非線型の波動問題

椎 貝 博 美

1 概 説

水工学における夏期研修会において波動論はくり返し論ぜられ，すでに広い分野をカバーしている。現在線型の波動論は良く発達し，応用範囲も非常に広くなっていて，海岸工学の分野の重要な武器の一つになっている。又，波動については数多くの良書があり，色々参照するには困らないようになっている。そのような状態にもかかわらず，ここで非線型の波動問題を論じてみたく思ったのは次のような理由からである。

i）自然現象は元来非線型性を強く含むものである。

ii）波に対する観点を変えてみると新たな考え方が開けるのではないか。

iii）非線型の波動問題については最近ではすでに何冊かの書物が出版されており[5),6)]，詳しく調べてみるとわれわれの分野にも適用されることが数多くあると思われる。その為，波の非線型性に着目した理論の現状を概括的にのべてみたく思った。

iv）しかしながら非線型波動論は線型波動論に比べて波のデッサンといったような程度にしか発達していない。この為かえって波のもつ性質がわかる場合があって仲々面白いものである。それと同時に将来このような理論の大きな発展を見る可能性を秘めており，その面からみてもわれわれの分野において研究してみる価値があると考えた。

もちろん，通常線型波動論として知られている波動論は元来非線型の方程式を線型化したものであり，波動というものは元来非線型性を内包しているといえるのである。どのような所でどのような線型化がなされているかちょっと復習をしておくと次のようである。

まずナビエ・ストークスの方程式において $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ，およびこれに類する項を無視する。普通は波動に由来する流速 u が小さいから u^2 の項を落すということである。

次に水面において水面変位 η と鉛直方向の流速 w との関係を

$$z=0\text{において}\ \frac{\partial \eta}{\partial t}=w \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1-1)$$

とおいている。これは厳密にいえば静水面 $z=h$ においてではなく $z=h+\eta$ においてであるからこの境界条件も非線型な境界条件である。又（1－1）式自体も厳密ではなく $u\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$ という非線型項が省略されている。式（1－1）は運動学的な境界条件（kinematic boundary condition）とよばれている。

次にもう一つの境界条件として力学的境界条件（dynamic bounbary conditon）がある。これは自由水面において圧力一定という物理的な様子を記述したものである。これは結局の所水面にそってベルヌーイサムが一定，すなわち

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(u^2+w^2)+\frac{p}{\rho}+gz=\text{const. at } z=h+\eta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1-2)$$

ということになるが，通常は線型化されて

$$gz+\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{p_0}{\rho}=const. \quad at \quad z=h \quad \cdots\cdots (1-2')$$

という形にして用いる。ここでも式（1－1）と同様の線型化がなされている。もちろんこの位の線型化をおこなっても通常の場合差支えないことはいろいろな線型波動論で詳しくのべられているとうりである。又非線型項を考慮しながら近似の度合を高めて行くと第7近似位まで現在は求められていることも良く知られている。このような線型近似より発展した波動論は現実の問題に応用してかなり良い結果を与える一方，非線型性がそれほど強く表面に出てこないので何となく物足りない感じがするものである。そこで次章からは海岸工学上おなじみのクノイド波と孤立波についてまず考察をすすめ，これを手掛りにしてKorteweg－de Vries 型の方程式，略してK－dVeq・はLambなぞを見ると土木屋が発明した方程式であるにもかかわらず[1]，土木の分野ではあまり用いられず（かえって*Scott－Russel*の方が有名である）現在は物理学の分野で注目されている方程式である。次いで一般の輸送型の方程式と準線型の方程式について考察を進め，最後にmatrix wave について論ずるものとする。内容は筆者が東京工業大学，Asian Institute of Technology等で行なっている講義を骨子にしたものである。

問題1．線型のラプラス方程式，すなわち

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=0 \text{ を } u, w=0 \quad at \quad z=-\infty, \text{ および}$$

$$w=\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad at \quad z=\eta,\ gz+\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{p_0}{\rho}=const. \quad at \quad z=\eta$$

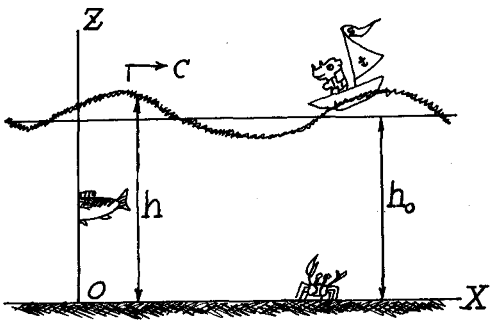
でとけ，という問題は線型問題か？もしそうでないとしたら，非線型問題の定義はなにか。

2　クノイド波と孤立波

まず手がかりとしてわれわれのよく知っているクイイドについて考えよう。孤立波というのはクノイド波の特別な場合を考えることもできるので一緒に論ずることにしよう。

よく知られているように，又第1節で簡単にのべたように，非圧縮性完全流体の渦なし流れは速度ポテンシャル $\phi(z,c,t)$ を有し，この ϕ は又ラプラスの方程式を満足する。

$$\phi_{xx}+\phi_{zz}=0 \cdots\cdots (2-1)$$



図－1

又，境界条件は水路の底で鉛直方向の速度成分がゼロであり，水面でも水面を形成する水粒子がいつまでも水面にとどまること，圧力が一定であることの3つを採用すればよい。座標系は前節と同じく図1のようにとるものとする。

$$z=0 \quad \text{で} \quad \phi_z=0 \quad \cdots\cdots (2-2)$$

$$z=h \quad \text{で} \quad \phi_z=h_t+\phi_x h_x \quad \cdots\cdots (2-3)$$

$$z=h \quad で \quad \phi_t+\frac{1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2)+g(h-h_0)=0 \quad \cdots\cdots (2-4)$$

