

クノイド波理論の実用化

岩 垣 雄 一

1. はしがき

著者がクノイド波理論の実用化の研究を始めたのは、昭和38年であった。その当時、著者は水理公式集改訂委員会の委員として、昭和38年度改訂版の編集にあたり、第4編港湾および海岸の〔4.1〕表面波のところを執筆していた。その中に有限振幅波としてストークス波とともにクノイド波の理論式をも取り入れるべきであるとの結論に達し、公式集に載せるための調査を始めたところ、式中に楕円関数などの高等関数を含むために、その実用化にはかなりの研究が必要であることがわかった。そのときの公式集には、主として第1近似を載せたのであるが、後述するようにそれでは不十分であることがその後になり、次の昭和46年度改訂版が発行されるまでは、いつも気にかかって、気持がすっきりしなかった。

クノイド波理論の実用化の研究は、クノイド波に関する研究（第1報）として、はじめて京大防災研究所年報第7号（昭和39年3月）に発表したが、本年度発表の第10報をもっていちおう完結することにしたので、この機会にこれまでの研究をとりまとめて、著者が10年間にわたって続けてきたこの研究の成果の概要を述べてみたい。

クノイド波は、1895年に Korteweg および de Vries¹⁾ によって発見され、その歴史がかなり古いにもかかわらず、われわれ技術者にとってはあまりなじみ深いものではなかった。しかし、いま水深を h 、波長を L 、静水面からの波の峰までの高さを η_0 とすれば、Stokes 波理論が適用できるのは、Keulegan²⁾ によると $h/L \geq 1/10$ 、Laitone³⁾ は $h/L \geq 1/8$ 、Wilson, Webb および Hendrickson⁴⁾ は $h/L > (\eta_0/L)^{1/2}$ のときであるといっており、水深がこれより浅いところでは Stokes 波理論は適用できないで、クノイド波理論を用いなければならないとしている。こうした適用限界については、後述するように慎重に検討しなければならないが、いずれにしても h/L の値が小さくなるとクノイド波理論が必要となるので、その実用化をはかることは当然といえよう。

2. クノイド波理論の概要

いま、図-1に示すように、 h_t を波の谷からの水深、 η を波の谷から水面までの距離、 δ を谷から平均水面までの距離、波高を H とし、 x 軸は波の谷を通して水平方向、 z 軸は鉛直上方にとる。 u および w を x および z 方向の速度成分、 p を圧力、 ρ を密度、 g を重力加速度とし、流れを加えて定常化した二次元の波を考える。この場合の Euler の連続式、運動方程式、非回転運動の条件、水面での圧力条件、水面条件および水底条件は、それぞれ次式によってあらわ

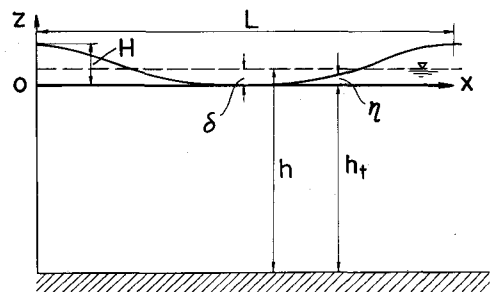


図-1 記号の説明図

される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial z} \\ \Delta p(x, \eta) &= p(x, \eta) - p_0 = 0 \\ w(x, \eta) &= u(x, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad w(x, -h_t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Laitone³⁾ は $d \ll l$ であるような基準長 d および l を導入し、これらを用いて x, z, u, w, h_t, η および ρ を次のように無次元化した。

$$\left. \begin{aligned} X &= x/l, \quad Z = z/d, \quad U = u/\sqrt{gd} \\ W &= (w/\sqrt{gd})(d/l), \quad H_t = h_t/d, \quad N = \eta/d, \quad P = \Delta p/\rho gd \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\text{さらに,} \quad \sigma = (d/l)^2 \ll 1 \quad (2.3)$$

とおき、(2.2) 式の無次元量を用いて (2.1) 式を書き直すと、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0 \\ \sigma \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial X} \right) + W \frac{\partial U}{\partial Z} &= 0 \\ \sigma \left(U \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial X} + 1 \right) + W \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X} &= \frac{\partial U}{\partial Z}, \quad P(X, N) = 0 \\ W(X, N) &= \sigma U(X, N) \frac{\partial N}{\partial X}, \quad W(X, -H_t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

上式中の U, W および P は (2.3) 式で示す微小量 σ を用いて、次の形で級数に展開できるものとした (摂動法)。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} -H \leq Z \leq N(X) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sigma^r N_r(X) \\ F(X, Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n F_n(X, Z) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

一方、水底条件は $Z = -H_t$ において求めることができるが、水面条件は N が未知量であるから $Z = N(X)$ において U, W および P を直接求めることができない。そこで、 $U(X, N), W(X, N)$ および $P(X, N)$ を次のように $Z = N_0$ (平均水面) のまわりに Taylor 級数に展開してあらわす

形をとった。

$$F(X, N) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n F_n(X, N) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N-N_0)^m}{m!} \left[\frac{\partial^m F_n(X, Z)}{\partial Z^m} \right]_{Z=N_0} \quad (2.6)$$

ただし,

$$N - N_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \sigma^r N_r(X)$$

Laitone は (2.5) および (2.6) 式を (2.4) 式に代入し, σ^0 , σ , σ^2 , ……にかかる項をそれぞれ 0 次の項, 1 次の項, 2 次の項……とし, それぞれの order の解を順次求めて, 結局つぎのようなクノイド波の第 2 近似解をえた。

波形:

$$\frac{\eta}{H} = \text{cn}^2(2K \frac{X}{L}, k) - \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h_t} \right) \text{cn}^2(2K \frac{X}{L}, k) \{ 1 - \text{cn}^2(2K \frac{X}{L}, k) \} \quad (2.7)$$

波長:

$$\frac{L}{h_t} = \frac{4kK}{(3H/h_t)^{1/2}} \{ 1 - (\frac{7k^2-2}{8k^2}) \frac{H}{h_t} \}^{-1} \quad (2.8)$$

水粒子速度:

