

移動床流れの河床形態

土木学会水理委員会
移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会
河床形態研究部会

主 査 芦 田 和 男

1. 概 説

移動床水路では、水理条件と河床砂れきの特性に応じて各種の河床形態が発生し、抵抗係数や流砂量ならびに流路変動に支配的な影響を与えることは周知のとおりである。このように河床形態は移動床の問題において常に重要な要素として古くから多くの研究者の注目を集めてきた。

移動床流れの河床形態に関する基本的課題は、河床形態がなぜ発生するか、与えられた水理条件と河床材料とのもとでどのような河床形態が形成されるか、さらにこれらの河床形態が抵抗係数や流砂量ならびに流路変動とどのような関連を持っているかを明らかにすることであろう。

以下において、河床形態の発生機構、領域区分ならびに形状特性に関する従来の研究成果を総括的に述べるが、それに先だって河床形態の名称に関する定義と説明を与えておこう。

河床形態には、その規模の大小、不規則性の強弱、運動の方向等から見ていろいろのものがある。すなわち、規模においては、砂床面に形成される非常に小さいものから、波長が流路幅の数倍にも及ぶ大きなものまであり、形状においては、二次元的で比較的規則的なものから、三次元的で不規則なものまで千差万別である。また運動特性では、下流へ移動するもの、上流へ移動するものおよび移動しないものの三通りがある。

河床形態は、従来こうした規模、形状特性ならびに運動特性の相異から分類され¹⁾、それぞれに適当な名称が与えられているが、その分類には、不明確なところが少なくなく、また、同一の河床形態でも研究者によって呼び方が異なっている場合もあり、それぞれの名称は必ずしも統一されないようである。

河床形態についての物理的な考察を欠いた単なる形状特性からの分類ではどうしても不明確さはさがたい。そこで、できるだけ物理的な考察にもとづいた河床形態の分類が必要である。

河床面の微小な初期じり乱が水流との相互作用のもとで時間とともに発達する場合には河床波が形成されるが、この過程においてどのような物理量が重要な役割を演ずるかを考察して、河床形態の分類を試みてみよう。

もっとも規模の小さい河床形態は砂連である。砂連の発達に関与し、その波長や波高を支配するのは個々の砂粒子の特性ならびに跳躍高さや跳躍距離といった河床面近傍の物理量であって、平均水深のような物理量はあまり重要な影響を持たないと見なされる。

砂連よりも規模の大きい河床形態は砂堆である。砂堆の発達に関与し、その波長や波高を規定する重要な物理量として水深が考えられる。

もっとも規模の大きい河床形態は砂州であるが、その発達に関与し、かつその波長を支配するものとして水路幅があげられる。また、砂州の波高の発達は水深によって制限される。

以上のように、その波長、波高が河床面近傍の物理量によって支配されるものが砂連、平均水深に

よって支配されるものが砂堆、その波長が水路幅によって支配されるものが砂州であるとして河床形態を分類することが合理的であろう。

このように、河床形態の構造を水路の特徴的な規模である水深および水路幅を用いて考察しようとする考え方は、河川乱流の構造を水深で規定される鉛直乱流場と水路幅で支配される水平乱流場に区分して考えようとするもの²⁾と同じような発想によるものであるが、河床波の構造や形状特性を検討する上で種々都合である。

以下河床形態の名称に関する定義と説明を示そう。

(1) 砂連 (Ripples)

砂連は、河床面近傍の物理量によって支配される最も小規模な河床形態であって、砂粒レイノズル数 ($u_* d_{50} / \nu$, u_* : 摩擦速度, d_{50} : 50% 粒径, ν : 流水の動粘性係数) がほぼ、10～20 以下の場合に形成され³⁾、その波長、波高は粒径と密接な関係がある。砂連の平面形状には、三次元的な不規則なものから頂と谷が流れと直角方向に一直線に並んだ比較的規則的なものまで各種ある。また、縦断形状には、上流側斜面こう配が緩やかで下流側斜面こう配がほぼ砂の水中安息角をなす三角形形状から比較的対称的な正弦波形状まで各種ある。砂連は平均流速に比して遅い速度で下流に伝播する。

(2) 砂堆 (Dunes)

砂堆は、砂連よりも規模が大きく、その波長、波高が水深と密接な関係があり、河床波と逆位相の水面波を伴う河床形態である。

砂堆は、砂連に比べて一般に不規則であり、その縦断形状は、上流側斜面こう配がゆるやかで下流側斜面こう配が砂れきの水中安息角にほぼ等しい三角形形状をなす。砂堆は平均流速に比して遅い速度で伝播する。

(3) 反砂堆 (Antidunes)

反砂堆は、水面波と強い相互干渉作用を持って形成され、河床波と同位相の水面波を伴う河床形態である。反砂堆には、水流と砂れきの特性に応じて上流へ移動、下流へ移動および移動しない三通りの場合がある。この河床形態は、従来上流側に邇上する特性に注目して邇上砂堆と呼ばれる場合もあるが、上のように移動方向にはいろいろの場合があるので、このような呼び方は適切ではない。この河床形態は、水面波の位相が砂堆の場合と反対であるので、反砂堆と名づけたのである。反砂堆は一般に非定常性が強く、河床波の発生と減衰を繰り返す。反砂堆の縦断形状には三角形形状から正弦波形状までいろいろあり、後者は前者に比して大きなフルード数のとき形成される。シャープな頂を持った三角形形状の反砂堆は実験水路においてのみ観測されており、常に下流に移動する。¹⁾ 反砂堆は、フルード数が大きくなると射流であるシュートと射流あるいは常流であるプールとを連結したような河床形態になるが、これを特にシュート・プールと呼んでいる。

(4) 砂州 (Bars)

砂州は、最も規模の大きい河床形態であって、その波長は水路幅と密接な関係がある。

砂州には湾曲部の凸岸などに見られる固定砂州 (Point Bars) や左右交互に周期的にあらわれる交互砂州 (Alternating Bars) などがある。

砂州の縦断形状はほぼ三角形形状で、上流側斜面こう配は緩く、下流側斜面こう配は砂れきの水中安息角にほぼ等しい。交互砂州は平均流速に比して遅い速度で下流へ移動する。

(5) 平坦河床 (Flat Bed)

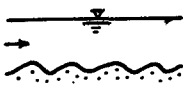
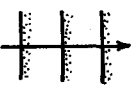
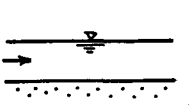
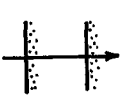
砂連、砂堆、反砂堆および砂州を伴わない平坦な河床形態である。

(6) 遷移河床 (Transition)

砂連や砂堆と平坦河床との遷移領域における河床形態であって、砂連や砂堆の部分と平坦河床の部分とからなる。

以上の河床の起伏を総称して河床波 (Sand Waves) と呼ぶ。また、砂州に比べて砂連、砂堆、反砂堆の規模は小さいので、前者を中規模河床形態、後者を小規模河床形態と区分する。上記の河床形態の名称と特徴をまとめて表-1に示す。

表-1 河床形態の分類

名 称		形状・流れのパターン		移動方向	備 考
		縦 断 図	平 面 図		
小規模河床形態	砂 連			下 流	波長・波高が砂粒径と関係する
	砂 堆			下 流	波長・波高が水深と関係する
	遷移河床				砂連・砂堆・平坦河床が混在する
	平坦河床				
	反 砂 堆			上 流 停 止 下 流	水面波と強い相互干渉作用をもつ
中規模河床形態	砂 州				波長が水路幅と関係する。
	交互砂州			下 流	
	うろこ状砂州			下 流	

各領域の河床形態は、ある場合には共存しうる関係にある。例えば、砂堆の上流側斜面に砂連を伴う場合、砂州の上流側斜面や砂連を伴う場合がしばしば見受けられる。

小規模河床形態は主として抵抗や流砂量に、中規模河床形態は主として流路変動に支配的な影響を与える。しかし、実験水路などで水路幅と水深と同程度の場合には、小規模河床形態と中規模河床形態との規模が接近して、両者を明確に区別できなくなり、また中規模河床形態も粗度要素として重要な影響を持つようになる。

小規模河床形態は、粗度特性の面において次の三つのグループに分かれる。

(1) 平坦河床、反砂堆領域

抵抗の主要な部分は砂粒子による表面摩擦であって、次に示す砂連の場合に比して抵抗係数は小さく、流砂量は大である。フルード数が大きい場合に形成されるので Upper regime と呼ばれることもある。

(2) 砂連、砂堆領域

河床面において水流のはく離が生じて、これによる形状抵抗が表面摩擦による抵抗に加わり、砂連、砂堆の発達とともに前者の抵抗が支配的な影響を持つようになるので、抵抗係数は平坦河床および反砂堆領域に比べて不連続的に増加し、流砂量は小である。この領域を Lower regime と呼ぶこともある。

(3) 遷移領域

Upper regime と Lower regime の遷移的な特性を持っており、わずかな条件の変化によってその状態が遷移するので、与えられた水理条件に対して一義的な河床形態を予測することができない。

遷移領域を除いて、与えられた河床材料と水理条件に対応してある一つの平衡した河床形状が存在すると考えられるが、河床形状がこの平衡状態に十分発達するまでには一定の時間を必要とする。この時間は小規模河床形態では比較的短かいが、中規模河床形態ではかなり長い。実際河川では、流量は絶えず変化しており、河床形態が与えられた水理条件に対応する平衡状態に到達する以前に水理条件が変化する場合がある。また、砂州などの場合には、洪水のときに形成された形態が洪水の減衰後も残る。したがって、実際河川の河床形態と水理条件との関係を調べる場合には、その河床形態がどの水理条件に対応して形成されたものであるかについては十分な検討が必要である。

