

水理学水文学におけるシステム解析

東京工業大学 日野幹雄

I 序 論

(1) システム概念

第2次世界大戦以後，人類知能が修得した最大の認識は，システムとフィードバックの概念であると云われている（牧野昇）。こうした概念は本来，機械工学ないしは電気工学の一部の狭い範囲の専門用語であったものが，その概念は著しく拡張され高度に洗練されて，本来の領域をはるかにとび出して，すべての工学分野はもちろん，社会現象さらには人類・動物植物をも要素として含む地球系の理解と把握に欠くことのできないものとなっている。

(2) 集中定数系と分布定数系

システム解析の立場から見ると，現象を記述する方程式系を二種類に分類しうる。それはシステム要素の状態変化を記述する形となっているか，システム要素として分離されない形に書かれているかである。それはまた，取扱い対象がわれわれの造作になる種々の部品あるいはその組合せであるか，自然界の物理化学現象のままであるのかという粗い分類にも対応する。

自然現象・物理現象—例えば，弦や膜の振動，水の波，音波，電磁波；弾性板の撓み，電磁場；熱伝達や物質の拡散—をみると，対象とする状態の変化が場所的にも時間的にもコンパクトに連続であり，これらは，それぞれ，波動方程式，ポテンシャル方程式・熱伝型方程式と呼ばれる偏微分方程式で記述されている。

これに反し，例えば電気回路網は離散的な素子—抵抗・コンデンサー・コイル等の要素で構成されその各要素の状態（電流・電圧）変化は接続する要素の状態を入出力とする形で常微分方程式で記述される。

このような離散的な，つまり多くの場合有限個の，また無限であっても可算無限個の，変数によってその状態が記述される系を，集中定数系（Lumped parameter system）という。集中定数としては，質点系，剛体系，枠組構造，流体回路，電気回路，磁気回路等があり，有限（あるいは可算無限）個の素子の組合せで構成されている。システム要素は一般に，一つの状態ベクトル（一組の従属変数の組— $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ）で代表して表現でき，その時間的変化（場合によっては一次元的場所的変化）が状態ベクトルの常微分方程式系で表現できる。これに対し前述のような連続体の系を分布定数系（Distributed parameter system）と呼んでいる。数学的にはシステム解析は集中定数系に関する方法であり，また分布定数系も何んらかの方法で集中定数系化することによりシステムの解析を適用しうる。

II ダイナミック・プログラミング^{1),2)}

(1) DPにおける関数方程式

staticな配分問題を解くにあたって、時間をおいて一つの配分決定がなされ、その後次の配分決定をするというように問題をdynamicな配分問題に置き換えてみる。今、 x を $x_1, x_2, \dots, x_n = \{x_i\}$ に配分した場合の最大利潤を配分対象数 N をパラメーターとする資源量 x の関数を考えて、 $f_N(x)$ と表わすことにする。

$$f_N(x) = \max_{\{x_i\}} R(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (1)$$

ところで、配分対象が1つであるとこれは一義的に

$$f_1(x) = g_1(x) \quad (x \geq 0) \quad (2)$$

と決る。また、一方 x のうち x_N を N 番目の対象に配分したとすれば、それによる利潤は $g_N(x_N)$ である。残りの資源は $x - x_N$ であるが、これは他の $N-1$ 個の対象に配分されそれによる利潤の最大値は、式(1)の定義により $f_{N-1}(x - x_N)$ と書かれる。したがって、総利潤は

$$g_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N)$$

であり、これは x_N の関数である。問題は上式の値を最大にする x を $0 \leq x_N \leq x$ の範囲で求めることで、その最大値は $f_N(x)$ であるから、次の関数方程式が得られる。

$$f_N(x) = \max_{0 \leq x_N \leq x} [g_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N)] \quad (3)$$

式(2)により $f_1(x)$ が決定されるから、上式により

$N = 2, 3, \dots, N$ に対する $f_N(x)$ が順次求められる。

(2) 最適性原理

上の関係を導く方法は、多段決定過程における「最適性原理」(Principle of optimality)に基づいている。それはBellmanにより次のように述べられている。(英語による原文の方が良く意味が会得されると思われるので原文を引用する。)

The Principle of Optimality: An optimal policy has the property whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision

(最適性原理：最適政策とは、最初の状態や最初の決定が何んであれ、残りの決定が最初の決定より生じた状態に関して最適政策となるようなものでなければならない。)

(3) DPへのラグランジュ乗数法の応用

DPの技法のdimensionalityの欠点を補うために、ラグランジュ乗数法の導入を行う。

$$R(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N) = g_1(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2) + \dots + g_N(x_N, y_N) \quad (8)$$

この値を

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = x, \quad x_i \geq 0 \quad (10)$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_N = y, \quad y_i \geq 0 \quad (11)$$

の条件のもとに最大にする問題の代りに

$$g_1(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2) + \dots + g_N(x_N, y_N) - \lambda(y_1 + y_2 + \dots + y_N) \quad (12)$$

を

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = x, \quad x_i \geq 0 \quad (13)$$

$$y_i \geq 0 \quad (14)$$

の条件のもとに最大にする問題を考える。ここで、ラグランジュ乗数 λ は一応一定値に固定する。

(i)まず、 $g_i(x_i, y_i) - \lambda y_i$ を1組にして、この y_i についての最大値を求める。利潤関数 g_i は y_i の増加につれて一定飽和値に近づく性質があるから、つまり、 $y_i \rightarrow \infty$ のとき $g_i(x_i, y_i)/y_i \rightarrow 0$ であるから、ある y_i^* で $g_i(x_i, y_i) - \lambda y_i$ 最大値となる。この最大値は x_i と λ に係するから、これを $h_i(x_i, \lambda)$ とする。

$$h_i(x_i, \lambda) = \max_{y_i \geq 0} [g_i(x_i, y_i) - \lambda y_i] \quad (15)$$

$$y_i^* = y_i(\lambda, x_i) \quad (16)$$

(ii)したがって、問題は

$$h_1(x_1, \lambda) + h_2(x_2, \lambda) + \dots + h_N(x_N, \lambda) \quad (17)$$

の最大値を

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N \leq x$$

の範囲で求めることに帰着し、問題はすでに述べた一次元のDPに還元され、次の関数方程式を解けば良い。

$$f_N(x, \lambda) = \max_{0 \leq x_N \leq x} [h_N(x_N, \lambda) - f_{N-1}(x - x_N, \lambda)] \quad (18)$$

同時に、

$$x_i = x_i(x, \lambda) \quad (19)$$

が求まり、DPの第1段操作 - DP関数表の作成 - が完成する。

(iii)次にDPの第2段操作 - DP関数表の逆引き - により、利潤の最大値を与える配分法 $\{x_i\}$ が求まる。この x_i ($i=1, \dots, N$)の値に対する y_i の値は、(i)において式(16)のように $y_i = y_i(x_i, \lambda) = y_i(\lambda)$ と求められているから、この y_i が式(20)

$$\sum_{i=1}^N y_i(\lambda) = y \quad (20)$$

の条件を満たすまで λ の値を変えて(i)~(iii)の計算を繰り返す。

(4) 季節変化を考慮した貯水池の最適運用³⁾

(i) 一貯水池の場合

図-2aに模式的に示すような一河川系に一ダムの場合を考える。

いま、流量をあるきざみ幅で小さい順に並べ、その i 番目の流量を添字の i で示す。また、流量・需要は月により異なるので、それを添字 k で区別する。ある流量の生起確率 p についても、同様の添字を使用する。例えば、1月に i 番目の流量 I_{i1} が起る確率は p_{i1} とする。したがって、 k 月の流量の

期待値は $\sum_i p_{ik} I_{ik}$ である。

ところで、初期貯留量 S より始まる N ケ月間の貯水池運用は、 N 段の多段決定過程としてその最適運用を求めることができる。

最初の k 月の放流を r 、そのうち灌漑に使用する量を x とすれば、この決定に伴う利益は評価関数 $\Phi(r, x; k)$ で表わせる。この決定および上流よりの河川流入の結果、貯水量は

$$S_{N-1} = S + I_{ik} - r \quad (21)$$

となり、あと翌 k' 月より始まる $(N-1)$ 段の多段決定過程となる。

ただし、 k' は

$$k' = \text{MOD}(k+1, 12) + 12 \cdot \text{INT}(k+1/12) \cdot \{1 - \text{MOD}(k+1, 12)\} \quad (22)$$

となる。したがって、 k 月より開始される初期貯留量 S の貯水池の N ケ月間の最適運用による利益を $f_N(S, k)$

と記せば、Bellman の最適性原理より、次の関数方程式が得られる。

$$f_N(S; k) = \max_{\substack{0 \leq r \leq S \\ 0 \leq x \leq r \\ 0 \leq S \leq SC \\ 0 \leq S + I_1 - r \leq SC}} [\Phi(r, x; k) + \sum_i p_{ik} f_{N-1}(S + I_{ik} - r; k')] \quad (23)$$

ここに、 SC : 最大貯水量

(ii) 二貯水池の場合

次に、二貯水池の場合について同様のことを考える。ダムは並列として、記号は図-2 b のように定義する。(i) と全く同等の考慮により、初期貯留量 S (第一貯水池) および SS (第二貯水池) より始まる N 段決定過程の最適利益 $f_N(S, SS; k_0)$ について、次のような関数方程式が

$$f_N(S, SS; k) = \max [\Phi(r, rr, x, y; k) + \sum_{ij} p_{ij, k} f_N(S + I_{ik} - r, SS + II_{jk} - rr; k)]$$

計算結果

(i) 年平均最適操作

まず最初に、この地点にどの程度の貯水池を造るのが適当かを調べるために、年平均操作について考える。この場合の式(23)に対応する関数方程式は

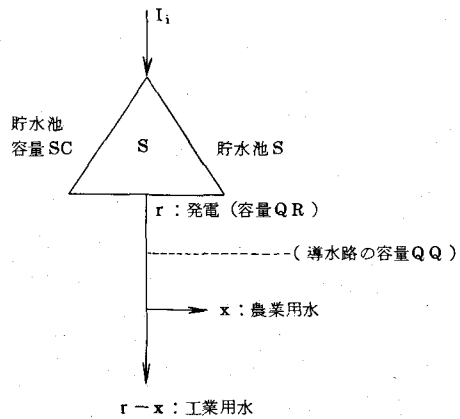


図-2 a

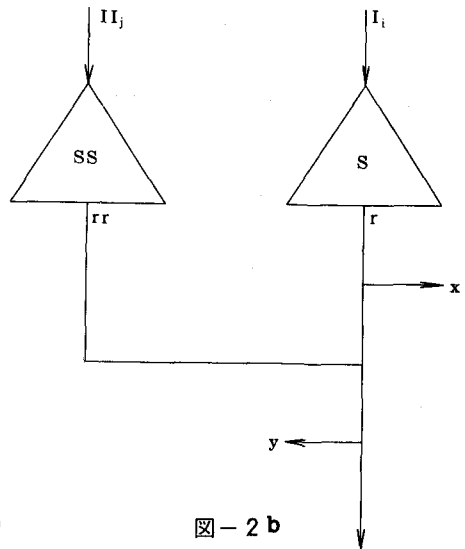


図-2 b

$$f_N(S) = \text{Max} \left[\Phi(r, x) + \sum_{j=1}^m p_j f_{N-1}(S - I_j - r) \right] \quad (24)$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq S \\ 0 &\leq x \leq r \\ 0 &\leq S \leq SC \\ 0 &\leq S + I_j - r \leq SC \end{aligned}$$