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh_t}} = & \frac{H}{h_t k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) + \left(\frac{H}{h_t} \right)^2 \frac{1}{k^4} \left\{ \frac{E}{K} \left(\frac{E}{K} + \frac{3}{4} k^2 - 1 \right) - \left(\frac{k^4 + 14k^2 - 9}{40} \right) \right\} \\ & - \left(\frac{2k^2 - 1}{2k^2} \right) \frac{H}{h_t} + \left(\frac{21k^4 - 6k^2 - 9}{40k^4} \right) \left(\frac{H}{h_t} \right)^2 \\ & + \frac{H}{h_t} \text{cn}^2(2K \frac{X}{L}, k) \left[1 - \frac{H}{h_t} \left(\frac{7k^2 - 2}{4k^2} \right) - \frac{3}{2} \frac{H}{h_t} \left(2 - \frac{1}{k^2} \right) \left\{ 2 \frac{z}{h_t} + \left(\frac{z}{h_t} \right)^2 \right\} \right] \\ & + \left(\frac{H}{h_t} \right)^2 \text{cn}^2(2K \frac{X}{L}, k) \left[\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \left\{ 2 \frac{z}{h_t} + \left(\frac{z}{h_t} \right)^2 \right\} \right] - \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h_t} \right)^2 \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) \left\{ 2 \frac{z}{h_t} + \left(\frac{z}{h_t} \right)^2 \right\} \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh_t}} = & \left(1 + \frac{z}{h_t} \right) \left\{ \frac{3}{k^2} \left(\frac{H}{h_t} \right)^3 \right\}^{1/2} \text{cn}(2K \frac{X}{L}, k) \text{sn}(2K \frac{X}{L}, k) \text{dn}(2K \frac{X}{L}, k) \\ & \times \left[1 - \frac{H}{h_t} \left(\frac{5k^2 + 2}{8k^2} \right) - \frac{H}{h_t} \left(1 - \frac{1}{2k^2} \right) \left\{ 2 \frac{z}{h_t} + \left(\frac{z}{h_t} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{H}{h_t} \text{cn}^2(2K \frac{X}{L}, k) \left\{ 1 - 6 \frac{z}{h_t} - 3 \left(\frac{z}{h_t} \right)^2 \right\} \right] \quad (2.10) \end{aligned}$$

圧力:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho g H} = & \frac{\eta - z}{H} - \frac{H}{h_t} \frac{3}{4k^2} \left\{ 2 \frac{z}{h_t} + \left(\frac{z}{h_t} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - k^2 + 2(2k^2 - 1) \text{cn}^2(2K \frac{X}{L}, k) \right. \\ & \left. - 3k^2 \text{cn}^4(2K \frac{X}{L}, k) \right\} \quad (2.11) \end{aligned}$$

波速:

$$\frac{c}{\sqrt{gh_t}} = 1 + \frac{H}{h_t} \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) + \left(\frac{H}{h_t} \right)^2 \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{E}{K} \left(\frac{E}{K} + \frac{3}{4} k^2 - 1 \right) - \left(\frac{k^4 + 14k^2 - 9}{40} \right) \right\} \quad (2.12)$$

静水面の位置:

$$\frac{\delta}{H} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) + \frac{H}{h_t} \frac{1}{12k^4} \left\{ 8 - 11k^2 + 3k^4 - (8 - 7k^2) \frac{E}{K} \right\} \quad (2.13)$$

ここに, cn , sn および dn は Jacobi の楕円関数, k はその母数, K および E はそれぞれ第1種および第2種の完全楕円積分で k の関数である。なお式でアンダーラインの部分は第一近似を示す。ただし波長の第一近似はアンダーラインの部分と $\left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{2k^2 - 1}{k^2} \right) \frac{H}{h_t} \right\}$ の積である。

3. 理論解の図式化

一般に波の特性を求める場合, 微小振幅波では水深 h と周期 T を, さらに有限振幅波ではその他に波高 H を与える必要がある。しかしながら, クノイド波をあらわす (2.7) ~ (2.13) 式にもとづいて, 波の特性を求めようとする場合には, h , T および H を与えても, そのままでは直ぐには求められない。

一般に (2.7) ~ (2.13) 式は水深として波の谷からの水深 h_t が用いてあるが, これを平均水深 h に換算する必要がある。 H/h_t は δ を用いて書きかえると,

$$\frac{H}{h_t} = \frac{H}{h - \delta} = \frac{H}{h} \frac{1}{1 - (\delta/H)(H/h)} \quad (3.1)$$

となり, (2.13) 式より

$$\frac{\delta}{H} \approx \frac{1}{R^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \quad (3.2)$$

であり, また図-2 に示すように E および k は K の関数であるから, H/h_t は H/h と K の関数であらわされる。図-3 は K をパラメーターとして示した H/h_t と H/h との関係を示す。したがって, (2.7) ~ (2.13) の各式は (3.1) と (3.2) 式とを用いて h_t を h に書きかえることにより, H/h と K との関数として表現することができる。

(1) 波形⁵⁾

特別な場合として, $k = 1$ のときには, $\text{cn}(v, k) = \text{sech } v$ となるので, 第一近似の孤立波の波形 η_s は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\eta_s}{H} &= \text{sech}^2 v, \quad v = \frac{2KX}{L} \\ &\approx \frac{\sqrt{3}X}{2H} \left(\frac{H}{h_t} \right)^{3/2} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

で示される。いまクノイド波の波形の第一近似 η_1 と η_s との比および差は, それぞれ

$$\frac{\eta_1}{\eta_s} = \frac{\text{cn}^2(v, k)}{\text{sech}^2 v} = f_1 \left(K, \frac{X}{L} \right) \quad (3.4)$$

$$\frac{\eta_s - \eta_1}{H} = \text{sech}^2 v - \text{cn}^2(v, k) = f_2 \left(K, \frac{X}{L} \right) \quad (3.5)$$

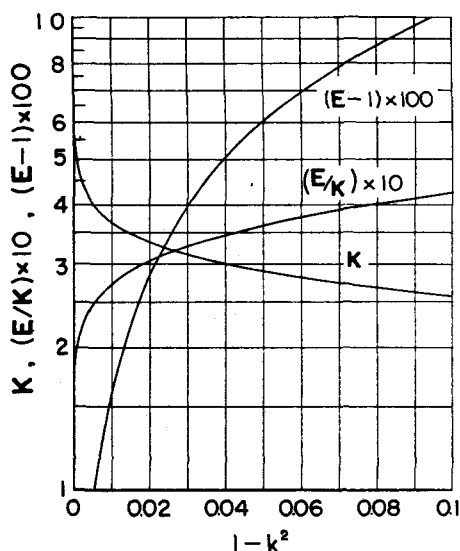


図-2 第一種および第二種完全楕円積分 K および E と Jacobi の楕円関数の母数 k との関係

とあらわされ、また第二近似と第一近似との差は、(2.7) 式より

$$\frac{\eta_1 - \eta_2}{H} = \frac{3}{4} \frac{H}{h_t} \frac{\eta_1}{H} \left(1 - \frac{\eta_1}{H}\right) \quad (3.6)$$

であらわれるから、これらの関数を示したのが、図-4, 5および6である。したがって、 K , H/h および X/L を与えると、図-3~6を用いて η_2/H を求めることができる。

(2) 波速⁶⁾

(2.12) 式において、図-3にしたがって h_t を h に換算すれば、 $c/\sqrt{gh}$ を h/H と K の関数で示すことができる。

図-7 は h/H をパラメーターとした $c/\sqrt{gh}$ と K の関係である。

(3) 波長あるいは波形勾配⁵⁾

(2.8) 式においても、図-3を用いて h_t を h に換算すると、 H/L は h/H と K の関数としてあらわすことができる。

図-8 は h/H をパラメーターとして示した h/L と K との関係である。

(4) K と波高、水深および波の周期との関係⁶⁾

$T = L/C$ の関係があるから、

$$T \sqrt{\frac{g}{h}} = \left(\frac{L}{H}\right) \left(\frac{H}{h}\right) \frac{c}{\sqrt{gh}}$$