2. 河床形態の発生機構

河床形態の発生機構に関する研究は二つの流れに大別できる。

一つは、河床面に微小なじょう乱を与え、それが時間とともに発達するか減衰するかを流砂の運動および連続の方程式に基づいて解析し、種々の河床形態の発生条件を求めようとする研究であって、これには流れの解析をポテンシャル流理論を適用して行なうものと、開水路流れの基礎方程式に基づいて行なうものがあるが、いずれも河床安定理論としての取扱である。この取扱は、初期に与えられる微小なじょう乱が何によって生ずるかの物理的な考察はさておいて、河床には常に各種の原因で種々の波数域のじょう乱が与えられるものであるという前提に立って、その発達の可能性を検討するところに解析の重点がおかれている。

いま一つの研究の流れは、水流の速度変動の構造や個々の砂れきの移動機構あるいは水面波などの

関連のもとで、河床形態の発生機構に関する物理的な説明を与えようとする立場である。

この立場でも、河床形態の発達過程は河床波と水流との相互作用にもとづくものであるとの見解は取られており、その限りにおいては、オーの立場と本質的な相異はない。しかし、この立場においては、河床に与えられる初期じょう乱を流れの構造や個々の砂れきの運動機構と関連づけようとするところや、河床波と水流との相互作用を堆積した砂れきの下流側に形成されるはく離現象やそれによる乱れの強さの距離的な変化などを通じて物理的に把握しようとするところに研究の重点がおかれている。

河床形態の発生機構に関する解析的研究は最初 Anderson⁴⁾ (1953) によって行なわれた。彼は、水面波が原因で河床波が形成されると考えた。水面にじょう乱波が生ずると、そのために河床付近の流速が変動し、河床波が発生する。この河床波により流れが影響を受け、さらに、河床波の発達をもたらす。このように、流れと河床波の相互作用により河床波が発達し、平衡状態に達すると考え、ポテンシャル流理論と流砂の連続方程式に基づいてこのような河床波の発生、発達過程を数学的に記述し、河床波の波長とフルード数の関係を与える式を導いた。河床波には、概説でも述べたとおり種々のものがあり、必ずしも Anderson が考えているようなものばかりではないが、Anderson の研究は、最初にこうした問題に対する解析法を与えた点で注目される。その後、解析的研究は、主として安定理論としての立場から、松梨^{5),6)} (1959, 1965), Kennedy^{7),8)} (1963, 1969), Reynoldes⁹⁾ (1965), 椿・斉藤¹⁰⁾, Hansen¹¹⁾ (1967), Gradowczyk¹²⁾ (1968), Callander¹³⁾ (1969), 林¹⁴⁾ (1970), 鮎川¹⁵⁾ (1970), Englund¹⁶⁾ (1970), 椿・渡辺・定村¹⁷⁾ (1971), 白砂¹⁸⁾ (1971) らによって進められてきた。一方、Velicanov¹⁹⁾ (1936), Raudkivi²⁰⁾ (1963), Williams・Kemp²¹⁾ (1971), Yalin²²⁾ (1971), 坂本・三王²³⁾ (1972) などは水流の速度変動成分あるいは砂れきの運動特性との関連のもとに河床形態の発生、発達の機構を解明しようと試みている。以上の二つの研究の流れは互に矛盾するものではなく、統一されるべきものであると考えられるが、これは今後に残された研究課題である。

河床安定理論では、流砂量が平均的な水理量によって一義的に決定されるとし、かつ流れの場所的な変化が緩慢であるとする、河床の初期じょう乱は常に減衰することになり河床波は発生しない。したがって、河床波の発生条件を導くためには、流砂量式に局所的な水理条件を用いることが必要であって、いずれの理論においてもその点の配慮がなされており、その相異によってそれぞれの理論が特徴づけられる。

ここでは、Kennedy⁷⁾, 林¹⁴⁾, および椿・斉藤¹⁰⁾ の理論について述べる。Kennedy は河床波の発生をもたらす要因として局所的な流速と流砂量の間には存在する対応の遅れの距離 δ を考え、これを流砂量式に導入し、これを用いて河床面における微小じょう乱の安定、不安定性をポテンシャル流理論によって解析し、河床波の発生条件および伝播特性を明らかにした。この理論においては δ が重要な役割を演じ、それなしには河床波の形成を説明することができない。しかし、彼の理論においては δ は 0 から λ (河床波の波長) の範囲の値をとるとされているが、局所的な流速と流砂量の対応の遅れの距離としてこのような大きな値をとることについては物理的に十分な説明を与えることは困難である。

林は、この点を修正するため、流砂量式に河床波の形状の影響を導入して Kennedy とほぼ同

様な解析を進めた結果、 δ としてごくわずかな値を用いて各河床形態の発生条件を導きうることを示した。

次に林の理論の概要を示そう。

移動河床上の二次元ポテンシャル流れを考える。河床面に与えられるじょう乱を次式に示すように正弦波形とする。

$$\zeta(x, t) = \alpha(t) \sin k(x - U_b t)$$

ここに、 α は振幅、 k は波数、 U_b は河床波の移動速度である。

図-1 に示すように座標軸を取ると、水面波および河床波はそれぞれ次のように表わされる。

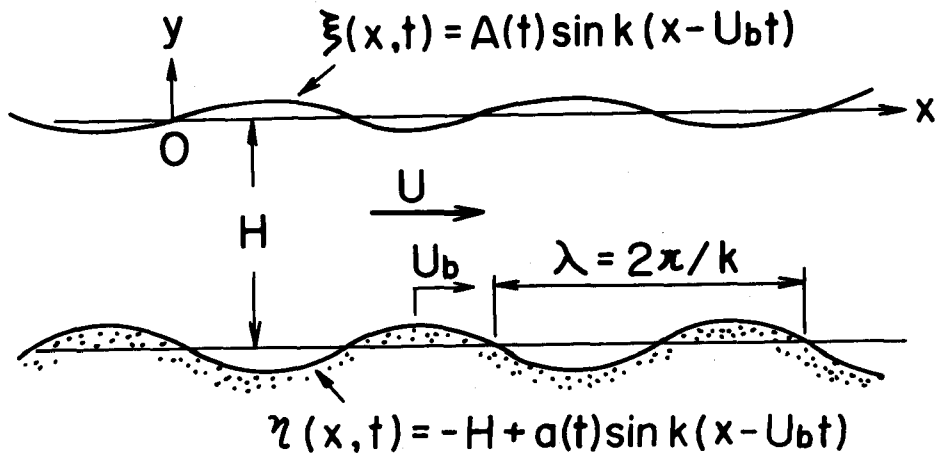


図-1 移動河床面における正弦波じょう乱

$$y = \xi(x, t) = A(t) \sin k(x - U_b t) \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$y = -H + a(t) \sin k(x - U_b t) \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 $A(t)$ は水面波の振幅、 H は水深である。

境界条件は、

$$y = 0 \quad : \quad \xi_t + u \xi_x = \phi_y \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$y = 0 \quad : \quad \phi_t + g \xi + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) = \text{一定} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$y = -H \quad : \quad \eta_t + u \eta_x = \phi_y \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 u は流速、 ϕ は速度ポテンシャルである。

上の境界条件のもとでラプラスの方程式

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

を解くと、 $a_t \ll a u k$ 、 $U_b \ll u$ の条件のもとで

$$\phi = u x - u a \frac{\cosh ky + F_r^2 k H \sinh ky}{\sinh kH - F_r^2 k H \cosh kH} \cos k(x - U_b t) \quad \dots\dots\dots(8)$$

ここに、 $Fr = u / \sqrt{gH}$ はフルード数である。

式(4)に式(8)を代入することにより、水面波の振幅と河床波の振幅の比は次式で与えられる。

$$\frac{A(t)}{a(t)} = \frac{F_r^2 kH}{(\tanh kH - F_r^2 kH) \cosh kH} \quad \dots\dots(9)$$

次に、流砂量式として、河床波の形状の影響および流速と流砂量との間に存在するいくらかの遅れの距離 δ を同時に考慮して、単位幅当りの流砂量（体積単位） T を

$$T(x, t) = m \left\{ 1 + \alpha \frac{\partial \eta(x - \delta, t)}{\partial x} \right\} [\phi_x(x - \delta, -H, t)]^4 \quad \dots(10)$$

で表示し、流砂の連続方程式

$$Tx + \eta_t = 0 \quad \dots\dots(11)$$

に代入して、 $k\delta \ll 1$ の仮定のもとで波高および伝播速度に関して次のような解を得た。

$$a(t) = a(0) \exp \left[\frac{mg^2 \alpha}{C} F_r^4 k^2 H^2 \left(C - 2F_r^2 kH - \frac{1 - F_r^2 kH \tanh kH}{\tanh kH - F_r^2 kH} \right) t \right] \quad \dots(12)$$

$$U_b = 4mg^2 H F_r^4 kH \left(-\frac{\alpha^2}{8C} F_r^2 kH + \frac{1 - F_r^2 kH \tanh kH}{\tanh kH - F_r^2 kH} \right) \quad \dots\dots(13)$$

$$\text{ここに、} \quad C = \alpha / (\delta / u^2 / 2g) \quad \dots\dots(14)$$

$$\text{いま、} \quad \Gamma = C - 2F_r^2 kH - \frac{1 - F_r^2 kH \tanh kH}{\tanh kH - F_r^2 kH} \quad \dots\dots(15)$$