こゝに、 N は年数、 p_j は j 番目の年流量 I_j の生起確率である。

貯水容量40(億t)とし、種々の時点(経年次 N)での貯水量 S_N とその年の最適放流量 r との関係を求め、この図から操作開始後2年以後は、現貯水量 S に関して一定放流量に収束し、最適運用のための $r-S$ 曲線(図-2c)が得られる。

図-2dはそれぞれ $SC=40$ (億t)の場合について、年平均利潤の経年変化を初期貯水量 S_0 をパラメーターとして示したものである。この価は S_0 に無関係な一定値に収束する。

(ii) 各月の貯水量と最適放流量

図-2eは各月の貯水量とそれに対してとるべき最適放流量 r との関係を示す。DP操作としては、 $N=96$ (8年間)について行ったが、2~3年目には一定の $S-r$ 関係に収束した。

図-9によれば、貯水量 S が小さい場合には、最適放流量も S 一杯に放流するが、冬の渇水期では S 以下のこともある。貯水量 S の増加につれて、多雨期の4・5月は放流量 r は S に近いが、その他の月では放流量は半分位にして貯水量を下げすぎぬような運用が良い。

(5) 洪水時における貯水池の最適操作³⁾

洪水時の貯水池の最適操作も、先にのべた長期の水資源計画と本質的には同じである。ただ、長期間の貯水池利用の場合には、一年を周期とする諸条件の変化のために、DP関数列がある値に収束するが、洪水の場合には一定区間内の二点境界値問題となる。すべての計画の問題に共通する問題であるが、将来の入力情報(降雨量・貯水池への流入量の変化)

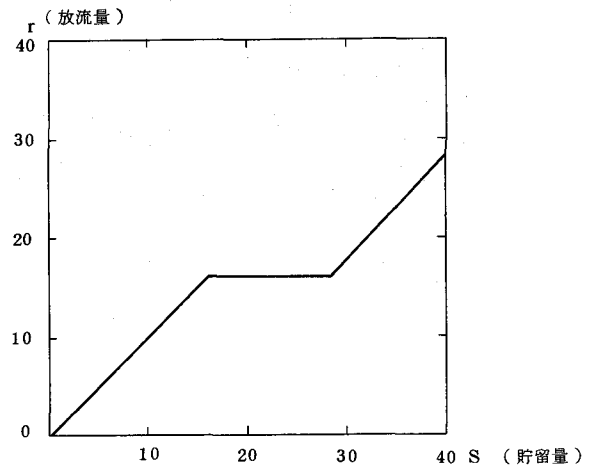


図-2c

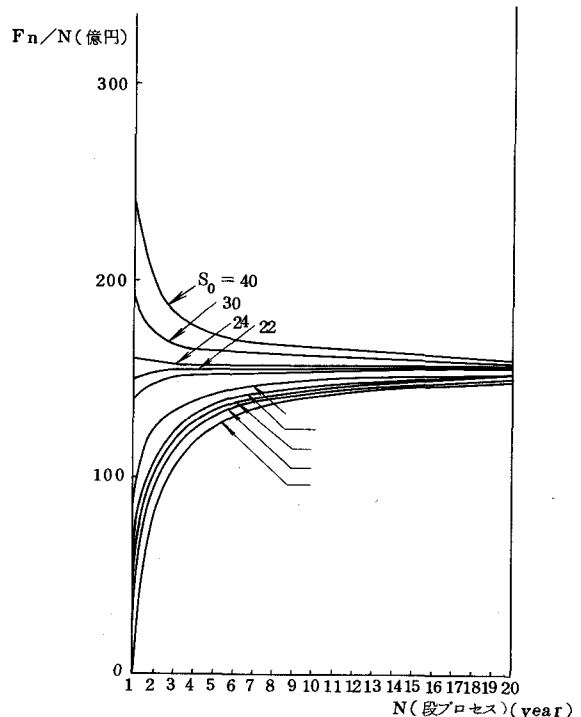


図-2d

の予測の困難さは、洪水の最適制御を殊の外むずかしいものとしてゐる。入力情報の予測については、別途論じたので、ここでは貯水池への流入量が確定的に、あるいは確率的に与えられたと考える。

(i) 変分問題への還元と関数方程式

さて、貯水池への流入量を $I(t)$ 、放出量を $x(t)$ 、貯水量を S とすると、連続の式より

$$I - x = \frac{dS}{dt} \quad (25)$$

貯水池の表面積 F は貯水位 H の関数である ($F(H)$) とすると、

$$\frac{dS}{dt} = F(H) \frac{dH}{dt} \quad (26)$$

の関係がある。したがって

$$I = x + F(H) \frac{dH}{dt} \quad (27)$$

一方、貯水池からの放流の一部 y は水力発電に使用され利潤を生む。また放流量 x が河川の計画洪水量を越えると破堤・冠水などの他橋梁その他の河川構造物に被害をおよぼす。したがって、放流

に伴う利潤の評価関数を一般的に x 、 y および貯水池水位 H の関数として、 $G(x, y, H)$ と表わす。このとき、洪水期——ダム操作期間—— $[0, T]$ を通じての総利潤は、ダムの操作を表わす任意関数 $x(t)$ 、 $y(t)$ に関する汎関数として、

$$J(x(t), y(t)) = \int_0^T G(x(t), y(t), H(t)) dt \quad (28)$$

である。

操作条件は、

$$\begin{aligned} 0 \leq S \leq S_m & \quad \text{or} \quad 0 \leq H \leq H_{\max} \\ 0 \leq x \leq X_m & \quad (S > X_m) \end{aligned} \quad (29)$$

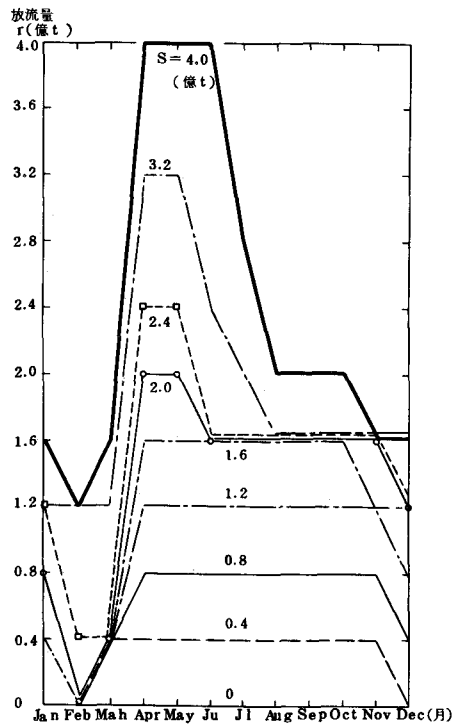


図-2 e

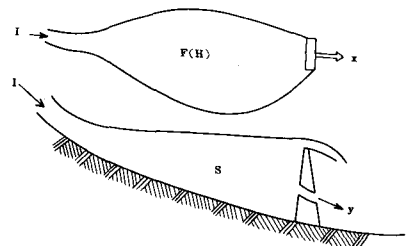


図-2 f

$$0 \leq x \leq S \quad (S \leq X_m)$$

$$0 \leq y \leq x \quad (x \leq Y)$$

$$0 \leq y \leq Y \quad (x > Y)$$

ここに、 X ：限界放流量、 Y ：発電用導水路に流しうる限界流量、 S_m ：最大貯水量。

一方、操作開始および終了時には、貯水池水位は与えられた初期水位 H_0 と満水位 $H_{\max}$ でなければならない。

$$\left. \begin{aligned} H(0) &= H_0 \\ H(T) &= H_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

結局、洪水期におけるダム の最適操作の問題は、条件(27)、(29)、(30)のもとに、総利潤 J を最大にするような操作方法(時間—放流量関係) $x(t)$ 、 $y(t)$ を決定するという変分問題に帰着した。

さて、貯水池への流入量 $I(t)$ は与えられるものとし、式(29)、(27)を定差化して表わすと、

$$J = \sum_{k=0}^N G(x_k, y_k, H_k) \Delta \quad (31)$$

$$H_{k+1} = H_k + \frac{I_k - X_k}{F(H_k)} \Delta \quad (32)$$

ここに、 $\Delta = T/N$ 、 $x_k = x(k\Delta)$ 、 $y_k = y(k\Delta)$ 、 $H_k = H(k\Delta)$ 、 $I_k = I(k\Delta)$
($k=0, 1, 2, \dots, N$)

この問題を後進型DPにより定式化する。 N 期間にわたり最適放流を行い、その結果 N 期の最後に貯水池水位は H_N であったとする。このときの J の値を $f_N(H_N)$ と記す。

最適性原理により $f_N(H_N)$ に関する次の関数方程式が得られる。

$$f_N(H_N) = \max_{x_N, y_N} [G(x_N, y_N, H_N) \Delta + f_{N-1}(H_{N-1})] \quad (33)$$

$$H_{N-1} = H_N - \frac{I_N - x_N}{F(H_N)} \Delta \quad (34)$$

実際の計算は、次の二段段より成る。

(i) 関数列の作表：

各時間ステップ k について、その時のとりうる各貯水位に対する k 段決定過程の最適決定 $x(k, H_j)$ 、 $y(k, H_j)$ およびその結果としての $f_k(H_j)$ を求める。 $k=0$ より始めて、順次 $k=1, \dots, N$

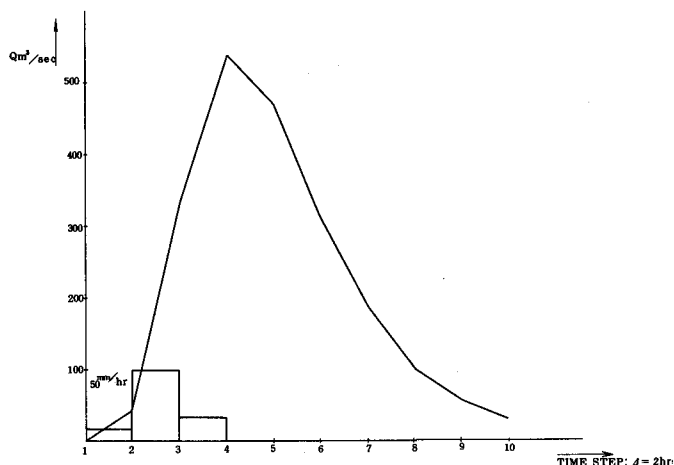


図-28

までの作業を行う。

(ii) トレース・バック：最終操作時 N の貯水位条件 $H=H_{\max}$ より(i)の結果の表を逆引きして、最適操作一時間～放流曲線を決定する。図-2gのような降雨・流出が予想される場合の最適操作は、初期貯水量をパラメーターとして図-2hのようになる。

