

構造物の流体力弾性応答

小 松 定 夫

1 まえがき

各種の水理構造物や海洋構造物が、水流や波の力学的作用を受け、振動を生じ破壊するという苦い経験から、**水力弾性学** (Hydroelasticity) という新しい学門分野が開拓された。この新語は10数年前にHeller, Toebesらによって初めて用いられたものである。この述語は、既に1920年頃から航空工学において研究が続けられてきた**空力弾性学** (Aeroelasticity) の類語であり、学問的内容も極めて類似している。空力弾性学が、空気力、弾性力および慣性力の相互作用により生ずる現象を取扱う学問でFungやBisplinghoffにより定義された専門分野である。

それに対応して水力弾性学は、水力が弾性構造物の力学的拳動にどのような影響を与えるかといった問題について論ずるものである。

両者の本質的相違は、主につぎの2点に基因すると考えられる。すなわち(1)空気と水の物理的性質の差異(2)空力弾性学においては、構造物が流体内に没入しているので、構造物の弾性変形に密接な関連性を有するような空気力のみを考慮すればよい。それに対して水力弾性学においては、水と空気の境界面にまたがって構造物が設置されることが多いので、境界面に特有の外力(たとえば波力など)による影響を無視できない。

相違点(1)は、現象に本質的な影響を及ぼすものではなく、流体の物理諸量がパラメータ¹として同じ力学的意義をもって現象を支配してきて、それぞれのパラメーターの影響の度合に、若干の差異が認められるに過ぎない。

いっぽう相違点(2)については、構造物の弾性変形に直接的に影響されない境界面での作用を付加的な強制力とみなして取扱えばよいと考えられる。

このような意味で、水力弾性学と空力弾性学の本質的に類似する現象を取り出して、総合し、Toebesは**流体力弾性学** (Fluidelasticity) とする述語を用いた。それで、動的流体力を受ける弾性構造物あるいは構造部材の弾性変形が流体力に変化を与え、相互に影響し合って生ずるような弾性応答を**流体力弾性応答**と称する。

一概に流体力弾性応答といっても、種々の現象が現われる。これらの様相を異にする各種の現象を起こす要因は、気体の中にあるか液体の中にあるかということよりもむしろ構造物の幾何学的形状に左右される。

流体力弾性応答のほとんどは**自励振動** (Self-excited Vibration) である。自励振動のなかには、有用で好ましいものもあるが、大抵は有害なものである。流体力弾性応答について、解析的取扱いをし、力学的特性を論ずるには、4つの専門分野すなわち(1)弾性理論乃至構造力学(2)振動論(3)流体力学(4)確率過程論に関する基礎知識が必要となる。そして現象を支配する基礎微分方程式に含まれるべき、弾性抵抗の項の演算子、慣性抵抗の項の演算子および動的流体力の項の演算子を数学的にいかに表示するかが、現象の解明にとって重要な基本事項である。

本文では流体力弾性応答の系統的分類と相関性、流体力弾性学の一般基礎方程式、線型流体力弾性応答の代表例とそれらの応答特性ならびに構造物設計に関連する問題について論ずることとする。

2 流体力弾性応答の系統的分類

実存する各種の流体力弾性応答を力学的性状に従って系統的に分類することによって解析的取扱や現象の理解に役立たせようという試みが種々行なわれてきた。

航空工学における空力弾性応答については、Collarが初めて図-1(a)に示すような空力弾性相関図を提示した。

Hellar, Abramsonが、その後の空力弾性学の発達を考慮に入れて改良を加え、図-1(b)に示すような相関図を作成した。図中、2重円で囲まれたA, E, Iはそれぞれ空気力、弾性抵抗、慣性抵抗を表わす。1重円で囲まれた記号が、各種の現象を表わしている。こ

れらの現象のうちで三角枠の外側に位置するものは、静的空力弾性応答であり、内側にあるものが動的空力弾性応答である。実線は相互に明確な関連性があることを示し、点線はいくらか関係があると推察されることを示す。

動的空力弾性応答をいかに分類し、位置づけるかという点については空気力、弾性抵抗、慣性抵抗がその現象にどの程度に影響するか判断が基準となる。このような各種応答の位置づけが空力弾性学の発達により次第に正確になってきたことが図-1(a)(b)の対比によって明白である。図-2にBisplinghoffの空力弾性相関図を示す。

これらに対してHellerは水

力弾性応答と空力弾性応答の対応関係について考察し、図-3に示すような水力弾性相関図を作成した。図中のDR(動的応答)は変動水圧、乱流、後流の渦の作用によって生ずる過渡的現象のことをいい、空力弾性学におけるパフエッティングに対応する。

Hellerの図は船舶を対象としているので、DS(航行安定性)C(操縦性低下)Z(衝突)などを含んでいる。

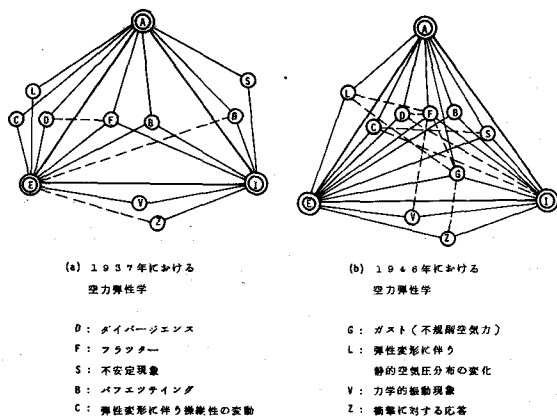


図-1 空力弾性相関図

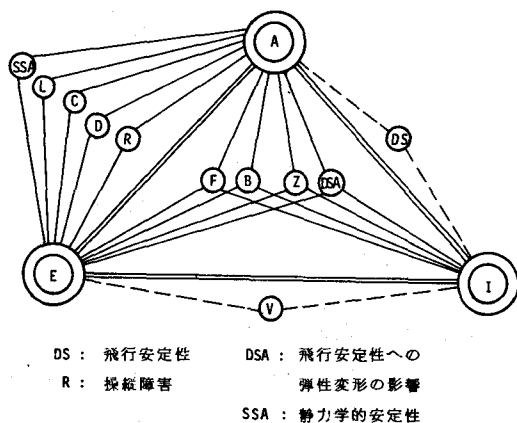
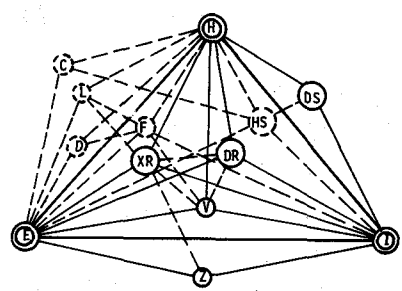


図-2 Bisplinghoffの相関図

それに対して、主として水理構造物、海洋槽造物を考えて、Toebesは流体力弾性応答について、図-4のような相関図を作成した。図-4においては、 T （地震による振動） W （水撃作用） C （浮き防波堤の定着用ケーブルの振動） CI （Cavity Instability） IR （波力）などが新しく追加されている。



- H : 動的水力
- HS : 安定性への弾性変形の影響
- DS : 安定性
- DR : 動的応答
- XR : 衝撃波に対する応答

図-3 水力弾性相関図 (Heller)

3 流体力弾性応答の一般基礎方程式

流体力弾性応答に関する基礎方程式を最も一般的に簡明に表現するために、 S （弾性抵抗演算子） F （流体力演算子） I （慣性抵抗演算子）を用いるのが便利である。

たとえば、一般外力 Q と構造物の着目点の一般変位 q の静力学的関係は、つぎのように表わせる。

$$Q = S(q) \text{ ----- (1) } S$$

たとえば、はり構造については周知のように

$$S = EI \frac{d^4}{dx^4} \text{ ----- (2)}$$

外力は、変位 q に独立な Q_g （剛体と仮定したとき作用すると考えられる動的流体力）、 Q_d （分布荷重）、 Q_b （容積力）と、 q によって変動する Q_f （弾性変形により決まる動的流体力）、 Q_i （慣性力）に分類できる。したがって Q_f 、 Q_i をそれぞれ演算子を用いて $F(q)$ および $I(q)$ と記すと、

$$S(q) - F(q) - I(q) = Q_g + Q_d + Q_b = Q_e \text{ ----- (3)}$$

したがって方程式の解を演算子形式で表示すれば、

$$q = S^{-1} \{F(q) + I(q) + Q_e\} \text{ ----- (4)}$$

もし現象が線型微分方程式あるいは線型積分方程式に支配される場合には、解は重ね合わせの原理により次式で与えられる。

$$q = S^{-1}F(q) + S^{-1}I(q) + S^{-1}Q_e \text{ ----- (5)}$$

さて流体力弾性応答に属する具体的な各種の現象にどのような方程式が対応するかを示せば、つぎのとおりである。

強制外力 Q_e の作用下に、構造物が空力弾性的に応答する問題に関しては、方程式(3)からまとめて次の方程式を取扱うことになる。

$$\{S - F - I\}(q) = Q_e \text{ ----- (6)}$$

(1) 自励振動

フラッター現象、跳躍現象などにみられるように流体力が構造物の弾性変形に左右されて周期的変動を繰り返して作用するとき、流れから構造物にエネルギーが供給される。この供給エネルギーが常に構造減衰などによる散逸エネルギーより大きい場合には、構造物の振幅は次第に増大し、つ

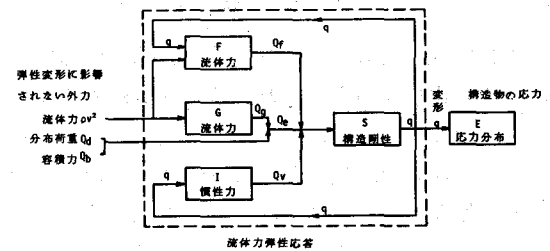


図-4 フィードバック現象

いに破壊に至る。これを総称して**自励振動**といい、次式で表現される。

$$\{S-F-I\}(q)=0 \quad \text{-----} (7)$$

(2) 静力学的応答問題

流体力と荷重が作用する場合に構造物の静力学的挙動すなわち応力や変形を解析するには、

$$\{S-F\}(q)=Q_e \quad \text{-----} (8)$$

なる方程式を取扱うことになる。

(3) 静的安定問題

風による吊橋の横座屈のような静力学的安定問題およびダイバージェンスの問題に関しては、

$$\{S-F\}(q)=0 \quad \text{-----} (9)$$

が成立つ。

連続弾性体の変形量 q についての基礎方程式(3)の解は無限箇の自由度をもっている。しかし、数値解析に際しては自由度をできるだけ低減して、 n 箇の一般座標 $f_j(y)$ を用いて、次式によって n 自由度の解 $q(x, t)$ を仮定する。

$$q(x, t) = \sum_{j=1}^n \{q_j(t) f_j(x)\} \quad \text{-----} (10)$$

ここに $f_j(x)$ としては、構造物の j 次固有振動モードをとるのが普通である。 $q_j(t)$ は j 次モードの時間的变化を表わす、いわゆる時間関数である。

自由度 n が大きいほど、解の精度が向上するが、計算時間は n と共に指数的に増加する。

つぎに現象が線型方程式に支配されるかどうかということが問題になる。

構造物が微小変形であれば、弾性抵抗演算子 S と慣性抵抗演算子 I とは線型であると考えてよい。また摩擦による減衰は、等価な線型粘性減衰に置きかえても実用上支障がないことは、多数の実験結果から明白である。

動的流体力は線型の場合もあれば、非線型の場合もある。後者は、たとえば跳躍現象やストールフラッターでみられる。

もし微小振動で q が十分小さい場合には、線型振動と考えてよい。特に安定性問題においては、変形モードのみが解析上必要であって、振幅を微小とおくことによって固有値を求める問題となる。それに対して強制振動の問題においては、有限変形の場合もありうる。そのような場合には、非線形演算子を近似的に線型化することがあるが、近似度については不明確である。

4 動的流体力

流体力弾性学における最も難しい問題は、動的流体力の発生機構の解明と定量的な把握である。その困難性は主に構造物の幾何学的形状によって左右される。

いま一様な定常流の中に置かれた2次元問題について、

(1) 動的流体力がいかなるパラメーターに影響されるかについて論じ、(2) 特に構造物の形状が動的流体力の特性に重要な役割を演ずることを明確に示し、(3) 流体と構造物の相互作用について物理的観点からの理解を深め、(4) 実用設計の立場から、必要な基礎資料の最適収集法について考えることにする。

(1) 動的流体力に影響するパラメーター

動的流体力は大別して2通りいる。1つは剛体に作用する流体力で構造物の変形には左右されない。他は構造物の変形により生ずる流体力である。

前者は主としてつぎのパラメーターに影響される。すなわち(1)構造物の形状 (2)迎角 α_j (3)レイノルズ数 R (4)フルード数 F (5)ストローハル数 S_f

また、一般に動的流体力は、 $\rho \bar{V} |\bar{V}|$ に比例する。ここに ρ は流体密度、 $\bar{V}(u, v, w; t)$ は流れの場を特長づける平均流速である。

流体ストローハル数 S_f は $S_f = N_f b / \bar{V}$ で定義される無次元量である。ここに N_f は構造物の近傍で測定した流速あるいは構造物に作用する動的流体圧のパワースペクトルにおいて最もエネルギーが集中している最大値を示す振動数である。したがって S_f は、構造物の流れの方向の幅 b と流体圧変動の1サイクル中に平均流の進む距離 $\bar{V}/f$ の比であって、動的流体圧が流れの方向に構造物に沿ってどのように変動するかという特性を示すパラメーターである。あまり一般的ではないが、よく知られた実例として、流れに直角に置かれた、塙体の後方に生ずる渦の発生振動数の半分が S_f である。

構造物の変形に左右される動的流体力はつぎのパラメーターに影響される。

(1) 動的変形(たわみ、またはねじり角)の2乗平均の無次元表示 $\bar{q}_{js} = \bar{q}_j / b$ (or $\bar{q}_j / \alpha_j$) および $\bar{q}_{jf} = \bar{q}_j / \delta$ ここに δ は境界層の厚さ、(2) 構造ストローハル数 $S_s = \omega_s b / 2\pi \bar{V}$

ここに ω_s は構造物の振動変位 q_j のパワースペクトルが最大値をとる円振動数、(3) 演算子 $\partial^2 / \partial \tau$ および $\partial^2 / \partial \tau^2$ は無次元時間 $\tau = t \bar{V} / b$ による導関数、(4) μ は質量密度比(すなわち構造物の質量と見かけの質量の比) (5) $\omega_\gamma = \omega_s / \omega_f$ (Strouhal frequency ratio)

また、一般にこの種の動的流体力は $\rho \bar{V} |\bar{V}|$ のみならず、変位 q_j につて変化する。

なお動的流体力は、さらに空洞指数 (Cavitation index)、粗度、縦横比などに左右される。

(2) 構造物の形状と現象の線型性

流体力弾性応答が線型性であるかどうかは、構造物の形状に依存する。構造物の表面に沿って剥離が起こらない場合には、流れの場は層流理論で計算できる。そして流体力学的非線型方程式の線型化も容易である。しかし構造物が流線形をしていて、かつ迎角がある値以下の場合に限り、剥離現象を生じない。Theodorsenのフラッター理論は、このような場合について解析したものである。フラッター理論は有限の幅 b を持った薄い翼型を対象にしている。そしてつぎのような動的揚力 L と動的モーメント M を与えている。

$$\begin{aligned} L &= \pi \rho b^2 [\ddot{\delta} + V \dot{\theta} - b a \ddot{\theta}] + 2 \pi \rho V b c(k) [\dot{\delta} + V \theta + b (\frac{1}{2} - a) \dot{\theta}] \\ M &= \pi \rho b^2 [b a \ddot{\delta} - V b (\frac{1}{2} - a) \dot{\delta} - b^2 (\frac{1}{8} + a^2) \ddot{\theta}] \\ &\quad + 2 \pi \rho V b^2 (a + \frac{1}{2}) C(k) [\dot{\delta} + V \theta + b (\frac{1}{2} - a) \dot{\theta}] \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 $\delta(t)$ は鉛直変位、 $\theta(t)$ は回転変位、 b は翼幅の半分、 ba は回転中心、 $C(k)$ はTheodorsen関数、 $\cdot$ は時間による微分を表す。 $\cdot$ および $\ddot{\cdot}$ の項はそれぞれ $\partial / \partial \tau$ および $\partial^2 / \partial \tau^2$ に相当する。

