表面になり得るからである。

6. 結言

船体振動に対しては船体周囲の水が影響するが、その影響は付加質量または付加慣性モーメントという形で船体振動の解析に用いられている。本講義においては、船の全体的な振動すなわち 1 つの巨大な弾性棒としての上下曲げ振動、水平曲げ振動および振り振動に対して、付加質量および付加慣性モーメントがどのような手順で計算されるかを述べ、現在船体振動の解析に際して用いられている種々の資料を図またはグラフによって示した。

以上はごく基本的なもののみについて述べたが、なおこのほか船体が浅い水域にあるときの付加質量に対する浅水影響の問題、船体の局部振動に対する付加質量の問題などがあり、それぞれ興味ある結果が得られているが、これらについては紙面の都合により省略した。

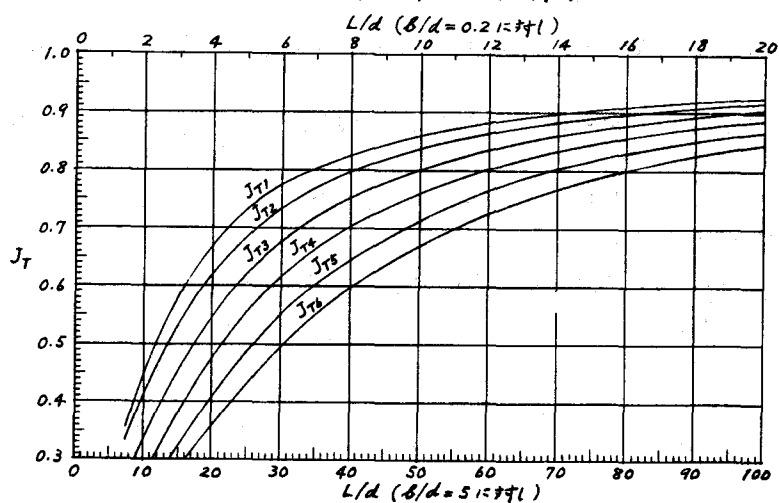
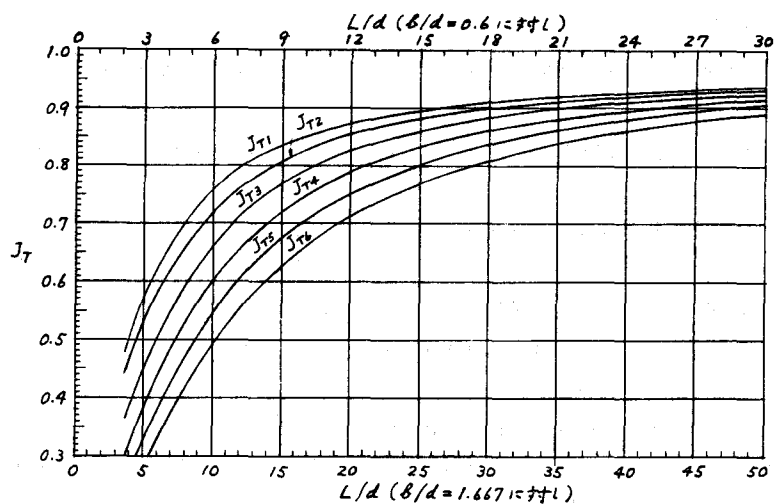
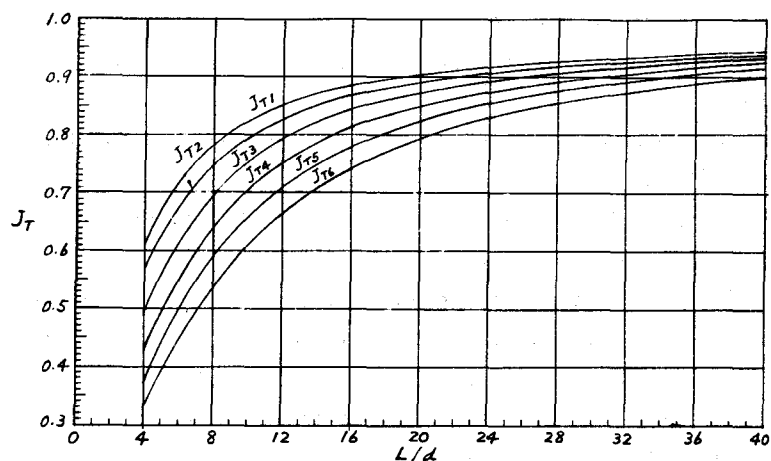


図-26 有限長楕円断面棒 振り振動付加慣性モーメントに対する3次元運動修正係数 J_T

参 考 文 献

- (1) F.M.Lewis : The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship, T.S.N.A.M. E., Vol. 37, 1929
- (2) K.Wendel : Hydrodynamische Massen und hydrodynamische Massenträgheitsmomente, J.S.T.G., Vol. 44, 1950
- (3) 松浦義一, 川上 肇, 小野木宏 : 長大倉口船の振り・曲げ連成固有振動の研究(第5報), 関西造船協会誌第133号, 昭和44年9月
- (4) L.Landweber and M.C. de Macagno : Added Mass of Two-Dimensional Forms Oscillating in a Free Surface, Journal of Ship Research, Vol. 1, No.3, 1957
- (5) C.W.Prohaska : Vibrations Verticales du Navire, A.T.M.A., 1947
- (6) L.Landweber and Matilde Macagno : Added Mass of Three-Parameter Family of Two-Dimensional Forms Oscillating in a Free Surface, Journal of Ship Research, Vol. 2, No.4, 1959
- (7) 熊井豊二 : 船体捩れ振動における付加慣性力率について, 造船協会論文集第108号, 昭和35年12月
- (8) 松浦義一 : 船体振り振動に対する付加慣性モーメントの一般式, 日本造船学会誌第498号, 昭和45年12月
- (9) J.L.Taylor : Some Hydrodynamical Inertia Coefficients, Phil.Mag., Vol. 9, 7th Series, 1930
- (10) 松浦義一 : 貨物船垂直撓み振動の解析, 造船協会論文集第108号, 昭和35年12月
- (11) H.Lamb : Hydordynamics, 6th edition, Cambridge University Press, Chapter V, Art. 103-106
- (12) R.L.Townsin : Virtual Mass Reduction Factors —— J Values for Ship Vibration Calculations Derived from Tests with Beams including Ellipsoids and Ship Models, T.R.I.N.A., Vol. 111, No.3, 1969
- (13) 熊井豊二 : 船体上下振動付加質量の三次元修正値について (第1報), 造船協会論文集第112号 昭和37年12月
- (14) 熊井豊二 : 船体水平振動の付加慣性質量に対する二三の修正について, 造船協会論文集第108号 昭和35年12月
- (15) 熊井豊二 : 船体捩れ振動の付加慣性モーメントに対する3次元修正値について, 造船協会論文集第108号, 昭和35年12月
- (16) N.W.McLachlan : Theory and Application of Mathieu Functions, Dover Publications, Inc., New York, 1964