とすることができ、図-7および8から $T\sqrt{g/h}$ を K と h/H の関数としてあらわすことができる。それを図示したのが図-9であって、この図を用いると、波高、水深および波の周期を与えて K を求めることができる。したがって、図-3, 4, 5, 7および8から波形、波速および波長が求められる。

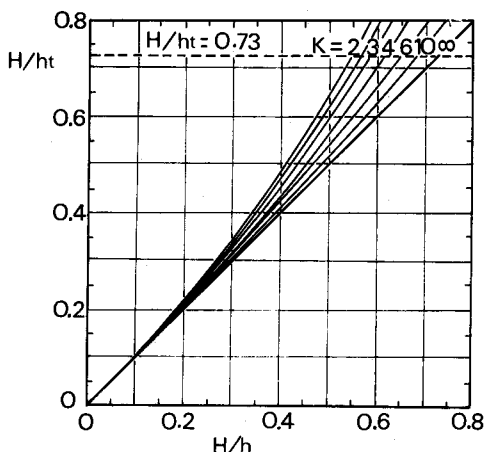


図-3 H/h_t と H/h との関係

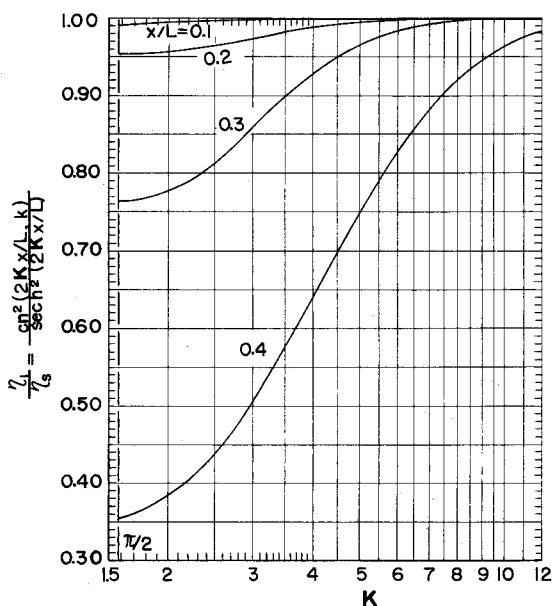


図-4 η_1/η_s の値

4 クノイド波とハイパボリック波

1964年に Le Méhauté および Webb⁷⁾ が Stokes 波の第3次近似解を用い、また1966年には Koh および Le Méhauté⁸⁾ が Stokes 波の第5次近似解を用いて、波の shoaling に伴う変形を計算したが、クノイド波理論を用いた波高変化の計算は Masch⁹⁾ が試みて成功しなかった。クノイド波理論を用いた波の shoaling の計算は、クノイド波のままでは式が非常に複雑となつて、Masch のように途中で中止せざるをえなくなることから、著者は次に示すようなクノイド波の近似

表現であるハイパボリック波の理論を考え¹⁰⁾、
それを用いて波の shoaling に伴う波高変
化の計算に成功し、実験を行なってその結果
の妥当性を確かめた。¹¹⁾
¹²⁾

いま、クノイド波の水理量の無次元表示を
 Φ とすれば、一般に次のようにあらわされる。

$$\Phi = F\left(\frac{h_t}{H}, \frac{z}{h_t}, K, \frac{E}{K}, k, \operatorname{cn}(v, k), \operatorname{sn}(v, k), \operatorname{dn}(v, k)\right) \quad (4.1)$$

孤立波は、クノイド波の理論において、 $k = 1$ すなわち $K = \infty$, $E = 1$, $L = \infty$ の極限をとればよく、その場合、 $\operatorname{cn}(v, k)$ および $\operatorname{dn}(v, k)$ はともに $\operatorname{sech} v$ となり、また $\operatorname{sn}(v, k)$ は $\tanh v$ となる。

ここで、孤立波のように、 $k = 1$ という極限でなく、 $k \approx 1$ と近似しうる場合を考えると、図-2 からわかるように、 K の値が ∞ とみなされるほど大きくはならない。逆にいえば、 K が 3 程度の値のときには、 $k \approx 0.98$ であって近似的に 1 とみなしてよいし、 E の値も 0.95 となって、5% の誤差を許せば $E \approx 1$ と