またフラッター現象において、 $\alpha = \alpha_0 e^{i \omega_s t}$, $h = h_0 e^{i \omega_s t}$ なる調和振動をするとき、 $C(k)$ はTheodorsen関数で $k = \omega_s b / V = 2 \pi S_s$ の関数である。 $C(k)$ は第2種Hankel関数により次式で与えられる。

$$C(k) = F(k) + i G(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k)}$$

したがってフラッター時の揚力およびモーメントは構造ストローハル数 S_s の複雑な関数となっている。

また、フラッター理論で取扱っているような定常ポテンシャル流の場合には $S_f = 0$ である。

従来、3次元弾性構造物に対しては、いわゆるStrip assumptionを基礎におくのが普通である。すなわち構造物のある着目断面の近傍に作用する動的流体力は、その断面の一般変位 q (δ および α)のみの関数であると仮定している。したがって流れの3次元の効果を考慮していない。一般の

橋状構造物のフラッター理論も、この仮定に基づいている。

Parkinsonの橋体の跳躍振動に関する非線型基礎微分方程式はつぎのとおりである。

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + ky + F = 0 \quad \text{----- (12)}$$

流体力 F は一般に非線型である。そこでKrylov-Bogoliubovの非線型解法を適用すると、無次元定常振幅 $\bar{Y}_s$ をうる。

$$\bar{Y}_s = V^* \left\{ -\frac{3B}{5C} + \left[\left(\frac{3B}{5C} \right)^2 + \frac{8A}{5C} \left(1 - \frac{V_0^*}{V^*} \right) \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad \text{----- (13)}$$

ここに $\bar{Y}_s = \bar{y}_s/d$

静的揚力における変位の2次以上の項を省略し、線型化を行えば、Den Hartogの線型跳躍理論をうる。これらの跳躍理論におけるように、構造物の弾性変形が動的流体力に及ぼす影響を無視して、静止中の構造物に作用する流体力（揚力、抗力、モーメント）の迎角 α に対する変化曲線を解析に取入れることによって、 S_S および ω_r の影響を無視している。さらに μ の影響も考慮していない。上述の跳躍理論は、もともと空気力を対象としているが、水力弾性学においては、 μ がかなり小さいので、非常に大きい見かけの質量力（Apparent mass force）を生ずる。

このように μ 値が小さい場合には、固有振動数や構造ストローハル数にかなり影響を与える。したがって水中翼型の設計は航空翼型のそれより、多少、面倒な問題である。翼翼翼翼翼翼

波が発生する自由表面付近では状態がより複雑ではあるが、それでも層流理論が適用しうる場合には、そういった計算はさほど困難ではない。

平板あるいは薄翼のフラッター現象におけるような線型性は、土木構造物のような非流線形断面の場合、あるいは失速角以上の大迎角をもつ流線形断面の場合には失われる。このような場合には剥離が起り、層流と乱流の境界面（Free shear layer）ができる。この境界面では、速度勾配が非常に大きい。この境界面の位置や剥離した流れについてはポテンシャル理論で取扱うことができない。ポテンシャル理論の有用性は、その辺が限界のようであって、動的流体力は実験資料に基づいて決定するのがよい。この目的に適した実験を行ない、実験データに適切な検討を加えるためには、境界層理論、空洞、乱流、後流の機構の究明が必要である。そして構造物の弾性変形とそれに関連した動的流体力の相互作用は弱くなり、ますます不明確となると共に、非線型性が激しくなる。

(3) 層乱流境界層と動的流体力

流体力弾性学における多くの非線型問題は層流・乱流の境界面の性状に密接な関連性をもっている。非線型問題では偶発的性状をもっているので、代表的解析例や流体と構造物の相互作用機構の典型的な実例は比較的少ない。

また動的流体力に関する定量的資料も充分揃っていない。けれども層乱流境界層の流力特性と前述のパラメーターを関連づけることによって、非線型性に及ぼす境界層の影響を推論できるものと考ええる。

まず第一に重要な特性は、境界層が元来、不安定であるという点である。境界層における流速の法線方向勾配が大きく、僅かな法線方向の攪乱も、忽ち急激に拡がるものと思われる。Prandtlは境界層が巻き込まれていく状態を簡単な非粘性モデルを用いて説明している。固体の縁のところで連続的に放出された渦度場が発達して、集中して竜巻状の渦になる。渦が発生すると、その渦の近傍に局所的な速度場と圧力場を誘発する。したがって構造物の後方の渦の強さは非定常である。すなわち渦の強さは、渦が発生する間は増大してゆき、全体の流れによって渦が下流に押し流され

てゆく間は減少してゆく。そのために、動的流体力に不規則な変動が生じ、構造物の後方の境界層に攪乱が生じる。それでまた新しい渦を形成し、以下同様の現象が繰返される。この際、渦の発生は無次元周波数が S_f に他ならない。

もし剥離点が顕著に運動を生じ $\bar{q}_{js}$ と $\bar{q}_{jf}$ が充分に大きい場合には後流内の速度場と圧力場の変動は、上述の場合よりも激しくなる。もし振動が周期的であり、したがって S_s が定義されうるような状態では、極めて強い渦が構造物の振動周期に合せて発射される。構造ストローバル数 S_s が流体ストローバル数 S_f より小さい場合でも S_f は S_s に一致するようになり、したがって ω_r は1になる。そして非定常流体力が増大する。動的流体力 $F(q)$ は変形 $\bar{q}_{js}$ の影響を受け、非線形性を示すに至る。それで図-4に示すフィードバック現象が現われる。

Abernathy-KronauerおよびFromm-Harlowの数値計算結果によれば、片側の層流境界層の自己誘導よりも、両側の層流境界層の相互誘導の方が大きく現われるということが確認された。レイノルズ数 R に応じて境界層が交互に巻き込まれて強い渦に発達する。その周期は、一定の固有の S_f 値で定まる平均値をもっている。そして周期的流体力が構造物に作用する。またパラメーター S_f によって、フィードバック現象における安定問題の特性が決まる。もちろん例えば、固定された円柱のまわりの流れのように固体が静止している場合には、純粹の流体動力学 (Fluid-dynamics) の問題となる。この種の問題については、Morkovinの総論がある。このような場合、流れの場が複雑なために、流体力を定式化することが難しくなる。従来から専門家の間で注目を集めてきた円柱についてさえ、例えばレイノルズ数や表面粗度の関数として、交番揚力を定量的に式で与えることに成功したとは言えない。このようになかなか衆目の認めるような定式化が行われえない主な理由は、後流に3次元性状が含まれることおよびStochasticな機構をもっているという2点である。

一般に壱状構造物が運動を始めると、それは再び渦の発生周期に影響を及ぼし、 $S_f \rightarrow S_s$, $\omega_r \rightarrow 1$ というように変化するとともに、渦の内部構造にまで変化をもたらす。

そうすると $\bar{q}_{js}$ および $\bar{q}_{jf}$ の大きさ、レイノルズ数、構造物の形状と縦横比、端部の幾何学的条件などに応じて、大なり小なり、交番揚力と抗力が増幅することになる。特に剥離点から下流側の構造物の形状によって、後流の内部構造や非定常流体圧に曝されている範囲が決まることになるので下流側の形状は重要な因子である。例えば、円柱体のように、剥離点のところで境界が曲面を呈する場所には、流体圧の変化の影響を受けて、剥離点の位置が変動し易くなり、フィードバック現象を助長する。

下流側が短い場合には、変動流体圧を受ける表面積が充分でなく、かつ後流に3次元性状が現われるので、顕著な交番揚力を生じない。さらにまた下流側が余り長い場合には、層流境界層の相互誘導現象が弱くなるので同様の結果となる。

角ばった断面形状をもつ構造物の場合には、剥離点は一般に隅角点と一致する。断面の対称軸が流れの方向に一致せず迎角 α_j を有する場合には、層流境界層は対称とはならない。構造物の直前および層流境界層の外側領域では、流れは、ほぼポテンシャル流である。両側の境界層に沿う圧力は、そのため相等しくない。それで揚力 Q_e を生ずる。そしてある範囲の α_j 値に対しては $\partial Q_e / \partial \alpha_j$ は負となる。その上平均流速に対し比較的ゆるやかに構造物が振動する場合すなわち構造ストローバル数 S_s が小さい場合には、 $\partial / \partial \tau$ が迎角に対応することに注目すると、動的不安定性の条件は境界層の誘導現象に関するものとは異なることがわかる。

(4) 動的流体力の定量的評価

流体の中に置かれた構造物の安全性を保証するためには、構造物に作用する動的流体力を明確に

把握することが先決である。流体によって惹き起される構造物の振動に関する研究は極めて多数行なわれたにもかかわらず、ある限られた場合についてのみ、動的流体力が比較的正確に評価できたに過ぎない。

剛体に作用する流体力と弾性振動体に作用するそれとは明らかに相違する。前者は、たとえば流線形断面の場合には、構造物は定常流の中に設計迎角で置かれ、いわゆる静的流体力として作用する。

非流線形断面をもつか、激しい乱流の中に置かれた場合には、一般に不規則な動的流体力を生ずる。

流体の中に、動かないようにして置かれた剛体表面に作用する流体圧を圧力計で測定したり、天秤などを用いて流体力の合力を測定することによって、定量的に調べることができる。しかしこのような静止中の剛体に作用する流体力の値は流体力弾性解析には余り役に立たない。

流体力弾性問題に関しては、振動中の動的流体力の定量的把握が重要である。このような動的流体力を定量的に評価するための定式化に必要な基礎資料は、現在まだ十分揃っているとはいえない。

その第1の理由は、従来の研究においては、弾性、動的流体力、慣性、減衰などの種々な組合を有するような模型を対象とした。その結果は、特定の模型について諸因子の影響が総合的に含まれた形で与えられる。実際に必要なのは各因子の個々の影響を定式化することである。

つぎに、現象を2次元確定論的に考えようとする伝統的な傾向があった。しかし通常は、3次元不確定現象である。明らかに3次元という点は従来完全に無視されていた。いっぽう stochastic 現象に関しては、わかっていながら適切な注意が払われていなかった。

動的流体力についての基礎資料を整え、知見をうるには、慣性の小さい剛体模型を加振機で一定の振動数・振幅で振動させ、加振機と模型の間の張力変化を測定する方法が考えられる。この方法によれば、特定の模型の弾性抵抗、慣性抵抗、減衰力の影響を受けない動的流体力が測定結果から取り出せる。データー整理に際してはスペクトル解析が必要となる。特に変位と流体力の相互相関スペクトル (Cross-spectrum) が自励振動の機構を考察するのに直接有用である。この方法で Toebes-Ramamurthy は後述するように、円壩に作用する動的流体力に関する有用な資料をえた。

これと同時に、模型実験結果が、そのまま実物に適用できるかどうかという点について適切な判断を下すためには、後流の内部構造について調べることが重要である。

乱れの大きさと構造物との寸法との比がどのように影響するかについての一般的根拠となるものはない。ただ、構造物が大きくなると、この比の値は小さくなり、したがって $\bar{q}_{js}$ の値が低減する。だから模型実験の結果を巨大な実物に適用する場合には安全側の計算となる。

5. 自励振動

流れの中で構造物が変位 q で振動し、その方向に動的流体力 Q が作用する場合に、振動の1サイクル中になされる仕事 W は、次式で与えられる。

$$W = \oint Q \dot{q} dt \text{ ----- (13)}$$

仕事 W が構造減衰によるエネルギー散逸量より大きい正の値をもつ場合には、流体から構造物にエネルギーが供給されるので、振動は増大し、いわゆる自励振動を生ずる。したがって構造物の振動と周期的流体力の周期および位相差ならびに構造減衰の大小によって自励振動が生ずる。

構造物の幾何学的形状に応じて自励現象にいくつかの型がある。それらについて簡単に述べよう。

(1) 曲げねじりフラッター

板状構造物の横断面の長辺が迎角 α で、図-5(a)に示すように層流の中に置かれた場合、各横断面は並進変位 $\delta(t)$ と回転変位 $\theta(t)$ で振動する。その際、構造物全体としては曲げとねじりの連成振動現象を呈する。これを曲げねじりフラッターという。

そこで一般に曲げねじりフラッターについて、つぎの基礎微分方程式をうる。

$$A \ddot{\mathbf{q}} + B \dot{\mathbf{q}} + C \mathbf{q} = 0 \quad (14)$$

ここに $\mathbf{q} = \{\delta; \theta\}$ 、係数 A, B, C は2次正方行列で次式で与えられ、その中には、式(7)で示されていた弾性抵抗演算子 S 、流体力演算子 F 、慣性抵抗演算子 I からの因子が混合して含まれている。すなわち式(10)において $n=2$ として、

$$\begin{aligned} \delta &= \delta(x, t) = \delta(t) f(x) \\ \theta &= \theta(x, t) = \theta(t) g(x) \end{aligned} \quad (15)$$

そして基礎方程式(7)に代入し、Galerkin法を適用すると、

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \int_0^l (m - \pi \rho b^2) f^2 dx, & \int_0^l (S_\theta + \pi \rho b^3 a) g f dx \\ \int_0^l \{S_\theta - \pi \rho b^3 [a - b(\frac{1}{2} + a^2)]\} f g dx, & \int_0^l I_\theta g^2 dx \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} -2\pi \rho V \int_0^l b c(k) f^2 dx, & -\pi \rho V \int_0^l b^2 [1 + 2C(k)(\frac{1}{2} - a)] g f dx \\ -\pi \rho V \int_0^l b^2 [(\frac{1}{2} - a)b - 2C(k)(a + \frac{1}{2})] g f dx, & -2\pi \rho V \int_0^l b^2 C(k)(\frac{1}{4} - a^2) g^2 dx \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} \omega_\delta^2 \int_0^l b^2 [(\frac{1}{2} m f^2 dx & -2\pi \rho V^2 \int_0^l b c(k) g f dx \\ 0 & \int_0^l \{\omega_\theta^2 I_\theta - 2\pi \rho V^2 b^2 (a + \frac{1}{2}) C(k)\} g^2 dx \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、 S_θ は回転中心まわりの単位長あたり質量モーメント、

$\omega_\delta, \omega_\theta$ はそれぞれ並進および回転振動の固有円振動数 m, I_θ はそれぞれ単位長あたり質量および慣性モーメント、

もし、自励振動数が生ずる限界風速 V_{cr} が知りたい場合には、次に示すような固有値問題として取扱うとよい。

すなわち、自励振動数における一般変位 $\mathbf{q}$ は、連成調和振動を考えることができるから、

$$\mathbf{q} = \mathbf{K} e^{\lambda t} \quad (18)$$

とおく。ここに $\mathbf{K}$ は2次のベクトルで曲げ変位 δ と回転変位 θ の振幅と両者の位相差を成分の中に含んでいる。

そこで式(18)を基礎方程式(14)に代入すれば、つぎのような同次方程式をうる。

$$(\lambda^2 A + \lambda B + C) \mathbf{K} = 0 \quad (19)$$

ところが自励振動を生ずる場合には、 $\delta = \theta = 0$ なることはないので、 $\mathbf{K} \neq 0$ である。

したがって、つぎの固有行列式をうる。

$$|\lambda^2 A + \lambda B + C| = 0 \quad (20)$$

方程式(17)を展開すると λ に関する4次代数方程式をうる。その根 λ は一般に複素数で $\lambda_k = a_k + ib_k$ ($k=1, 2, 3, 4$) なる形で求まる。もし、 $a_k < 0$ であれば、いわゆる減衰振動であって、安定である。逆に、 $a_k > 0$ であれば、自励振動を生じ、不安定となる。したがって、 $a_k = 0$ なる条件が不安定現象を生ずる限界条件となる。そこで V を変化させて、対応する固有値 λ_k を計算し、