ここで方程式（2－1）と境界条件（2－2）は元来線型なので，残りの（2－3），（2－4）両式を線型化し，かつ表面波形ηを正弦波と仮定すると良く知られている式

$$\omega^2=gk\tanh kh \quad \cdots\cdots (2-5)$$

がえられる。ここにωは$2\pi/T$，$k=2\pi/L$であり，Tは周期，Lは波長ということになる。(2－5)から波速cを作れば

$$c^2=\frac{\omega^2}{k^2}=\frac{g}{k}\tanh kh \quad \cdots\cdots (2-6)$$

となる。水深hが与えられたときcはkの関数となるので，このような波は分散性の波(*dispersive waves*)とよばれる。波速cは厳密には位相速度があってエネルギの伝わる波速，すなわち群速度とは異なる。長波の場合はほぼ一致する。（2－6）式はkに関しては非線型である。今比較的波長の長い波を考えることにして（2－6）式を$k\ll1$つの条件で展開してみると，（第一項のみとる），

$$c^2=c_0^2\left(1-\frac{k^2h^2}{6}\right) \quad \cdots\cdots (2-7)$$

がえられる。$c_0\sqrt{gh}$は長波の波速である。（2－7）式より

$$kx-\omega t=k(x-c_0t)-\frac{c_0h^2}{6}k^3t \quad \cdots\cdots (2-8)$$

が得られる。これは$kx-\omega t$を一つの変数として考える場合に役に立つ式である。

さて，次の段階として次のような座標変換を行なう。

$$\xi=\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x-c_0t) \quad \cdots\cdots (2-9)$$

$$\tau=\varepsilon^{\frac{3}{2}}t \quad \cdots\cdots (2-10)$$

$$z=y \quad \cdots\cdots (2-11)$$

ただしεは何か小さいパラメータである。

（2－9）～（2－11）のような一連の変換の意味は次の通りである。まず元来の独立変数はx，t，zの三つであったのでやはりξ,τ,yの三変数が新しい独立変数になっている。このうちz方向には座標の変換はないが，x方向の座標軸はちぢめられており，結果的にはz方向軸が引のばされたのと同じことになっている。時間軸も又うんとちぢめられている。又ξは$x-c_0t$の形にまとめられているので，現象は座標軸を長波の波速と同じ速さで移動させながらとらえられていることになる。もちろん現象は非線型であるから時間の経過するうちに座標軸の移動速度は波の位相速度とずれてくることになる。ξ，τのεについてのオーダーについては後にのべることにする。

従属変数としてはh，ϕがある。hは図1で示されるように水深をあらわしている。h，ϕもεについて次のように展開する。

$$h(\xi,\tau)=h_0+\varepsilon h^{(1)}+\varepsilon^2h^{(2)}+ \quad \cdots\cdots (2-12)$$

$$\phi(\xi,y,\tau)=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[\phi^{(1)}+\varepsilon\phi^{(2)}+\cdots\right] \quad \cdots\cdots (2-13)$$

(2－13) を（2－1）に代入しεのベキ乗について整理すると次の一連の式がえられる。(ε^3 のオーダーまで)

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon^0 &: \phi^{(1)}_{yy} = 0\\ \varepsilon^1 &: \phi^{(1)}_{\xi\xi} = -\phi^{(2)}_{yy}\\ \varepsilon^2 &: \phi^{(2)}_{\xi\xi} = -\phi^{(3)}_{yy}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2-14)$$

(2－13) を境界条件（2－2）に代入すると同様にして

$$y=0 \quad \text{で} \quad \phi^{(1)}_y = \phi^{(2)}_y = \cdots\cdots = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-15)$$

注意すべきことは（2－14）式はすべてのξ，y について成立し，（2－15）は底の条件であるから $y=o$ でのみ成立するということである。（2－14）の最初の式を積分すると

$$\phi^{(1)} = f_1(\xi)y + f_2(\xi)$$

がえられるが，（2－15）から$f_1=o$ でなくｚ はならない。すると上記のような変換を行なった場合 $\phi^{(1)}$ はyにはよらないことがわかる。従ってｙ方向の（物理面ではｚ方向の）速度成分はいたるところでゼロになっていることがわかる。これは$\phi^{(1)}$ については長波の一次元解析をしていることになり，通常用いられている仮定と一致する。実は（2－9）から（2－13）式までの一連の変換は$\phi^{(1)}$ について通常の長波近似の式をえる為になされたものに他ならない。つまり通常物理的に求められているものをかなり数学的な表現におきかえたものである。このテキストのここのところの狙いは，数学的な手法を優れているとするところにあるのではなく，同じ現象でもいろいろの見方のあることを示したいところにある。人によっては物理的な意味づけがないと納得できない人もあるが，他方数学的にまとまって見えると満足する人も多いものである。筆者はどちらが良いといっているのではなく，あくまでいろいろな見方のあることを強調しているのである。

それはさておき，もう少し計算を進める。（2－14）の二番目の式，すなわち$\phi^{(1)}_{\xi\xi} = -\phi^{(2)}_{yy}$ に注目すると，左辺はｙの関数ではないから$\phi^{(2)}$ は

$$\phi^{(2)} = -\frac{1}{2}\phi^{(1)}_{\xi\xi}\, y^2 + A(\xi)y + B(\xi)$$

であることがわかる。底で$\phi^{(2)}_y = o$ となることからA＝0である。又B(ξ)は元来$\phi^{(1)}$に含まれると考えられるのでここではｏととることができる。従って

$$\phi^{(2)} = -\frac{1}{2}\phi^{(1)}_{\xi\xi}\, y^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-16)$$