Ⅲ ウィナー・フィルターによる線型応答系の予測問題

(1) ウィナー・フィルター 1) 2)

$x(t)$ を m 次元の入力の状態ベクトル、

$y(t)$ を m 次元の出力の状態ベクトル、 $\hat{y}(t)$ を $y(t)$ の推定ベクトルとすると、線型系としての出力ベクトルの推定値は

$$\hat{y}(t) = \int_{t_0}^{t_1} A^*(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (1)$$

と表わされる。ここに、 A は $n \times m$ の行列である。(入力ベクトルの次元と出力ベクトルの次元は必ずしも等しくなくて良い。) 式(1)による推定・予測誤差は

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t_1 | t) &= y(t_1) - \hat{y}(t_1 | t) \\ &= y(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} A^*(t_1 - \tau) x(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2)$$

予測誤差の共分散行列は

$$\begin{aligned} E[\tilde{y}(t_1 | t) \tilde{y}(t_1 | t)] &= E[y(t_1) y'(t_1)] - \int_{t_0}^t E[y(t_1) x'(\sigma)] A^*(t_1, \sigma) d\sigma \\ &\quad - \int_{t_0}^t A^*(t_1, \tau) E[x(\tau) y'(t_1)] d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t A^*(t_1, \sigma) d\tau \int_{t_0}^t E[x(\tau) x'(\sigma)] A(t_1, \sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (3)$$

二乗平均誤差を最小にする

必要十分条件は、変分法により次のように導かれる。

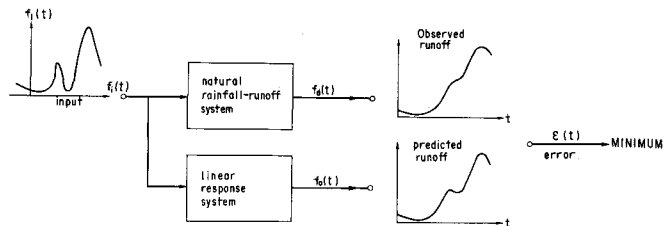


図-3a

$$\begin{aligned} E[y(t_1) x'(\sigma)] - \int_{t_0}^t A(t_1, \tau) E[x(\tau) x'(\sigma)] d\tau &= 0 \\ (t_0 \leq \sigma \leq t) \end{aligned} \quad (4)$$

もし、ベクトル x, y が 1 次元ベクトル、つまりスカラーであり、かつ定常確率過程であるならば、 $C_{xx} \cdot C_{xy}$ をそれぞれ x の自己相関および x と y との相互相関関係として、上式は

$$C_{yx}(t_1, \sigma) - \int_{t_0}^t h(t_1, \tau) C_{xx}(\sigma - \tau) d\tau = 0 \quad (5)$$

$$(t_0 \leq \sigma \leq t)$$

この A , h に関する積分方程式は, **Wiener-Hopf** の積分方程式と呼ばれる。式(4)は一般化された **Wiener-Hopf** の方程式である。

(2) ウィナー・フィルターによる流出の線型予測

水文学の流出予測において, **unit-hydrograph** を合理的に, なかなか統計的に求めようとする考えは, かなり早い時期からみられる。木下⁽³⁾(1958) が最小二乗法により **unit hydrograph** を求める試みをしたのは, **Wiener filter** による方法の初歩的段階とみなすことができる。

しかし, 流出現象を確率過程論として論じ, **Wiener-Hopf eq.** の解として線型流出核 (**unit hydrograph**) を基礎づけようとする試みは 1960 年代の後半に入り, **Eagleson** 他⁽⁴⁾(1966), 日野^(5,6)(1967, 1970), 石原・高棹・池淵⁽⁷⁾(1967, 1971) により行われた。**Eagleson** らは **hydrograph** の縦座標が負にはならないという条件を入れて離散表示した **W-H** 方程式を **LP** により解いている。日野は **W-H** 方程式の解析解を与えた。

入力を降雨 $x(t) = f_i(t)$, 出力を流出 $y(t) = f_o(t)$, 降雨の自己相関を $C_{ii}(\tau)$, 降雨-流出の相互相関を $C_{io}(\tau)$ とするとき, 式(5)は線型流出核 (**unit-hydrograph**) $h(\tau)$ に関する次の積分方程式となる。

$$C_{io}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) C_{ii}(\tau - \sigma) d\sigma \quad (6)$$

$$(\tau \geq 0)$$

上式において, $\tau \geq 0$ の条件は重要でこれがないければ方程式は, フーリエ変換により簡単に解けてしまう。式(1)を離散表示すれば, 未知数 $h(n\Delta t)$ ($n=0, 1, \dots, M$) に関する連立方程式となり, 行列表示をすれば

$$[C_{id}] = [C_{ii}][h_{opt}] \quad (7)$$

ここで,

$$[C_{ii}] = \begin{bmatrix} C_{ii}(0) & C_{ii}(1) & C_{ii}(2) & \cdots & C_{ii}(j) & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ C_{ii}(1) & C_{ii}(0) & C_{ii}(1) & \cdots & C_{ii}(j-1) & \vdots & C_{ii}(j) & 0 & \cdots & 0 \\ C_{ii}(2) & C_{ii}(1) & C_{ii}(0) & \cdots & C_{ii}(j-2) & \vdots & C_{ii}(j-1) & C_{ii}(j) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{ii}(j) & C_{ii}(j-1) & C_{ii}(j-2) & \cdots & C_{ii}(0) & \vdots & C_{ii}(1) & \cdots & C_{ii}(m-j) \\ \hline 0 & C_{ii}(j) & C_{ii}(j-1) & \cdots & C_{ii}(1) & \vdots & C_{ii}(0) & \cdots & C_{ii}(m-j-1) \\ \vdots & 0 & C_{ii}(j) & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{ii}(k-j) & \vdots & C_{ii}(k-j-1) & \cdots & C_{ii}(k-m) \end{bmatrix}$$

$$[h_{opt}] = \begin{bmatrix} h_{opt}(0) \\ h_{opt}(1) \\ h_{opt}(2) \\ \vdots \\ h_{opt}(m) \end{bmatrix}; [C_{id}] = \begin{bmatrix} C_{id}(0) \\ C_{id}(1) \\ C_{id}(2) \\ \vdots \\ C_{id}(k) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[h_{opt}] = ([C_{ii}]^T [C_{ij}])^{-1} [C_{ii}]^T [C_{id}] \quad (9)$$

したがって、降雨の自己相関、降雨・流出の相互相関が実測データより求められれば、解は数値的に簡単に求められる。

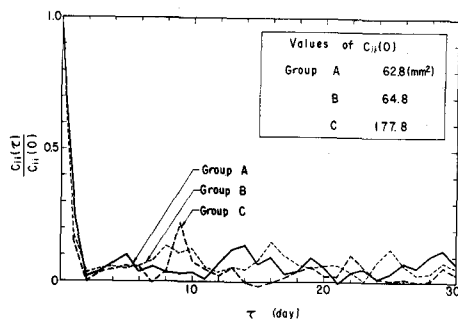


図-3 b

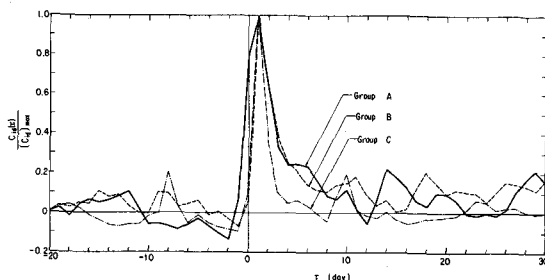


図-3 c

Eeglesonは、連立
方程式に

$$h(i) > 0$$

および評価関数を

$$\sum_{i=k-j+2}^{j+k+1} h(i) \rightarrow \text{Min}$$

としての条件をつけL
P問題として解を求め
ている。

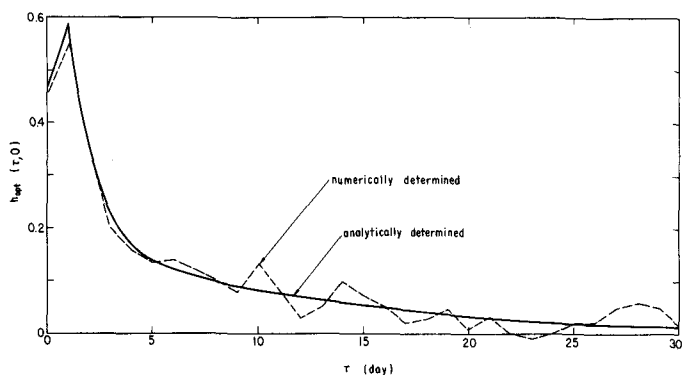


図-3 d

図-3 b, cはそれ
ぞれ降雨の自己相関、
降雨・流出の相互相
関である。これより、
式(9)により求めた最適
流出応答関数が図-3
dであり、これを用い
た式(1)による予測と実
測の比較は図-3 eに
載せる。^{5) 6)}

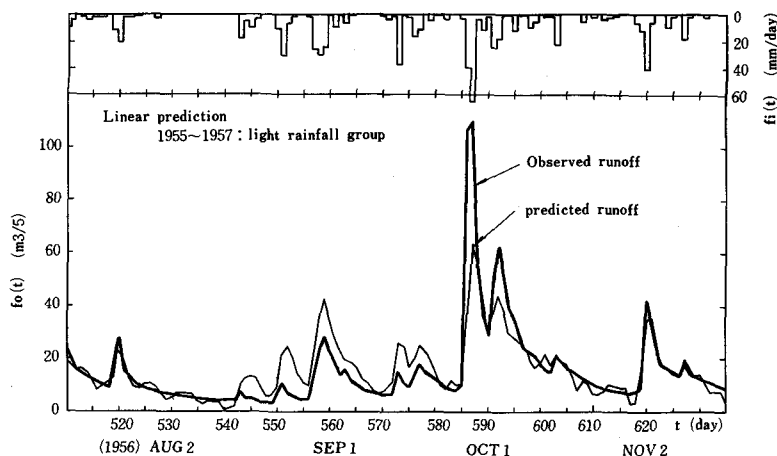


図-3 e

IV 非線型応答系の予測問題

あるシステムへの入力を $f_i(t)$, それからの出力を $f_o(t)$ とするとき, 線型系での入力-応答関係は一般に convolution 形の積分

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t h_1(t; s) x(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^t h_1(t-s) x(s) ds \end{aligned} \quad (1)$$

で表わされる。ここに, $h(t; s)$ は unit input response function である。水文学における unit hydrograph の概念は正にこれであり, 応答関数 $h_1(t-s)$ は unit hydrograph と呼ばれる。