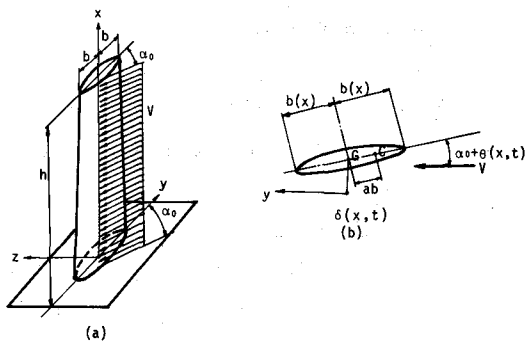


図-5 流線型断面をもつ壩状構造物

$\alpha_k = 0$ をときの風速 V_{cr} を求め、限界風速とする。

あるいはRouthの判別式を適用して V_{cr} を求めうる。

いま固有方程式を展開すると、一般に

$$\kappa_4 \lambda^4 + \kappa_3 \lambda^3 + \kappa_2 \lambda^2 + \kappa_1 \lambda + \kappa_0 = 0 \quad (21)$$

$$\text{ここに, } \kappa_0 = C_{11} (C_{22}^* + C_{22}^{**} V^2) \quad (22)$$

$$C_{22}^* = \omega_{\theta}^2 \int_0^l I_{\theta} g^2 dx, \quad C_{22}^{**} = -2 \pi \rho \int_0^l d^2 (a + \frac{1}{2}) C(k) g^2 dx \quad (23)$$

$$\kappa_1 = (C_{11} b_{22} + C_{22}^* b_{11}) V + (C_{22}^{**} b_{11} - C_{12} b_{21}) V^3 \quad (22)_2$$

$$\kappa_2 = -C_{11} a_{22} - C_{22}^* a_{11} - (a_{11} C_{22}^* + b_{11} b_{22} + b_{12} b_{21}) V^2 \quad (22)_3$$

$$\kappa_3 = (a_{11} b_{22} - a_{22} b_{11}) V \quad (22)_4$$

$$\kappa_4 = a_{11} a_{22} \quad (22)_5$$

そこで、Routhの判別式を適用すると、 $\kappa_0 = 0$ のとき、 V_{cr} をうる。すなわち、

$$V_{cr, st} = \left(-\frac{C_{22}^*}{C_{22}^{**}} \right)^{1/2} \quad (24)$$

式(22), (24)を用いると、方程式(21)の λ の根は0および実数であることがわかる。

いっぽう、方程式(14)において、 $\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} \equiv 0$ とおき、微小攪乱外力を ΔQ_e とすれば、 $V > V_{cr, st}$ の場合には、

$$C \mathbf{q} = \Delta Q_e \quad (14)'$$

したがって $\kappa_0 = 0$ の場合は、回転角 θ は際限なく増大する。これは一種の静的不安定現象でダイバージェンスといわれている。

もう一つの判別式は、次式のとおりでである。

$$\kappa_0 \kappa_1^2 + \kappa_0 \kappa_3^2 - \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = 0 \quad (25)$$

これより動的不安定現象についての限界風速として、

$$V_{cr, dyn} = (\kappa_5 \pm \kappa_6)^{1/2} \quad (26)$$

をうる。 $V \geq V_{cr, dyn}$ の場合、曲げねじりフラッターを生ずることになる。式(26)に含まれる κ_5, κ_6 は共に、係数 $a_{11}, a_{22}, \dots, C_{22}^*, C_{22}^{**}$ などの複雑な関数である。

このように方程式(14)を用いて、安定問題として流体力弾性現象を取扱う場合には、限界風速に達してフラッター現象が起こったときのたわみ、およびねじり角の振幅については不明である。それは実際の現象が非線型性であるにもかかわらず線型化して取扱ったことに基因する。ちょうど弾性座屈理論によって限界座屈荷重は計算できるが、座屈前後の弾性拳動を明らかにできないのと類似している。

しかし、実用設計においては限界風速を越えて、構造物の振幅が増大すれば、破壊を誘発するので、限界風速 V_{cr} が設計上、有意義な基準値となる。

図-6に曲げねじりフラッターの場合の揚力 L 、たわみ速度 $\dot{\delta}$ 、ねじり速度 $\dot{\theta}$ および変形状態を示す。図からわかるように、揚力 L とたわみ速度 $\dot{\delta}$ が同位相で式(13)より、 $W > 0$ なることがわかる。

(2) ストールフラッター

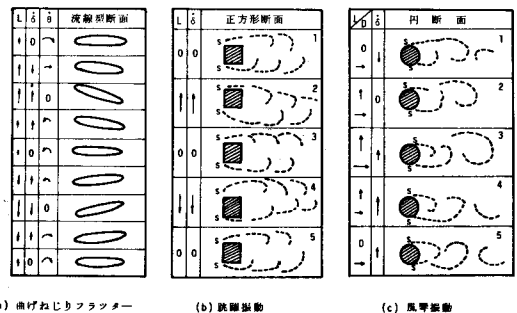


図-6 自励振動

図-5に示すような流線型断面を有する構造物に作用する流体圧によるねじりモーメント M と迎角 α の関係を図-7に示す。静止中の構造物が迎角 α の流れを受けたとき、 α が小さい間は α の変化に対して M は α に比例して増加する。ところが α が α_{stall} 付近に達すると、層流は構造物表面の後方から剥離を生じ、表面に接する流れは一部乱流となる。このため M の増加率は α と共に急に減少し、遂に0となる。これは翼の場合に失速といわれる状態である。このときの静的モーメント曲線を図-7に描く。

ところが構造物がねじり振動をしている場合に、流れがあたると、 $M-\alpha$ 関係は、このような曲線を描かない。たとえば、小さい迎角の姿勢で微小ねじり振動を行なっていれば、1サイクル間に、楕円形の閉曲線 I に沿って反時計方向にループを描く。ところがこの場合は、1サイクル中に M が α に対してなす仕事 W は負となり、安定性のねじり振動である。ところが α_{stall} 付近の平均迎角を中心としてねじり振動を生ずると、流れに剥離が生じ、しかもその剥離の生成と層流への回復が振動変位 α の位相より若干遅れて進行する。換言すれば、迎角が増加する方向に振動しているときは、剥離の時期が準静的に迎角を変化させた場合より遅れる。また逆に迎角を減少する方向に振動するときは、再び全表面が層流状態に回復する時期が、また準静的変化の時期よりも遅れる。この原因は構造物表面の境界層内の流れが粘性のため、外側の層流の変化に即応しないためだと考えられる。この剥離の生成、発達 Reduced frequency k 、平均迎角 α_i 、流体力モーメント M 、断面形状、レイノルズ数 R に左右される。この現象を流体動学的履歴現象という。そしてこの場合、振動は不安定性となる。このような発散ねじり振動をストールフラッターという。この現象の原因は流れの剥離であり、流体動学的性状が著しく非線型であって、重ね合せの原理が成立しないことが曲げねじりフラッターと本質的に相違する点である。そのため自由度無限大の実在構造物についてのストールフラッターの理論的研究は非常に難しいとされている。

Studerが初めて実験により、この現象を示し、その後の多くの実験的研究の結果、両フラッターの相違点について、つぎのことが指適された。

- (1) ストールフラッターの限界流速は曲げねじりフラッターのそれよりかなり低い。
- (2) ストールフラッター時の振動数は、非連成ねじり固有振動数 $\omega\theta$ に近い。それに対し、曲げねじりフラッター時の振動数は曲げ固有振動数 $\omega\delta$ と $\omega\theta$ の間である。
- (3) 振動系が曲げ振動とねじり振動が同時に起こりうるように支持しておいても、ストールフラッターは生じうる。その場合にもたわみ変位はねじり変位に比し無視できる程度に小さい。すなわち、ねじり振動が極めて卓越している。それに対して曲げねじりフラッターでは曲げ変位とねじり変位が同程度の大きさを有している。
- (4) 流速が変化し、曲げねじりフラッターからストールフラッターに移行するときに、非常に大きい位相のずれを生ずる。
- (5) 曲げねじりフラッターでは $\omega\delta/\omega\theta \cong 1$ において限界流速は最小値をとるが、ストールフラッターでは $\omega\delta/\omega\theta = 1$ の場合の方が、 $\omega\delta/\omega\theta \neq 1$ の場合より限界流速が高い。
- (6) 振動変位が時間と共に調和的变化をしても、作用する動的流体力は周期的ではあるが非調和的变化をするのがストールフラッターの特性である。

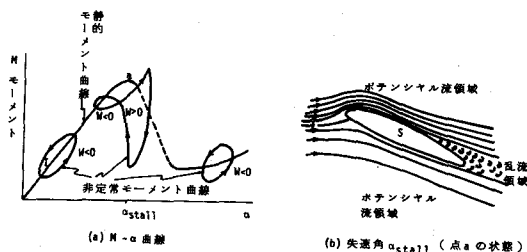


図-7 ストールフラッター

(7) またストールフラッターには、つぎに述べるような振幅履歴現象が現れるのが著しい特長である。すなわち曲げねじりフラッターの場合には、限界流速で調和振動していた構造物も、流速をそれ以下に低下すると振動は減衰してしまう。ところがストールフラッターの場合には、

層流中で、流速が最初の不安定点 (Quench velocity) (図 - 8 の点A) を越えて増加しても、フラッターは起らず、つぎの不安定点B (Self-starting point) に達して初めてフラッターを生ずる。そして振幅は急に増大して点Cに至る。しかしここで再び流速が低下すると振幅は曲線CDに沿って次第に小さくなりQuench point Dで急速に振幅は0となる。このように振幅が一種の履歴曲線を描くことになる。Wangらは実験によりこの現象を捉え、Sistoは非線型振動論によってこれを指摘した。

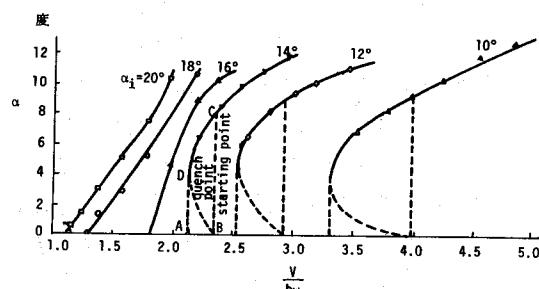


図 - 8 ストールフラッターの特性

図 - 8 において、平均迎角 $\alpha_j = 16^\circ \sim 20^\circ$ の場合のように、振幅が $V/b\omega_s = 1/k$ と共に 0 から次第に増加してゆく現象を Soft flutter という。それに対し $\alpha_j = 10^\circ \sim 14^\circ$ の場合では Self-starting point で、ある有限の振幅を持つ振動が突然に生じ、それより徐々に流速を低下させると振幅は履歴曲線を描いて減少する。これを Hard flutter という。

(3) 渦による振動 (風琴振動, Aeolian vibration)

層流中の円壩構造物の上下の剝離点から交互に渦が発生することが Benard-von Kármán により明らかにされ、Kármán 渦という。この渦は構造物が静止している場合にも発生する。そして交互に規則正しく配列されて全体の流れより若干遅い速さで後流中に流されてゆく。

渦の発生状況および後流の状態はレイノルズ数によって異なる。

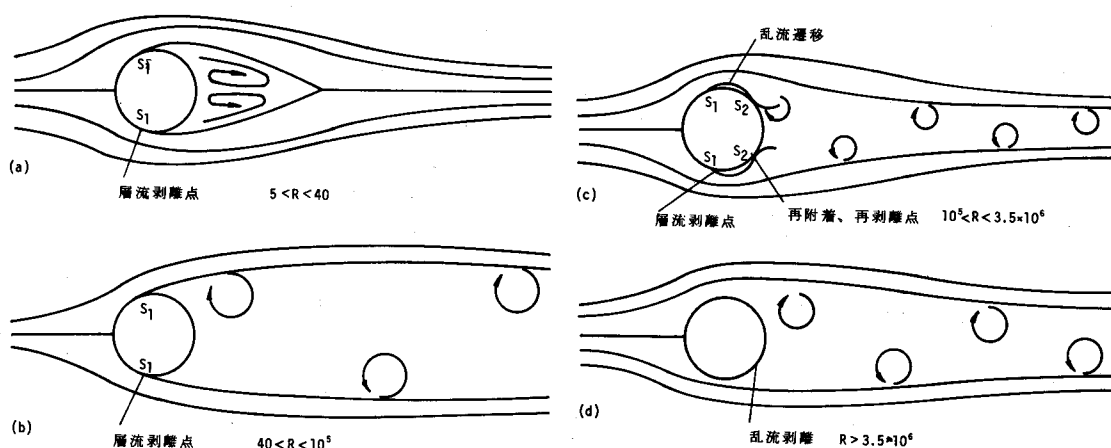


図 - 9 円壩のまわりの流れ

レイノルズ数が $5 < R < 40$ の範囲においては、図 - 9(a) に示すように、2つの渦が対称に生ずるが、円壩から背後から離れることなく静止したままである。剝離点 S_1 も円壩の中心より前方にできる。

ところがレイノルズ数が増加し、 $40 < R < 10^5$ の範囲においては、図 - 9(b) に示すように、周期的

にKármán渦が放射されて、後流中に規則正しく千鳥に配列される。

さらにレイノルズ数が増加し、 $10^5 < R < 3 \times 10^6$ の範囲においては、不安定状態となり剥離点は元の点 S_1 と後方の新しい点 S_2 の間を往復する。そして渦列の間隔 d' と渦のピッチ b は、剥離点が S_1 の場合には図(b)の場合と同様に、 $d'/b = 0.2806$ であるが、剥離点が S_2 にきた図(c)の場合には、間隔 d' 、ピッチ b 共に、図(b)の場合よりも狭くなる。

流速と直径が大きく、レイノルズ数が $R > 3.5 \times 10^6$ となると、剥離点は S_2 に定着し、再び安定な状態となる。

一般に構造物の前方の流体圧と背後の負圧によって抗力が生ずるが、レイノルズ数によって図-9のように剥離点の位置や後流の状態が変わるので、抵抗係数は図-10のように変化する。抗力も限界レイノルズ数 $R_{cr} = 10^5$ を越えた領域では著しく不規則となる。このように限界レイノルズ数以下の領域をSub-critical rangeといい、 $10^5 < R < 3 \times 10^6$ の領域をSuper-critical rangeという。さらに $R > 3 \times 10^6$ の領域では再び安定し、Ultra-critical rangeという。

また図-10にはストローハル数 $S = nd/V$ の R による変化を示す。Sub-critical rangeにおいては

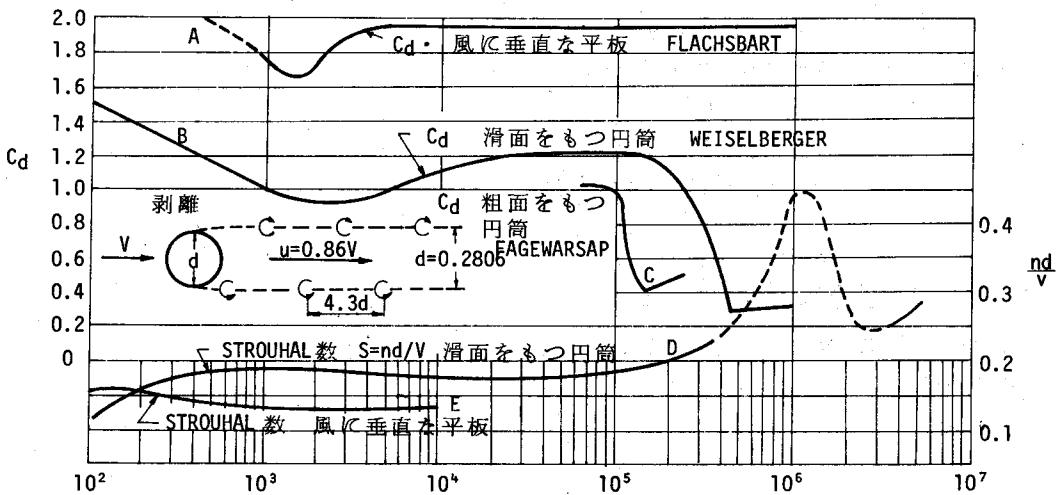


図-10 円筒の抵抗係数とストローハル数

は $S \cong 0.2$ 、Super-critical rangeにおいては急激に増大し、Ultra-critical rangeにおいて再び一定値 $S = 0.27$ となることがRoshkoの実験によって明らかにされた。