がえられ，全く同様にして$\phi^{(3)}$も求められる。あとはまだ用いていない表面に関する境界条件を用いると，かなりゴタゴタと計算した結果

$$h^{(1)}_\tau + \frac{g}{c_0}h^{(1)}\ h^{(1)}_\xi + \frac{c_0 h_0^2}{6}h^{(1)}_{\xi\xi\xi} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-17)$$

がえられる。最後の頃の係数は前にもとめた分散式のk^2の係数に均しい。（2－17）式はξについて第二項の係数が１となるように変換すれば

$$u_t + u u_x + \mu u_{xxx} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-18)$$

というKorteweg-de Vries 方程式となることは容易にわかる。従って波高の小さい波を非線型的に扱かうとその一次近似はKorteweg -de Vries 方程式に従がうことがわかった。

さて（2-18）式は色々と面白い性質を有じているが，その一つとして

$$\xi = x - \lambda t \quad \cdots\cdots (2-19)$$

とおく。ここに λ は定数である。今度は u はt の直接の関数ではなく $u = u(\xi)$ であるとする。このようにすると定常波形の解が（もしあれば）求められることになる。すると容易に（2-18）は2回積分ができて

$$3\mu\left(\frac{du}{d\zeta}\right)^2 = -u^3 + 3\lambda u^2 + 6Au + 6B \quad \cdots\cdots (2-20)$$

がえられる。（2-20）式はクノイド波を求めるときに波高についてでてくる方程式と全く同形である。今（2-20）式の右辺をo とおいた式

$$-u^3 + 3\lambda u^2 + 6Au + 6B = 0$$

が三つの実根 C_1, C_2, C_3 をもつとすれば（$C_1 < C_2 < C_3$）u は

$$u = c_2 + (c_3 + c_2)\, cn^2\left[\sqrt{\frac{c_3 - c_1}{12\mu}}\left\{x - \frac{1}{3}(c_1 + c_2 + c_3)t\right\},\ k^2\right] \quad \cdots (2-21)$$

$$k^2 = \frac{c_3 - c_2}{c_3 - c_1}$$

がえられ，特に $C_2 = C_1$，$k = 1$，(cn→sech) のときには

$$u = c_1 + (c_3 - c_1)\, sech^2\left[\sqrt{\frac{a}{12\mu}}\left\{x - \left(u_\infty + \frac{a}{3}\right)t\right\}\right] \quad \cdots\cdots (2-22)$$

$$a = c_3 - c_1$$

がえられる。（2-21）はクノイド波，（2-22）は孤立波である。これらは土木工学ではおなじみの式であるが，似たような波動はイオン音波などプラズマの問題の中にも数多く見受けられる。

この章においてはKorteweg - de Vries 方程式がどのようにして出てくるかをのべ，それが見方を変えた孤立波，クノイド波の表現となることを示した。又，この章は文献2の角谷の研究ノートによる所が多大である。

問題2．（2-14）式を導びいたと同様の変換によって水面での境界条件を求めると次のような形式になることを示せ。

$$\phi_y^{(3)} = -c_0 h_\xi^{(2)} + h_\tau^{(1)} + \phi_\xi^{(1)} h_\xi^{(1)} \qquad (a)$$

$$g h^{(1)} = c_0 \phi_\xi^{(1)} \qquad (b)$$

$$c_0 \phi_\xi^{(2)} = \phi_\tau^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_\xi^{(1)2} + g h^{(2)} \qquad (c)$$

なお ho はどのような形式の関数となるか。

問題3．$\phi_{yy}^{(3)}$ は一般に $\phi_{yy}^{(3)} = -\frac{1}{2}\phi^{(1)}_{\xi\xi\xi\xi} y^2$ とかけることを示せ。

問題4．水深をh，波高を η としたときのクノイド波の基本式は

$$\frac{\partial^2_\xi}{\partial\xi^2} = gh\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + gh\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{3}{2}\frac{\eta^2}{h} + \frac{h^2}{3}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right]$$

で与えられる。これを $x - ct = \xi h$，$\eta = \zeta h$，$\frac{c^2}{gh} - 1 = b$ と座標を変換すると

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^3}\left[6b\zeta - 9\zeta^2 - 2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}\right] = 0$$

となることを示せ。これは本文中のKorteweg − de Vries 方程式の積分とどのような関係にあるか。

問題5．（2 −22）式において孤立波の解は$C_2 \to C_1$ の場合にえられた。$C_3 \to C_3$ とするとどのような解となるか。物理的にこのような現象は可能か。

3 Korteweg-de Vries 方程式の性質

Korteweg −de Vries 方程式 をとくにクノイド波や孤立波がえられる。もちろん得られた解についてその性質を調べればそれぞれの波について性質がわかるはずである。この方法は土木工学についてはよく用いられている。これに対しもとの方程式の性質を調べてみて何か一般的な性質をみつけ出そうとする方法がある。このような方針は時をすると抽象的になり現実と遊離したような解析となる恐れがある。しかし適正に行なわれるときはかなり一般性のある結果がえられるので有効な方法である。

さてKorteweg-de Vries 方程式を中心とした似たような方程式系をかいてみよう。

$$\text{バーガー型}\,(\mathit{Burger's})\quad u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0 \tag{3−1}$$

$$\text{K−dV型}\,(\mathit{Korteweg\text{-}de\ \ Vries'})\quad u_t + uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \tag{3−2}$$

$$\text{開水路型}\,(\mathit{Open\ channel})\quad u_t + uu_x + \lambda u = 0 \tag{3−3}$$