とおくと、式(12)において、 $\Gamma > 0$ のときは振幅が時間とともに増大して河床波が形成され、 $\Gamma < 0$ のときは振幅は時間とともに減衰することになって河床波は形成されない。河床波が形成される領域の限界は、 $\Gamma = 0$ と $\tanh kH - F_r^2 kH = 0$ で与えられる。これに対する F_r^2 の限界値は、

$$F_{r1}^2 = \left(\frac{F_{r2}^2}{F_{r1}^2} \right) = \frac{1}{4kH \tanh kH} \{ C + 2 \pm \sqrt{(C + 2)^2 - 8C \tanh^2 kH} \}$$

$$\text{および、} \quad F_{ra}^2 = \frac{\tanh kH}{kH} \quad \dots\dots(16)$$

で与えられる。実験値と比較して $C = 2.0$ と定められ、図-2に示す結果が得られた。

椿・斉藤は、河床波上の流れは加速、減速を繰返しこれに対応して流速分布形が変化するため同一の平均流速に対しても加速部と減速部で流砂量が異なるとし、さらに流砂は非平衡状態にあるとして流砂量式を導き、これと開水路非定常流の運動方程式と連続方程式および流砂の連続式を用いて、微小な初期じょう乱の安定、不安定性を検討し、さらに、河床波の波長を与える Yalin の関係式を用いて河床形態の発生領域を図-3のように示した。これは Garde らが実験的に求めた領域区分をかなりよく説明しており興味深い。椿らの理論と林の理論とを比較すると、流速分布の非対称性は流

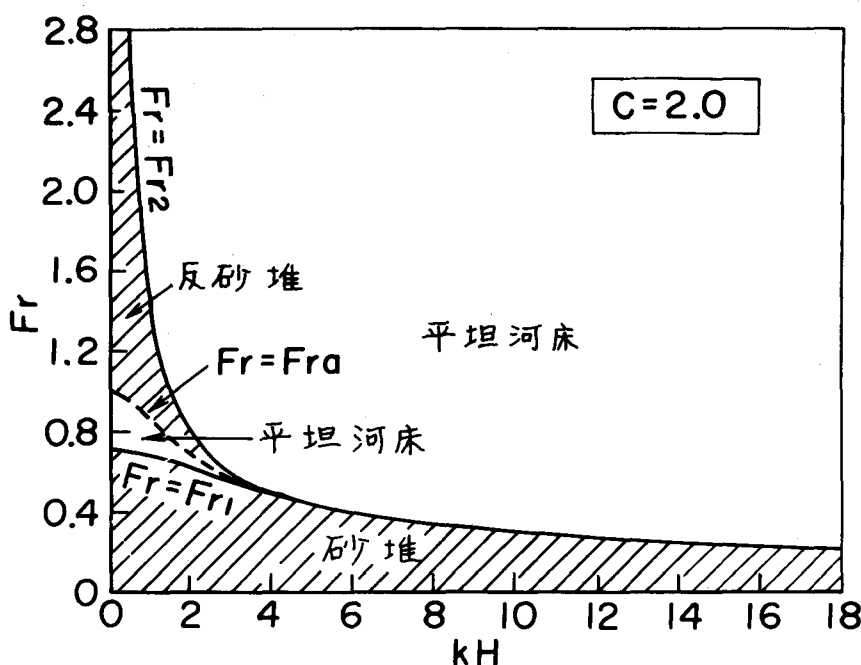


図-2 河床波の発生領域 (林の理論)

砂量の非対称性に対応し、砂移動の非平衡性は遅れの距離と対応するものと考えられ、河床波の発生に関しほゞ同様な物理的説明を与えているものと解される。

砂州の発生に関しても、初期に与えるじょう乱として横断方向にも流下方向にも周期的に変化するものを考えることによって、上と同様な解析を進めることができる。

3. 河床形態の領域区分

河床形態は移動河床の抵抗や流砂量と密接な関係を持っており、与えられた条件のもとでどのような河床形態が形成されるかを予測することはきわめて重要である。さきに述べた河床形態の発生機構に関する解析的研究により、各種の河床形態の発生領域が Fr 数と波数との平面において区分され、 Fr 数が領域を区分する重要なパラメーターであることが知られるが、これを直ちに河床形態の予測に用いることは困難である。なぜならば、上の解析では河床形態の発生領域がすべての波数域について求められているが、実際の現象では卓越する波数域が存在し、その挙動によって河床形態が支配されると考えられるので、河床形態の予測にはこれに関する情報を導入する必要があるからである。さらに、

$$Fr = (\sqrt{I} \cdot v / u_*) \quad \dots\dots (17)$$

であるから、 Fr を知るためには、 v / u_* の値を知ることが必要であって、河床形態の予測にはこの点も解明されねばならない。ここに、 I は勾配、 u は平均流速である。

椿らは河床の安定理論の解析結果をもとにして、これに河床波の波長を与える Yalin の関係式を導入して実験結果を説明しうる領域区分図を求めたが、これは上述の諸点を考慮したものであって

注目すべき結果である。

一方、河床形態の形成領域に関する実験的研究は古くから行なわれ、これにもとづいて領域区分図が数多く提案されている。

河床形態に関する系統的な実験を最初に行なったものは (Gilbert²⁵) であろう。彼は各実験ケースごとに砂の粒径、水路幅および流量を一定に保ち、勾配を増加させて河床形態の変化を調べたが、河床形態は勾配が増加するにつれ砂堆、遷移領域、平坦河床、遷移領域、反砂堆と変化することを知った。さらに各河床形態の形成限界に対応する勾配の値は、実験条件によって異なり、水路が大きいほど、また粒径が小さいほど小さいこと、平坦河床の領域は一様砂よりも混合砂の方が広くなることを指摘した。

Simons, Richardson²⁶) は幅 8 ft の水路で行なった実験の結果に基づき、フルード数 Fr が大きくなるにつれて河床形態は砂連 ($Fr < 1$)、砂堆 ($Fr < 1$)、遷移領域 ($Fr < 1$)、平坦河床 ($Fr < 1$)、反砂堆 ($Fr \geq 1$)、シュート・プール ($Fr > 1$) と変化するが、河床形態の形成限界を与えるフルード数の値は水路の規模に関係すると述べている。

Guy・Simons・Richardson²⁷) は多くの実験を行なった。彼らの実験の結果によると、掃流力が増加するにつれて河床形態は、砂連、砂堆、遷移領域、平坦河床、定常波、反砂堆、シュート・プールと変化するが、掃流力が同一の場合でも勾配と水深の組合せ方によって異なる河床形態が形成される場合があることが認められる。

Yalin²²) は、砂連と砂堆の境界は $u_* d_{50} / \nu$ の値によってきまり、 $u_* d_{50} / \nu < \approx 20$ に対して砂連、 $u_* d_{50} / \nu > \approx 20$ に対して砂堆が形成されるとしている。

以上の諸事実から河床形態の領域区分についてつぎのように考察することができる。

(1) 砂連・砂堆のいわゆる Lower regime と平坦河床、反砂堆の Upper regime とを区分する重要な物理量はフルード数 Fr である。

平坦河床に対する Fr 数は、抵抗の対数則を用いることにより、次のように表わされる

$$Fr = (\sqrt{I} \cdot v / u_*) = \sqrt{I} \left(Ar - \frac{1}{K} + \frac{2.3}{K} \log \frac{R}{ad} \right) \quad \dots\dots (18)$$

ここに、 R は径深、 a は砂面の状態や掃流力などによって若干変化すると考えられる係数である。

勾配 I が増加するにつれて河床形態の遷移が生じ、その限界を与える I の値は R が大きいほどまた d が小さいほど小さくなることを明らかにした Gilbert の実験結果は、 Fr によって河床形態の遷移が生じることを物語っているものと言えよう。

また、掃流力の無次元量 τ_* は、

$$\tau_* = \frac{u_*^2}{sgd} = \frac{I}{s} \frac{R}{d} \quad \dots\dots (19)$$

で表わされる。ここに、 s は砂れきの水中比重である。

式 (18) と (19) からわかるように、 τ_* の増加は Fr の増加に対応するが同一の τ_* の場合でも、 R と I の組み合わせ方により Fr の値が変化することを考慮すると Guy・Simons・Richardson らの実験結果を理解することができる。

(2) 砂連と砂堆の領域を区分する重要な物理量は Yalin も示しているように砂粒レイノズ数 $u_* d/\nu$ であると考えられる。Simons らの研究において F_r あるいは τ_* の小さい値に対して砂連が形成され、これを増加すると砂堆に遷移し、その限界値が水路の規模によって変化すると述べられている事実や、砂連は砂の粒径が 0.6 mm 以上の場合にはほとんど形成されないと言われている 事実 は、砂連から砂堆への遷移が $u_* d/\nu$ で支配されると考えることによって理解することができよう。

従来の領域区分法は、いずれも砂連・砂堆の Lower regime を一括して取り扱い、これと平坦河床、反砂堆の領域との境界に注目して得られたものであるが、細部においては砂連・砂堆と反砂堆の間に遷移領域を設けてこれに平坦河床の領域をも含ませているもの、抵抗予測の観点から平坦河床と反砂堆とを区別せず Upper regime に一括しているものなどまちまちである。

領域区分法の主なものとして Garde・Albertson²⁸⁾ ($\tau_* \sim F_r$), 椿・齊藤²⁹⁾ ($I/s \sim R/d$), Garde・Raju³⁰⁾ ($I/s \sim R/d$), 杉尾^{31), 32)} ($\tau_* \sim I, I \sim q/w_0 d$), Znamenskaya³³⁾ ($F_r \sim u/w_0$), 芦田・道上³⁴⁾ ($\tau_* \sim R/d$) などがあるが、上の考察からいずれも妥当性を有していることが理解される。ここに、 q は単位幅流量、 w_0 は砂の沈降速度である。