平板や各種角型断面をもつ構造物について、 $R > 10^3$ の場合、 S は表-1に示すように、 R に無関係な一定値をとる。

また渦によって生ずる周期的揚力 F は次式で与えられる。

$$F = F_0 \sin 2\pi ft \quad \text{----- (27)}$$

ここに F_0 は、Kutta-Jukowskiの定理およびRoshkoの実験結果を適用すれば次式のように与えられる。

$$F_0 = \frac{1}{2} \rho V^2 \times (5.76 L M d) \quad \text{----- (28)}$$

ここに L は構造物の長さ、 M はBluffness ratio d'/d で、Roshkoの理論によれば、円筒に対し1.13、90°の迎角をもつ角筒に対して1.38、流れに垂直に置かれた平板に対して1.81である。

また交番揚力の周期 T は、次式で求まる。

$$T = 4.36 \frac{M d}{V} \quad (29)$$

しかし、渦の発射時点と最大揚力の時点とは若干ずれていて、その位相差は構体の断面形状に応じて一定である。

層流の中に置かれた構体が、流れに垂直方向に振動している場合には、渦を発射する時点における自由流線が発射時点における位置 $\bar{x}$ の2倍だけ幅が広い静止中の構体の後流の自由流線に相似していることから、振動する構体の場合の渦列の間隔は、次式のように表わせる。

$$d' = M(d + 2\bar{x}) \quad (30)$$

$$\text{ところが振動中立点と渦発射時点の位相差を } \phi \text{ とし、振幅を } x_0 \sin \phi \quad (31)$$

よって振動中の構体に作用する場合 F_0 と振動数 f は次式で表せる。

$$F_0 = \frac{1}{2} \rho V^2 \times 5.76 LM (d + 2x_0 \sin \phi) \quad (32)$$

$$f = 0.230 \frac{V}{M(d + 2x_0 \sin \phi)} \quad (33)$$

いっぽう、バネで支持され、揚力 $F = F_0 \sin 2\pi ft$ を受ける構体の振幅 x_0 は、

$$x_0 = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\{1 - (\frac{f}{f_n})^2\}^2 + \{2\zeta(\frac{f}{f_n})^2\}}} \quad (34)$$

$$\text{ここに、} f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{C}{4\pi m f_n} \quad (35)$$

k : バネ定数, m : 構体の質量, C : 減衰係数, f_n : 振動系の固有振動数

動的揚力 F と変位 x の位相差 ψ は、

$$\psi = \tan^{-1} \frac{2\zeta f}{1 - (\frac{f}{f_n})^2} \quad (36)$$

ところが $\psi + \phi$ は零揚力の時点と渦発射時点の位相差でほぼ一定値 270° をとる。すなわち

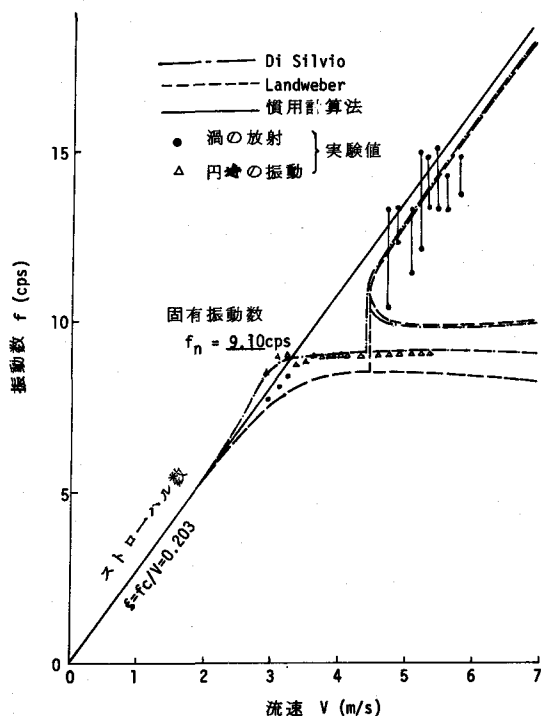
$$\psi + \phi \cong 270^\circ \quad (37)$$

揚力の周期が系の固有振動周期より大きい場合は $\psi = 0^\circ$ 、逆に小さい場合は $\psi = 180^\circ$ となる。したがって ϕ は 270° と 90° の間で変化する。その結果、渦列の間隔が狭くなったり広がったりし、振動数が大きくなったり小さくなったりする。こと事実は実験により確認されている。

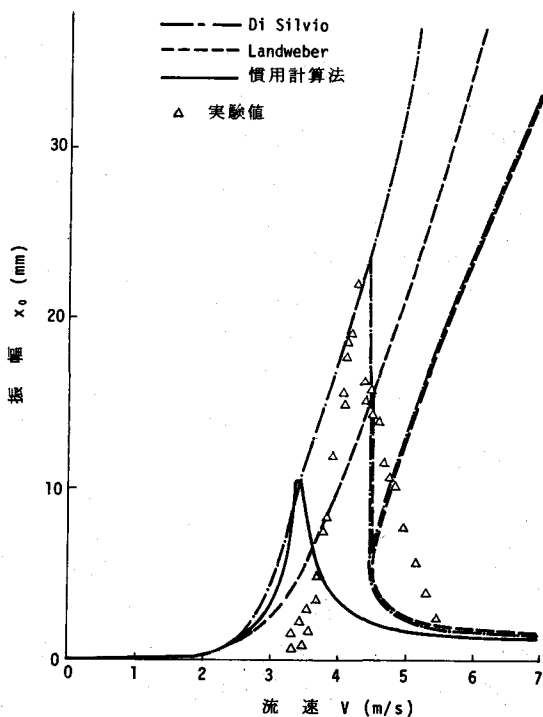
したがって振動系の力学特性 m , k , c が既知であれば、式(33), (34), (36)および(37)を用いて、弾性的に支持された構体の渦による振動について計算できる。

図-11(a), (b), (c) (次頁参照)に振動数 f , 振幅 x_0 および位相差 ψ の計算値と実験値を比較する。図中、実験値は直径 $d = 76\text{mm}$, 長さ $L = 67\text{cm}$, 質量 $m = 0.073\text{kg} \cdot \text{sec}^2/\text{m}$, 固有振動数 $f_n = 9.10\text{cps}$, $\zeta = 0.046$ で空気中で実験された。Disilvio の計算値は上述の方法によるもので実験値とかなりよい一致を示している。

このように渦による自励振動の振動数と動的揚力とは、渦列の問題 d' に左右される。ところが振動する構体の場合の d' 値は振幅のみならず、振動中立点と渦発射時点の位相差 ϕ により決まることがわかった。位相差 ϕ によっては d' がかなり小さくなる。したがって Landweber の仮定した



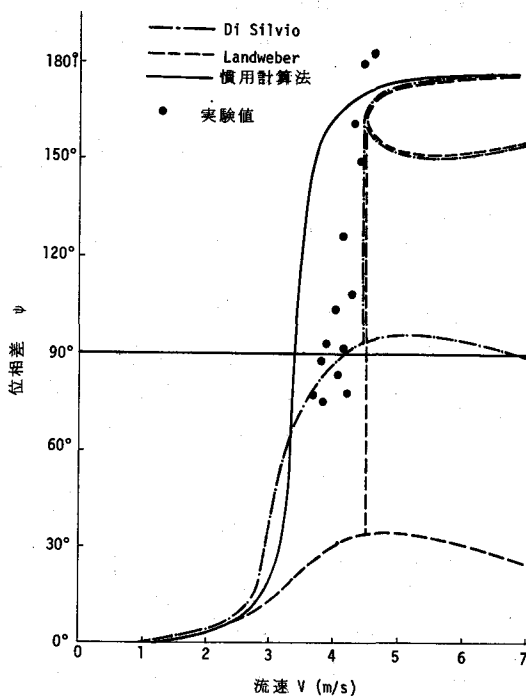
(a) f - V 曲線



(b) x_0 - V 曲線

ように $d' = d + 2x_0$ は妥当でない。実際に流速が共振流速より低いときに $d' \cong d$ となり $S = fd/V$ が成立つ。流速が共振流速になると、構体の固有周期と渦の発射周期が一致し、流速がそれより若干上廻っても、両者は一致を保持する。振幅は共振流速を若干越えたところで最大となる。さらに流速が増加すると、位相差 ϕ は 90° となり、 $d' = d + 2x_0$ となる。すると渦の発射振動数が急増し、流速の増加と共にほぼ比例的に増大する。しかし振動の周期は一定値（固有周期）を保持し、図-11(a)のとおりである。また振幅は流速の増加と共に図-11(b)のように急減する。

Toebes-Ramamathy は Water Tunnel の中で細長い円筒の風琴振動の実験を行ない、動的揚力および位相差ならびに流れから振動体に移行するエネルギーを種々の f_s/f_f （構造物の振動数と Strouhal frequency $f_f = VS/d$ の比）に対して調べた。ここでは付加質量の影響をも考慮している。



(c) ϕ - V 曲線

図-11 円筒の渦による振動

風琴振動においては、移行するエネルギーは振動系の自己調整によって一定値に落ち着き、散逸エネルギーと均衡が保持されるため、誘発される振動は定常振幅をもつ安定な限定振動である。図-12はScrutonが煙突の模型の風琴振動を測定し、応力振幅と流速の関係を示したものである。基本振動のみならず2次3次の

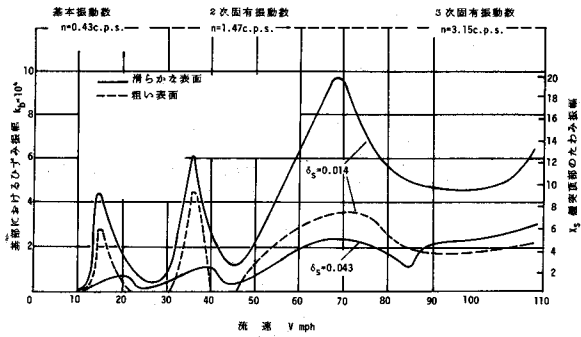


図-12 煙突の風琴振動

の高次振動でも共振している。これは一種の凝調和振動 (Subharmonic vibration) である。対数減衰率がある程度の大きさになると、この種の振動がなくなる。

図-13に渦による振動例を示す。図-13(a)は開水路に置かれた橋脚である。この場合、橋脚自体が剛なので流体力弾性応答の問題ではないが、橋脚の後方縁において渦が交番に放射される。それで水圧が下がり、自由表面が周期的に下がり、波を生ずる。橋脚と水路壁間の縦方向の停止波の周波数 ω_{ni} と渦の放射周波数 ω_f とが共振すると、波は発生する。その時の流速が限界流速 V_{cr} である。流速が

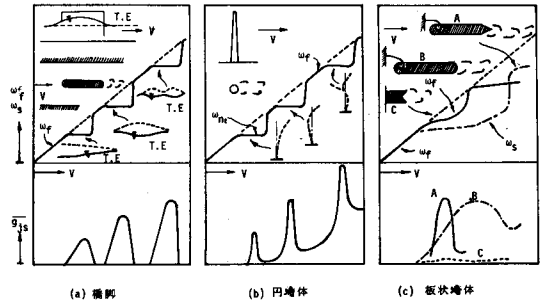


図-13 渦による振動の実例

V_{cr} より若干大きくなっても、しばらく渦の発生周波数 ω_f は ω_{ni} に一致したままである。しかしさらに流速が増加すると本来の ω_f に戻る。さらに V が増加すると凝調和振動を生ずる。図-13(a)に ω_f および振幅 $\bar{q}_{js}$ および共振時の波形が流速と共にどのように変化するかを示す。高流速共振時には橋脚に大きな交番水圧が作用する。このために1957年にTexarkana Damの減勢池内に設けた24ft × 35ftのSplitter Wallが疲労破壊した。

図-13(b)(c)はそれぞれ代表的な風琴振動の実例である。

(4) 跳躍振動 (Gallopig)

塊状構造物の横断面が正方形、長方形、台形、型鋼のような特定の形状をしている場合は、なんらかの原因で流れに垂直な振動が励起されたとき、その振動を助長するような動的揚力が生じ、不安定性の自励振動を誘発することがある。Den Hartogの負勾配説はつぎのとおりである。

振動数が比較的小さいFlexibleな構造物の場合には、静的試験で測定された揚力曲線と抗力曲線で与えられる揚力 L 、抗力 D を用いて流体力の合力の振動面内の成分を F とすると、図-12から明らかにするように、

$$F = L \cos \alpha + D \sin \alpha \quad (38)$$

ここに α は振動による相対的迎角。

この流体力 F の変化率が負になるとき跳躍振動を生ずるということである。すなわち、

$$\frac{dF}{d\alpha} = (-L + \frac{dD}{d\alpha}) \sin \alpha + (\frac{dL}{d\alpha} + D) \cos \alpha \cong \frac{dL}{d\alpha} + D < 0 \quad (39)$$

ところがParkinsonは既に述べたように、揚力曲線および抗力曲線を迎角 α の高次代数式でつぎのように表わした。

$$C_L = -a_1\alpha + a_2\alpha^3, \quad C_D = b_0 - b_2\alpha^2 + b_4\alpha^4 \quad \text{----- (40)}$$

ここに $\alpha = \tan^{-1}(\dot{y}/V)$

$$F = (C_L + C_D \tan \alpha) \sec \alpha \cdot \rho V^2 d l / 2 \quad \text{----- (41)}$$

式(41)を基礎方程式(12)に用いて、非線型解(13)をえた。

図-14に理論値と実験値の比較を示す。

跳躍振動の特性を挙げればつぎのとおりである。

- (I) 円を除く非流線型断面をもつ構体は、断面形状、剛性、不規則流体力による発振などの一連の条件が揃った場合跳躍振動を起こす。
- (II) この場合の動的流体力が渦による動的揚力よりもかなり小さいので、ケーブルのようにかなりFlexibleな場合に起こるが、剛な構造物には起こらない。
- (III) 跳躍振動はいかなる流速においても起こる。流速が低いときでも、初期振幅が大きい場合には跳躍振動は生じる。また流速が大きくなると動的流体力が大きくなり、振幅も大きい、実際には低いし中程度の流速で跳躍振動を生ずる例が多い。

図-15はScrutonが正方形断面について行った実験によるStability diagramである。比較的低流速のある範囲で風琴振動を生じ、流速が増加すると一度振動を停止し、さらに振動がある値以上になると跳躍振動を生じることを示している。

6. 強制共振現象

(1) パフェッティング

類似した2つの構造物が流れの方向に並んでいて、前方の構造物で乱された後流の中に後方の構造物がすっぽり入り込んでしまうことがある。この場合、乱れた後流のスペクトルを調べると、特定の周波数成分の付近にエネルギーが集中している。したがってその後流の中に入った構造物の固有振動周期が乱れの卓越振動周期に一致すると共振現象を起こし著しい振動を誘発する。