ν, μ, λ はいずれも定数と考えてよいが，弱い非線型性を有するものとしてよい。又，νとかμとか書いても特に粘性係数を表わすものと限ってはいないことは前節までの説明にあった通りである。（3 − 1）の Burger型の方程式はNavier−Stokes 方程式の模型のようなもので乱流理論などでおなじみのものである。（3 − 3）の開水路型というのは，開水路の抵抗法則がu^2に比例している所からでu^2を$u \times u$ を考えるとλは弱い非線型の係数とみなされるからである。K − dV型はある意味ではもっとも実用性の高いものである。開水路型の方程式をさらに一般的にしたものは後章で詳しく論じられる。

さて（3 − 1），(3 − 2)については$u = u_0$ = 一定は解である。そこで

$$u = u_0 + \delta u \tag{3−4}$$

とおきδu は振動型，すなわち

$$\delta u \propto e^{i(kx-\omega t)} \tag{3−5}$$

とおく。これはもしこのような周期性のある解があったらどうなるかということと考えているわけであるが，ωは実数にもなり得るので実はもっと広いことがらを検討しているともいえる。

（3 − 4），（3 − 5）を（3 − 1），（3 − 2）へ代入すれば，$|u_0| \gg |\delta u|$を考えると

$$\frac{\omega}{k} = u_0 + i\nu k\quad(\mathit{Burger's}) \tag{3−6}$$

$$\frac{\omega}{k} = u_0 - \mu k^2\quad(k-dV) \tag{3−7}$$

がえられる。（（3 − 7）をみれば位相速度ω/kが実数ででてくるからμの正負にかかわらず周期的な解は存在することになる。しかもω/k はk^2の関数になっておりその係数は$-\mu$である。これを(2−

7）式，あるいはクノイド波の解から導びくことと比較するといかに簡単かわかるであろう。もっとも（3－7）は単に可能性を示しているだけであって c_u を具体的に求めることとは別である。又，（3－7）を k^2 についてとくと

$$k^2=\frac{u_0-c_0}{\mu}\left(c_0=\omega/k\right) \quad\cdots\cdots(3-8)$$

となるから $\mu>o$ の時には $uo>c_0$ のときには k が存在するが，$uo<c_0$ のときには k は純虚数になる。（3－7）は u_0，k が与えられたとして ω の純虚を論じたが，（3－8）は反対に uo，c_0 が与えられたとして k の純虚を論ずるのである。このときは k が純虚数であるから $k=is$ の s：実数とかき

$$\delta u\sim c^{ik(x-\frac{\omega}{k}t)}=e^{-s(x-c_0t)}$$

となり $|x|\to\infty$ に対して δu はむやみに大きくなる。これはこのような場合には定常波は不安定になるということを示している。このときに変って現われてくるのが孤立波であると考えることができる。もっとも上の条件は孤立波を予測しているわけではなくて，孤立波の存在の可能性をいっているわけである。

順序が逆になったが，（3－6）の意味は，（3－6）を（3－5）に代入すると

$$\delta u\propto e^{ik(x-\frac{\omega}{k}t)}=e^{ik(x-i\nu kt)}=e^{ikx}\,e^{\nu k^2t}$$

となる。このような波動は x にに関しては安定であるが，$\nu>o$ の場合は時間的に不安定な波が現われることになる。これは良く知られている乱流論の一つの命題「粘性の存在の為に乱れが発達することがある」ということを模型的に表現していると考えられる。もちろん，Burger モデルは簡単なものであり，これだけから結論が出せるわけのものではないが，このモデルを用いることは憶えておいて損な手法ではない。

又前と同様に k についてとくと

$$k=\frac{i}{\nu}\left(\frac{\omega}{k}-u_0\right) \quad\cdots\cdots(3-9)$$

となり，

$$\delta u\sim e^{ik(x-\frac{\omega}{k}-t)}=e^{-\frac{x}{\nu}(\frac{\omega}{k}-u_0)}\,e^{i\omega t}$$

となるので $\omega/k>u_0$ の時は $x\to+\infty$ で消えるような波をあらわす。従って $x=-\infty$ で発生した波が現地点にやってきたと考えられる。逆に $u_0>\omega/k$ のときは $x\to+\infty$ で不安定になるような波である。これらのことは定性的な事柄であるとはいえ，電子計算機の初期値問題には応用ができるので注意を要する。

開水路の場合は前の二つとは少し事情が異なってくる。それは u_0 に相当する定常な解としては

$$uu_x+\lambda u=0$$

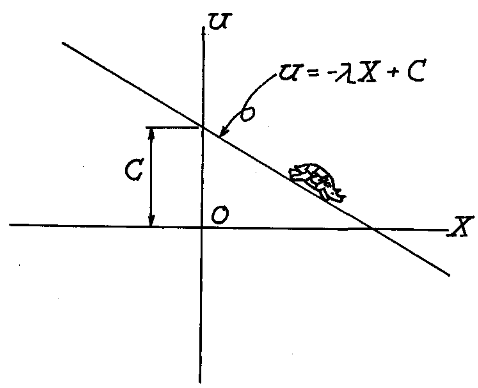
をといて $u_0=\lambda x+c$ がえられるからである。

$\lambda>o$ の時には u_0 は $x=-\infty$ で ∞，$x=+\infty$ で $-\infty$ となるから u について勾配のある流れとなっている。しかし $x=o$ は $u_0=c$ となるのでその附近では前にならって論ずることができる。このときは

$$\frac{\omega}{k}=u_0-\frac{\lambda}{k}i \quad\cdots\cdots(3-10)$$

となるから $\delta u \sim e^{ik(x-\frac{\omega}{k}i)} = e^{ikx} e^{-iku_0 t} e^{-\omega\lambda t}$ となり，$\lambda > 0$ のときには安定が解がえられる。しかし $\lambda < o$ のときには解は不安定である。