図-3 は Garde らの方法と椿らの方法を示したものである。図中の記号は表-2 に示すとおりである。

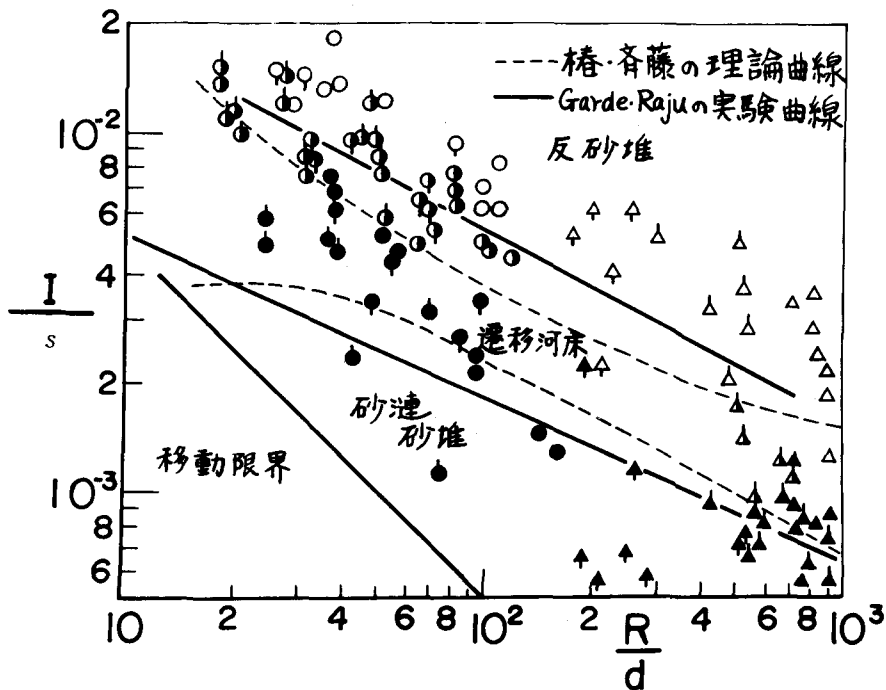


図-3 河床形態の領域区分
(Gardeら および椿らの方法)

芦田・道上³⁴⁾ は、抵抗を予測するという観点から河床形態を Lower regime と Upper regime に区分し、河床安定理論の解析結果を参考にして $F_r \geq 0.8$ を Upper regime, $F_r < 0.8$ を Lower regime とし、その境界を区分するパラメーターとして次元解析の結果によ

表-2 図-3および図-5の記号説明

実験者	水路幅	砂の粒径	河床形態
Gilbert ²⁵⁾	0.66 ft	0.375 mm ○	砂堆 ●
		0.507 ○	平坦河床 ①
		0.787 ○	反砂堆 ○
Gug	8 ft	0.19 mm △	砂連・砂堆 ▲
Simons ²⁷⁾		0.28 △	平坦河床 ▲
Richardson		0.45 △	反砂堆 △
木下 ³⁵⁾	13.2 cm	0.38 mm	交互砂州 ⊗
井口	15 cm	0.45 mm	交互砂州 ⊗
鮭川	30	2.3	
吉野 ³⁶⁾	31	3.55	

り τ_* と R/d を取り上げ図-4に示す領域区分図を与えた。なおここでは $u_*d/\nu \leq 10$ のとき砂連、 $u_*d/\nu > 10$ のとき砂堆と定めて区別している。図-4の関係は Garde らによる区分図とほぼ同じ結果を与える。

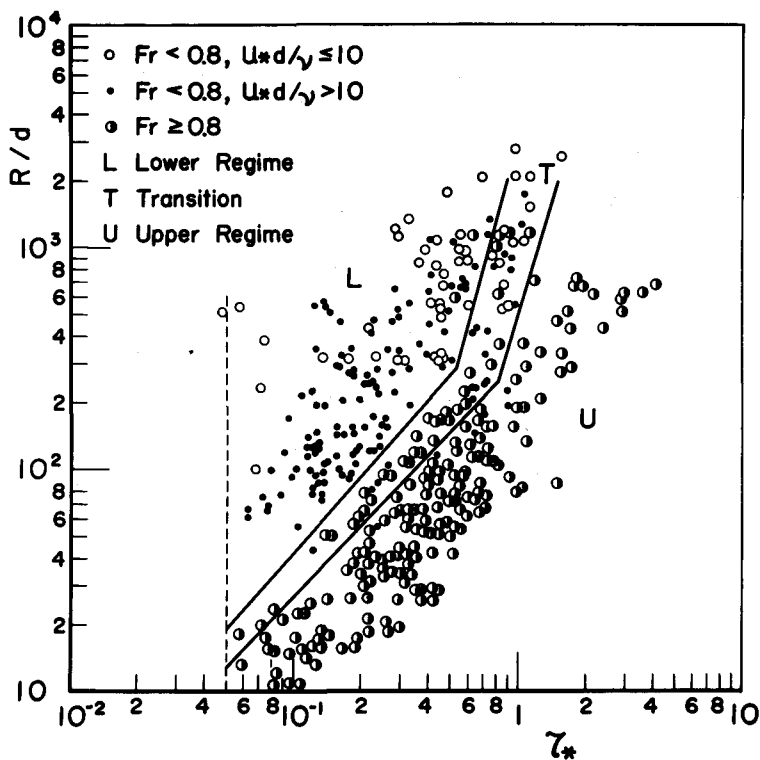


図-4 Lower regimeとUpper regimeの区分(芦田・道上)

移動河床の抵抗則はそれぞれの河床形態によって異なるので、抵抗を求めるためにはまず与えられた条件を用いてどの河床形態にあるかを知らなければならないが、図-3および図-4はその際に必要な関係図である。遷移領域においては Lower regime と Upper regime が混在しており、抵抗係数は同一の条件に対して二つ以上の値を取る可能性があって、決定論的に求めることができない。

一方、砂州の形成条件には水深と水路幅の比 H/B が関与すると考えられる。

木下^{35)~37)}は、日本の数多くの河川で形成されている交互砂州(木下は砂れき堆と呼んでいる)の形成条件について河川調査および実験結果から検討した結果、交互砂州は水深と水路幅の比が河床砂れきの粒径によって異なるが、ほぼ $0.1 \sim 0.5$ 以下において形成されること、また、勾配が小さくなると形成されにくいこと、河床が洗掘低下する区間では形成されず、堆積傾向の河道区間において形成されることなどを明らかにしている。

交互砂州は実験室では約 $1/100$ 以上の比較的急勾配でないで形成されないが、河川では数千分の1の勾配でも形成される。

鮎川³⁸⁾はこれらの事実を説明するために、図-5の領域区分法を提案している。なお、実際には砂州(中規模河床形態)と砂連、砂堆(小規模河床形態)は共存しているので河床形態は観察によっていずれかに分類されたものである。したがって、同図は中規模河床形態が顕著に認められる領域と認められない領域の区分を示しているものと解することができる。なお、図-5中の u_{*c} は砂の移動限界摩擦速度、 B は水路幅である。

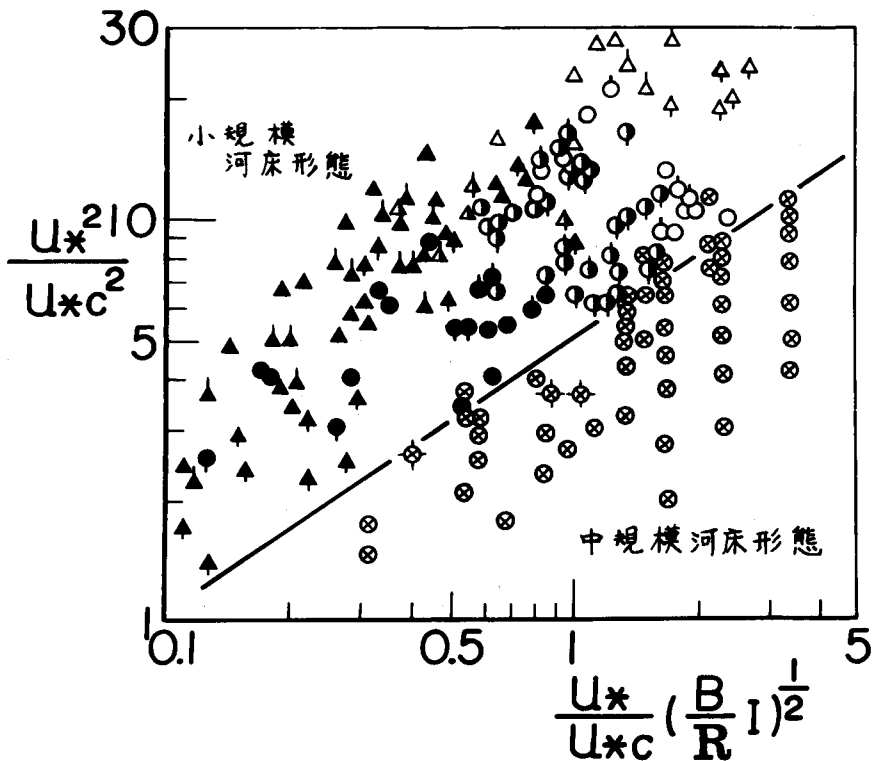


図-5 中規模河床形態の形成領域(鮎川)

4. 河床波の構造と形状特性

(1) 河床波の構造

河床波は、各種の周波数成分から構成されており、ときにはある特定の周波数成分が卓越してかなり規則的な形態を示すこともあるが、一般には不規則である。

従来、河床波の形状特性として、平均的な波長・波高・周期などが取り扱われている場合が多いが形状特性をよりの確に把握するためには確率過程としての取扱いにより、構造に内在する統計法則を追究することが必要である。最近このような研究が数多く行なわれるようになってきた。芦田・田中³⁹⁾は河床形態の各領域について河床波のパワースペクトルを求め、その特性がそれぞれの領域でかなり異なること、砂連では周期性が強いが砂堆では不規則性が強いことなどを明らかにしている。