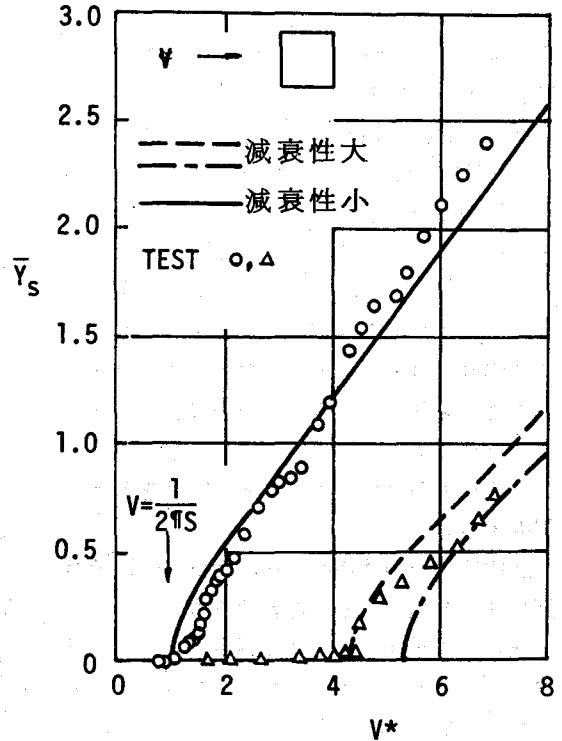


図-14 跳躍振動

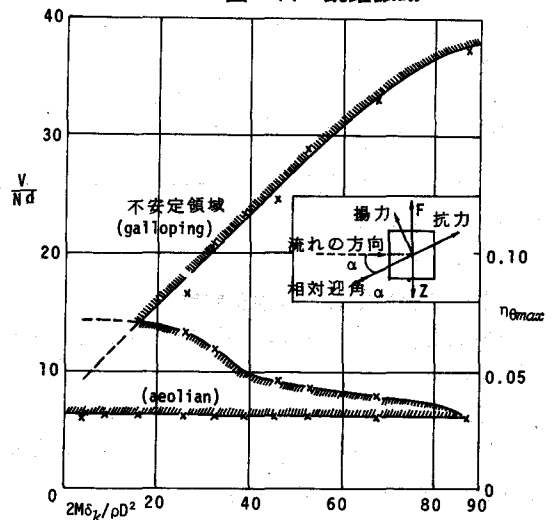


図-15 正方形断面を有する構体の自励振動 (Stability Diagram)

この種の振動は、(I)振動が大きくなっても短時間しか継続しない。(II)流速の増加と共に共振振幅も増大する。という特性を持っている。

図-16は鉄道橋の近くに計画された吊橋の模型についてWalsheがえた実験結果である。吊橋だけの場合には、定常風の中で安定であった。ところが鉄道橋を前方に据えると明らかにパフエッティング現象が起こった。この際、両者間の距離をある範囲内で大きくするほど、また鉄道トラス橋の充実率を大きくするほど、共振振幅が大きくなっている。

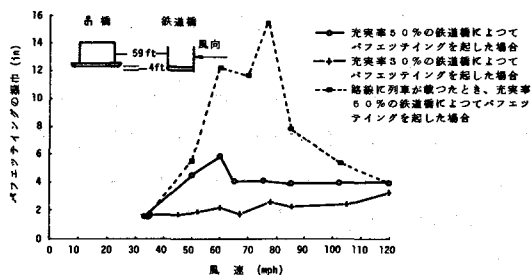


図-16 パフエッティング

(2) 不規則流体力による振動

構造物に作用する流体力（たとえば、波力、潮力、風力）は時間的にも空間的にも不規則に変化している。そして種々な周波数成分を含んでいる。そしてスペクトル分析すれば、流体力に応じて、パワースペクトルの分布に特長が認められる。

このような不規則流体力に対する構造物の動的応答については不規則振動論の立場から定常確率過程として取扱うのが普通である。そのためには、

(I)流体力のパワースペクトル密度を明確に把握する。

(II)構造物の振動特性（弾性抵抗、慣性抵抗、減衰性）を知ることが重要である。

樫木、中村はこのような観点から不規則波力について統計的研究を行った。図-17に波高 $\eta(t)$ と波力 $F(t)$ のパワースペクトル密度の一例を示す。両者の卓越周期がよく一致している。またMorisonの公式によると、墻体単位長あたり

$$f(t) = \frac{1}{2} C_D \rho D V(t) |V(t)| + C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} \frac{dV(x)}{dt}$$

上式の抗力係数 C_D および慣性係数 C_M なども調べている。

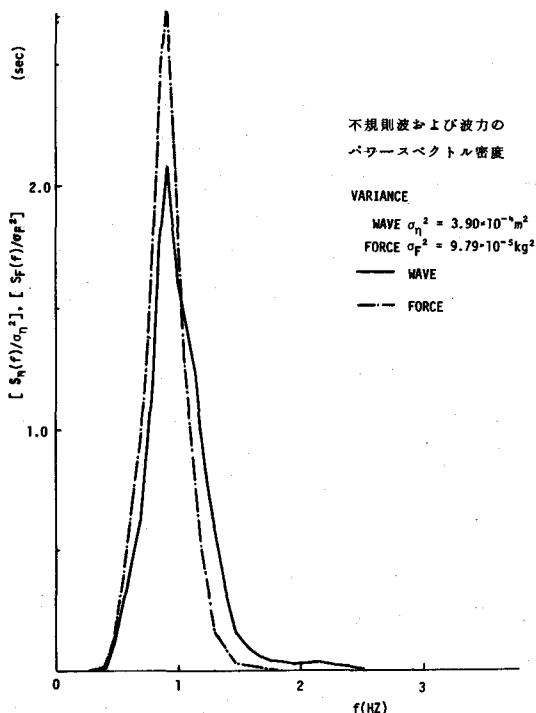


図-17 波のパワースペクトル密度(樫木・中村)

7. 水理構造物における振動問題

水理構造物あるいは海洋構造物には流体力による振動問題が多いが、ここでは代表的なものについて述べる。

(1) 水門の振動

圧力水路内に設けられた水門が一部開かれた状態のとき水門の下縁から図-18に示すように渦が周期的に発生する。その放射周波数 f_t は、次式で与えられる。

$$f_t = \frac{SfV}{L} \quad (42)$$

ここに L は水門の突出長の2倍である。

そして f_1 が水門の固有振動数に一致すると水門は上下に激しく振動し、強い渦列が後方に形成される。しかも水門の振動が渦の形成を制御し、かなり広い流速範囲で共振する。水門にこのような自励振動を生ずると、水平方向にも振動成分をもち、Fluid mass oscillationと圧力波が同時に圧力トンネル内に発生する。このとき圧力波は水路内を速度 a で進行し、取水口で反射し、水門と貯水池の間(距離 L)を往復する。そして正圧と負圧が周期 $T (= 4 L / a)$ で作用する。これが水門の固有振動周期と一致する。

1934年、フランスのLac Blanc-Lac Noirの水圧鉄管が破壊したのは、ポンプガイドベンの自励振動が原因である。このように減衰係数の小さい大型水理構造物のある部分が水力弾性振動を起こすと、災害を招くおそれがある。

図-19 (a),(b),(c)に水門の下縁を平らにした通常のもの、lipを付けたもの、傾斜をつけたものにつき実験した結果によると、45°の傾斜をつけたもので振動が著しく軽減された。

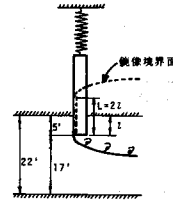


図-18 水門下縁からの渦の放出

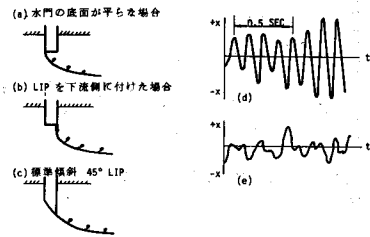


図-19 各種型式の水門下縁と振動性状

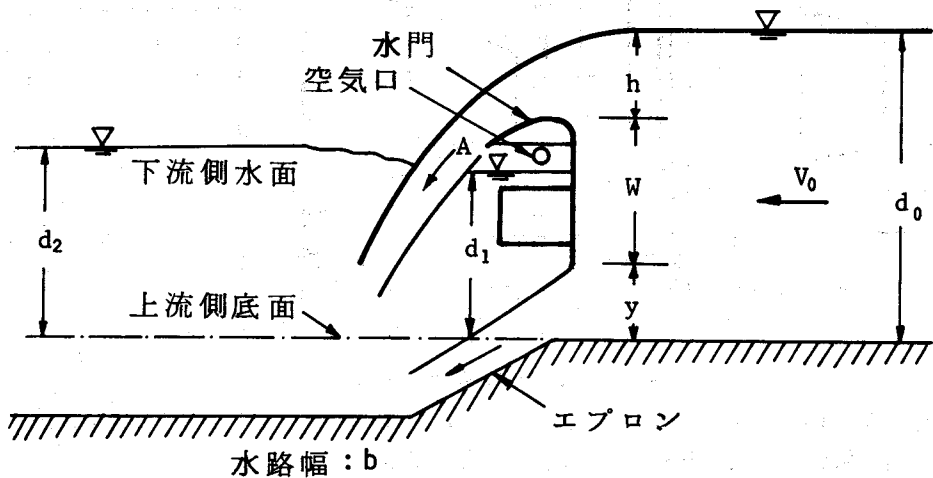


図-20 Split-Leaf Sillway Gate

フラップを付けたテンターゲート、ローラーゲート、および各種のSplit-leaf 型洪水吐き水門で図-20に示すように越流ともぐり流出を同時に行わせるように操作した場合には激しい水力弾性応答を呈する。

一般にこの種の自励振動はつぎの4つの要素、すなわち、

(I)越流部ジェット (II)もぐり流ジェット (III)両ジェットの間領域 (IV)水門に働く慣性力、重力、弾性力、減衰力の連成によるもので、水門には曲げとねじりが生ずる。

いま水門に作用する鉛直上向き変動水力の倍振幅 ΔF は次式で与えられる。

$$\Delta F = 2 C_e' \gamma A (d_0 - d_2) \quad \text{-----} \quad (43)$$

ここに C_e' は自励係数, $\gamma(d_0 - d_2)$ は動圧, A は Lower leaf の水平投影面積

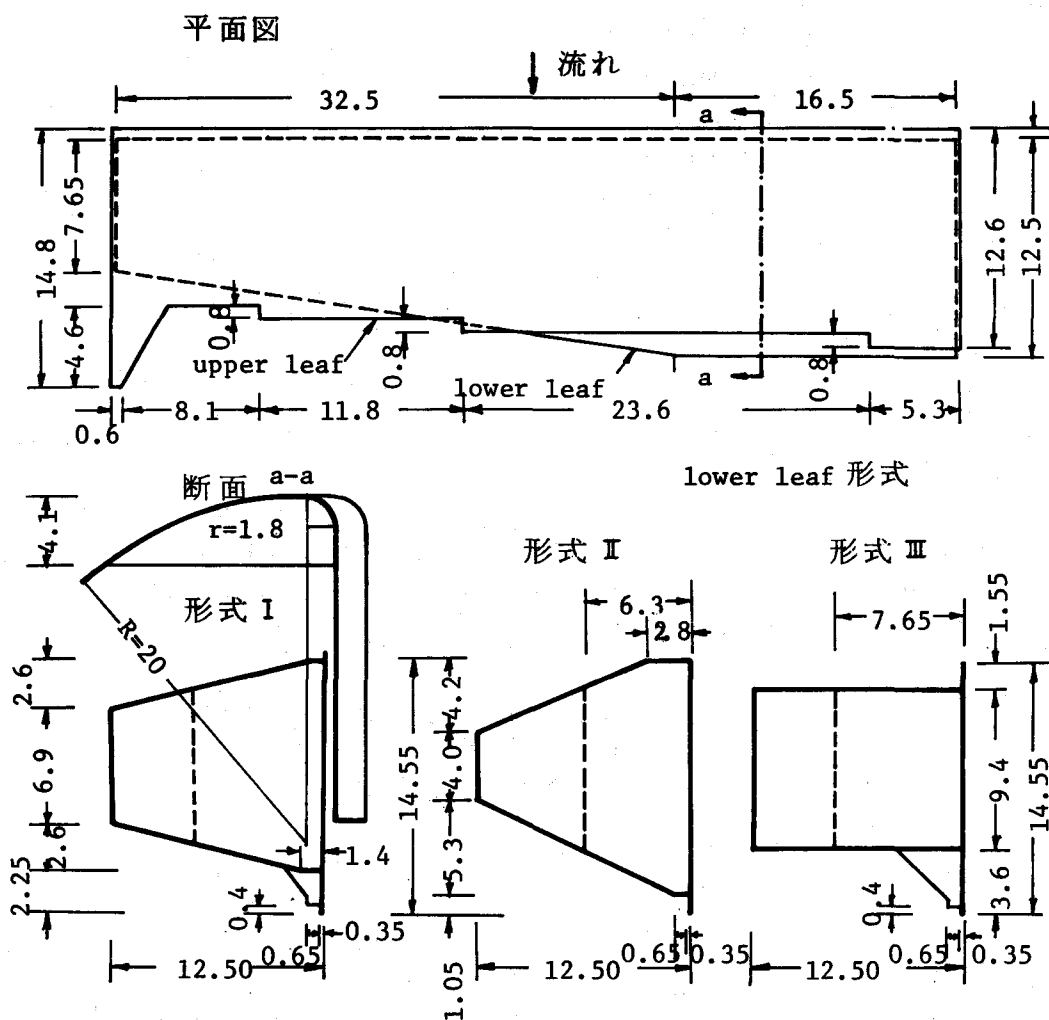


図-21 水門の模型

Naudascherは図-21に示す3つの型式のLower leafについて模型実験を行ない、図-22に示すように自励係数 C_e' の変化を調べた結果、型式Ⅱが最も好ましいことを示した。実測によれば越流と、もぐり流の会合部付近で ΔF が最も大きい。また2つの流れの会合点の水門と離れているほど、変動水力が小さいので、下流底面の勾配および水門底面の勾配をできるだけきつくし図-23(b)のようにするのが振動防止に役立つ。図-23(c)のように下流底面に逆勾配がついているような場合には下側ジェットの上面に渦が発生して、自励現象を予防する効果が現れるので例外である。

ナップの下でAerationしない組合には常に振動を起こす傾向がある。これもナップの下側の圧力変動が激しいためだと考えられる。図-22から明らかなように、水門上流と下流との水位差の比 $d_2/d_0 = 0.57$ のときにNo-aerationにおいて自励振動のピークが現われることがわかる。これはちょうどナップの下の水面が水門のクレストの下流側端図-20の点Aに達して、空気の溜る空間がなく