入出力の時系列を知って, 線型系の応答関数を求める方法については良く知られており, 前節に述べた。

さて, 式(1)で表わされる入力-応答の概念をより一般的に, 非線型系の場合にも適用しうるように拡張することは, Wiener(1942, 1958)により始められた。

(1) 直交汎関数

式(1)の一般化表示は, 次のようになる。

$$\begin{aligned} y(t) &= h_0 + \int_{-\infty}^t h_1(t; s) x(s) ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t h_2(t; s_1, s_2) x(s_1) x(s_2) ds_1 ds_2 \\ &\quad + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t h_3(t; s_1, s_2, s_3) x(s_1) x(s_2) x(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 \\ &\quad + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t h_n(t; s_1, s_2, \dots, s_n) \cdot \prod_{i=1}^n x(s_i) \\ &\quad ds_1 ds_2 \dots ds_n \end{aligned} \quad (2)$$

ここに, $h_n(t; s_1, s_2, \dots, s_n)$ は一般的な n 次の核-応答関数を表わす。

式(2)のような非線型系の応答表示は, Wienerにより提案された。しかし, 具体的に応答核 h_n を求めることは, Wiener(1958)自身により核の直交関数系展開法による解法が示されてはいたが, 実際には難しく実用問題への応用は行われなかった。例えば, Amorocho²⁾(1963), Jacoby³⁾(1966) はかなり早い時機に流出現象における非線型応答を求めるべく試みたが必ずしも成功とは言われなかった。1971年に到り, 期せずして三論文(吉川・日野, 鋤柄⁴⁾⁵⁾; Bidwell⁷⁾, Amorocho & Brandstatter⁸⁾) が発表され, それぞれ異なる方法で二次の非線型応答核を具体的に求めることに成功し, 実際問題への応用の有効性が示された。

まず, 直交汎関数について議論を展開する。式(1)の右辺の第1項 h_0 は定数項ゆえ, 正規化されたものを K_0 と記号を替えて, $K_0^2 = 1$ すなわち,

$$G_0(K_0, t) = \pm 1$$

として正規化しうる。次に、式(1)の右辺の第2項に対応して、1次の汎関数として

$$G_1(K_1, t) = \int K_1(s) x(t-s) ds \quad (3)$$

$$\iint K_1(r) K_1(s) C(r-s) dr ds = 1 \quad (4)$$

x が white noise ならば

$$\int K_1^2(s) ds = 1 \quad (4a)$$

と選ぶことにより、正規化される。

2次の汎関数として、次式の関数形を考える。

$$F_2(t) = \iint h_2(s_1, s_2) x(t-s_1) x(t-s_2) ds_1 ds_2 + \int h_1(s) x(t-s) ds + h_0 \quad (5)$$

式(5)が0次および1次の汎関数 $-K_0$ および $\int K_1(s) x(t-s) ds$ と直交するための条件を求めよう。まず、0次汎関数との直交条件は、式(5)に1を掛けて t についての平均が零になるようにすれば良い。式(5)の第2項は式(5)によりすでに1とは直交するから、結局この条件は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \iint h_2(s_1, s_2) x(t-s_1) x(t-s_2) ds_1 ds_2 dt + h_0 = 0$$

すなわち、 $C(s_1-s_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t-s_1) x(t-s_2) dt$ を入力自己相関関数として

$$G(h_2, t) = \iint h_2(s_1, s_2) x(t-s_1) x(t-s_2) ds_1 ds_2 - \iint h_2(s_1, s_2) C(s_1-s_2) ds_1 ds_2 \quad (6)$$

同様の演算により、3次の正規直交汎関数 $G_3(K_3, t)$ は次のように定義される。

$$G_3(K_3, t) = \iiint K_3(s_1, s_2, s_3) x(t-s_1) x(t-s_2) x(t-s_3) ds_1 ds_2 ds_3 - 3 \iint K_3(s_1, s_1, s) x(t-s) ds, ds \quad (7)$$

以上のようにして作られた直交汎関数 $G_n(K_n, t)$ により非線型応答は、

$$y(t) = \sum_n G_n(K_n(\tau), t) \quad (8)$$

と書ける。

(2) デルタ関数による遅延フィルター法

今、未知の非線型応答系への入力と全く同じものを既知の非線型応答系への入力としてやると、出力は

$$y_k(t) = \sum_n G_n[H_n(\tau), t] \quad (9)$$

である。

未知の応答系からの出力と既知の応答系からの出力の相関を求めると

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T r(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int \sum_n \sum_n G_n(K_n) \cdot G_n(H_n) \\ &= \sum_n n! \int \cdots \int K_n(\tau_1, \dots, \tau_n) H_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n \quad (10) \end{aligned}$$

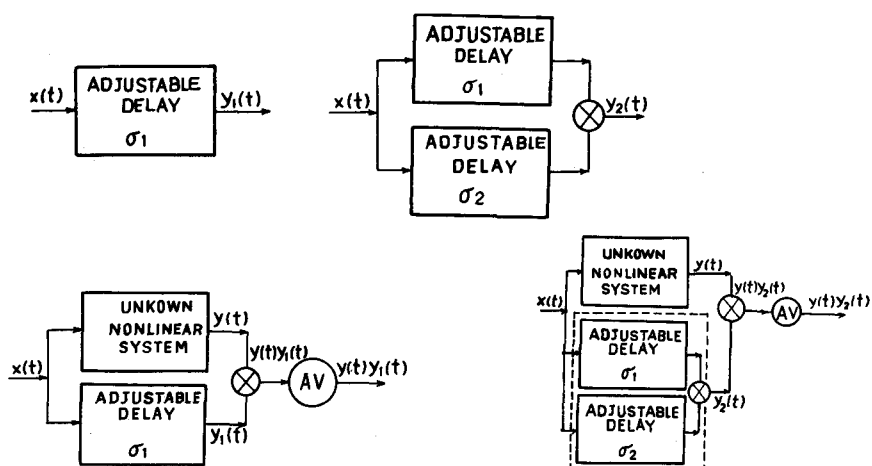


図-4 a

と表わされる。今、既知の非線型核として δ - 関数を用いば、非線型核は次のように求められる。

$$K_1(\sigma) = \frac{1}{k} \overline{y(t) x(t - \sigma)} \quad (11)$$

$$K_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2k^2} \overline{y'(t) x(t - \sigma_1) x(t - \sigma_2)} \quad (12)$$

($y' = y - h_0$)

図-4 b c はこうし求めた非線型流出核と、これにより計算された流出予測であり、図-4 d は非線型流出予測誤差スペクトルの結果である。^{4) 5)}

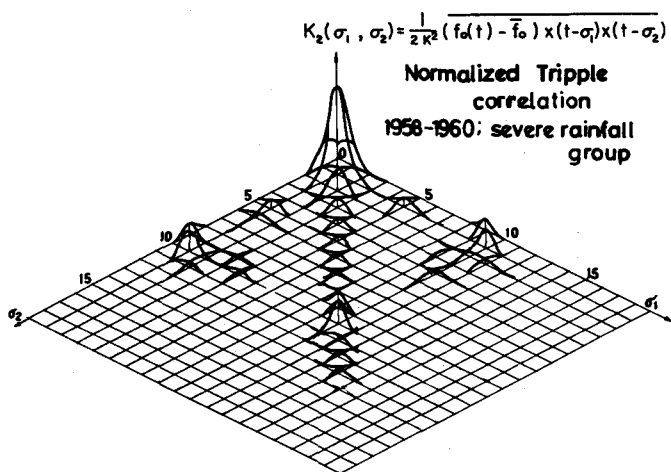
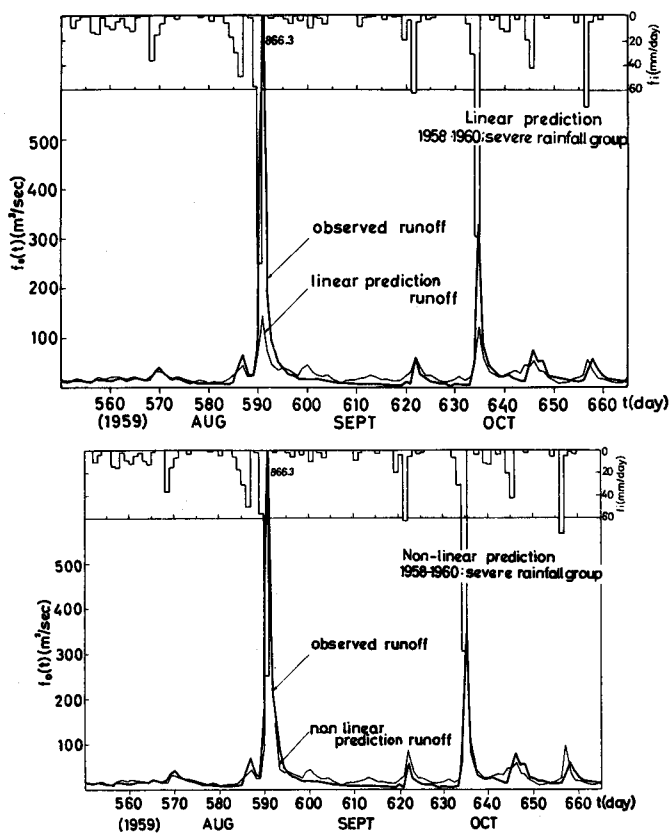
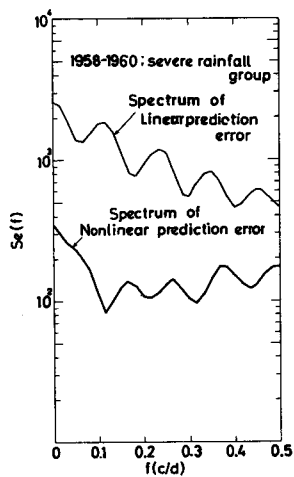


図-4 b



☒-4 c : An example of runoff prediction.