芦田・奈良井⁴⁰⁾は、スペクトルの構造を検討するために、幅の異なった水路で、数種類の水深について河床形状の発達過程の数段階におけるスペクトルを水路横断方向の5測線について求めた。その結果、以下に示すようにスペクトル構造と流れのスケールとの関係、スペクトルの時間的変化ならびに長波長域の三次元的特性を明らかにしている。

図-6は、幅60cm、長さ150cmの水路で、勾配1/500、水深7cm、平均流速47cm、河床砂の粒径0.76mmにおける通水後1, 2および7時間後における河床波のスペクトルを示す。

図-7は、同じ資料に対する各時刻における $2y/B = \pm 0.83$ (y は水路中央測線からの横断方向の距離)の2測線における河床波系列のコヒーレンスを示す。

図-8は、幅20cm、長さ18cmの水路で、勾配1/200、水深3cm、平均流速53cm/S、平均粒径0.76mmにおける $2y/B = 0$ および-0.8、 $t = 6$ 分および113分におけるスペクトルを示す。これらの図からつぎの事が認められる。

1) $0.1 < KH$ ($K = 1/\lambda$)の波数領域での河床形態は、比較的短時間のうちに発達し、その統計的な構造は、時間的にも空間的にも変化しない。また、水路の両側壁近傍の測線間のコヒーレンスは低い。この領域の河床形態は水深や砂れきの特性によって規定されるもので砂堆砂連である。フルード数が1に近い水理条件では $KH \approx 0.2 \sim 0.3$ の波数の水面波を伴う変動成分が卓越する。

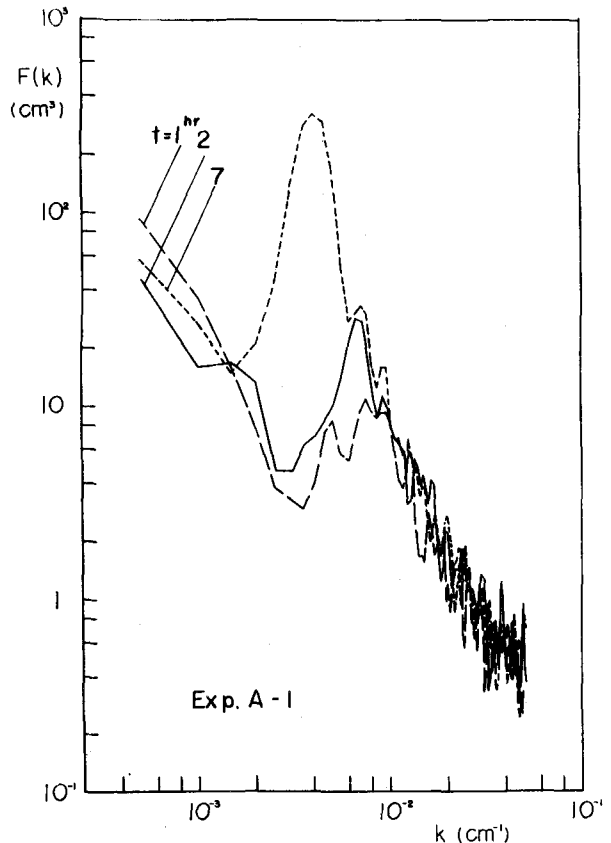


図-6 河床波のパワースペクトル密度の時間的変化(水路幅 60 cm)
(芦田・奈良井)

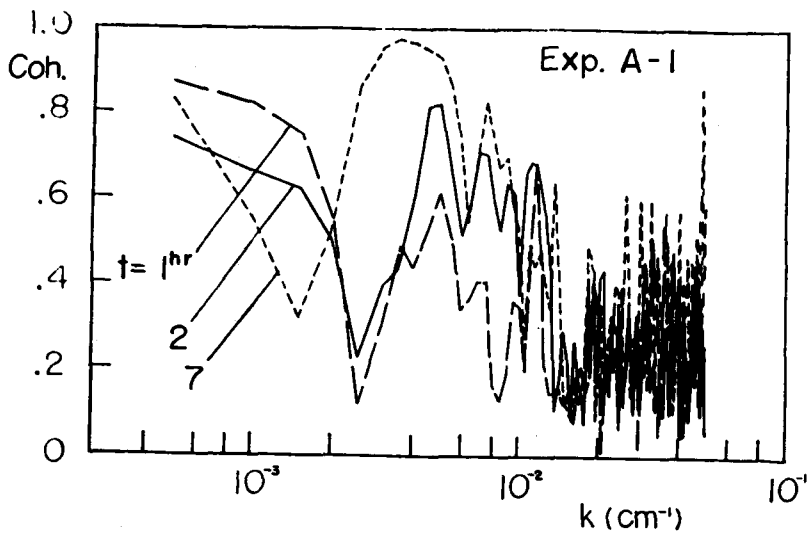


図-7 河床波系列のコヒーレンスの時間的変化 (芦田・奈良井)

2) $0.1 < K B < 0.5$ の波数領域の河床形態の発達には比較的長時間を要し、卓越波長は時間とともに高波数域から低波数域へと移行する。

水路両側壁近傍の測線間のコヒーレンスは高く、この河床形態は水路幅に規定される三次元的特性を持った砂州であることがわかる。

3) 「たてすぢ」の河床形態が認められた。このたてすぢの間隔は水深のほゞ2倍である。

4) 以上の三つの相異なる特性を持つ各領域の河床形態は共存しうる。

5) 水路中央部と側壁よりの測線ではスペクトル形が非常に異なり、水路中央部の卓越波長は側壁近傍のそれの約 $\frac{1}{2}$ である。

以上のように河床波は複雑な構造を有しているが、そのスペクトルを一つの関数によって表示しようとする試みもなされている。

Nordin・Algert⁴¹⁾ は、河床高の変動を二次のマコフプロセスのモデルを用いて表わし、スペクトル密度関数を求めた。すなわち、距離1の点における河床高の変動量Xを次式で表わした。

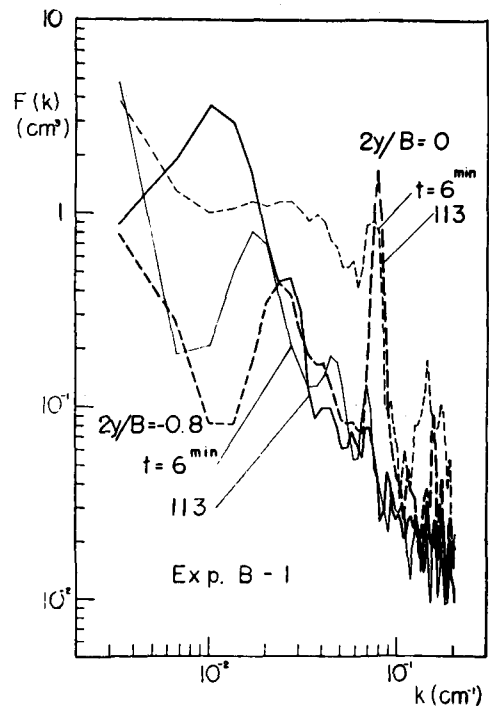


図-8 河床波のパワースペクトル密度の時間的変化 (芦田・奈良井)
(水路幅 20. cm)

$$X(\ell) = \alpha X(\ell-1) - \beta X(\ell-2) + \epsilon_\ell \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 ϵ_ℓ は平均値 0 のランダム変動量で $X(\ell-1)$ 、 $X(\ell-2)$ とは独立である。

この際、ずらしの数は砂堆の平均波長が 10～15 点で表わされるように選ばれている。

解析の結果、パワースペクトル密度関係 $P(f)$ は、

$$P(f) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{|1 - \alpha e^{-2\pi i f} + \beta e^{-4\pi i f}|^2} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに、

$$\alpha = \frac{C(0)C(1) - C(1)C(2)}{C(0)^2 - C(1)^2} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\beta = \frac{C(1)^2 - C(0)C(2)}{C(0)^2 - C(1)^2} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{C(0)(1-\beta)\{(1+\beta)^2 - \alpha^2\}}{1+\beta} \quad \dots\dots\dots (24)$$

C は自己相関関数である。

式(21)は砂堆の領域については実測値と比較的よく一致する。このことは、この領域についてある点の河床高がそれよりもずらしの数で一つおよび二つ上流（一般には砂堆長の $\frac{1}{4}$ 以下）の河床高と線型的な関係を持っていることを示している。ここで問題になる点は、砂連などのように周期成分が卓越している場合には上のモデルは適合しないこと、ずらしの距離の取り方がモデルの適合性に支配的な影響を与えられると思われるが、その方法が明確に示されていないこと、 $C(0)$ 、 $C(1)$ 、 $C(2)$ の値と水理量との関係が明らかでないことなどである。

一方、次元的な考察はパワースペクトルの関数形を決定する有力な手法であり、乱流の速度変動スペクトルに関する Kolmogorov の $-5/3$ 乗則や風波のスペクトルに関する Phillips の -5 乗則などはその例としてよく知られている。日野⁴²⁾は、同様な考察により河床波のスペクトルの関数形を求めている。