なった場合に相当する。

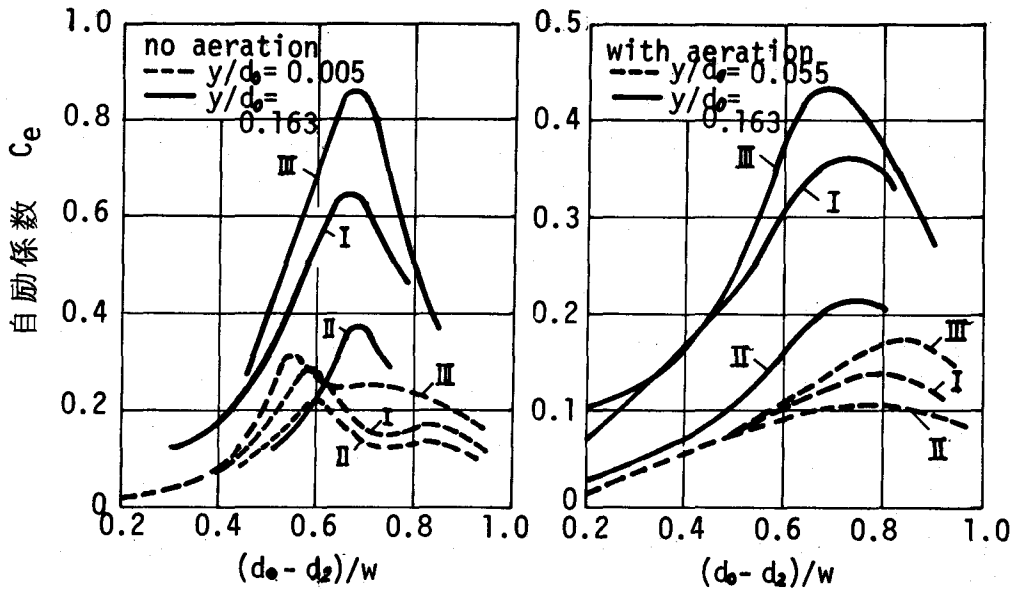


図-22 自励係数 C_e の変化

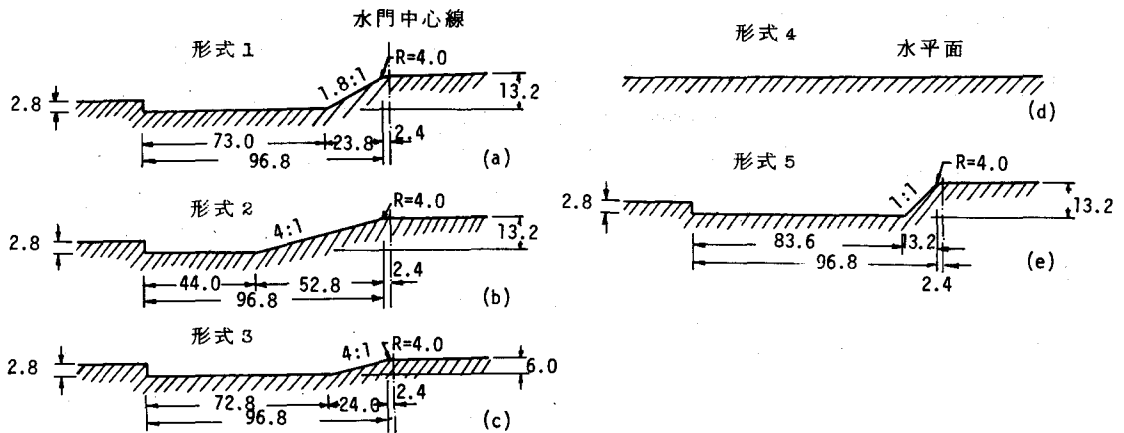


図-23 底面の形式

弾性の影響

上側のLeafは固定したままで、下側のLeafを鉛直方向に弾性支持した場合にはつぎのような顕著な現象が起こる。すなわち図-21に示すように流れによる水門の振動数 f は静止中の水門の固有振動数には全然影響されない。 d_0 を一定の場合、両ジェット間に介在する水の質量と下側ジェットの表面流速の尺度を表わす $d_1 - y$ に対し振動数 f をプロットすると相関性があることが図-21からわかる。斜線部は測定値のばらつきの範囲であって、ローラーの脈動および内部水面の変動に基因する。これらの原因は、下流側の水深 d_2 が浅くなると増長する。内部水面が水門の底面に近くなる

と、波によって誘発される非周期的な衝撃力のみが作用する。いずれにしても上下方向に下側Leafを弾性支持すれば、交互に発生する渦によって水門の上下振動の振幅を増大する一種の自励振動が起これうことは確かである。

(2) 潮流による海洋構造物の振動

近年、船舶の大型化に伴い、比較的深いところにシーバース、ドルフィン、棧橋、作業台などが建設されるようになった。そのため、鋼管構造の場合、次第にFlexibleになり、潮流、波力を受け、危険な水力弾性応答を呈する機会が多くなった。

一般に鋼管柱脚に潮流が当たると、渦による自励振動を生ずる。従来の実例によれば、鋼管杭を打込み、横ばりで相互に連結する直前の工事中的状態で、この種の振動が起これ易いことが報告されている。その際、交番揚力による流れに垂直方向の振動のみならず、変動抗力による流れ方向の振動が合成している。垂直方向の振動は $V/Nd=5.0$ 、流れ方向の振動は $V/Nd=2.5$ の流速で最大振幅となることがSainsbury-Kingによって報告されている。この場合の振動を制御する主要因子は V/Nd の他に $k_s = 2 M' \delta_s / \rho d^2$ である。ここに N は杭の固有振動数、

$$M' = \frac{\int_0^L M y^2 dx}{\int_0^H y^2 dx} \text{ (単位長あたり平均質量)} \tag{44}$$

$y(x)$ は振動モード、 L は杭の有効長、 H は水深、 M は杭の単位長あたり有効質量で水中では水の付加質量を含む。

k_s が大きければ、共振流速でさえ自励振動が抑制される。逆に k_s が小さい場合には、垂直方向の振動が誘発し易い。ところが風に比して潮流では密度 ρ がかなり大きいので k_s は非常に小さくなり、この種の振動に対し不利である。

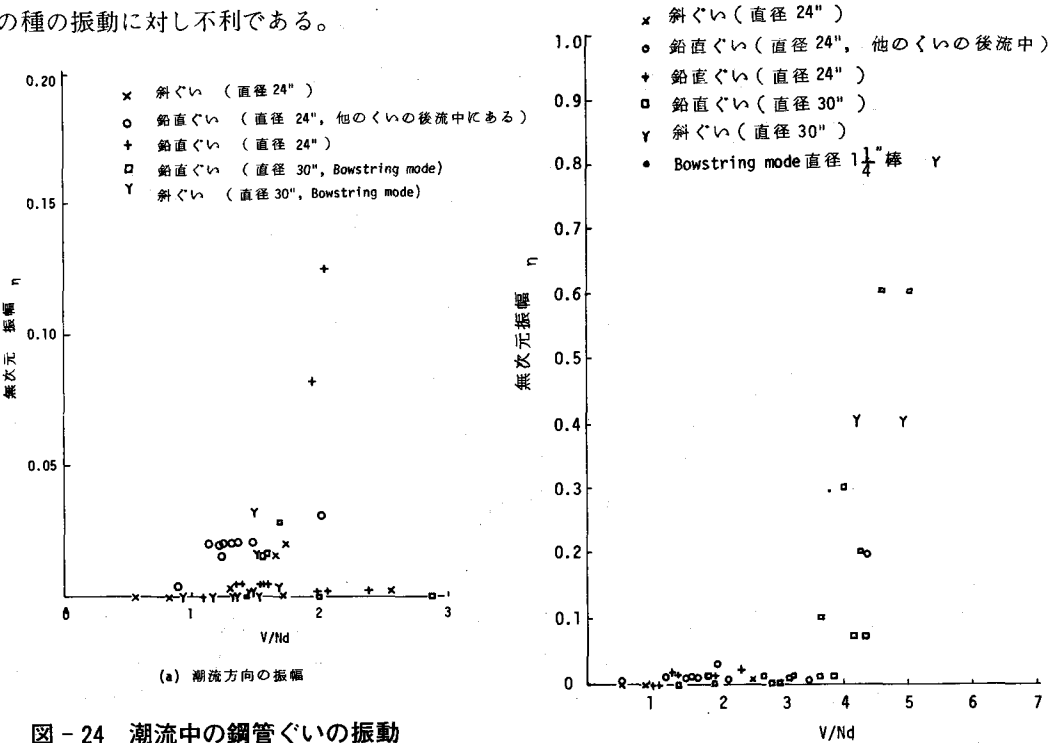


図 - 24 潮流中の鋼管ぐいの振動

図 - 24(a)(d)に英国のImmingham oil terminal 建設中の鋼管杭についての実測資料

(b) 潮流に垂直方向の振幅

図 - 24 潮流中の鋼管ぐいの振動

を示す。発振流速は流れ方向で $V/Nd=1.3$ 、垂直方向で $V/Nd=3.5$ である。

地盤が通常の粘土の場合、杭の固定点は地下3mと考慮して有効長 L を求める。

斜抗、鉛直杭、横ばりで組み立てられた後のベントの振動モードを図-25(a)(b)にそれぞれ、無載荷状態および載荷後の振動モードと固有振動数の計算値を示す。載荷時の振動モード D （僅かに部材の曲げを含む側方変形）が最も振動数が低い。

設計の立場からは、図-24の結果を参考にして若干安全側をとって、 $V/Nd<1.2$ を満足させるのがよい。

図-26(a)に示すシーバースや棧橋の場合には、図-26(b)(c)に示すように、横構、ブレースングを設けることによって構造物全体の固有振動数を上げ、発振流速を大きくすることが大切である。

図-27(a)は17本の鋼管杭とコンクリート頂板(700ton)からなる代表的なドルフィンを示す。潮流により振動数 $f=1.5\text{cycle/sec}$ 、振幅約6mmで図-27(b)の点Aを通る鉛直軸のまわりに回転するような振動を生じた。そこで主要通路のベントとドルフィンの頂板を連結する補剛ばりを設けて防振に成功している。

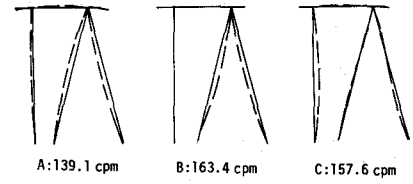
最大設計流速

Reduced frequency V/Nd を基準にする慣用計算法は、ある程度の安全側の値を与える。

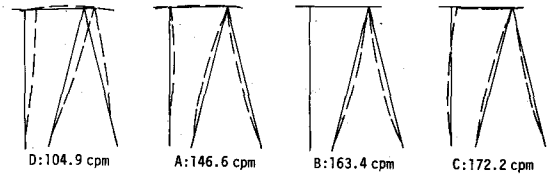
表-1に代表的構造形式に対する固有振動数 N と最大設計流速 V_{max} を掲げる。

(3) 波浪による構造物の振動

波浪を受ける海洋構造物の動的応答は、設計上考慮すべき重要な問題である。比較的深い海中に建設される構造物はflexibleであるために、波力を受けたとき、かなりの変形を生ずるので、波力は構造物の弾性変形の影響を受けて、剛体に作用する波力と異った特性を示す。そして構造物の変形に応じて相互作用を生ずる。海洋構造物には鋼管部材が常用される。鋼管に波が作用すると、Morison公式に含まれるような、動的抗力と慣性力が



(a) 無載荷時



(b) 載荷時

図-25 ベントの固有振動モードと固有振動数

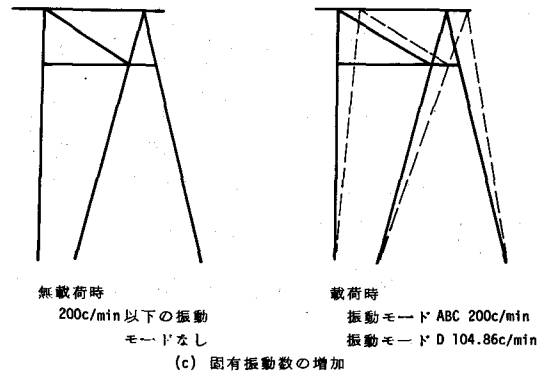
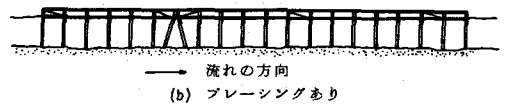
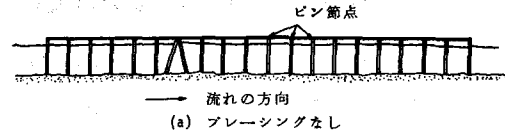
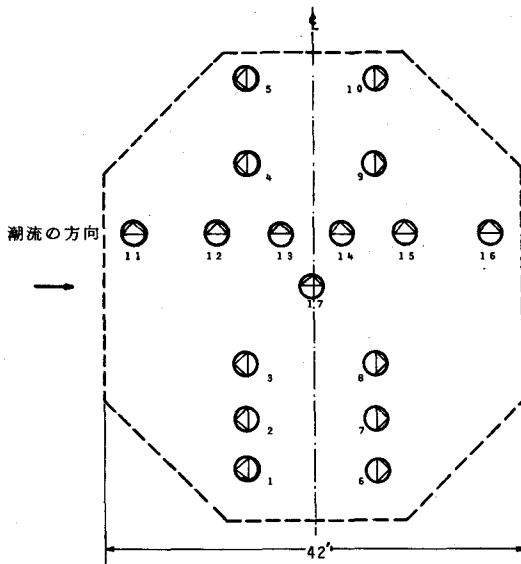
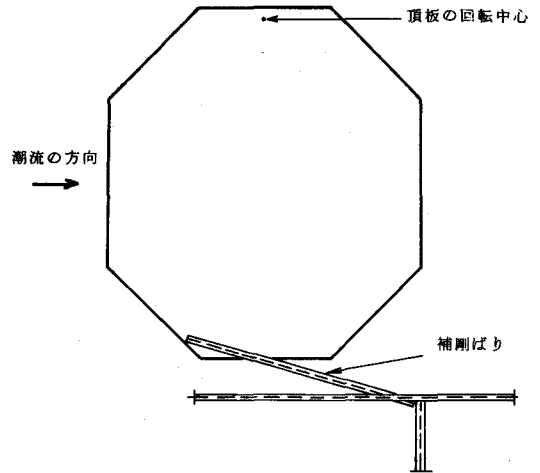


図-26 ブレーシングの効果



(a) 代表的なドルフィンの平面図

すべての柱脚は鉛直ぐいと斜ぐい (1:3)
の組合せ



(b) 頂板の回転中心と補剛ばり

図-27 ドルフィンの曲げねじり振動

図-27 ドルフィンの振動防止法

生ずる。その際、この2種の流体力は構造物の振動により変化する。それでこのような相互作用を考慮した動力学的解析が必要である。Shubinski-Wilson-Selna は、この事実に着目して深海構造物の水力弾性応答について論じた。従来、この種の解析においては、構造物の弾性変形が波力に影響しないものとして取扱っていたが、その誤りを指摘すると共に、相互作用が非線型効果をもつので、精度のよい近似計算法を提示している。

いま相互作用を考慮したときの構造物の非線型振動基礎方程式をLumped mass法で表わすと節点変位ベクトル $\mathbf{u}$ の方程式は、

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{C}\frac{\rho D}{d^2} (V_w - \dot{\mathbf{u}}) |V_w - \dot{\mathbf{u}}| + \mathbf{C}_m \frac{\rho \pi D^2}{4} (a_w - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{F} \quad (45)$$

ここに $\mathbf{M}$:質量行列、 $\mathbf{C}$:減衰行列、 $\mathbf{K}$:剛性行列、 C_d :抗力係数、 $\mathbf{C}_m$:慣性係数、 V_w :波の水粒子の速度、 a_w :波の水粒子の加速度、 $\mathbf{F}$:波力

これを解くため、微小時間間隔 Δt (基本固有振動周期の1/40,000位)に区切って段階的追跡計算を行なうことにすれば次式が成立つ、

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{t+1} = \mathbf{C}\frac{\rho D}{d^2} (V_w - \dot{\mathbf{u}}_t) |V_w - \dot{\mathbf{u}}_t| + \mathbf{C}_m \frac{\rho \pi D^2}{4} (a_w - \ddot{\mathbf{u}}_t) \quad (46)$$

すなわち波力については時刻 t ($=t+1-\Delta t$)における値を用いることによって微小時間ごとに線型化する。

さらに計算容量と精度の向上のため、つぎのような一般化変位を導入する。すなわち n 組の静的荷重群 $\mathbf{P}$ を作用したときの n 組の静的変位を行列 $\mathbf{A}$ で表わせば、

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} \quad (47)$$

そこで節点変位ベクトルより，低減した自由度 n を有する一般化変位ベクトル V を次式で与える。

$$u = A V \quad \text{-----} (48)$$

すると基礎方程式(45)は一般化変位 V に関するつぎの方程式に変換できる。

$$\bar{M}\ddot{V} + \bar{C}\dot{V} + \bar{K}V = \bar{F} \quad \text{-----} (49)$$

$$\text{ここに } \bar{M} = A^T M A, \bar{C} = A^T C A, \bar{K} = A^T K A, \bar{F} = A^T F$$