☒-4 d

V カルマン・フィルタによる推定と予測¹⁾²⁾

(1) 状態微分方程式

いま、あるシステムを考え、このシステムの状態は n 次元の変数ベクトル $x(t)$ に関する一階の常微分方程式系で記述される。(任意階の常微分方程式は、 $\dot{x}_i = x_j$ などに置くことにより、すべて一階のベクトル微分方程式に帰着する。)

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)x(t) + G(t)w(t) \quad (1)$$

ここに、

$x(t)$: システムの状態を表わす n 次元ベクトル

$F(t)$: 非確率的 (通常の) 行列時間関数 ($n \times n$ 行列)

$G(t)$: 非確率的行列時間関数 ($n \times p$ 行列)

$w(t)$: ガウス雑音 (p 次元ベクトル)

式(1)の離散表示は

$$x(k+1) = \Phi(k+1|k)x(k) + \Gamma(k+1|k)w(k) \quad (2)$$

となる。ここに、

$\Phi(k+1|k)$: 状態変換行列 ($n \times n$ 行列)

$\Gamma(k+1|k)$: 変換行列 ($n \times p$ 行列)

k : 時間ステップ $k \Delta t$

一般に、システムの状態量はなんらかの観測系を通して測定されるから、われわれは誤差なしに直接的にシステムの状態量を知ることはいできないし、また、重要なことであるが、状態量のすべての量を測定しうるわけではない。したがって、真の状態量 x (n 次元ベクトル) と観測量ベクトル z (m 次元ベクトル, $m \leq n$) とは、ある変換系を介して、次の関係で結びつけられている。

$$z(t) = M(t)x(t) + v(t) \quad (3)$$

あるいは、離散表示をすれば、

$$z(k+1) = M(k+1)x(k+1) + v(k+1) \quad (4)$$

ここに、

z : 観測量ベクトル (m 次元 ($m \leq n$))

M : 非確率的変換行列 ($m \times n$ 行列)

v : 観測系に入る誤差 (m 次元ベクトル)

(2) 最適推定予測に関するカルマン・フィルタ

問題は、式(1)~(4)で表わされるシステム・観測系に対して、状態量の推定・予測値と真値との誤差の分散を最小にする最適フィルタを決定することである。この問題に対して極めて一般性のある解を与えたのが Kalman である。彼は、1960 年 Hilbert 関数空間における直交射影の概念を用いて、今日カルマン・フィルタの名で呼ばれる最適フィルタを決定した。その後、多くの研究者がそれぞれ異なる方法でカルマン・フィルタの再誘導を試みており、そのことはとりもなおさず最初の Kalman の理論の難解さを物語っている (Jazwinski)。

にもかかわらず、カルマン・フィルタは極めて秀れており、人工衛星・月ロケットなどの制御をはじめ多くの問題に応用されている。

さて、カルマン・フィルタによる $x(k+1)$ の最適推定値を決定する計算方法を順序に従い結果のみ記せば、次のようになる。

まず、新たに出てくる記号について説明する。

$\hat{x}$: 状態量の推定値ベクトル, $\hat{x}(k|j)$ ステップ j までの情報からステップ k の状態推定量

$\tilde{x}$: 推定量誤差ベクトル; $\tilde{x} = \hat{x} - x$

Q : ガウス白色雑音 w の分散行列; $E\{w(j)w'(k)\} = Q(k)\delta_{jk}$, ($p \times p$ 行列)

R : ガウス白色雑音 v の分散行列; $E\{v(j)v'(k)\} = R(k)\delta_{jk}$, ($m \times m$ 行列)

P : 推定誤差の共分散行列; $E\{\tilde{x}(k|j)\tilde{x}'(k|j)\} = P(k|j)$ ($n \times n$ 行列)

(i) ステップ k における観測誤差の共分散行列を式(5)により求める。

$$P(k|k) = [I - K(k)M(k)]P(k|k-1) \quad (5)$$

ここに, $K(k) \cdot P(k|k-1)$ は前の時間ステップにおいてすでに式(6)(7)により求められているものを用いる。

(ii) 上の結果を用いて, $k+1$ ステップにおける観測誤差の共分散行列の推定値を求める。

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1|k)P(k|k)\Phi'(k+1|k) + \Gamma(k+1|k)Q(k)\Gamma'(k+1|k) \quad (6)$$

(iii) 上の結果を用いて, $k+1$ ステップでの **Kalman gain matrix** を次式(7)により求める。

(K : $n \times m$ 行列)

$$K(k+1) = P(k+1|k)M'(k+1)\{M(k+1)P(k+1|k)M'(k+1) + R(k+1)\}^{-1} \quad (7)$$

(iv) 最後に, 上式の **Kalman gain matrix** を用いて, $k+1$ 時間ステップでの x の最適推定値 x を計算する。

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \Phi(k+1|k)\hat{x}(k|k) + K(k+1)\{z(k+1) - M(k+1)\Phi(k+1|k)\hat{x}(k|k)\} \quad (8)$$

また,

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi(k+1|k)\hat{x}(k|k) \quad (9)$$

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)\{z(k+1) - M(k+1)\hat{x}(k+1|k)\} \quad (10)$$

とも書ける。

(3) カルマン・フィルタの意味

式(8)または式(10)より, カルマン・フィルタは次の意味をもつことがわかる。式(8)または(10)の右辺の第2項の〔 〕内は, ステップ k までの観測値の推定値 ($\hat{z}(k+1|k) = M(k+1)\hat{x}(k+1|k)$) と実際の $k+1$ ステップでの観測値 $z(k+1)$ との誤差を意味している。この差は **measurement residual** と呼ばれる。したがって, 式(8)・(10)は「 k ステップでの x の最適推定値による $k+1$ ステップ x の単純推定値 ($\hat{x}(k+1|k)$) と, **measurement residual** に **Kalman gain** を掛けた補正項とを加えて, $k+1$ ステップでの x の最適推定値が得られる」ことを意味している。

この **Kalman filter** の最も重要な特徴は, 観測データを連続して記憶する必要がなく, 観測

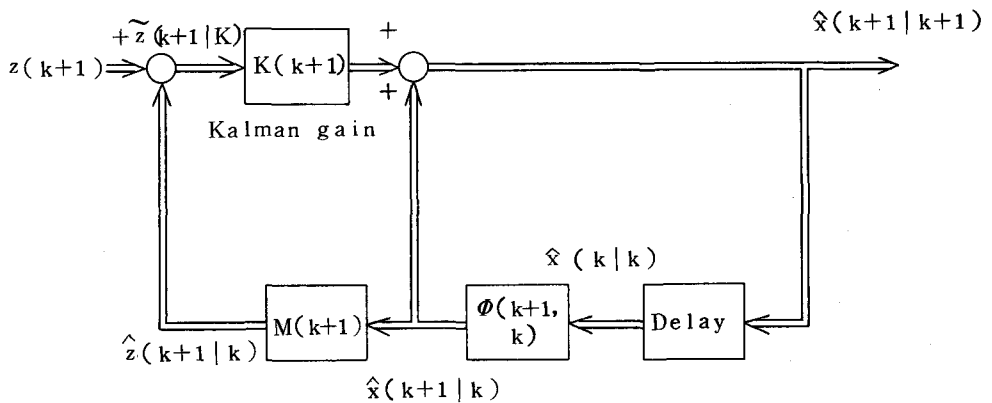


図-5 a

値が直に処理される点である。記憶が必要なのは、時間ステップが k から $k+1$ に移る際の $\hat{x}(k|k)$, $\Phi(k+1|k)$, $\Gamma(k+1|k)$, $M(k+1)$, $Q(k)$, $R(k+1)$ の値である。

今、変動が確率的定常状態にあるとすれば、 Φ , Γ , M は時間的に不変であり、共分散行列は一定値に収束し、したがって Kalman gain K は一定となる。その結果、最適フィルタもまた時間に無関係となる。これは、Wiener Hopf 積分方程式を解いて得られる周波数域での Wiener フィルタ一の時間領域での表示と等価である。

(4) カルマン・フィルタの応用例³⁾

さて、時刻 t における上水需要量 Q は、需要行動量 B を入力として、次式で表わされる。

$$\frac{dQ}{dt} + aQ = B(t) \quad (11)$$

ところで、需要行動量 $B(t)$ も一つの状態量と考える。しかし、これは実測不可能な(いわば)仮想量であり、かつ、その変化を記述する微分方程式も不明である。そこで、一応こゝでは直線的外挿を考える。式で表わせば、

$$\frac{dB}{dt} = B_1 \quad (12)$$

$$\frac{dB_1}{dt} = w(t) \quad (13)$$

である。 $w(t)$ は B_1 に対するノイズである。

式(11)・(12)・(13)を差分式化し、行列表示を行えば、次のようになる。

$$x(k+1) = \Phi(k+1|k)x(k) + \Gamma(k+1|k)w(k)$$

$$x = \begin{bmatrix} Q \\ B \\ B_1 \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} (1-a\Delta t) & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$w = [w] \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta t \end{bmatrix}$$