十分発達した砂連、砂堆では河床波の前面はほぼ水中安息角を取っており、河床高 η の距離的变化 $d\eta/dx$ はこの点で不連続的に切断されている。この事は河床波についての特徴的な現象である。この事から日野は、河床波の低周波側では Kennedy などによって取り扱われているように河床と水流との間の相互干渉効果が河床波の形成ならびに特性に重要な影響を持つが、ある値以上の高波数域では、スペクトルの形が砂れきの安息角 φ と波数 K で支配される平衡領域が形成されると考え、次元解析の結果つぎのような波数スペクトルの -3 乗則を導いた。

$$S_{\eta\eta}(K) = \alpha(\varphi) K^{-3} \quad (K_0 < K < d^{-1}) \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 $\alpha(\varphi)$ は φ の関数である。しかしながら φ はそれほど大きく変化しないので常数と考えられる。また、 K_0 は河床と水流との相互干渉効果が重要な影響を持たないと考えられる範囲の最小の波数であり、 d は粒径である。

また、周波数スペクトルに関しては -2 乗則を導いた。

$$P_{\eta\eta}(f) = \frac{1}{2} \alpha(\varphi) r f^{-2} \quad (f_0 < f < f_1) \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに γ は一定値である。

式(25)あるいは(26)は実測値の傾向をかなりよく説明するという結果が示されている。しかし、前述のとおり河床形態は水理量と砂れきの特性によって変化するきわめて複雑な構造を有しており、また高波数域においても河床波とそれによる水流のじょう乱との相互干渉効果は、Raudkiviも示しているように無視できないものがあるので、河床波のスペクトルをたとえ高波数領域においても上のようになつのユニバーサルな関数で表わしうるかどうかにについては今後さらに検討する必要がある。

河床波の発達過程に水流のじょう乱がどのように関与するかの問題を直接検討しようとする研究も最近いくつか試みられている。例えば、人工的な乱れを発生させた場合と自然の場合についての河床波の発生状態の比較実験⁴³⁾、河床波発達の各段階における河床波のスペクトルと乱れ速度のスペクトルの比較検討⁴⁴⁾、河床上の乱れ速度スペクトルの測定⁴⁵⁾などが行なわれているが、統一的な結論を下すまでには至っておらず、今後の研究成果が期待される。

(2) 河床波の波長、波高の分布と平均値

河床波は一般に不規則であって波長・波高を定義することは容易ではないが、河床形状と粗度係数との対応などを見るためには、形状を何らかの形で定量的に評価することが必要となる。このためには、平均波長・平均波高あるいはそれらの分布などの諸量が普通用いられるが、河床波系列の分散も有力な指標となる。

砂連、砂堆の領域について、水深 H と平均波長 λ との比 H/λ と砂粒レイノルズ数 $u_* d_{50}/\nu$ との関係は図-9のとおりである。

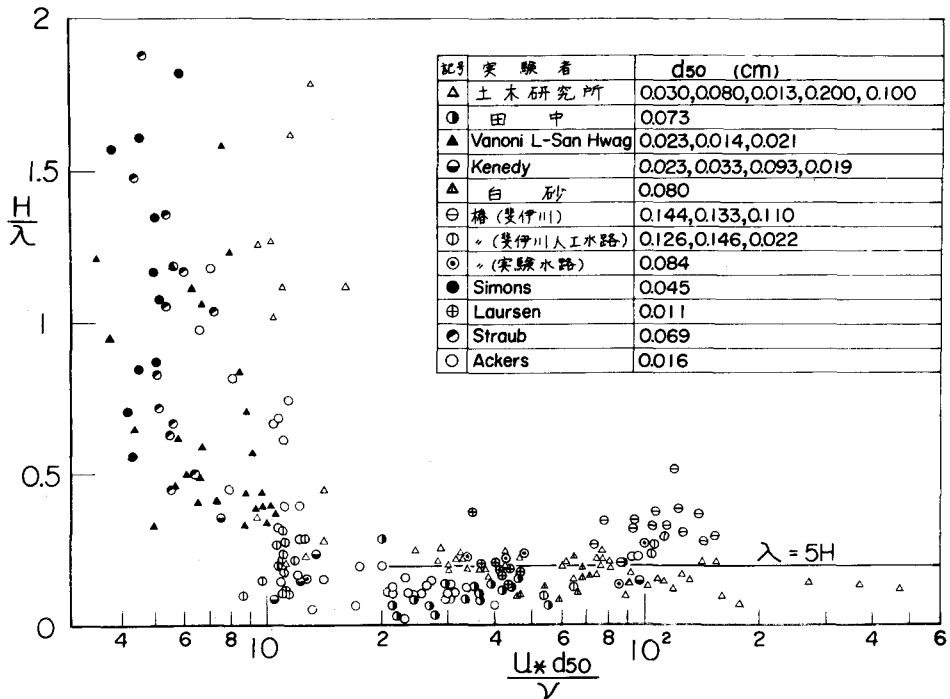


図-9 砂連、砂堆に関する $\frac{H}{\lambda}$ と $\frac{u_* d_{50}}{\nu}$ の関係

$u_* d_{50} / \nu \approx 20$ を境にして、 H/λ の特性は顕著に相異し、

$u_* d_{50} / \nu > 20$ (砂堆)

: H/λ はほぼ一定で、平均的には $H/\lambda \approx 0.2$

$u_* d_{50} / \nu < 20$ (砂連)

: H/λ は大きく変化し、両者間の関係はないことが認められる。このことは、前者の河床形状は水深に規定されるのに対して後者では水深に規定されないことを表わしている。

砂堆の波長 λ 、波高 Δ について Yalin⁴⁶⁾ は次式を提案している。

$$\lambda = 5H \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{\Delta}{H} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\tau_c}{\tau_0} \right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

波長に関しては図-9の関係から平均的には式(27)の関係がほぼ成立していると見てよいであろう。また、 Δ/H と τ_c/τ_0 との関係は、図-10のとおりであって、式(28)の係数は大体 $1/6 \sim 1/2$ の範囲に分布している。

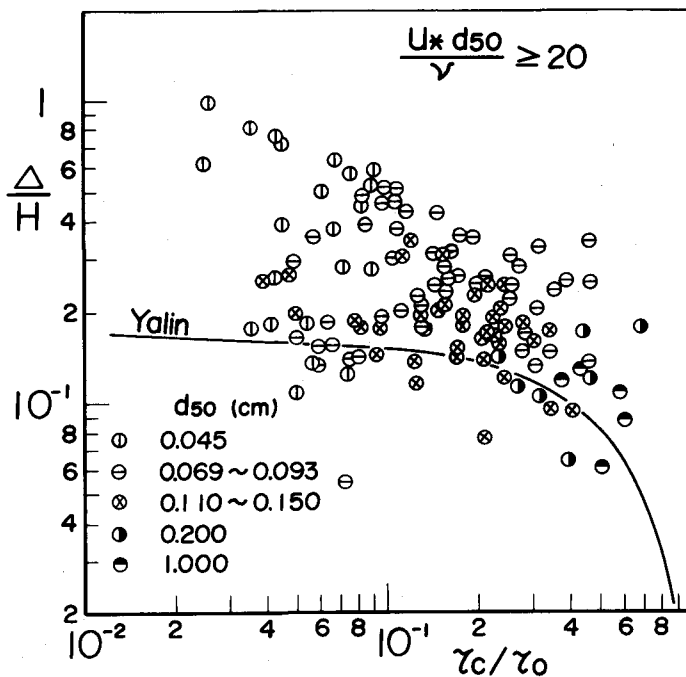


図-10. 砂堆の $\frac{\Delta}{H}$ と $\frac{\tau_c}{\tau_0}$ との関係

一方、砂連の波長、波高は水深よりもむしろ粒径に関係づけられ、Yalin は

$$\lambda = 1000 d_{50} \quad \dots\dots\dots (29)$$

を提案している。実測値を検討した結果、 λ/d_{50} は τ_c/τ_0 に関係なく、

$$\frac{\lambda}{d_{50}} = 300 \sim 1500 \quad \dots\dots\dots (30)$$

の範囲に分布し、平均的には 800 程度である。(図-11)

また、波高 Δ は、

$$\frac{\Delta}{\lambda} = 1/5 \sim 1/20 \quad \dots\dots\dots (31)$$

に分布し、平均的には 1/10 程度である。(図-12)

つぎに、砂州の波長は、水路幅と密接な関係を持っており、図-13 に示すとおり、

$$\frac{\lambda}{B} = 7 \sim 15 \quad \dots (32)$$

の範囲に分布する。ここで、 λ は蛇行曲率の卓越波長を表わし、砂州の場合に対してはその長さの2倍を取っている。

以上のように、各領域について波高、波長を規定する主要な物理量が何であるか、またそれと、波高、波長とがどのような関係にあるかが明らかにされたが、いずれの関係においてもかなりのばらつきが認められる。その原因として波高、波長はもともとある分布をしており、その平均値を求める資料の数が少ない場合には、平均値がかなりのばらつきを示すこと、現象そのものが上に述べた主要な物理量の他に二次的と考えられる物理量の影響を受けて若干変化することなどが考えられる。これらの問題については今後さらに詳細な検討を行ない、平均波長、平均波高をさらに的確に推定しうる関係式を求めなければならない。