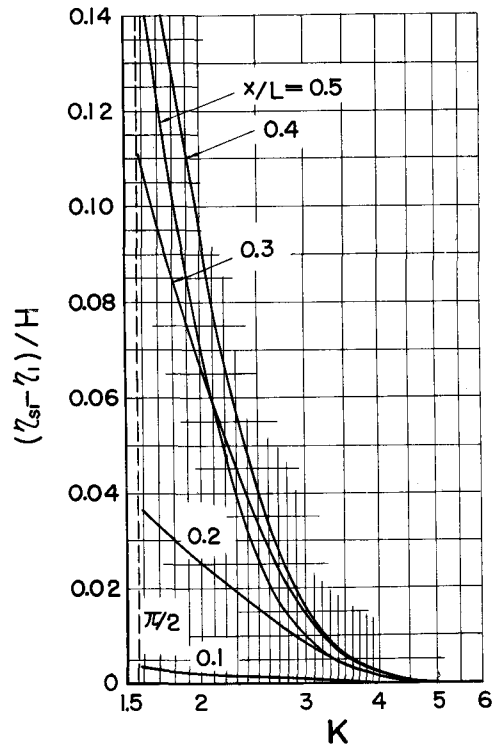


図-5 $(\eta_s - \eta_1)/H$ の値

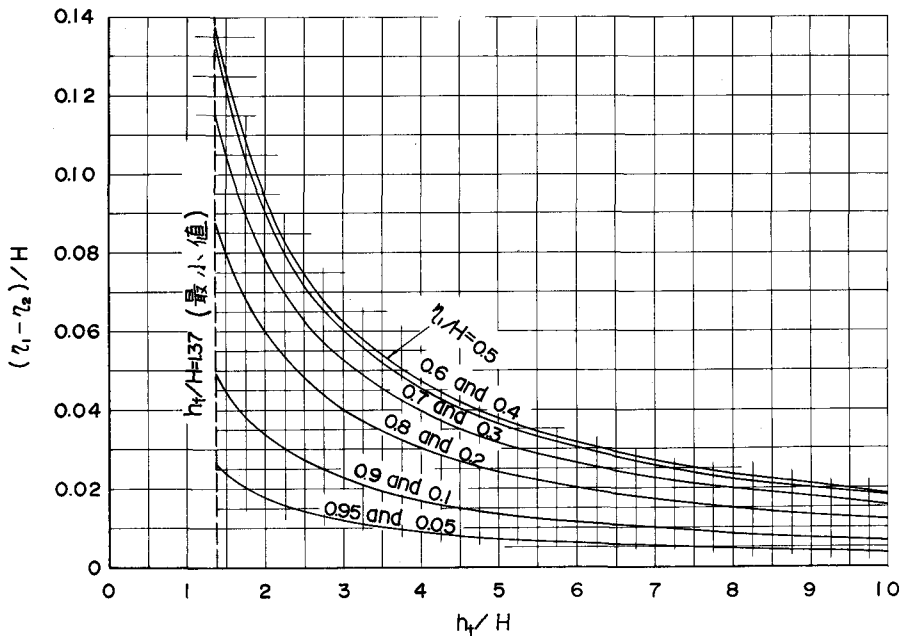


図-6 $(\eta_1 - \eta_2)/H$ の値

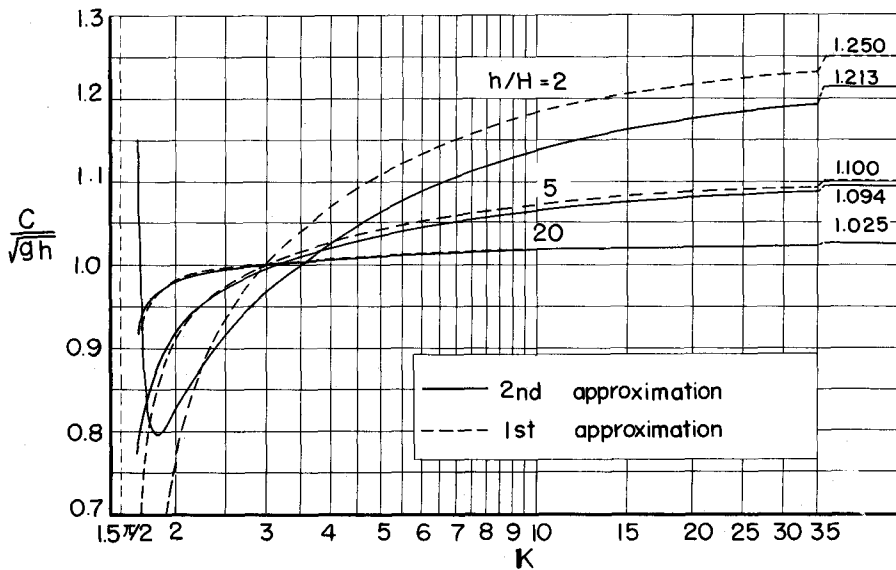


図-7 $c/\sqrt{gh}$ と K の関係

みなしてよい。このことから、

$$K \geq 3 \quad (4.2)$$

を条件として (4.1) 式に対応する新しい波の水理量の無次元表示を ϕ_h として、

$$\phi_h = F_h \left(\frac{h_t}{H}, \frac{z}{h_t} K, \operatorname{sech} v, \tanh v \right) \quad (4.3)$$

がえられる。この波は双曲線関数であらわされるから周期波ではないが、波長は有限なので、1波長ごとに谷を結合させていけば、周期波として取扱うことが可能である。著者は、この新しい波をハイパボリック波と名付けたのである。この場合、(4.3)式でわかるように、この波の水理量はなお第1種の完全楕円積分 K の関数であるが、図-9で示されるように K は $T\sqrt{g/h}$ と h/H の関数としてあらわされるから、図-9を併用すればよい。もし、これらの関係を式で表示するとすれば、次のようになる。

$H/h \leq 0.55$ の場合、¹⁰⁾

$$\frac{K}{T\sqrt{g/h}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{H}{h} \right)^{1/2} \left\{ 1 - 1.3 \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (4.4)$$

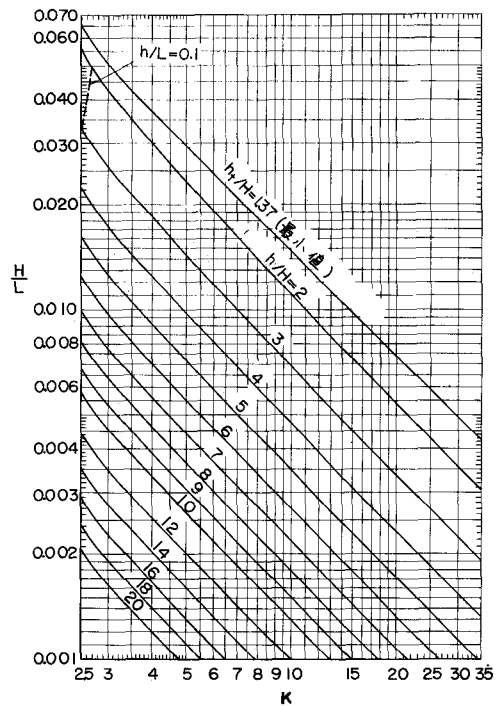


図-8 H/L と K の関係

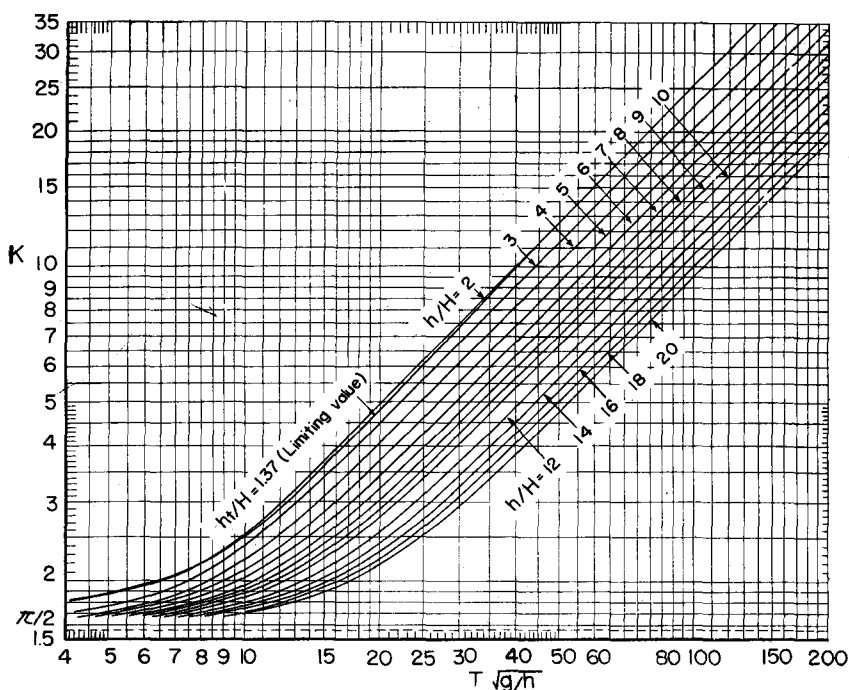


図-9 Kと $T\sqrt{g/h}$ の関係

$H/h > 0.55$ の場合,¹¹⁾

$$\frac{K}{T\sqrt{g/h}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{H}{h} \right)^{1/2} \left\{ 1 - 0.54 \left(\frac{H}{h} \right)^{3/2} \right\} \quad (4.5)$$