また、観測量ベクトル z は一次元で Q に等しく、式(4)は次のようになる。

$$z(k+1) = M(k+1) x(k+1) + v(k+1)$$

$$z = [Q] \qquad M = [1 \ 0 \ 0] \qquad v = [v]$$

図-5 b は、一つの適用例である。

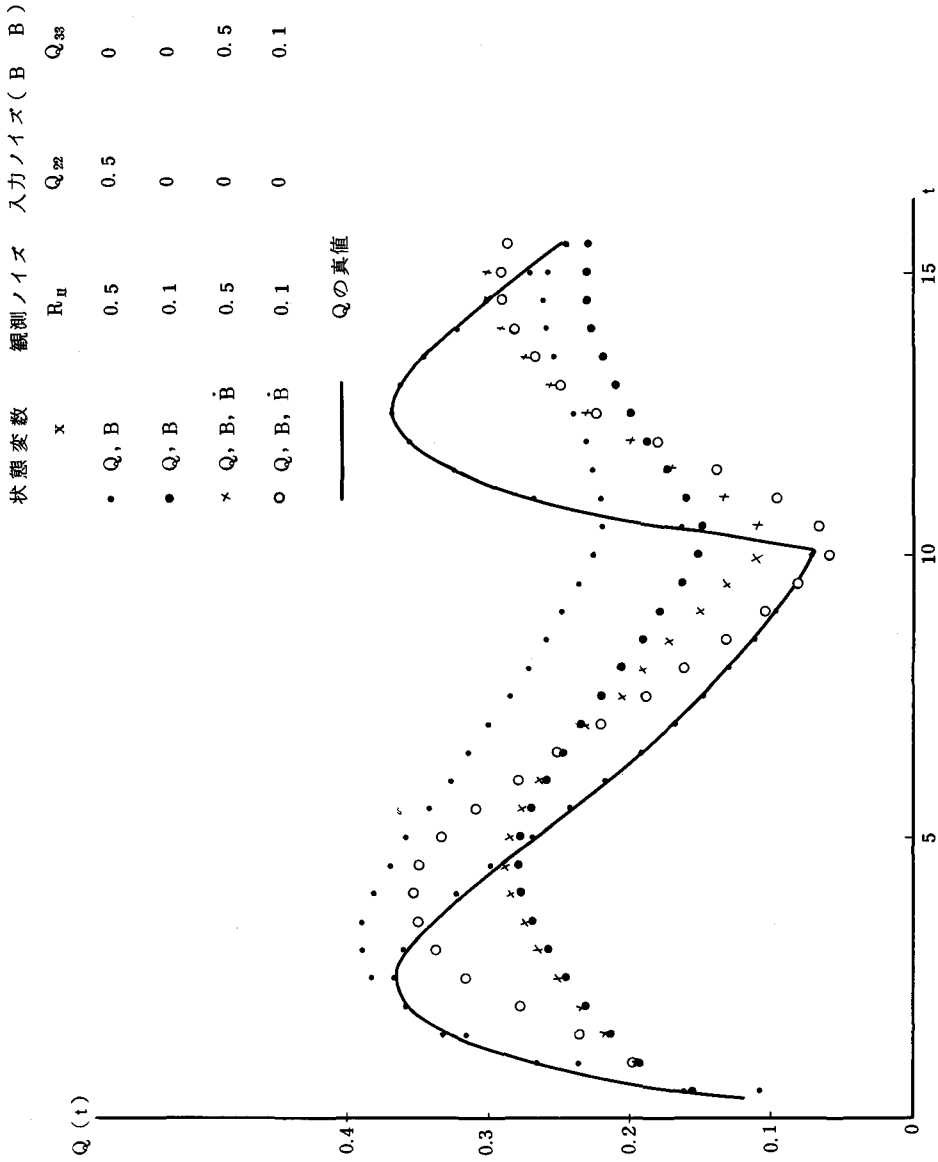


図-5 b

Ⅶ 伝達行列と行列微分方程式

(1) 連続体のシステム化

一次元連続体 例えば管をいくつかの性質の等しい区間に分割する。管径や管質・管厚などが変化する断面も一つの小区間と考える。こうした管の分割断面での力学状態量（流量・圧力水頭）を着目すべき状態変数と考えれば、pipe i や不連続部 $i+1$ は、これらの両端の量の相互変換を行うブラック・ボックスとみなせる。図-6 a に示すように、ブロック図の断面は二つのボックスを結ぶ小円で示し、また断面の左右の別をそれぞれ L と R で記する。管路の i 番目の区間に対応する変換器（black box）を F_i で表わし、場の伝達行列（Field transfer matrix）；不連続断面 i での変換作用を P_i で表わし、節点伝達行列（Point transfer matrix）と言う。また、このようないくつかの連続した要素の作用をまとめて一つにしたものを over-all transfer matrix と呼ぶ。

一次元連続体（管）をこのような要素（素子）に分割し、それらを順次連結したものと考えると、複雑な管路網系も簡明にブロック図で表わすことができる。

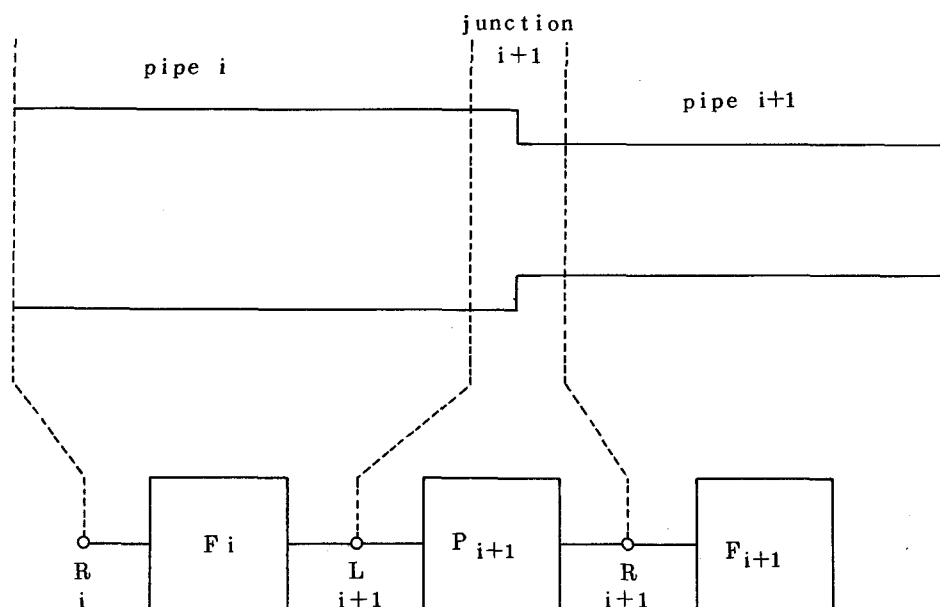


図-6 a

(2) 基礎方程式および場の伝達行列

ここでは、管水路の圧力波（water hammer）を取扱う。流量を Q ，圧力水頭を H とすると，流体の運動は連続方程式および運動量方程式より記述される。

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{gA}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{fQ^n}{2gD^n} = 0 \quad (2)$$

ここに、 A = 管路の断面積， g = 重力加速度， f = Darcy-Weisbach の抵抗係数， a = 水撃圧の波速， D = 管の内径， n = 抵抗式の速度のべき指数。

管水路の水撃圧は平均圧 H_0 のまわりに周期変動（振幅 h^* ）をしており，その大きさは微小で

あると仮定する。したがって、それに伴う流量の周期変動（振幅 q^* ）も平均流量 Q_0 に比べて小さいとする。 $Q = Q_0 + q^*$, $H = H_0 + h^*$

さらに、水撃圧が周期的であることにより、 q^* , h^* に次の関数形を仮定する。

$$q^* = R_e [q(x) e^{i\omega t}] \quad (3)$$

$$h^* = R_e [h(x) e^{i\omega t}] \quad (4)$$

ここに、 ω = 変動の角周波数、 R_e は複素数の実数部を意味する。上式より、圧力および流量変動について

$$\frac{d q}{d x} + \frac{i g A \omega}{a} \cdot h = 0 \quad (5)$$

$$-\frac{d h}{d x} + \left(R + \frac{i \omega}{g A} \right) q = 0 \quad (6)$$

あるいは、行列表示により次のように書かれる。

$$\frac{d z}{d x} = B Z \quad (7)$$

ここに、

$$Z = \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{i g A \omega}{a^2} \\ -(R + \frac{i \omega}{g A}) & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式(7)の解は、 B が定数のとき $x = x_i$ と $x = x_i + l_i$ の間で積分して

$$Z_{i+1} = e^{B l_i} Z_i = F_i Z_i \quad (9)$$

となる。 F_i は場の遷移行列 (**field transfer matrix**) である。この具体的な形は、行列 B の固有値を求め、これより

$$F_i = \begin{bmatrix} \cosh \mu_i & -\frac{i \omega g}{\mu_i} \frac{l_i A_i}{a_i^2} \sinh \mu_i \\ -\frac{l_i}{\mu_i} (R_i + \frac{i \omega}{g A_i}) \sinh \mu_i & \cosh \mu_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここに、添字 i は i 番目のパイプに関する値を示す。また、 μ_i は行列 B の固有値で次のようになる。

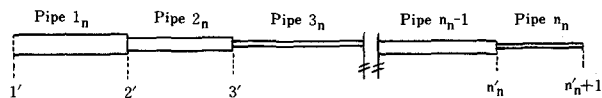
$$\mu_i = (l_i / a_i) \sqrt{-\omega_i^2 + i g A R \omega_i} \quad (11)$$

管の摩擦がなければ、遷移行列 F_i は

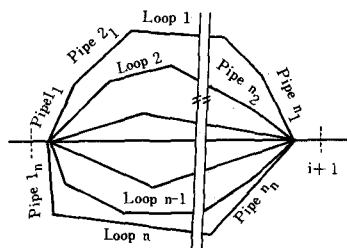
$$\begin{bmatrix} \cos b_i \omega & -\frac{i}{c_i} \sin b_i \omega \\ -i c_i \sin b_i \omega & \cos b_i \omega \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで、 $b_i = l_i / a_i$, $c_i = a_i / (g A_i)$

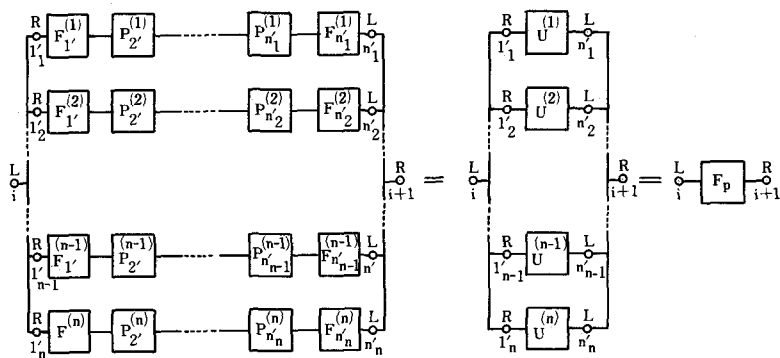
式(9)はいわゆる差分近似ではなく、管の特性が一定の区間での積分による管の左右両端の QH の変換のことである。つまり、区間長 l は微小区間である必要はなく、なんらの近似も含まれていない。このような方法によれば、次のべる節点伝達行列と組み合わせて、非常に複雑なパイプ系を一つの **overall transfer matrix** による表示に機械的な演算操作でもとめられる。しかも、この **matrix** には状態量が含まれていないという利点がある。



Longitudinal section of n^{th} loop

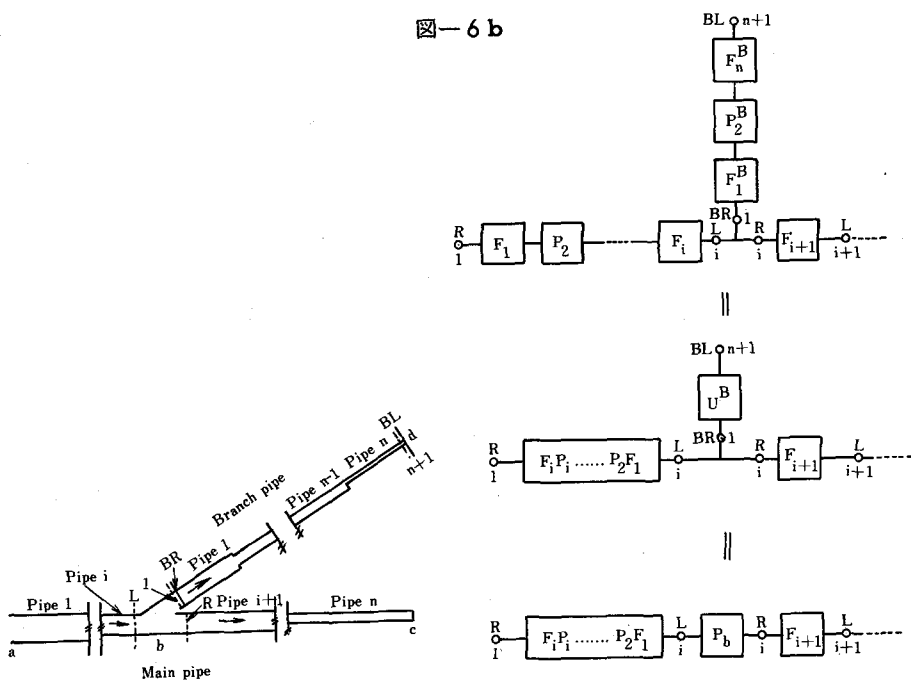


(a) Piping system



(b) Block diagram

图-6b



(a) Branch system

(b) Block diagram

图-6c

(3) 節点伝達行列

直列接続：節点 i で左右の管径・管の材質などが異っている（図-6 b）。節点 i の左右のパイプの量にそれぞれ上添字 L, R をつけて表わすと、連続条件より流量変動については

$$q_i^R = q_i^L \quad (13)$$

また、節点での損失を無視すると

$$h_i^R = h_i^L \quad (14)$$

すなわち、行列表示により

$$Z_i^R = P_{sc} Z_i^L \quad (15)$$

ここに、 P_{sc} は 2 次元単位行列であり、実際には伝達行列の中に入れてしまえる。

$$P_{sc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

管端バルブおよび管内オリフィス：図-6 b を参照して、バルブ（あるいは管内オリフィス）の前後の圧力差と流出量の関係を示すオリフィス則は

$$Q_{n+1}^L = C_d A_v \sqrt{2g(H_{n+1}^L - H_{n+1}^R)} \quad (16)$$

ここに、 A_v はバルブあるいはオリフィスの開口面積、 C_d は流出係数である。二三の計算の後、バルブやオリフィスでの伝達行列は

$$\begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix}_{n+1}^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2\Delta H_o}{Q_o} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix}_{n+1}^L + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2\Delta H_o k}{(C_d A_v)_o} \end{bmatrix} \quad (17)$$