これらのことから類推できることは分散項に奇数次の微係数が現われると安定な定常的が波があらわれる可能性があることである。反対に偶数次の微係数があらわれると解は不安定となる。従ってBurger型とK－dV型の方程式はそれぞれ異なった型式に属するということができよう。方程式の型より安定・不安定が一応想像できることは面白いことである[10]。



図－2

さて，今まで（3－2）の形式の微分方程式をK－dv の方程式とよび，又実際この形式がKorteweg とdevries の導びいた形でもあるのだが，現在では次の（3－10）の形の方程式をK－dV の方程式とよんでいる。

$$u_t \pm u^p u_x + \mu u_x + \mu u_{xxx} = 0 \quad \cdots\cdots (3-10)$$

もちろん複号の＋をとり，p ＝1とおけば（3－2）の形式となる。これを

$$u = U(x - ct) \quad \cdots\cdots (3-11)$$

とおくと二回積分ができて，p＝1および根号が正のときには

$$\mu U_\xi = -\frac{1}{3} U^2 (U - 3c) \qquad (\xi = x - ct) \quad \cdots\cdots (3-12)$$

となることは容易にわかる。又これは前に示したところでもある。（問題参照）しかしもっと重要なのは（3－10）がいわゆるGardner－Morikawa変換，すなわち，$u \to \varepsilon u$，$\varepsilon^{\frac{p}{2}} x$，$\varepsilon^{\frac{3p}{2}} t \to t$ なる変換に対して不変であることで，K－dV Eq の解である孤立波も $u - c \to \varepsilon (u - c)$，$\varepsilon^{\frac{1}{2}} x \to x$，$\varepsilon^{\frac{3}{2}} t \to t$ なる変換に対して不変である。これは例えば波高（この場合u）が ε のオーダーで低くなると波長は相対的には $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ 倍，すなわち長くなり，時間も $\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$ のオーダーで遅くなることを示している。これは一種の結果論であって，孤立波の解で大体の見当がつくから，元の方程式も位相的に調べ易いわけである。しかし，もっと方程式系の解析法が進めば解の物理的（?!）性質は方程式を調べることによって見つけておき，実用的な解は数値解で間に合わせるというような解法も考えられるわけである。

問題6．一般化された K－dV 方程式 $u_t + u^p u_x + \delta^2 u_{xxx} = o$ において $u = U(\xi)$，$\xi = x - ct$ とおくとき

$$-cU + \frac{U^{p+1}}{p+1} + \delta^2 U_{\xi\xi} = L = const$$

がえられることを示せ。

問題7．前問の後，L＝const の式を U_ξ をかけて積分すると

$$\delta^2 U_\xi^2 = P_p(U)$$

がえられることを示せ。ここに $P_p(U) = \frac{2U^{p+2}}{(p+1)(p+2)} + cU^2 + 2(LU + M)$ である。 L,U，U_ξ が無限

遠点でゼロであるとすれば，この解はどうなるか。p＝1 の場合はどうか。このような解は孤立波といえるであろうか。

問題8．ガードナー・モリカワ変換は$u \to \varepsilon u$, $x=\varepsilon^{-\frac{p}{2}}x$, $t \to \varepsilon^{-\frac{3p}{2}}$いう変換である。一般的なK－dVの方程式は上記の変換に対して変らないことを示せ。Burger の方程式に対する不変な変換はどのようなものか。

4 輸送型の方程式

前節までに述べたことをやぶにらみ的に見かえしてみると次のようである。

まず，波の問題を扱かう時の常道として速度ポテンシャルϕから出発して微少振巾波をとり扱かった。結果はϕに関する線型の境界値問題となった。しかるに少し高次の解を求めようとすると，いやに厄介な計算の後非線型のK－dV方程式が出てきた。元々非線型であるオイラーの方程式より出発して再び非線型の方程式にもどったわけである。もとより京方程式であるオイラー型に比べてK－dV型はずっと使い易くはなっている。そこで考えられることは速度ポテンシャルϕを用いずに非線型のままで扱かえばもう少し見通しの良い結果が生じないか，ということが考えられる。このような試みはGel'fandあたりが始めたのが，組織立って行なわれた最初らしい。しかし今までの所，非常に成功しているといったわけではない。ほとんど今まで別の方法で得られている結果を追試，あるいは確認しているにとどまっている。しかし，非線型性を念頭において扱かっているので，全体として物の見方が新鮮であり，かつ，非線型性の影響がよく見られていろいろ面白い結果の生れる素地は十分にある。海岸工学ではradiation eguation は認識はされていないが，非線型性を重視して扱かっている一つの例であろう。特に摩擦頃の取扱かいには興味が持たれる点の一つである。

さて，直交座標系について連続の方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \quad \cdots\cdots (4-1)$$

で表わされる。又 Navier－Stokes の方程式はちょっと形を変ると

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu V^2 u+F_x \quad \cdots\cdots (3-2)$$

(以下y, x 方向についても同様)

の形にかけることはよく知られている。これは左辺については明らかにρuというx方向の単位体積があたりの運動量の保存形となっている。もしx方向の運動量が保存されるとすれば右辺はゼロになるわけであるが，運動量を増大させるものとして$\frac{\partial p}{\partial x}$が減少させるものとして粘性項が付加されているものと考えられる。もちろん（3－1）においても，もし質量が作られたり，失なわれたりすれば右辺はゼロではないことになる。そこで，（3－1),(3－2）の左辺に着目すれば，

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u&0&0&0\\0&u&0&0\\0&0&u&0\\0&0&0&u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}v&0&0&0\\0&v&0&0\\0&0&v&0\\0&0&0&v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\end{pmatrix}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}w&0&0&0\\0&w&0&0\\0&0&w&0\\0&0&0&w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\end{pmatrix}$$