ただし、これらの式の適用範囲は $K \geq 3$ であることは当然である。

ハイパボリック波は定義によって、クノイド波の式で $k=1$ 、 $E=1$ とおけばよいから、(3.1) および (3.2) 式を用いて、各水理量は (2.7) ~ (2.13) 式から次のようになる。

波形：

$$\frac{\eta}{H} = \text{sech}^2 \left(2K \frac{X}{L} \right) - \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{H}{h} \text{sech}^2 \left(2K \frac{X}{L} \right) \left\{ 1 - \text{sech}^2 \left(2K \frac{X}{L} \right) \right\} \quad (4.6)$$

波長：

$$\frac{L}{h} = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{4K}{\sqrt{3}} \left(\frac{h}{H} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{5}{8} \frac{H}{h} \right\}^{-1} \quad (4.7)$$

水粒子速度：

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} &= \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left\{ A_1 \text{sech}^2 \left(2K \frac{X}{L} \right) + A_2 \text{sech}^2 \left(2K \frac{X}{L} \right) - A_3 \right\} \\ A_1 &= \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{H}{h} \left[1 - \frac{5}{4} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{H}{h} - \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{H}{h} \left\{ 2 \frac{z}{h_t} + \left(\frac{z}{h_t} \right)^2 \right\} \right] \\ A_2 &= \left(1 + \frac{2}{K} \frac{H}{h} \right) \left(\frac{H}{h} \right)^2 \left[\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \left\{ 2 \frac{z}{h_t} + \left(\frac{z}{h_t} \right)^2 \right\} \right] \\ A_3 &= \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{H}{h} \frac{1}{K} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{H}{h} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{4} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{w}{gh}} = & (1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}) (1 + \frac{z}{h_t}) \sqrt{3} (\frac{H}{h})^{3/2} \operatorname{sech}^2(2K \frac{X}{L}) \tanh(2K \frac{X}{L}) [1 - \frac{7}{8} (1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}) \frac{H}{h} \\ & - \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}) \frac{H}{h} \{ 2 \frac{z}{h_t} + (\frac{z}{h_t})^2 \} - \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}) \frac{H}{h} \operatorname{sech}^2(2K \frac{X}{L}) \{ 1 - 6 \frac{z}{h_t} \\ & - 3 (\frac{z}{h_t})^2 \}] \end{aligned} \quad (4.9)$$

圧力：

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho g H} = & \operatorname{sech}^2(2K \frac{X}{L}) - \frac{3}{4} (1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}) \frac{H}{h} \operatorname{sech}^2(2K \frac{X}{L}) \{ 1 - \operatorname{sech}^2(2K \frac{X}{L}) \} \\ & - \frac{3}{4} (1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}) \frac{H}{h} \operatorname{sech}^2(2K \frac{X}{L}) \{ 2 \frac{z}{h_t} + (\frac{z}{h_t})^2 \} \{ 2 - 3 \operatorname{sech}^2(2K \frac{X}{L}) \} - \frac{z}{H} \end{aligned} \quad (4.10)$$

波速：

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{c}{gh}} = & (1 - \frac{1}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h}) [1 + (1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}) \frac{H}{h} (\frac{1}{2} - \frac{1}{K}) + (1 + \frac{2}{K} \frac{H}{h}) (\frac{H}{h})^2 \{ \frac{1}{K} (\frac{1}{K} - \frac{1}{4}) \\ & - \frac{3}{20} \}] \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\text{静水面の位置：} \quad \frac{\delta}{H} = \frac{1}{K} (1 - \frac{1}{12} \frac{H}{h}) \quad (4.12)$$

以上がハイパボリック波の表示式であるが、問題は $K=3$ の近傍でクノイド波理論による値と、どの程度異なるかである。

図-10 は H/h が $1/2$ および $1/5$ の場合の、波速に対する四つの理論曲線の比較を示したもので、実線が微小振幅波、破線が Stokes 波、鎖線がクノイド波およびハイパボリック波である。鎖線上の黒丸は $K=3$ の点であって、その点より $T\sqrt{g/h}$ の値がかなり小さくなったところで、クノイド波とハイパボリック波の両曲線が離れることがわかるが、そのあたりはすでにクノイド波理論の適用性が問題となるところである。また図-11 は静水面上からの波の峰高 $\eta_0 = H - \delta$ に対する各理論の比較を示したものである。この場合は、 $K=3$ の点から $T\sqrt{g/h}$ の値が小さくなると、急激にクノイド波とハイパボリック波の曲線は離れてしまうが、 $K>3$ の領域では両者はほぼ一致している。また Stokes 波の曲線とクノイド波の曲線が交わる点は、波速の場合でも、 $K=3$ の点よりも $T\sqrt{g/h}$ の値が大きく、このことは実用上、Stokes 波理論が適用できない $T\sqrt{g/h}$ の大きい領域では、クノイド波理論でなくても、取扱いの簡単なハイパボリック波理論で十分

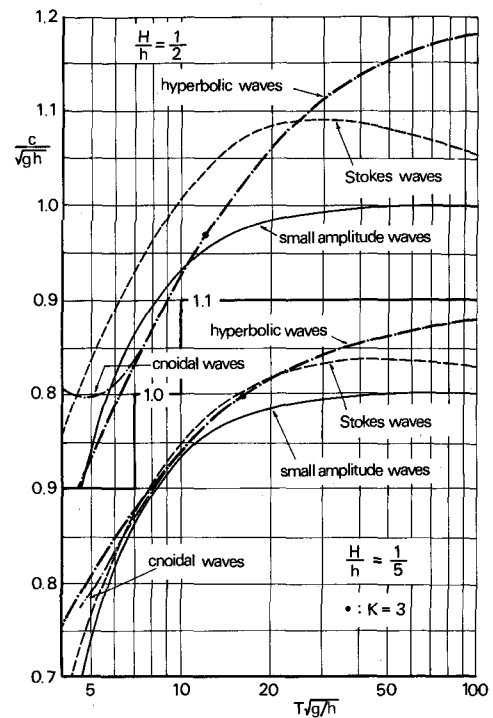


図-10 波速に対する各理論の比較

であることを示している。

5 クノイド波理論の適用限界

水深が浅くなってくると、Stokes 波理論の適用に問題が起こるように、クノイド波理論では逆に水深が大きくなるとその適用に限界があることはすでにふれた。また、こうした理論は一樣水深に対するものであるから、海底に勾配があるとどうなるのか、波が砕けるようになってこの理論は適用できるのか、など種々の問題がある。ここでは、このような適用限界を検討してみる。