でそれぞれ一般化質量行列，一般化減衰行列，一般化剛性行列，一般化波力である。

一般化剛性行列 $\bar{K}$ は，式(47)を用いると。

$$\bar{K} = A^T P \quad \text{-----} (50)$$

として与えられる。

一方非減衰自由振動における正規化された固有振動モード Φ は，一般振動論により周知のように容易に求めうる。

そこで一般化変位 V を振幅 Y を持つ振動モード Φ の重ね合せによって与える。すなわち，

$$V = \Phi Y \quad \text{-----} (51)$$

すると方程式(49)はつぎのように変換できる。すなわち Φ の直交性 $\Phi_n^T \bar{M} \Phi_m = 0$, $\Phi_n^T \bar{K} \Phi_m = 0$ ($n \neq m$)，正規化 $\Phi^T \bar{M} \Phi = I$ ，自由振動方程式 $\bar{K} \Phi = \Delta \bar{M} \Phi_n$ などの関係を利用し， $\Phi_n^T \bar{C} \Phi_m = 0$ ($m \neq n$) を仮定する。

$$I\ddot{Y} + \alpha\dot{Y} + \Delta Y = F^* \quad \text{-----} (52)$$

$$\text{ここに } \alpha = \Phi^T \bar{C} \Phi \text{ (対角行列)} \quad \text{-----} (53)$$

$$F^* = \Phi^T \bar{F} \quad \text{-----} (54)$$

方程式(52)は各モードごとに独立な常微分方程式である。

そこで前述の段階的追跡計算法 (Step by step method) あるいはDuhamel 積分を適用して，振幅応答ベクトル X を求めることができる。

前者を適用すると，

$$I\ddot{Y}_{i+1} + \alpha_n \dot{Y}_{i+1} + \Delta_n Y_{i+1} = C_d \Phi^T A^T (V_w - \dot{u}_t) + \Phi^T A^T (V_w - u_t) + C_w \Phi^T A^T (a_w - u_t) \quad \text{-----} (55)$$

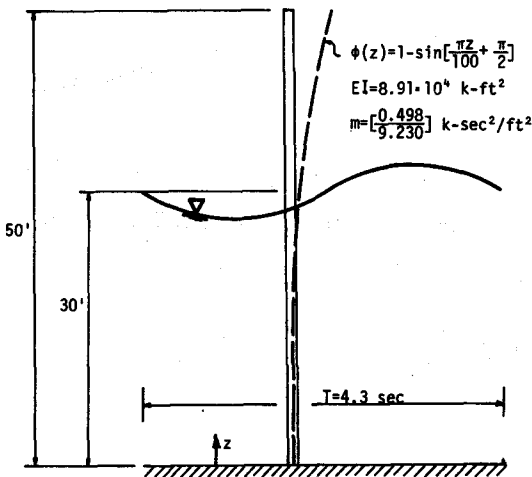


図-28 正げん波を受ける鋼管ぐい

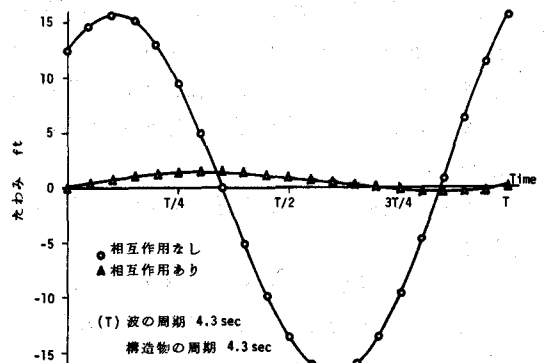


図-29 正げん波を受ける鋼管ぐいのたわみの時間的变化 (a)

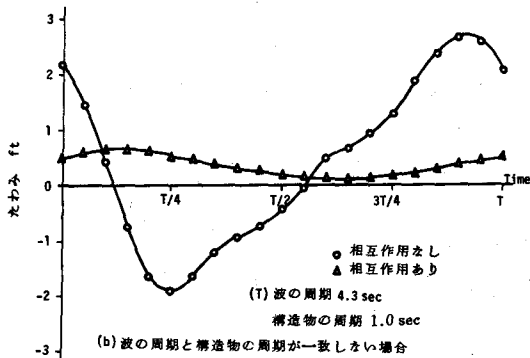


図-29 正げん波を受ける鋼管ぐいのたわみの時間的变化 (b)

図-28のように、正弦波による鋼管杭の先端のたわみの1サイクル中の時間的变化を計算した1例として図-29をえた。この例からもわかるように、相互作用により、共振時にもかなりたわみが軽減されることがわかる。

Selna は方程式(45)に時間増分法を適用して、図-30に示す海中塔状構造物に正弦波が作用した場合の応答を計算した。水深1,000ft、波高40ftの場合の静的波力に対して設計された塔で、基本固有周期は8秒である。静的波力に対するたわみは4.13ft、かつ抗力係数 $C_D = 0.42$ 、慣性係数 $C_M = 2.0$ である。そして波高40ft、周期8秒の正弦波に対して図-31の結果をえた。図中 δ_{MAX}/δ_{ST} は頂部の動的なたわみを静的たわみで無次元化したもので T_{wave}/T_{st} は正弦波の周期と構造物の基本固有周期の比である。

$T_{wave}/T_{st} = 1$ で共振している。 $T_{wave}/T_{st} < 1$ で振幅が大きくなっているのは構造物の全柱脚にほとんど同位相で作用するためと考えられる。たわみ比 T_{max}/T_{st} が非常に大きいので静的設計が極めて危険であることがわかる。

奥村・西岡は、不規則波力が作用する場合の海洋構造物の応答について調べた。方程式(46)を変形して、

$$M\ddot{X}_{t+1} + C\dot{X}_{t+1} + KX_{t+1} = P(x, t) - C_d\dot{X}_t |\dot{X}_t| \quad (46')$$

ここに、 $P(x, t) = M\ddot{V}_w + C\dot{V}_w + KV_w$

$$X = V_w - u$$

$$C_d = C_d \frac{\rho D}{2}, \quad M = M + C_M \frac{\pi \rho D^2}{4}$$

方程式(46')の解はDuhamel積分を用いて、線型近似解、

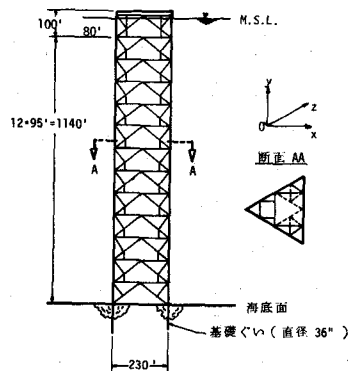


図-30 海中塔状構造物

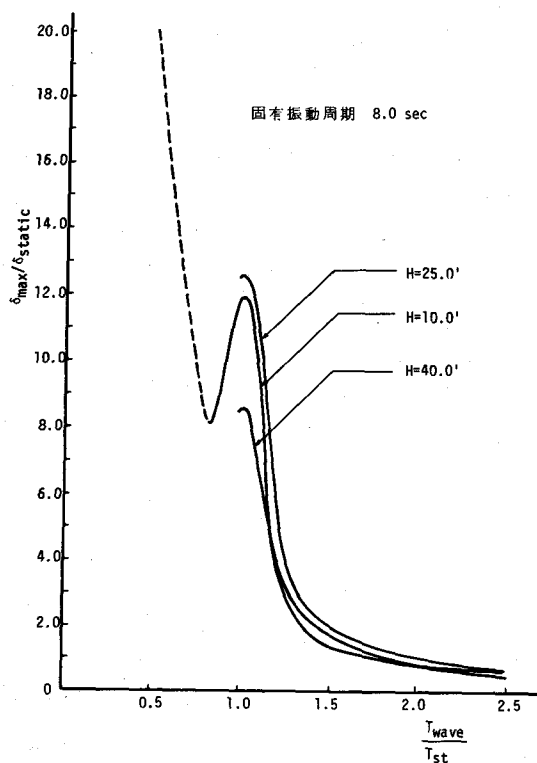


図-31 海中塔状構造物の動的たわみ増幅率

$$X_{t+1} = \int_{-\infty}^{\infty} H_{Xt}(t-\tau) [P(x, \tau) - \dot{X} |\dot{X}|] d\tau \quad (56)$$

を微小時間増分に対する解として与えた。

これより X_{t+1} の自己相関係数 $R_{Xt+1 Xt+1}$ さらにFourier変換して $Xt+1$ のパワースペクトルを求めている。

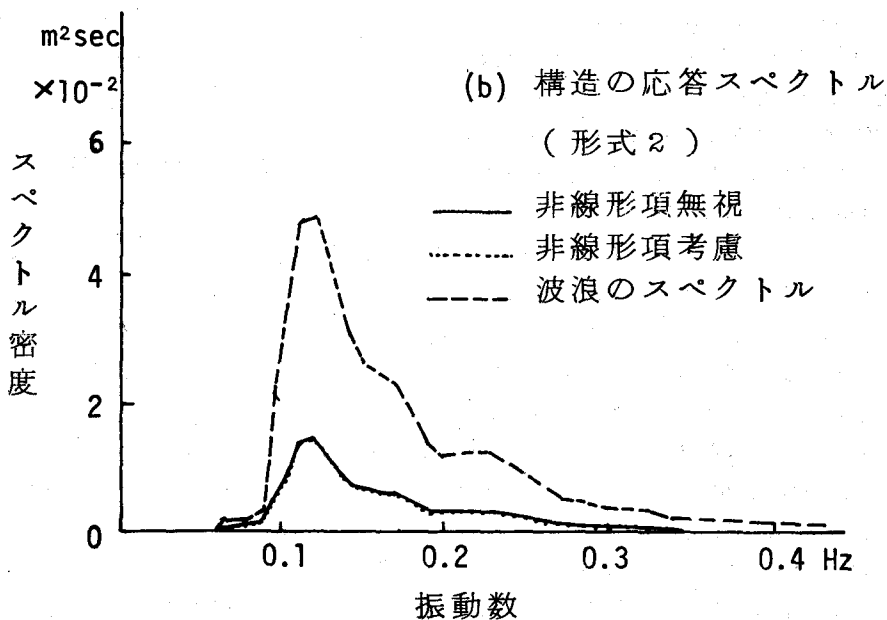
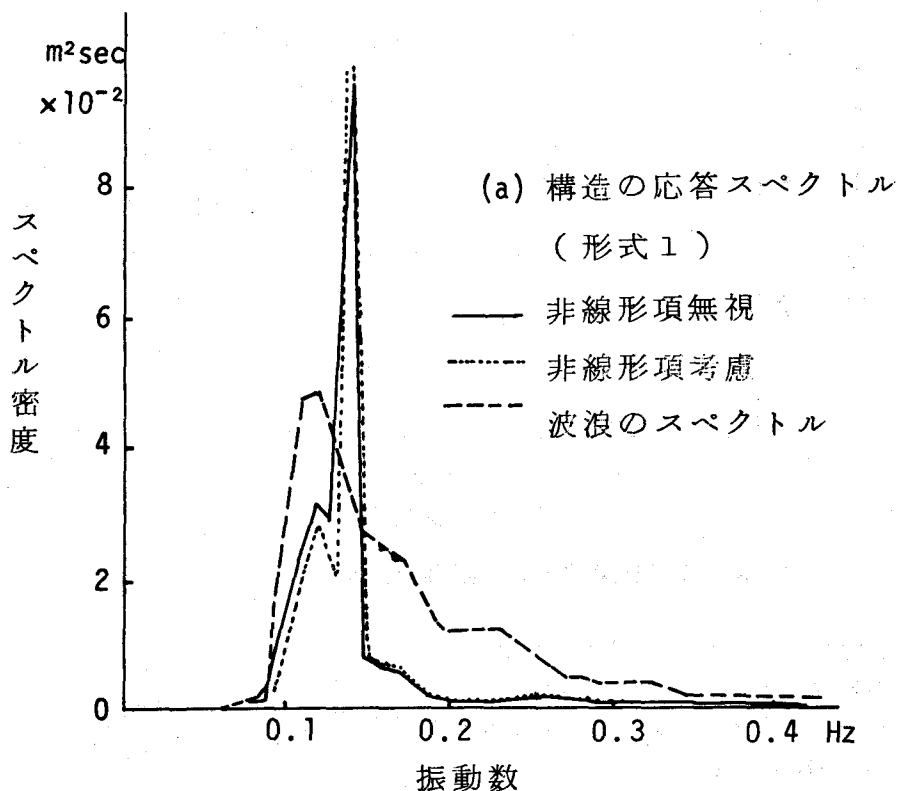


図-3 海洋構造物の不規則波浪に対する応答スペクトル

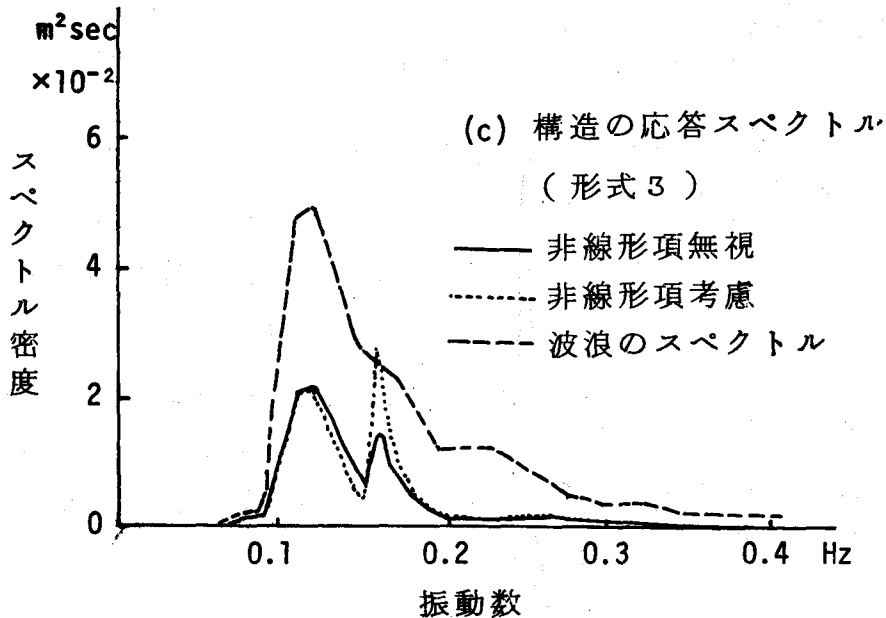


図-33 海洋構造物の不規則波浪に対する応答スペクトル

そして図-32に示す3種の構造形式に図-33に点線で示すパワースペクトルを持つ波浪が作用したときの動的応答パワースペクトルをそれぞれ図(a), (b), (c)のように求めた。

数値計算に際しては、一律に $C_D=1.4$, $C_M=2.0$ と仮定している。各構造形式の固有振動数は表-2のとおりである。

比較的剛な立体トラス形式の応答パワースペクトル密度の形状が波浪のそれに相似であり、非線型減衰項 $C_D \dot{X} |X|$ の影響がほとんど

認められない。したがってこの程度の剛性を持つ構造形式の場合には、非線型項を無視して線型方程式を解けばよいことがわかる。しかし部材数が多いので付加質量の影響は大きい。

構造形式(1)および(3)については共にそれぞれの水中における基本固有振動数のところで共振していることがわかる。構造形式(1)では非線形項は基本固有振動数より低振動数の成分に対して抗力を低減させる効果があり、高い振動数成分に対して抗力を増加させる効果をもっている。

構造形式(3)の基本固有振動数は波浪の卓越周波数1.25Hzより高い方にずれているので卓越周波数と基本固有振動数の両方で共振するのが構造形式(1)よりかなり低い。しかし基本固有振動数に対しては非線型項の影響が大きい。