とまとめて書けることがわかる（ρ, ρu, ρu, ρw)というベクトルは保存されるものを集めているよう

なベクトルである。又，各項でベクトルの前にかかっているマトリックスはuI，vI，wIという形をしている。（I は単位行列）従って運動方程式と連続の方程式を一緒にして

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial A V}{\partial x}+\frac{\partial B V}{\partial y}+\frac{\partial C V}{\partial z}=F \cdots\cdots \quad (3-3)$$

というような形式に書けることがわかる。Vはベクトル，A,,B, C, Fはマトリックスである。F はVを含んでおり，かなり複雑な形をしているのが普通である。しかし四次元の空間の中で統一された形式（3－3）でかけることは確かである。もし二次元，すなわちt とx ，の空間で考えれば（3－3）は三節で扱かったのと同じような形となっている。従ってK－dVとかBurger型式で通用した議論がここでもできるのではないかということがまず考えられる。しかし今までの所（3－3）に対して満足な議論が成されているわけではない。それはあたりまえであって，もし（3－3）について各種の性質が位相的に明らかになってしまえば，後の仕事は電子計算機におまかせしてしまえることになる。Burger 型の方程式は何とか厳密解もみつかっているが，K－dVの方はまだであってこれらをテンソル空間について拡張したものの方がよく判るということはまずありそうもない。そこで（3－3）についてもう少し簡単な形について調べてみてはどうかという考えが生れる。

ところで工学によく現われてくる方程式に波動型と熱伝型がある。後者は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (A\ ,B\ :\text{行列},\ u\ :\text{ベクトル}) \cdots\cdots \quad (3-4)$$

とかいてよいであろう。前者は

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}=c^2\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (c\ :\text{実数},\ \eta:\text{スカラー})\cdots\cdots \quad (3-5)$$

となるから，（3－3）とは本質的に豊かになっているように思われる。しかし，（3－5）において

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}=u_1\ ,\ \frac{\partial \eta}{\partial t}=u_2 \cdots\cdots \quad (3-6)$$

とおくと

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=c^2\ \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}=\frac{\partial u_1}{\partial t}$$

という関係から（3－5）は

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix}\ \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=0 \cdots\cdots \quad (3-6)$$

とかけることがわかる。従って波動方程式も（3－3）の型に属する，というより（3－3）のマトリックスA が微分の外に出て来たものであることがわかる。そこで（3－3）の模型として

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial u}{\partial x}=B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdots\cdots \quad (3-7)$$

を考えてみることにしよう。（3－7）はいわば一般化されたBurger の方程式である。なお特にことわらないかぎりu：ベクトル，A ：行列であることに注意されたい。今（3－7）の解を

$$u\ (x\ ,\ t\ )=\xi e^{\,i(kx-\omega t)} \cdots\cdots \quad (3-8)$$

とおいてみよう。まずB＝0 として（3－8）を（3－7）に代入する。ただしξは弱いx,t の関数であって主な変化は$e^{i(kx-wt)}$によるものとしよう。すると

$$\omega\,\xi=k\,A\,\xi \cdots\cdots \quad (3-9)$$

がえられる。ここでξを略してしまうとおかしなことになるので（3－9）の意味をよく考えてみると，ωが行列kAの個有値となっていることがわかる。つまりξというベクトルに行列kAをかけても，得られた新しいベクトルは元のベクトルξをω倍したものであった，というわけである。結論として（3－8）のような解の形を仮定すると，その解の″波速″ωRに行列Aの個有値であった，ということになる。これは大変便利なことで，波速を出すのに実際に方程式をとかなくても単純な行列式の計算でそれが求められてしまうのであるから結構なことであるといわねばならない。ではもしAの個有値の中に複素数が入っていたらどうなるか。これはK－dV系では″不安定″という言葉が用いられた。しかしGel'fandは次のように解釈している。[8]

もし，行列Aの個有値に実数でないものが入れば|k|が大きい場合に，t＝oで与えられた有限の振動に対して，有限の時間経過の後，解はいくらでも大きくなる。このことはこの方程式が初期値問題に対して″適切″ではないとする。逆に″適切″な方程式系を″evolution system″とよぶことにすれば（evolution system は発展系と訳されている）方程式系が発展系をなすためにはAの個有値は実数ではなくてはならない。

つまり発展系はわれわれの言葉でいうと安定な系ということと同じである。又乱流論でいうと中立安定（neutraly stable）ということと同じである。これは案外数値計算の時に重要となるのであって，微分方程式のみならず差分方程式についても同じようなことがいえるから，発展系ではないような連立方程式をいくら解いても答はむやみに初期条件によって変化してどれが本当の解であるかわからなくなってしまう。なお。ω/kが実数であることと，数値計算の安定性の時にCourantの条件をみたすこととは等価である。[10]

それではB≠0の場合はどうであろうか。このときは

$$\omega\xi=(A-ik^2B)\xi \quad\cdots\cdots\cdots\quad (3-10)$$

となるので，$\frac{\omega}{k}$はA－ik Bの個有値であることがわかる。kが大きいときには（3－10）は

$$\omega\xi=-ik^2B\xi \quad\cdots\cdots\cdots\quad (3-11)$$

と考えてよい。このことは|k|が大きいときにはBの個有値は$i\omega/k^2$に近づくことを示している。そして

ⅰ）もしBの個有値が純虚数の時にはAのことも考えなくてはならない，がしかし

ⅱ）Bの個有値が複素数のときにはその実部が正であれば系は発展系となる

これも又考え方によってはひどく便利なことであって行列Bの内容を調べれば数値計算が安定であるるいは不安定となるかも知れないことが判るわけである。特にA＝oのときには熱伝型の方程式となるが，A≠oのときには波動方程式に摩擦項Bをくっつけたようなものが（3－7）であると考えられる。しかし摩擦項を単にくっつけてみてもそれでいつも安定となるかは判らないわけである。