(1) Stokes 波の曲線との交点から求めた限界

図-11 を例にとって Stokes 波の曲線をながめてみると、この曲線は $T\sqrt{g/h}$ がある値になるとクノイド波の曲線と交わり、さらに $T\sqrt{g/h}$ が大きくなると η_0/H の値が逆に減少しはじめる。このことは、 $T\sqrt{g/h}$ の値が大きい Stokes 波の理論は適用できないことを示している。したがって、両者の曲線の交点を適用限界点であるとする考え方も実用上からは妥当であろうと思われる。この意味で、両曲線の交点を $T\sqrt{g/h}$ と H/h の関係で示したものが図-12 である。波速については $c\sqrt{gh}$ の曲線、波の峰高については η_0/H の曲線であって、これらの曲線より上側がクノイド波（ハイパボリック波）、下側が Stokes 波の適用領域である。もう一つの $K=3$ の曲線は、これより上側の領域がハイパボリック波の式を適用してよいことを示したもので、波の峰高の場合には限界曲線がすべて $K=3$ の曲線より上側にあり、これはもはやクノイド波の関係式は必要でないことを意味している。一方、波速の限界線は、 H/h の小さい領域で $K=3$ の曲線の下側に存在する部分があるので、厳密にはそこではハイパボリック波が適用できないが、そこは Stokes 波とクノイド波の理論値の差が1%以下のところであるから、そのような領域では両者の交点でなく $K=3$ の曲線を Stokes 波とハイパボリック波の限界としてよい。

(2) 実験値との適合性からみた限界

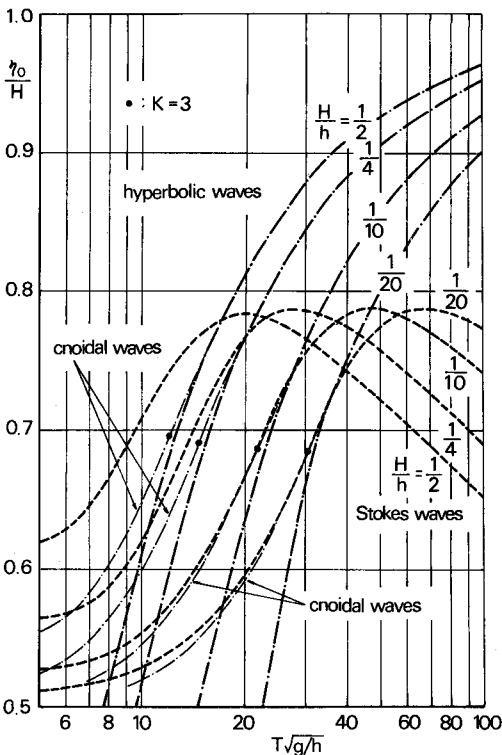


図-11 波の峰高に対する各理論の比較

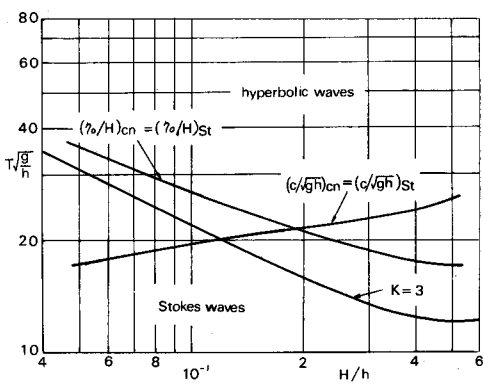


図-12 クノイド波と Stokes 波の両曲線の交点から求めた限界

これは実験を行なって、それぞれの理論がどの範囲まで実験値と一致するかを調べて、適用限界を知ろうとするものである。しかし、この場合は実験の精度が非常に影響するので慎重に実験を行なう必要がある。

実験は波速、波長、波の峰高および水粒子速度について実施した。図-13は $T\sqrt{g/h} = 6 \sim 30$ の範囲に対して行なった波速の実験¹³⁾¹⁴⁾

のうち、 $h/H \approx 3$ の場合の値を点描したもので、実験誤差（読み取り誤差）は0.5%程度であるが、実験値がクノイド波とStokes波の両曲線の間に入り、かつ両曲線の差は最大約3%程度であるから判定がかなりむずかしい。また $T\sqrt{g/h} > 30$ になると、両曲線の差は大きくなるが、2次波峰が発生して精度の高い実験ができないので、実験資料がない。

また図-14は代表例として、 $T\sqrt{g/h} = 15$ と 30 の場合の波の峰高の実験結果を示す。実験に際しての読み取り誤差は4%程度であるが、波形がきれいでないと理論曲線と比較しても意味がない。 $T\sqrt{g/h} = 15$ の場合は両曲線にあまり差がないので、どちらに適合するか判定はむずかしいが、 $T\sqrt{g/h} = 30$ の場合は、 h/H が小

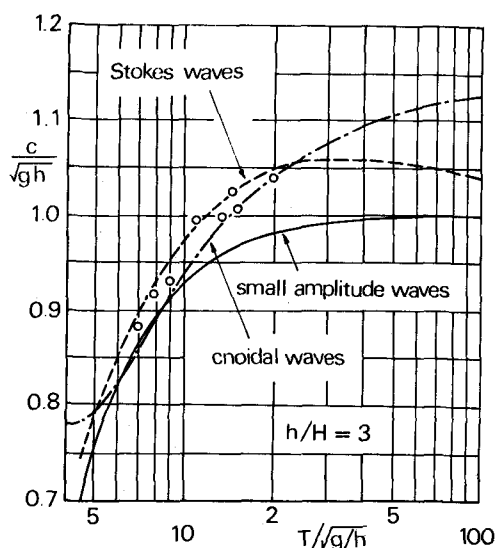


図-13 波速に対する実験と各理論曲線との比較

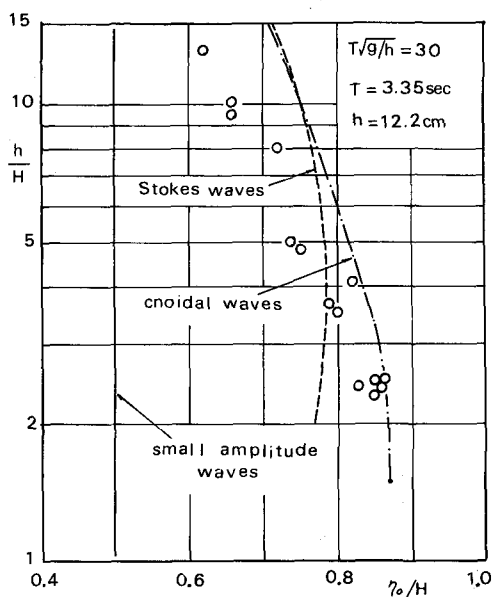
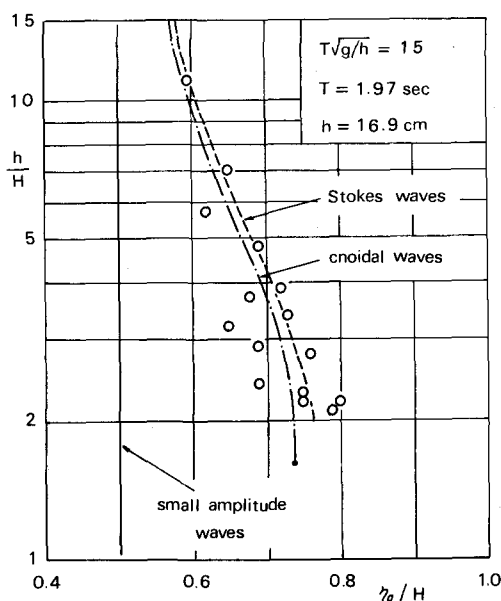