この傾向は波浪のスペクトルが大きくなるほど著しくなっている。

Edge-Mayerは基礎地盤、構造物、波浪の3要素の相互作用を考慮してMorisonの波力に対して解析している。

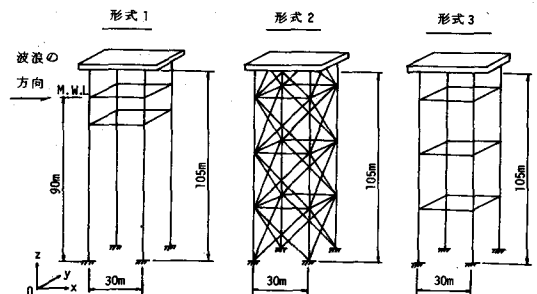


図-32 構造形式

(4) 海底構造物の動的挙動

海底資源の開発のため、海底に作業用乃至住居用建造物を建設するようになった。このような海底構造物は常に波力や潮流力が作用するので陸上構造物と異った静的ならびに動的応力や変形を生ずる。さらに基礎地盤に定着しているので地震力を受ける。その際、周辺を密度の大きい海水に包まれているので、複雑な相互作用を生ずることになる。流体力は構造物の変形に敏感に影響され、逆に構造物は海水の運動に影響される。

海中構造物と海水の相互作用は、構造物と海水の密度比、水の粘性、構造物の形状に左右されることは1節において既に述べたとおりである。

Lai-Mockros は図-34に示すような海底に設置された回転楕円体シェルの構造物が振動する場合、水の粘性、慣性がどのように振動性状に影響するかについて論じている。

シェル本体に作用する x 軸方向の外力 F_T は、

$$F_T = F(t) - K(x - x_b) - C\dot{x} - F_f(t) \quad (57)$$

ここに $F(t)$ は作用荷重、 $K(x - x_b)$ は鋼管柱脚のバネ反力、 C は構造減衰、 x はシェルの変位、 x_b は基礎の変位

さて扁長回転楕円体に作用する粘性流体力 $F_f(t)$ は、

$$F_f = \frac{4}{3} \pi a b^2 \rho \left[\frac{(\lambda^2 - 1) Q_1(\lambda_0)}{1 - (\lambda_0^2 - 1) Q_1(\lambda_0)} \right]$$

$$\ddot{x} + \frac{8 \pi \rho \nu a}{\lambda_0 \kappa} \dot{x}$$

$$+ \frac{32 \pi \rho \nu b^2}{3(\lambda_0^2 - 1) \kappa^2} \left[\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \dot{x} + \sqrt{\frac{1}{2\nu\omega}} \ddot{x} \right]$$

図-34 海底に設置された
回転楕円体シェル構造物

(58)

a, b は楕円体の長軸半径、短軸半径、 μ は粘性係数

$\lambda_0 = a / \sqrt{a^2 - b^2}$ は形状因子、 $\kappa = [(\lambda_0^2 + 1)/2] \log [(\lambda_0 + 1)/(\lambda_0 - 1)] - \lambda_0$ 、

$Q_1(\lambda_0) = (\lambda_0/2) \log [(\lambda_0 + 1)/(\lambda_0 - 1)] - 1$ は1次の第2種ルジャンドル関数、 ω は振動数。

式(58)の右辺第1項は層流理論による付加質量、第2項は定常Stokes理論による粘性抵抗、第3項は非定常流中の粘性と慣性の相互作用による影響を与える経歴効果を表わす。

すると扁長回転楕円体の振動基礎微分方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi a b^2 \rho_s \ddot{x} = & F(t) - K(x - x_b) - c\dot{x} - \left[C_A \frac{4}{3} \pi a b^2 \rho + C_H \pi b^2 \rho \sqrt{\frac{\nu}{2\omega}} \right] \ddot{x} \\ & - \left[\frac{8 \pi \rho \nu a}{\lambda_0 \kappa} + C_H \pi b^2 \rho \sqrt{\frac{\nu\omega}{2}} \right] \dot{x} \quad (59) \end{aligned}$$

ここに ρ_s は回転楕円体の密度

$C_A = [(\lambda_0^2 - 1) Q_1(\lambda_0)] / [1 - (\lambda_0^2 - 1) Q_1(\lambda_0)]$ (扁長回転楕円体の付加質量係数)

$C_H = 32 / [3(\lambda_0^2 - 1) \kappa^2]$ (扁長回転楕円体の経歴係数)

いっぽう振動中の扁球に対する微分方程式は、

$$\frac{4}{3} \pi a^2 b \rho_s \ddot{x} = F(t) - K(x - x_b) - C\dot{x} - \left[C_A^* \frac{4}{3} \pi a^2 b \rho + C_H^* \pi a^2 \rho \sqrt{\frac{\nu}{2\omega}} \right] \ddot{x}$$

$$- \left[\frac{8 \pi \rho \nu b}{\lambda_o^* \kappa} + C_H \pi b^2 \rho \sqrt{\frac{\nu \omega}{2}} \right] \dot{x} \quad \text{----- (60)}$$

ここに $C_A^* = [(\lambda_o^{*2} + 1) q_1(\lambda_o^*)] / [1 - (\lambda_o^{*2} + 1) q_1(\lambda_o^*)]$ (扁球の付加質量)

$C_H^* = 32 / [3(\lambda_o^* + 1) \kappa^{*2}]$ (扁球の経歴係数)

$\lambda_o^* = b / \sqrt{a^2 - b^2}$ (扁球の形状因子)

$q_1(\lambda_o^*) = 1 - \lambda_o^* \cot^{-1} \lambda_o^*$

$\kappa^* = \lambda_o^* - (\lambda_o^{*2} - 1) \cot^{-1} \lambda_o^*$

基礎地盤が円振動数 ω の単純調和振動を行なうとき、上述の2種の海中構造物の応答を計算した結果を図-35および図-36に示す。これらの計算では構造減衰は水流による減衰効果に比して無視し、 $C = 0$ と仮定している。図はいずれも $a/b = 5$ の場合について表わしたものであるが、他の a/b 値に対しても類似の傾向を示している。共振振動数が $\omega/\omega_n = 1$ よりずれているのは、水の付加質量および粘性減衰の影響による。ストークス数

$N_s = \sqrt{\nu / [\omega_n (ab^2)^{2/3}]} / 2$ が 10^{-2} 以下で、減衰が小さい場合には、共振のずれの原因は主として付加質量である。扁球の場合には付加質量が比較的大きいので、このずれが著しい。逆に細長い扁長回転楕円体の場合は、この影響が小さい。

ストークス数 N_s が 10^{-2} より大きい場合には減衰効果が著しい。構造物の規模が $1 \sim 7$ m 位の普通の海中構造物については、 N_s は $10^{-3} \sim 10^{-4}$ の範囲にある。

図-37に $\rho/\rho_s = 1$ および $\rho/\rho_s = 0.5$ を有する扁球の共振振幅を示す。実線、短い点線は $\rho/\rho_s = 1$ 、長い点線、短い鎖線は $\rho/\rho_s = 0.5$ である。また Edgewise (長軸方向振動) と記していない線はすべて水平短軸方向振動の場合である。

(5) その他の水力弾性応答

(I) Cavity resonance

船舶工学の分野で問題になるが、流れに沿う壁面に空洞が存在すると図-38に示すように、自由流線に沿って渦が発生し、弾性内壁の局部振動と渦が水力弾性応答を呈す。

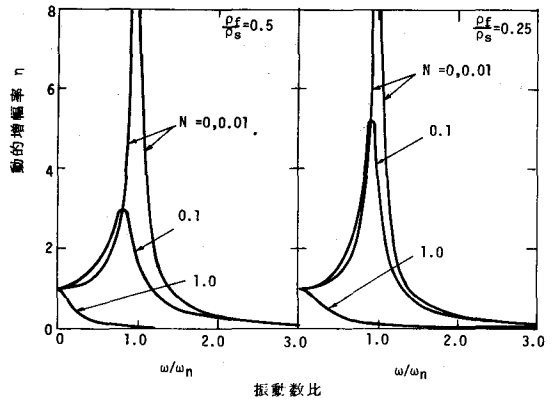


図-35 扁長回転だ円体共振曲線

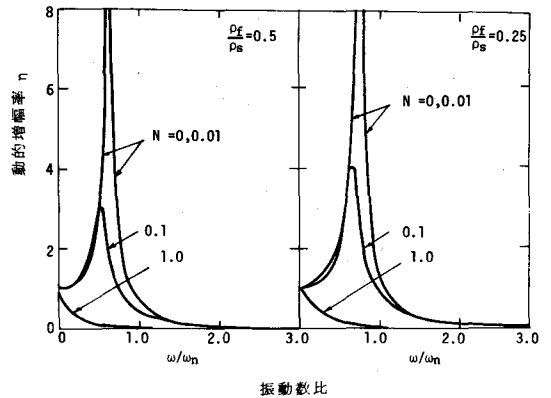


図-36 扁球の共振曲線

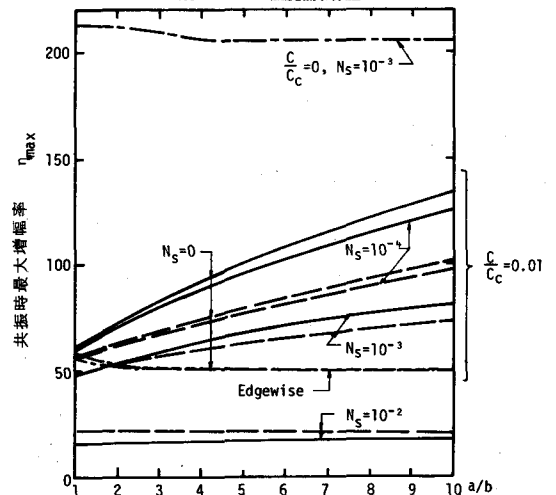


図-37 扁球の共振時最大増幅率

Ⅲ Howell Bunger Value の振動

図-39に示すような4枚翼をもったHowell Bungerバルブの溶接接合部が振動により破損する事故が生じている。

図(a)に4枚翼の場合の基本振動モードを示す。また図(b)に示すように6枚翼の場合には2次振動モードを呈す。

第*i*次固有振動数 f_i は次式で与えられる。

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma A r^4} M_i} \quad \text{---(61)}$$

$$\text{ここに } M_i = \frac{(i+1)[1-(i+1)^2]}{\sqrt{1+(i+1)^2}} \quad \text{---(62)}$$

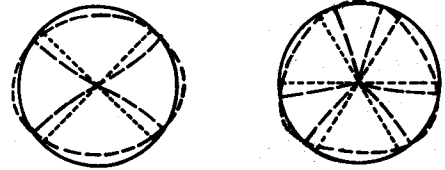
EI は曲げ剛性, A は断面積, γ は比重, g は重力加速度, r は円の半径

よって6枚翼の固有振動数は4枚翼のそれの2.82倍になるので, 1サイクルごとのエネルギー収量は低減する。それで6枚翼にすると, シェルと翼の接合部が破損しにくいと考えられる。

Ⅳ 水門のスキンプレートの局部振動



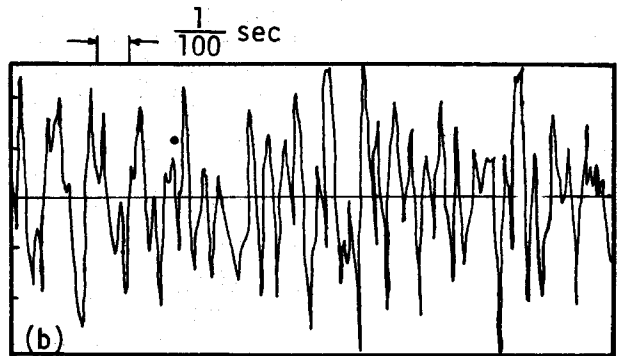
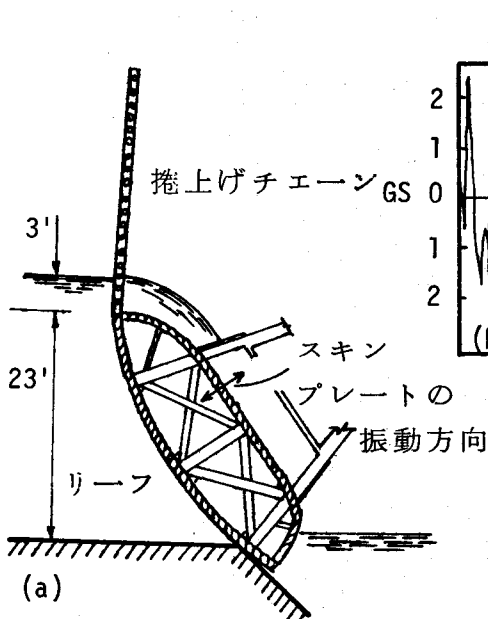
図-38 Cavitation Resonance



(a) 4枚翼

(b) 6枚翼

図-39 Howell Bungerバルブの振動モード



加速度記録

(水門上水頭 3ft)

理論値 159 cps

加速度計 150-200 cps

音の周波数 115-160 cps

図-40 スキンプレートの局部曲げ振動

図-40に示すように越流を生ずるような水門のスキンプレートが水力弾性応答を呈して, 激しい音響を発し, 局部曲げ振動を生ずることがある。これは図に示すように下流側のスキンプレートが音の振動数に匹敵する高周波数の曲げ振動をするためである。それでスキンプレートの中で支持

してスキンプレーットの固有振動数を高めることによって、防振できると考えられる。

なお骨組構造からの渦の発生周波数は、はるかに低いので、局部振動に対する励起外力とは思われない。

8. むすび

構造工学の発達に伴い、軽量化、長大化が進み、また海洋開発が活潑になり大規模な海洋構造物の建設が盛んになりつつある。これらの構造物の設計に際しては、流体力によって励起される流体力弾性応答が重要事項として配慮されねばならない。この種の現象の実体を明確にし、その成果を設計に役立てるには、Fluid engineer, structural engineer, dynamic analyst, foundation engineer の間の密接な協力が大切であるを考える。

参 考 文 献

(1) 岩 垣 雄 一：波浪に対する構造物の動的応答

1971年度水工学に関する夏期研修会講義集B コース，土木学会水理委員会，1971

(2) 榎 木 亨，中 村 孝 幸：円柱に作用する不規則波力の統計的解析

土木学会関西支部年次学術講演会，概要集，1973

風向	断面寸法 mm	$S=\frac{nd}{V}$	風向	断面寸法 mm	$S=\frac{nd}{V}$
↑		0.120	↑		0.147
↓		0.137	↓		
↑		0.120	↑		0.150
↓			↓		
↑		0.144	↑		0.145
↓			↓		0.142
↑		0.145	↑		0.131
↓			↓		0.134
↑		0.140	↑		0.121
↓		0.153	↓		0.143
↑		0.145	↑		0.135
↓		0.168	↓		
↑		0.156	↑		0.160
↓		0.145	↓		
円筒		0.200	↑		0.114
11800<R<19100			↓		0.145

表-1 ストローク数

構造形式	固有振動数		$\frac{V}{Nd}$	最大設計流速	
	N %	K		V_{max} ,	k
独立鋼管杭	$N = \frac{K}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{M}}$	0.56	<1.2 流れ方向振動	$V_{max} = k \sqrt{\frac{EI d^2}{ML^4}}$	0.67
ブレースなし 鋼管構造物		1.84			2.2
代表的鋼管構造物 (完成後)		0.56 (片持ばり 振動)	<3.5 流れに 垂直方向振動		1.9

表 - 2 最大設計流速

振動次数 構造形式	1	2	3
立体ラーメン(1)	0.273 (0.146)	1.905	4.418
立体トラス(2)	11.606	6.122	10.440
立体ラーメン(3)	0.301 (0.167)	1.721	4.382

() 内は水中に設置されたときの値
 表 - 2 海洋構造物の固有振動数 (Hz)