つぎに、波高、波長の分布に関して今までに得られている結果を若干示しておこう。

芦田・田中⁴⁷⁾は、波長、波高の分布を調べ、それぞれ図-14

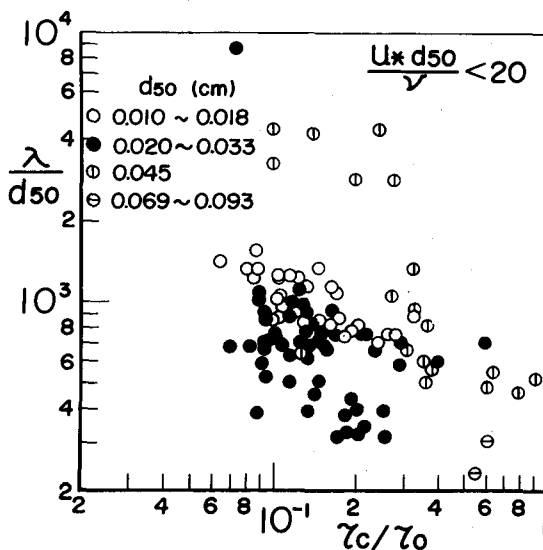


図-11 砂連の $\frac{\lambda}{d_{50}}$ と τ_c/τ_o の関係

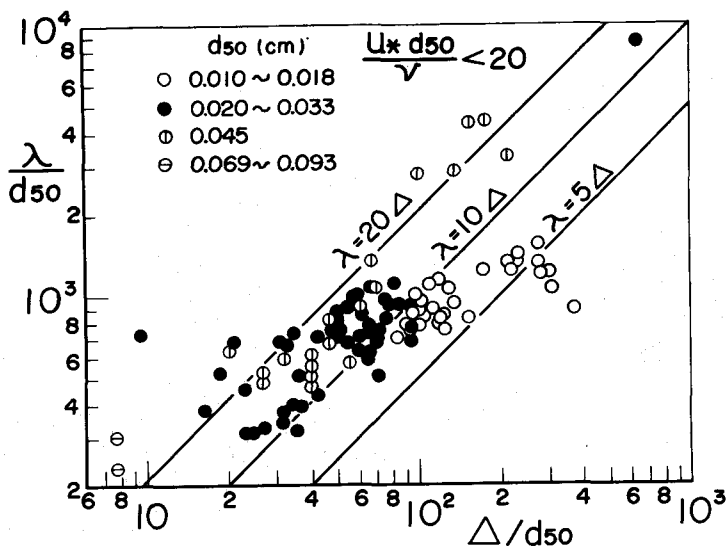


図-12 砂連の $\frac{\lambda}{d_{50}}$ と $\frac{\Delta}{d_{50}}$ の関係

および図-15のように Rayleigh 分布にかなりよく適合することを示した。すなわち、平均波長 $\bar{\lambda}$ 、平均波高 $\bar{\Delta}$ で無次元化された波長 ℓ ($=\lambda/\bar{\lambda}$)および波高 η ($=\Delta/\bar{\Delta}$)の確率密度関数 $P(\ell)$ 、 $P(\eta)$ は次式の Rayleigh 分布に従う。

$$P(\ell) = \frac{\pi}{2} \ell \exp \left(-\frac{\pi}{4} \ell^2 \right) \quad \dots (33)$$

$$P(\eta) = \frac{\pi}{2} \eta \exp \left(-\frac{\pi}{4} \eta^2 \right) \quad \dots (34)$$

式(34)を用いて、頻度 m よりも大きい波高の平均値は、

$$\eta_m = \frac{\int_m^\infty \eta p(\eta) d\eta}{\int_m^\infty p(\eta) d\eta} \quad \dots (35)$$

で与えられる。 $m = \frac{1}{3}$ とすると式(35)から、

$$\Delta \frac{1}{3} = 1.597 \bar{\Delta} \quad \dots (36)$$

の関係が得られる。

$\Delta \frac{1}{3}$ と σ との間には

$$\Delta \frac{1}{3} = 3 \sigma \quad \dots (37)$$

の関係があるので

$$\bar{\Delta} = 1.88 \sigma \quad \dots (38)$$

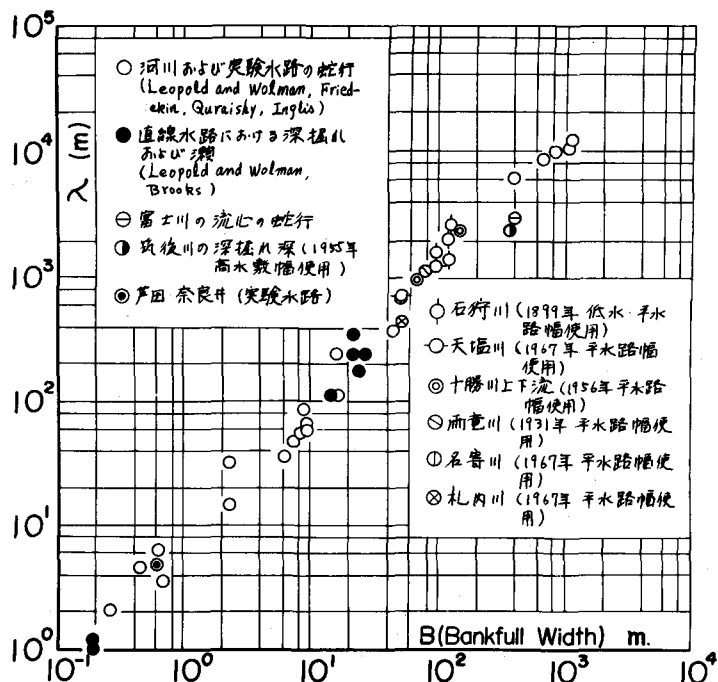


図-13 砂州の波長と水路幅との関係

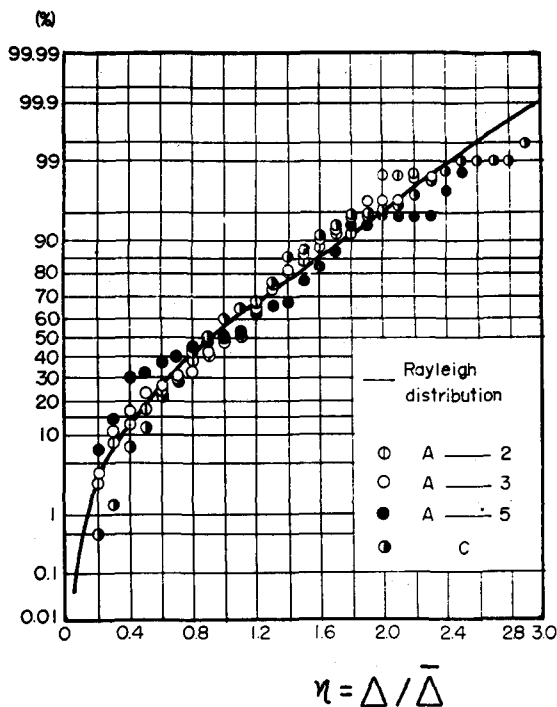


図-14 河床波の波長分布(芦田・田中)

となる。 σ と相当粗度 Ks との間には密接な関係があることが認められているが^{39), 41)}, 式(38)の関係より Ks と Δ との間にも同様な関係があることが理解される。

上に示した Rayleigh 分布がさらに広い条件に対して適合するかどうかについては、今後多くの資料によって検討することが必要である。

5. 河床波上の流れの特性

移動河床の抵抗係数や流砂量の問題を取り扱う場合には、河床波上の流れの特性に関する知識が必要である。

Raudkivi^{48), 49)} は人工的に固定した砂連上で流れの様相、剪断力および圧力分布に関して詳細な測定を行なっている。

その結果、砂連のクレスト下流に生ずる後流域には間欠的でしかも寿命時間の短い渦が存在し、これらの渦と主流の間には間欠的な交換が生じていること、クレストから波高の約6倍下流が reattachment point になり、この点で粒子の強い動揺が見られること、および底面における剪断力は reattachment point から下流に向って境界層の発達とともに増加し、クレスト上では平坦河床の剪断力とほぼ同じ値になることなどを明らかにしている。

図-16は Raudkivi の実験モデルと同じものを用いて Sheen⁵⁰⁾ が測定した砂連上の乱れの分布を示したものである。乱れ強さおよびレイノルズ応力の最大値は、後流域において現われ、reattachment point から下流に行くに従って急速に減少する。この結果は Walker⁵¹⁾ によって計測された急拡部(段落部)での乱れの分布と非常によく類似している。

以上から、流れの形状抵抗を算定するには砂連・砂堆の形状が与えられているときには段落モデルを適用することができると考えられる。しかし、土砂の輸送に関しては砂連・砂堆の背面に発達する境界層の摩擦抵抗が重要な役割を演ずるので、これについては今後十分検討することが必要である。さらに、河床波の発生・発達過程と流れとの相互関連を明らかにしていく立場から、河床波上の流れについての詳細な検討が必要である。

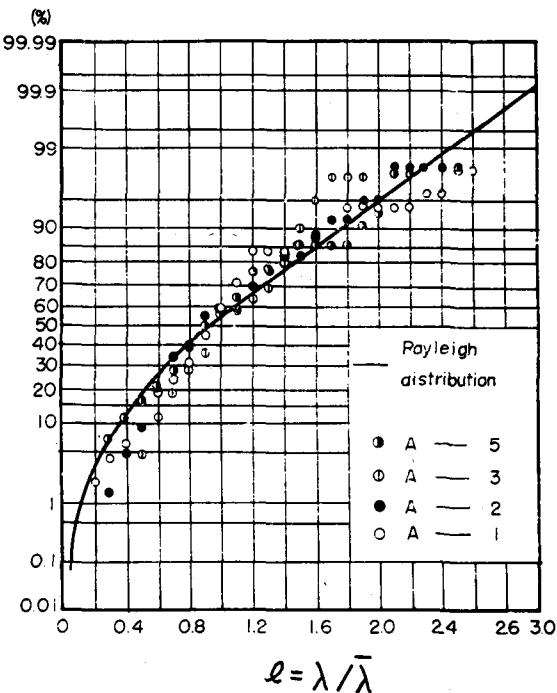


図-15 河床波の波高分布(芦田・田中)