図-14 波の峰高に対する実験と各理論曲線との比較

さくになると差があらわれ、実験の最大値に注目すると、クノイド波の曲線の方を適用すべきであることがわかる。

水粒子速度の測定は、hot-film 流速計と水素気泡をトレーサーとする方法によって行なったが、¹⁵⁾ 図-15 は一例として $H/h \approx 0.3$ ，測定点が水底から水深の 75% の位置のときの、波の峰および谷での水平方向水粒子速度 u_c および u_t を示したものである。これは、 $T\sqrt{g/h}$ の値が大きいくところを除けば、Stokes 波とハイパボリック波との間にはあまり差がないので、どちらがよく一致するかは判定しがたい。しかし、鉛直分布を測定して、各理論曲線と比較してみると、適用性は非常によくわかる。図-16 は $T\sqrt{g/h} = 8.6$ および 9.6 のときの、波の峰での水平方向水粒子速度の鉛直分布を示したもので、前者は Stokes 波に、後者はハイパボリック波に一致することがわかる。

このように実験値と比較することによって、理論の適用限界をおおよそ判定することは可能であるが、実験の精度、実験波のきれいさ、測定方法、理論そのものの正しさなどによって、明確にその境界を見出すことは不可能である。

(3) 水粒子速度と波速との関係からみた限界

碎波近傍での波速 c と波の峰における水平方向水粒子速度 u_c との関係を、特殊な方法で実験

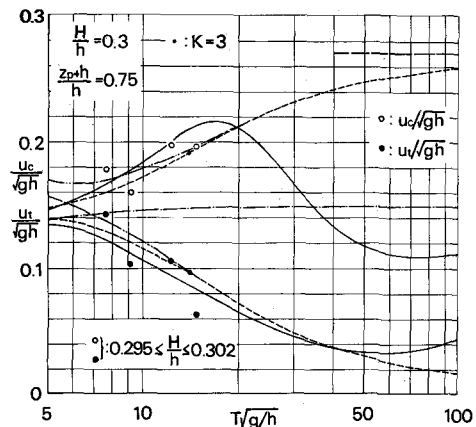


図-15 波の峰および谷での水平方向水粒子速度に対する実験と各理論曲線との比較

(実線：Stokes 波，破線：ハイパボリック波，2点鎖線：クノイド波，1点鎖線：微小振幅波)

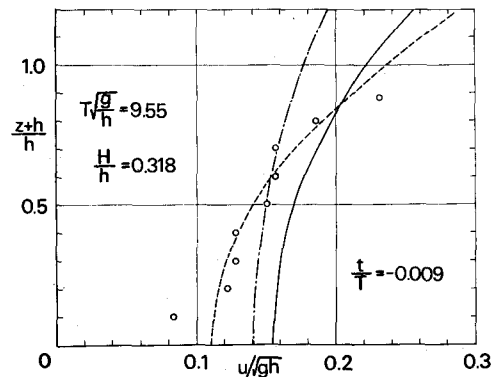
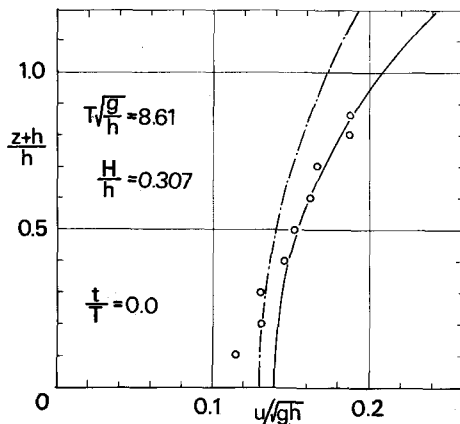


図-16 水平方向水粒子速度の鉛直分布

(鎖線：微小振幅波，実線：Stokes 波，破線：ハイパボリック波)

により調べた結果、波が砕けるときには $u_c \approx c$ であることがわかった。¹⁶⁾ところが、クノイド波理論を調べてみると、波が砕けるような大きい波高でないのかかわらず、 u_c/c の値が1を越える場合があることがわかった。図-17はクノイド波の第2近似の理論を用いて、 $u_c/c = 1$ となるとき H/h と $T\sqrt{g/h}$ の関係を示したもので、山田、Mc Cowan、Laitone のいずれの砕波限界よりも小さい H/h の値で波が砕けることになり、妥当でない。このことは、 $u_c/c = 1$ の近くでは、もはやクノイド波理論は適用しがたいことを示しているといえる。

(4) 水底勾配がある場合への適用限界

水平床とみなしてもよい程度の、底勾配が $1/200$ という非常に緩い斜面上を進行する波に対して、クノイド波の理論を適用してみた。図-18は水面に浮べたトレーサーを追跡して測定した水平方向水粒子速度の水平分布を示したもので、比較のために示した Stokes 波およびクノイド波の理論分布とまったく一致せず、波の峰近傍全体が非常に尖っている。そこで、波形自身が尖っているのではないかと考え、水平床の部分と $1/200$ 勾配の斜面部分とで波形を測定して比較してみたところ、やはり水平床上では理論通りの波形をしているが、 $1/200$ 勾配の斜面上では理論波形より極端にやせて尖っていることがわかった。このことは $1/200$ という水平床とみなされる程の緩勾配の斜面上を波が進行すると、変形して尖ってくることを示している。この事実は非常に面倒なことで、波形が底勾配に非常に敏感であることをあらわし、「底勾配が波の特性にどのような影響を与えるか」という新しい課題を提起している。

6 むすび

クノイド波理論の実用化という観点から出発した約10年にわたる研究の概要を紹介したが、まだ多くの未解決の問題というよりも、むしろ新しい問題を提示していちおうこの研究を閉じることになった。この小文が少しでも波の理論の本当の実用化に役立てば幸である。