例として（3－6）をとれば

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -c^2 & 0\end{pmatrix}$$

であってAの個有値をλとすれば

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ -c^2 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-c^2=0$$

で　$\lambda=Ic$　となる。

これまでのべたところではまだ（3－7）と（3－3）の関係は明らかではない。そこで（3－7，

の代りに

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(u)\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

又は

$$u_t+A(u)u_x=\varepsilon Bu_{xx} \quad \cdots\cdots (3-12)$$

を考えよう。u がベクトルでもu_t, u_x の意味が明らかであろう。ε は何か小さいパラメータとする。さて（3−12）において，もしも初期条件が連続でも有限時間の間に不連続が解が現われるかという問題を考えてみよう

実はこれは非常に大事なことである。それは例えば最初に何か素性のわかっている波を与えたとしても，その波の何時のまにか不連続な，衝撃波みたいなものになってしまうことを意味するからである。線型の現象ではそのようなことはないから，これは非線型に特有の現象といえる。ということは例えば砕波のような現象の解析は非線型性が考慮されていないといけないことになる。山田はLevi－Civita の非線型写像を利用して砕波条件を巧妙に求めている

今（3−12）の解が不連続点をもつとしてその附近では現象が

$$\xi=x-\omega t \quad \cdots\cdots (3-13)$$

で定まるとしてみよう。例えば段波が運動しており，その段波の先端附近の現象を調べるわけである。すると（3−12）は

$$-\omega u_\xi+Au_\xi=\varepsilon Bu_{\xi\xi} \quad \cdots\cdots (3-14)$$

となる。この解は

$$u(\xi,\ \varepsilon)=u\left(\frac{\xi}{\varepsilon},\ 1\right) \quad \cdots\cdots (3-15)$$

という変な性質をもっている。これは ε−o，すなわち粘性が小さくなったときは，現象は単位粘性をもつ流れのそれと均しくなり，ただ，長さのスケールを変えてやればよいということになる。つまり一度 εB を導入してしまうとそれから ε をo にしてみても粘性のない場合にはもどらないということである。これは例えば，粘性流体の乱流現象を解析する場合にレイノルズ数を無限大にしても，つまり ν→o としても完全流体としては扱かえないことを意味している。もちろん（3−15）は振動型の不連続の場合であるが，非線型性のもつ性質はよく現われている。

次にu は次のような境界条件をみたすとする。

$$\left.\begin{aligned} &\xi\to+\infty \quad で \quad u(\xi,\ \varepsilon)\to u^+ \\ &\xi\to-\infty \quad で \quad u(\xi,\ \varepsilon)\to u^- \end{aligned}\right\} (3-16)$$

ところが（3−15）よりu(ξ,o) =u(∞, 1) であるから ε →o の場合には

$$\left.\begin{aligned} &\xi>0 \quad で \quad u(\xi)=u^+ \\ &\xi<0 \quad で \quad u(\xi)=u^- \end{aligned}\right\} (3-17)$$

そこで（3−17）を利用して（3−14）を積分すると

$$-\omega(u^+-u^-)+\int_\Gamma A(u)u_\xi d\xi=0$$

又は

$-\omega(u^{+}-u^{-})+\int_{\Gamma}A(u)\,du=0$ (3−18)

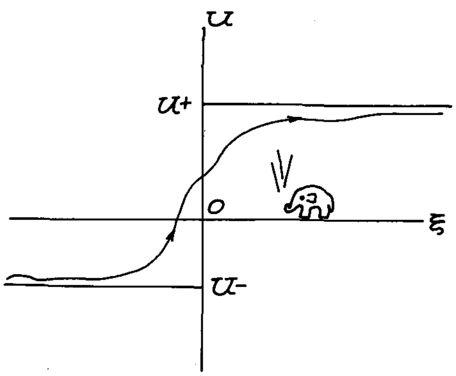
がえられる。積分路Γはu 空間での曲線であるが，今問題となっている不連続解ではu^{+}，u^{-} のみに依存し，Bにはよらないのであるから，丁度ポテンシャル関数のようなもので

$$A(u)\,du=df(u) \quad (3-19)$$

でなくてはならない。結局（3−13）は

$$u_{t}+f(u)_{x}=\varepsilon B u_{xx} \quad (3-20)$$

とかける。従って（3−12）でも（3−3）



図−3

でも同じことになる。前にオイラー型の微分u_t+uu_xが保存型$u_t+(uu)_x$ とかけることを具体的に示したがこれはこれまでのようなやり方で一般的にいえるのである。

それでは開水路を伝わる波はどのような方程式になるのであろうか。抵抗をChézy 型におくと

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u^{2}}{\partial x}+g\frac{u}{c^{2}R}u=0\\&\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0\end{aligned}\right\} \quad (3-40)$$

が二次元（t と x）的にみた開響路の方程式である。これは

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u\\h\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u&g\\h&u\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u\\h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{gv}{c^{2}R}&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\h\end{pmatrix} \quad (3-41)$$

とかくことができる。これは

$$\frac{\partial V}{\partial t}+A\frac{\partial V}{\partial x}+B\,V=0 \quad (3-42)$$

$$V=\begin{pmatrix}u\\h\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}u&g\\h&u\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\frac{gu}{c^{2}R}&0\\0&0\end{pmatrix} \quad (3-43)$$

と表現することができる。これは開水路の流れをあらわしていると同時に波もあらわしているのである。

例えば波速CはAの個有値であるから

$$\begin{vmatrix}u-c&g\\h&u-c\end{vmatrix}=(u-c)^{2}-gh=0$$

をといて

$$C=u\pm\sqrt{gh} \quad (3-44)$$

を得る。これはもちろん摩擦を考えないときの波速である。ここで Aの内容をみると

$$A=\begin{pmatrix}u&g\\h&u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&0\\0&u\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&g\\h&0\end{pmatrix}$$