となる。今、状態量として

$$Z' = \begin{bmatrix} q \\ h \\ 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

を定義すれば（これを拡張状態ベクトル（**extended state vector**）という）、

$$Z'^R = P'_{ov} Z'^L \quad (19)$$

と表わしうる。ここに P'_{ov} は伝達行列で

$$P'_{ov} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2\Delta H_o}{Q_o} & 1 & \frac{2\Delta H_o k}{(C_d A_v)_o} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

と書ける。

分岐点：分岐管の作用は、順次一つにまとめて節点伝達行列として与えることができる。

しかし、分岐点での伝達行列は、支管の端末条件により異なるので、まず、支管端に微小振動をしているバルブがある場合について述べる。前項の結果より、支管端断面の左右の状態ベクトル間の関係は、支管の状態ベクトルを主管と区別して Z'_B で表す。

さて、例として図-6 d のような一方は貯水池、他方はバルブにつながる管路をとる。貯水

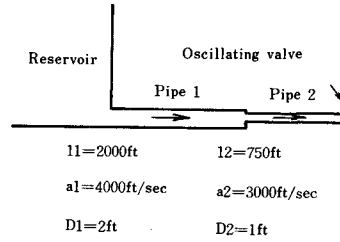


図-6d

池側の extended state vector とバルブ断面左端の extended state vector は overall field transfer matrix U' により

$$Z'_{n+1} = U' Z_1^R \quad (21)$$

さらに、バルブでの節点伝達行列、式(19)により

$$Z_{n+1}^R = P'_{ov} Z_{n+1}' = P'_{ov} U' Z_1^R \quad (22)$$

ここに、

$$U' = F_n' P_n' F_{n-1}' \cdots F_2' P_2' F_1' = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$P'_{ov} U' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2H_0}{Q} & 1 & \frac{2H_0 k}{\tau_0} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} U_{11} & U_{12} & \\ \hline -2H_0 U_{11}/Q + U_{21} + 2H_0 k U_{31}/\tau_0 & -2H_0 U_{12}/Q + U_{22} + 2H_0 k U_{32}/\tau_0 & \\ \hline U_{31} & U_{32} & \\ \hline U_{13} & & \\ -2H_0 U_{13}/Q + U_{23} + 2H_0 k U_{33}/\tau_0 & & \\ \hline U_{33} & & \end{array} \right] \quad (24)$$

式(22)はしたがって、境界条件 $h_1^R = h_{n+1}^R = 0$ を考慮して

$$\begin{bmatrix} q_{n+1}^R \\ h_{n+1}^R \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^R \\ h_1^R \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる。これを展開すれば,

$$q_{n+1}^R = U_{11} q_1^R + U_{13} \quad (25)$$

$$h_{n+1}^R = 0 = (-U_{11} \frac{2H_o}{Q} + U_{21} + U_{31} \frac{2H_o k}{\tau_o}) q_1^R \\ + (-U_{13} \frac{2H_o}{\tau_o} + U_{23} + U_{33} \frac{2H_o k}{\tau_o})$$

上式より, q_1^R は次のように定まる。

$$q_1^R = \frac{-U_{13} \frac{2H_o}{Q_o} + U_{23} + U_{33} \frac{2H_o k}{\tau_o}}{U_{11} \frac{2H_o}{Q_o} - U_{21} - U_{31} \frac{2H_o k}{\tau_o}} \quad (26)$$

q_1^R が求まったから, これを式 (21) に代入すればバルブ端の圧力変動の振幅 h_{n+1}^L がつぎのように求まる。

$$h_{n+1}^L = U_{21} q_1^R + U_{23}$$

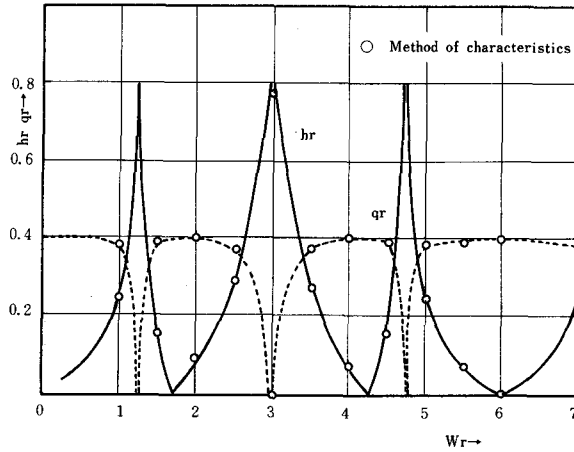


図-6e

図-6eには, バルブの振動の角周波数 $\omega_r = \omega / \omega_{th} = \frac{2}{\pi} \omega \Sigma \frac{l_i}{a_i}$ とバルブ端変動の振動の振幅 $h_r = 2 |h_{n+1}^L| / H_o$, および流量変動 $q_r = 2 |q_{n+1}^L| / Q_o$ 関係の無次元図である。

VII グラフの理論

(1) グラフの行列表現および基本的性質

グラフはいくつかの点 (points) とそれらを結びつけるいくつかの線 (line segments) から構成される一つの構造である。グラフの点は節点 (node), 頂点 (vertex) あるいは端点 (terminal point) などと呼ばれ, 線は枝 (branch), 弧 (arc), 辺 (edge) と呼ばれている。

a) 接続行列: グラフの各頂点へのすべての辺の接続は行列を用いて表現しうる。この行列をグラフの接続行列 (Incidence matrix) という。接続行列 I の各要素 (entry) は次の法則により, $+1$, 0 , -1 のいずれかの数である。

$I_{i,j} = 0$: j -辺と i -頂点とが接続していない

$I_{i,j} = +1$: j -辺は i -頂点に接続しており, 辺の方向は i -頂点から出ていく向き (正方向) になっている。

$I_{i,j} = -1$: j -辺が i -頂点に接続しており, 辺の方向は i -頂点に入ってくる向き (負方向) である。

例: 図-1 に示す管路網について例を示す。この管路網は 6 本のパイプとポンプ 1 ケより成っている。辺には数字, 頂点にはアルファベットで記号を付ける。辺-7 はポンプである。この管理網の接続関係を点と線とで表わせば図-2 のようになる。この図を管路網のシステム・グラフ (System graph of network) と呼び, G と記号する。上述のルールに従い接続グラフは次のようになる。

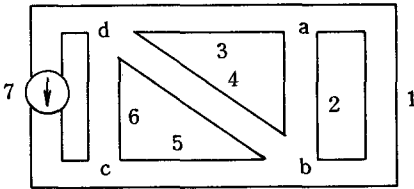


図-7 a 簡単な管路網

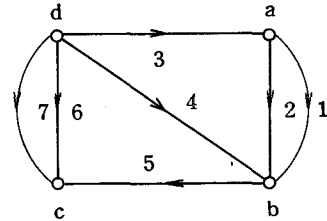


図-7 b システム・グラフ

		Component numbers						
	Vertices	1	2	3	4	5	6	7
$I =$	a							
	b	1	1	-1	0	0	0	0
	c	-1	-1	0	-1	1	0	0
	d	0	0	0	0	-1	-1	-1
		0	0	1	1	0	1	1

(1)

グラフ G の各辺は二つの端点をもっている。それゆえ, 行列 I の各列 (column) には $+1$ が一つ, -1 が一つ入っている。したがって, I の行 (row) は linearly dependent である。(はじめの三つの行の和に, 最後の行を加えてみよ)

b) 路 (path): 一つの頂点から他の頂点へ, 辺をたどっていけるとき, この辺のつながり (a sequence of edges) を路 (path) という。もし, グラフのすべての 2 頂点の組合せ (pair of vertices) の間に路があるとき, このグラフは連結 (connected) と言われる。

- グラフが connected でないとき、グラフは分割されている (be in parts) と呼ばれる。2 つの路 P_1 と P_2 の共通の頂点が路の終端点以外にないとき、2 つの路は distinct といわれる。
- c) 回路 (circuit) : グラフの部分グラフ (subgraph) で、その 2 つの頂点の組のいずれについても 2 本の異なる路があるとき、この部分グラフを回路と言う。
- d) 木 (tree) および補木 (cotree) : 連結グラフ G の部分グラフ g で次の性質をもつものを "木" T と名付ける。

- (i) 連結していること。
- (ii) グラフのすべての頂点を含むこと。
- (iii) 回路をもたないこと。

連結グラフ G からその連結部分グラフである木 T に属するすべての辺を除いた残りを "補木" T' という。

木と補木の定義に対応して、辺を次のように区別して呼ぶことにする。

- (i) 枝 (branch) : 木に属する辺
- (ii) 小枝 (chord) : 補木に属する辺

頂点の数 v 、辺の数 e よりなるグラフの木は $(v-1)$ 個の辺を含み、その補木は $(e-v+1)$ の辺を有する。

- e) 基本回路 : 木はグラフのすべての頂点を含み、かつそのすべての 2 つの頂点の組を結ぶ路 (distinct path) はただ一つあるにすぎないから、木に補木の chord を一つ加えて、サーキットを作ることができる。このサーキットを基本回路と呼ぶ。補木のコードは $(e-v+1)$ 個あるから、基本サーキットもこれに対応して $(e-v+1)$ 個存在する。このように、木に補木のコードを加えてサーキットを作る仕方を行列で表現することができる。これをサーキット行列 (fundamental circuit matrix) と言う。

サーキット行列は、グラフのすべての辺と (補木の) コードとの連結関係を表わすもので、この各要素は次のルールにより $0, \pm 1$ のいずれかの数とする。サーキットの方向はコード方向と同じにとる。

- $b_{i,j} = 0$: j -辺と i -サーキット (コ・トリーの i -辺を加えて作られるサーキット) とは連結していない。
- $b_{i,j} = +1$: j -辺が i -サーキットに含まれ、その方向がサーキットの方向と一致している。
- $b_{i,j} = -1$: j -辺が i -サーキットに含まれ、その方向はサーキットの方向と逆である。