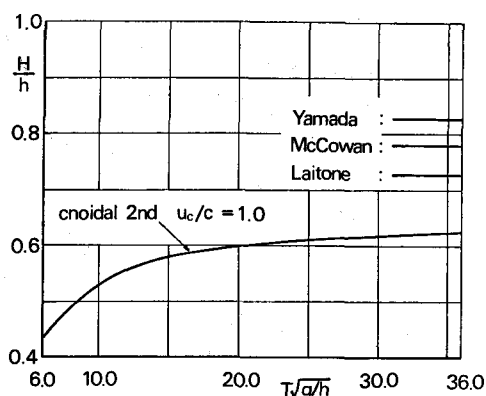
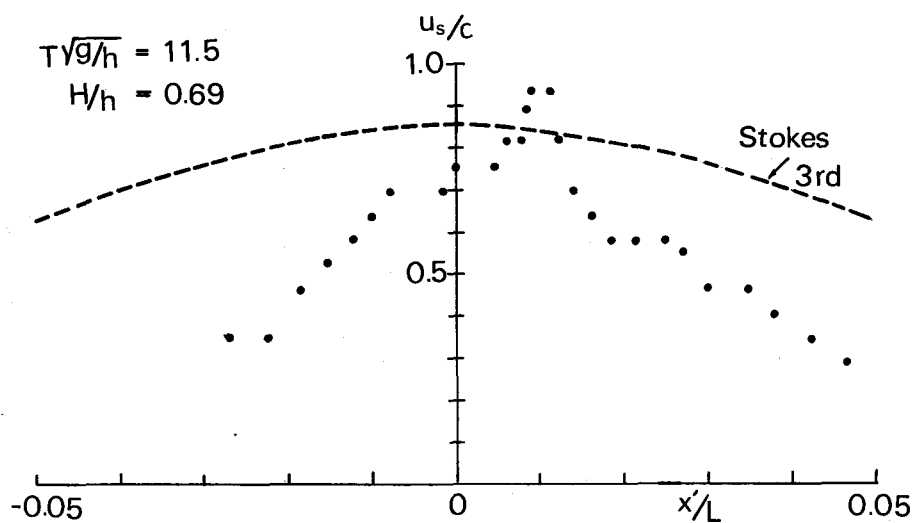


図-17 $u_c/c = 1$ のときの H/h と $T\sqrt{g/h}$ の関係

(クノイド波の第2近似理論による)

(a)



(b)

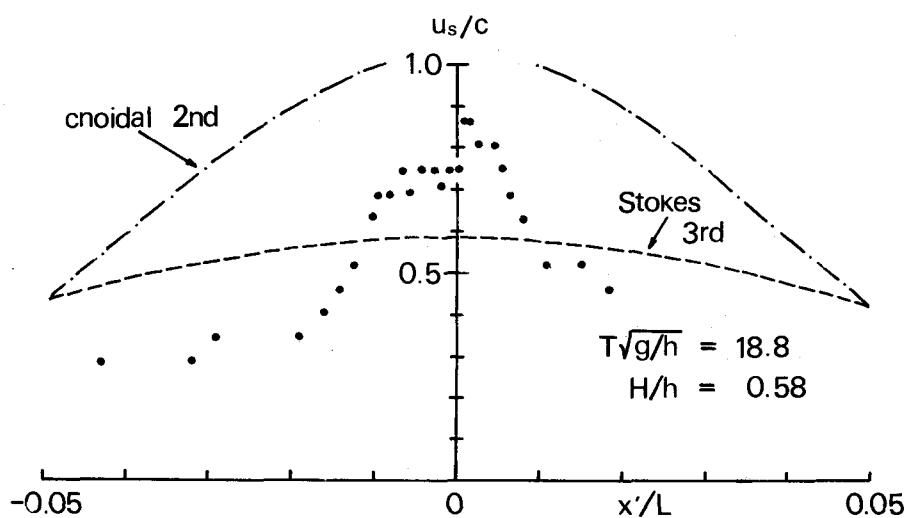


図-18 水面における水平方向水粒子速度の水平分布

参 考 文 献

- 1) Korteweg, D.J. and G. de Vries: On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves, *Phil. Mag.*, Ser.5, Vol.39, 1895, pp. 422-443.
- 2) Keulegan, G.H.: Wave Motion, *Engineering Hydraulics*, Wiley, New York, ed. by H. Rouse, Chapt. 11, 1950, pp. 711-768.
- 3) Laitone, E.V.: Limiting Conditions for Cnoidal and Stokes Waves, *Jour. of Geophy. Res.*, Vol.67, No.4, April, 1962, pp. 1555-1564.
- 4) Wilson, B.W., L.M. Webb and J.A. Hendrickson: The Nature of Tsunamis, Their Generation and Dispersion in Water of Finite Depth, *National Science Co., Tech. Rep. No. SN57-2*, August, 1952, pp. 1-150.
- 5) 岩垣雄一: クノイド波に関する研究 (第1報)——波形こう配および波形について——, 京大防災研究所年報, 第7号, 昭39.3, PP.373-386.
- 6) 岩垣雄一: クノイド波に関する研究 (第2報)——波速および波長——, 京大防災研究所年報, 第8号, 昭40.3, PP.343-351.
- 7) Le Méhauté, B. and L.M. Webb: Periodic Gravity Waves over a Gentle Slope at a Third Order of Approximation, *Proc. 9th Conf. on Coastal Engg.*, 1964, pp. 23-40.
- 8) Koh, R.C.Y. and B. Le Méhauté: Wave Shoaling, *National Engineering Science Co., Contract No. Nour-4177(00)*, 1966.
- 9) Masch, F.D.: Cnoidal Waves in Shallow Water, *Proc. 9th Conf. on Coastal Engg.*, 1964, pp. 1-21.
- 10) 岩垣雄一: クノイド波に関する研究 (第4報)——hyperbolic waves について(1)——, 京大防災研究所年報, 第10号B, 昭42.3, PP.283-294.
- 11) 岩垣雄一・酒井哲郎: クノイド波に関する研究 (第5報)——hyperbolic waves について(2)——, 京大防災研究所年報, 第11号B, 昭43.3, PP.463-475.
- 12) 岩垣雄一・酒井哲郎: クノイド波に関する研究 (第7報)——shoaling に関する実験——, 京大防災研究所年報, 第12号B, 昭44.3, PP.569-583.
- 13) 岩垣雄一・細見昌彦: クノイド波に関する研究 (第3報)——波形, 波速および波長に関する実験——, 京大防災研究所年報, 第9号, 昭41.3, PP.637-645.
- 14) 岩垣雄一・山口正隆: クノイド波に関する研究 (第6報)——クノイド波理論の適用限界について——, 京大防災研究所年報, 第11号B, 昭43.3, PP.477-502.
- 15) 岩垣雄一・酒井哲郎: クノイド波に関する研究 (第8報)——水平方向水粒子速度に関する実験——, 京大防災研究所年報, 第13号B, 昭45.3, PP.373-389.
- 16) 岩垣雄一・酒井哲郎: クノイド波に関する研究 (第9報)——砕波近傍におけるクノイド波理論の適用性——, 京大防災研究所年報, 第14号B, 昭46.4, PP.327-345.