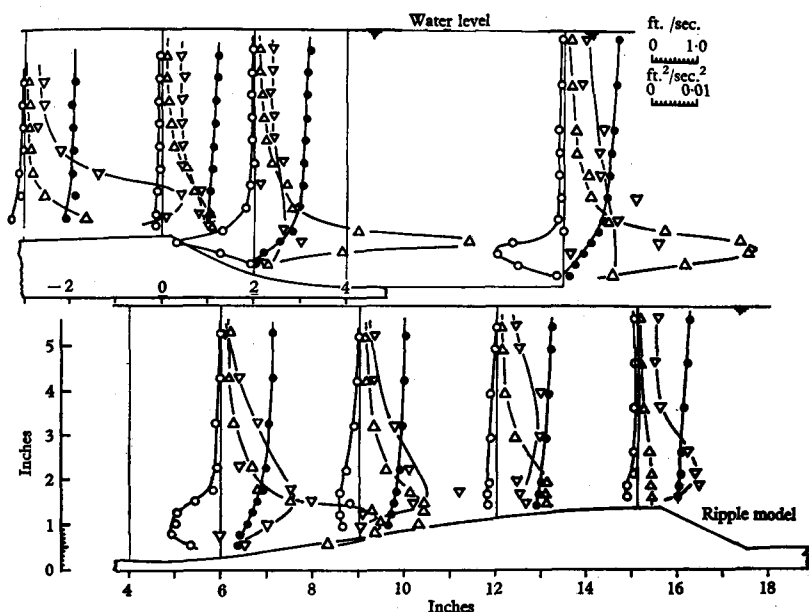


図-16 砂連上の流速分布と乱れ (Raudkivi)

$$\begin{aligned}
 & \text{---}, \bar{u}, \quad \text{---}\triangle\text{---}, \bar{w}^{'2} \\
 & \text{---}\triangle\text{---}, \bar{u}^{'2}, \quad \text{---}\circ\text{---}, \bar{uw}'
 \end{aligned}$$

6. 実際河川における河床形状の解析

実際河川の河床形状は、上述の諸特性に加え、水理条件の時間的变化、地形・地質・植生および砂れきの特性の場所的な分布、河道に加えられた人工的条件など数多くの外的条件の影響を受けて非常に複雑かつ不規則である。

かつ、砂州のような中規模河床形態と河道の平面状とは密接な関係を持っている。このような複雑で不規則な河床および河道の形態を定量的に解析するには、スペクトル解析をはじめ種々の統計的な手法が有力であり、最近においてこのような研究^{52)~58)}が行なわれるようになってきた。ここでは、これらの結果についての説明は省略するが、それぞれの文献を参考にされたい。実際河川の解析においては、資料数を十分に取ろうとするとその間に河道の条件が変化して定常性が保たれなくなり、それをさけようとする資料数が制限されるという困難がある。この点に関しては、解析の目的との関連のもとに、慎重な配慮が必要である。

また、河床形状と水理量との関係を解析する場合には、その河床形状がどの水理量に対応して形成されたかについて十分検討することが必要である。

参 考 文 献

1. Task Force on Bed Forms in Alluvial Channels of the Committee on Sedimentation; Nomenclature for bed forms in alluvial channels, Proc. ASCE, HY 3, May, 1966
2. Yokoshi, S.: The structure of river turbulence, Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute of Kyoto University, Vol. 17, part 2, 1967
3. Yalin, M.S.: Geometrical properties of sand waves, Proc. ASCE, HY 5, Sept. 1964
4. Anderson, A.G.: The characteristics of sediment waves formed by flow in open channels, Proc., 3rd Midwestern Conf. on fluid mechanics, University of Minnesota, Minneapolis, Minn., 1953
5. 松梨順三郎；開水路における移動床の不安定性について一微小振動法による理論的解析—土木学会論文集，才61号，1959
6. 松梨順三郎；そ上する砂堆の発生機構について（才2報），土木学会才20回 年次学術講演会 1965
7. Kennedy, J.F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 16, part 4, 1963
8. Kennedy, J.F.: The formation of sediment ripples, dunes, and antidunes, to appear in Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 1, 1969
9. Reynolds, A.J.: Waves on the erodible bed of an open channel, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 22, part 1, 1965
10. 椿東一郎・斉藤隆；流れによるSand の発生限界，九大工学集報，才40巻，才5号，1967年，11月
11. Hansen, E.: On the formation of meanders as a stability problem, Basic Research Progress Report No. 13 Hydraulik Laboratory, Technical University of Denmark, 1967
12. Gradowczyk, M.H.: Wave propagation and boundary instability in erodible bed channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 33, part 1, 1968
13. Callander, R.A.: Instability and river channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 36, part 3, 1969
14. Hayashi, T.: Formation of dunes and antidunes in open channels, Proc. ASCE HY 2, Feb., 1970
15. Sukegawa, N.: On the formation of alternate bars in straight alluvial channels, JSCE, Vol. 2, part 2, 1970
16. Engelund, F.: Instability of erodible beds, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 42, part 2, 1970
17. 椿東一郎・渡辺訓甫・定村寛文；砂礫堆の形成について，才26回土木学会年次学術講演概要集 1971
18. 白石考夫；各種 Sand Waves の発生領域に関する研究，電力中央研究所技術才二研究所報告，№70013，1971

19. Velicanov, M.A.: Formation of sand ripples on the stream bottom, Commission de Pontamologie, Sec. 3 Rapport 13, International Association of Scientific Hydrology, 1936
20. Raudkivi, A.J.: Study of sediment ripples formation, Proc. ASCE, HY 6, June, 1963
21. Williams, P.B. & P.H. Kemp: Initiation of ripples on flat sediment beds, Proc. ASCE, HY 4, April, 1971
22. Yalin, M.S.: On the formation of dunes and meanders, Proc. 14th, IAHR, Vol. 3, Sept., 1971, Paris
23. 坂本龍雄・三王英寿; Sand Waues の形成過程について, 才16回水理講演会講演集, 1972, 2
24. 白砂孝夫; 河床波の発生について, 才16回水理講演会講演集, 1972, 2
25. Gilbert, G.K.: The transportation of debris by running water, U.S. Geological Survey Professional paper 86, 1914
26. Simons, D.B. & E.V. Richardson: Forms of bed roughness in alluvial channels, Proc. ASCE HY 3, May, 1961
27. Guy, H.P., D.B. Simons and E.V. Richardson: Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956-61 U.S. Geological Survey Professional Paper 462-1, 1966
28. Garde, R.J. and L. Albertson: Sand waves and regimes of flow in alluvial channels, Proc. IAHR, Montreal, Vol. 4, 1959
29. 椿東一郎・斉藤隆; 前出論文 10
30. Garde, R.J. and R. Raju: Regime criteria for alluvial steams, Proc. ASCE, HY 6, 1963
31. 杉尾捨三郎; 移動床をもつ流れの水路床形態の区分について, 土木学会論文集才71号, 1960
32. 杉尾捨三郎; 河川の平均流速公式と河床面形態との関連について, 土木学会論文集, 才171号 1969
33. Znamenskaya, H.S.: Calculation of dimensions and speed of shifting of channel formation, Soviet Hydrology Selected Papers, No. 3, 1963
34. 芦田和男・道上正規; 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集 1972
35. 木下良作; 石狩川河道遷調査 — 参考編 — 科学技術庁資料局資料才36号, 1961
36. 鮎川 登; 直線河道における流れの蛇行現象に関する水理学的研究, 科学技術庁資源調査所資料, 1971
37. 木下良作; 河床における砂礫堆の形成について — 蛇行の実態の一観察 —, 土木学会論文集, 才42号, 1957
38. 鮎川 登; 直線河道における砂礫堆の形成条件について, 才26回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1971
39. 芦田和男・田中裕一朗; 砂連に関する実験的研究(3), 京都大学防災研究所年報10号B, 1967

40. 芦田和男・奈良井修二；河床形態の変動特性に関する研究，京都大学防災研究所年報 12 号 B，1969
41. Nordin, C.F. and J.H. Alger: Spectral analysis of sand waves, Proc. ASCE, HY 5, 1966
42. Hino, M.: Equilibrium-range spectra of sand waves formed by flowing water, Journal of Fluid Mechanics 34, 1968
43. 福岡捷二；砂連の発生・発達とそのスペクトル，東京工業大学土木工学研究報告 4，1968
44. Ashida, K. and S. Narai: The structure of movable bed configuration, Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Vol. 19, August, 1969
45. 白砂孝夫；各種 Sand Waves の発生領域に関する研究，電力中央研究所技術才二砂研究所報告，No. 70013, 1971
46. Yalin M. S. ; 前出論文 3
47. 芦田和男，田中裕一朗；前出論文 39
48. Raudkivi, A.J.: Bed formes in alluvial channels, Jour. Fluid Mechanics, Vol. 26, Part 3, 1966
49. Raudkivi: 前出論文 20
50. Raudkivi, A.J.: Loose boundary hydraulics, Pergamon Press, 1967, pp. 201-208
51. Raudkivi: 前出論文 50
52. Toebes, G.H. and T.P. Chang: Plan form analysis of meandering rivers, Proc. of 12th. IAHR, Colorado, Vol. 1, 1967
53. Speight, J.G.: Meander spectra of the Angabunga river, Journal of Hydrology, Vol. 3, No, 1965
54. M'loradov, M.: Stochastic analysis of the auto-formation of a channel cut in incoherent alluvium, Proc. of 12th. IAHR, Colorado, Vol. 2, 1967
55. O'Loughlin, E.M. and D. Squarer: Areal variations of bed form characteristics in meandering streams, Proc. of 12th. IAHR, Colorado, Vol. 2, 1967
56. 芦田和男；富士川の河床変動に関する研究，京大防災研究所年報，11 号 B，昭 43
57. 椿東一郎，吉岡邦明，和佐野貞利；河川平面形態の河床形態との関連性について，九州地区における豪雨災害の総合的研究，昭 44
58. 山岡勲，長谷川和義；石狩川の河道維持に関する研究(2) 蛇行の変遷調査，昭 46