と対角行列と対称行列にわけられる。これは内容からみて対角行列の方が輸送（移送）を表わし，対称行列の方が波速そのものを表わしていることがわかる。そこでAの形式をみると波速についてはどんな影響を与える行列か判るわけである。

次に摩擦の影響を調べよう。（3－42）に$u=\xi e^{i(kx-wt)}$を代入すると

$$\frac{\omega}{k}\xi=c\,\xi \tag{3-44}$$

となり

$$c=\begin{pmatrix} \frac{gu}{c^2R}\frac{i}{k}-u & -g \\ -h & -u \end{pmatrix} \tag{3-45}$$

である。波速を求めるにはcの個有値を求めればよい。結果としては

$$c-u=\frac{is\pm\sqrt{4gh-s^2}}{2} \tag{3-46}$$

を得る。sは実数で

$$s=\frac{g\mu}{c^2R} \tag{3-47}$$

である。従ってこの系では$\frac{is}{z}$の項は不安定な因子として作用するから，発展系ではない。これは二節でも説明したように摩擦係数のおき方に問題があるのである。感潮河川の計算では川巾の変化を考慮することによってこれを発展系に直すことが可能である。

次に波高も考えるときにはhの代りに$h+\eta$を用いる。（ηは静水面より測った波高）さらにuが波によって生じたものとすると

$$u(h+\eta)=c\,\eta$$

であるから（3－44）を用いて

$$c\left(1-\frac{\eta}{h+\eta}\right)=\pm\sqrt{g(h+\eta)}$$

$$c\fallingdotseq\pm\sqrt{gh}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\eta}{h}\right)\left(1+\frac{\eta}{h}\right)$$

$$\fallingdotseq\pm\sqrt{gh}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\eta}{h}\right)$$

が簡単に得られる。もちろん摩擦のある場合にも同様の手法が用いられる。

5 まとめ

ここにはこれまで書き残したことなどを書きながら全体のまとめをしてみたい。

まずKorteweg－de Vriesの方程式を手掛りにしてクノイド波と孤立波を求めた。K－dV型と良く似ているBurgce型はその厳密解が求められているがK－dV型はまだである。これは将来の面白い問題の一つである。K－dV型は元来の流体力学上の非線型性がみかけ上の分散係数となって表現されたものである点が面白いことである。K－dV型などの輸送型をもっと一般的に表面する方法を四節で詳しく論じた。この方法では最初なめらかな初期条件で出発しても有限時間内に不連続な，しかも安定な解の出現することが示された。これは海岸工学では段波とか砕波となるが，素粒子論の方では孤立波から出発した衝撃波を考えておりこれはソリトンと呼ばれる。土木工学の分野でも孤立波，

又はクノイド波より生ずる不連続な現象がありそうなものであるがまだ見つかっていない。しかし思いがけないことがこれと結びつく可能性はある。最後に摩擦を考慮にいれた場合の波速についてマトリックス波の形式によって論じた。

この短かいノートから何か研究上のヒントが得られるならば筆者の喜びとするところである。

問題9：比エネルギーを$E=\frac{u^2}{2g}+h$とあらわすとき

$$E_t+uE_x=-(uh)_x+Iu$$

が成立することを示せ。ここにIは底勾配である。又，Eの伝播速度はuであることを示せ。

問題10：波高の比較的高い長波によって生ずる流速の伝播速度は

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{g}{h}}\left(\eta-\frac{\eta^2}{4h}\right)$$

で現わされていることを示せ。

問題11：川巾がゆるやかに変化する河道内における連続の方程式は

$$\frac{\partial h}{\partial t}+h\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x}uh$$

で表現されることを示せ。

問題12：前問を用いて四節の行列Bを作ると

$$B=\begin{pmatrix}\frac{gu}{c^2R} & 0\\ 0 & \frac{u}{B}\frac{\partial B}{\partial x}\end{pmatrix}$$

が得られる。このとき発展系の成立することがあるか。（注：発展系が成立すれば安定な解が求められる可能性がある）

6　参考文献

1. Korteweg and De Vries: On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag. 5, 39, P.422, 1895.
2. 角谷豊彦：分散性媒質中の非線型波動，Nagare，Vol，3，No. 2，pp.5～26，1971.July
3. 谷内俊弥：非線型波動伝播における漸近的な考え方について，Nagare, Vol.3, No.4，pp.13～17，1971，Dec
4. 角谷典彦：遠浅の海で得られた方程式：$h^{(1)}_{\eta}+ah^{(1)}h_{\xi}^{(1)}+bh^{(1)}_{\xi\xi\xi}-ch^{(1)}=$について，Nagare, Vol. 2, pp. 1～4,, 1970，Aug.
5. Ames, W.F. (ed.): Non linear partial differential equations, Academic Press, 1967.
6. Jeffrey, A. and Taniuti, T.: Non-linear wave propagation with applications to physics and Magnetohydrodynamics, Academic press, 1964.
7. Asano, N. and Taniuti, T.: Reductive perturbation method for non-linear wave propagation in inhomogeneous media. 1, Jour. of Phys. Soc. of Japan, Vol. 27, No.4, 1969 Oct.
8. Gel'fand, I.M.: Some problem in the theory of quasi-linear equations, Amer. Math. Soc., Trans. Ser.2, 1963
9. 山口昌哉：波動の伝播，数理科学，1967，Nov
10. 本間　仁（編）：応用水理学下Ⅱ，丸　，1971
11. 斎藤利弥：位相力学，共立出版，1971
12. Phillips, D.M.: The dynamics of the upper ocean, Cambridge