例 : 図-2 のグラフにおいて辺 1, 3, 6 よりなる木のサーキット行列は次のようになる。

$$B_f = \begin{array}{c|cccc} & \text{Tree} & & \text{Cotree} & \\ \hline & 1 & 3 & 6 & \\ \hline \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{array} & \begin{array}{c} \text{chords} \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

サーキット行列は木にその補木のコードを加えてサーキットとする仕方を表するのであるから、その cotree 部分を単位行列 U となるように配列することができる。すなわち、一般に基本サーキット行列は次のように部分行列で表しうる。

$$B_f = \left[\begin{array}{c|c} \text{Tree} & \text{cotree} \\ B & U \end{array} \right] \quad (3)$$

f) カットセット：連結グラフを2つの部分グラフに分けるような辺の集合 G_c を連結グラフのカットセットあるいは単にカットと言う。カットセットは正確には次のように定義される。

- (i) 部分グラフ G_c を取去ると、グラフ G は2つの部分に分かれる。
- (ii) 部分グラフ G_c の部分グラフがさらに(i)の性質をもつことはない。

(2) 連続の関係式 (kirchhoff) の法則

これまで述べて来たことは単にグラフの辺と節点の連結の具合を定性的に論じ、行列表示の方法を定義したということだけではなく、グラフの数量的関係をより一般的に記述する方向に発展しうる。

管路網や電気回路網の問題では、kirchhoffの二法則が満たされなければならない。すなわち、(i)任意の閉回路に沿っての水頭差あるいは電圧差の和は零である。(ii)一つの分岐点への流出入量の和は零である。

a) サーキット方程式：今、サーキット行列 B_f とそれと同じ順序で配列された各辺の損失水頭変数の集合—例ベクトル $H = [h_i(t)]^T (i=1, 2, \dots)$ を考える。サーキット行列の行 (row) は一つの閉回路の構成を示すから、その各行と列ベクトル H の積は Kirchhoff の第一則により零でなければならない。

$$B_f \cdot H = [B \mid U] \begin{bmatrix} H_T \\ H_{T'} \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

ここに、 H_T はトリーの辺に対応する損失水頭ベクトル、 $H_{T'}$ はコ・トリーの辺に対応する損失水頭ベクトルである。一つの木には $(e-v+1)$ 個の基本サーキットがあるから、これに対応して $(e-v+1)$ 個の方程式が得られる。

例：図-2のグラフについてのサーキット方程式は次のようになる。

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_3 \\ h_6 \\ h_2 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_7 \end{bmatrix} (t) = 0$$

b) カット・セット方程式：同様に、グラフの各辺の流量をカットセット行列辺の順序に並べた列ベクトル Q に $[q_i(t)]^T (i=1, 2, \dots)$ を考える。カットセット行列の各列とこの列ベクトルの積は零となる。

$$A_f \cdot Q = [U \mid A] \begin{bmatrix} Q_T \\ Q_{T'} \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

ここに、列ベクトル Q は木に対応する部分 Q_T と補木に対応する部分 $Q_{T'}$ とに分割して示した。このようにして得られる方程式をカット・セット方程式という。木には $(v-1)$ 個の

基本カット・セットがあり、したがって $(v-1)$ 個のカット・セット方程式がある。

$(v-1)$ 個のカット・セット方程式は数学的には節点での流量の連続式と等価であり、任意の仮想的境界で回路を2分するとき、net flow が保存されなければならないことものをべている。

(3) グラフ理論による管路網の計算

a) トリーの選定： n 個の節点（分岐点）， e 個の辺（パイプ）よりなる管路網では、各辺について未知数は流量 Q_i と水頭差 H_i であるので総未知数は $2e$ 個である。サーキット方程式として $(e-v+1)$ 個の方程式，カット・セット方程式として $(v-1)$ 個の方程式，計 e 個の独立な関係式が得られる。 $2e$ 個の未知数を決定するための残りの関係は、各辺の terminal equation e 個である。 $2e$ 個の変数のうち、いくつかは例えばポンプや貯水池などのように既与条件がある。

前節で変数ベクトルをトリーに関する部分とコ・トリーに関するものに分けて表わしたが、さらに、その各々を既与要素を含む辺とそうでない辺とに分ける。

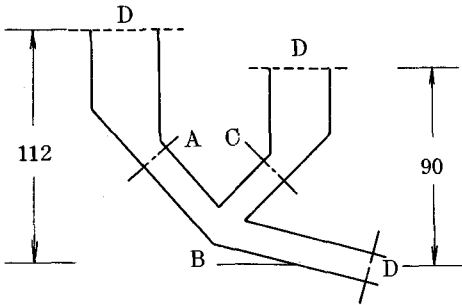


図-7 c

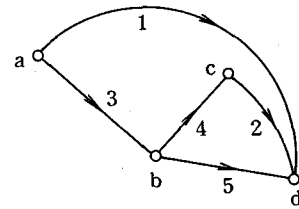


図-7 d

表-1

(1)ベクトル	(2)トリー中の貯水池	(3)トリー中のパイプ	(4)コ・トリー中のパイプ	(5)コ・トリー中のポンプ
Q	Q_{T_1}	Q_{T_2}	Q_{T_1}'	Q_{T_2}'
H	H_T	H_{T_2}	H_{T_1}'	H_{T_2}'

[] 内は二次変数， ○内は既与条件 specified drivers

このようにすれば、カットセット方程式およびサーキット方程式は次のように書かれる。

$$\begin{bmatrix} U & 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & U & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{T_1} \\ Q_{T_2} \\ Q_{T_1}' \\ Q_{T_2}' \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & U & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{T_1} \\ H_{T_2} \\ H_{T_1}' \\ H_{T_2}' \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

ここに、 $A_{i,j}, B_{i,j}$ はカット・セット行列およびサーキット行列の部分行列である。これらの間には、直交関係より

$$A_{i,j} = -B_{j,i}^T \quad (9)$$

$$B_{i,j} = -A_{j,i}^T \quad (10)$$

の関係がある。

b) Terminal equation : 管路網の抵抗損失の関係——パイプの terminal 方程式——は、抵抗形式あるいは逆にコンダクタンス形式で次のように書かれる。

$$\begin{bmatrix} H_{T_2} \\ H_{T_1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_T & 0 \\ 0 & R_{T'} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_{T_2} \\ Q_{T_1}' \end{bmatrix} \quad (11)$$

あるいは

$$\begin{bmatrix} Q_{T_2} \\ Q_{T_1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_T & 0 \\ 0 & Y_{T'} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} H_{T_2} \\ H_{T_1}' \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここに、 $(\cdot) * (\cdot)$ は非線型関係を意味する。また R_T, Y_T などは管の抵抗係数行列で、各管がトリーに属するかコ・トリーに属するかにより分割して表示してある。これらは対角行列である。

c) コンダクタンス形式による解法——Branch 法：カットセット方程式，式(7)，より

$$\begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} Q_{T_1} + \begin{bmatrix} 0 & A_{11} \\ U & A_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{T_2} \\ Q_{T_1}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} Q_{T_2}' = 0 \quad (13)$$

上式に，terminal eq (12) を代入すれば

$$\begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} Q_{T_1} + \begin{bmatrix} 0 & A_{11} \\ U & A_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_T & 0 \\ 0 & Y_{T'} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} H_{T_2} \\ H_{T_1}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} Q_{T_2}' = 0 \quad (14)$$

一方，サーキット方程式，(8) より

$$\begin{bmatrix} H_{T_2} \\ H_{T_1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & U \\ -B_{11} & -B_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{T_1} \\ H_{T_2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

これを，式(14)に代入し，式(10)の関係をいれれば

$$\begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} Q_{T_1} + \begin{bmatrix} 0 & A_{11} \\ U & A_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_T & 0 \\ 0 & Y_{T'} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & A_{11} \\ U & A_{21} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_{T_1} \\ H_{T_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} Q_{T_2}' = 0 \quad (16)$$

が得られる。二次変数を消去するためには，上式の下半部を取り

$$\begin{bmatrix} U & A_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_T & 0 \\ 0 & Y_{T'} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & U \\ A_{11}^T & A_{21}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{T_1} \\ H_{T_2} \end{bmatrix} + A_{22} Q_{T_2}' = 0 \quad (17)$$

を得る。これを簡単化すれば次のようになる。

$$Y_T * H_{T_2} + A_{21} Y_{T'} * [A_{11}^T H_{T_1} + A_{21}^T H_{T_2}] + A_{22} Q_{T_2}' = 0 \quad (18)$$

表-1を参照すれば、上式の中の未知変数はトリーに含まれる管路の損失水頭ベクトル H_{T_2} であることがわかる。 H_{T_1} および Q_{T_2}' は貯水池水頭およびポンプ揚水量として既知量である。したがって、式(18)を逐次近似的に解いて未知量 H_{T_2} を求めることができる。損失水量ベクトル H_{T_2} が求まると、残りのコ・トリーに対応する未知損失水頭はサーキット方程式(8)より定まる。流量 Q_{T_2} および Q_{T_1}' は terminal 方程式より、ベクトル Q_{T_1} はカット・セット方程式(7)より計算できる。

上述の代入法は、branch formulation method と呼ばれる。なぜならば、トリーの枝に対応する未知変数 H について解が求められたからである。

式(18)は一般的な解であり、networkの具体的な形状とは独立である。この意味でグラフ理論は新しい設計法 **symbolic design** として注目されている。

成分 i		h_i	q_i
1	貯水池	112	-9.1
2	貯水池	90	3.4
3	管路	15.5	9.1
4	管路	6.5	3.4
5	管路	96.5	5.7

		h_i	q_i
1	管路	206.30	0.75
2	管路	20.12	0.36
3	管路	3.48	0.39
4	管路	0.03	0.05
5	管路	209.75	0.45
6	管路	16.64	0.44
7	ポンプ	-226.42	0.80
8	ポンプ	-209.75	0.40

Ⅷ おわりに

システム概念は20世紀後半に人類知能が獲得した最大の認識と言われ、システム解析の方法は多種多様である。水理学水文学の分野でも、めざましく進歩するシステム解析の手法が広範に使用される。

この講義はマトリックスで記述的な統一を計りつつ、出来るだけ多くの方法を具体的例題を通して解説するよう努めた。しかし、頁数の関係で紹介しきれなかった研究もある。これらについては、第1回日米水文学セミナー論文集 (Systems Approach to Hydrology, Proc. 1st Bilateral Seminar in Hydrology) の一読をおすすめする。

参 考 文 献

Ⅱ ダイナミック・プログラミング

1. Bellman, R.: Dynamic Programming, Princeton Univ. Press (1957)
2. 本間 仁・石藤藤次郎 (編): 応用水理学 下Ⅱ, 丸善 (1971)
3. 日野幹雄・金 治弘・稲葉明光・丸山峯男: 水資源計画におけるDPの適用について, 文部省科学研究費 (水資源) 昭和46年度報告書 (1972)
4. 上田年比古・小川康彦: 貯水池群の取水操作に関する検討, 第25回年次学術講演会講演集, 第2部 p.187, 土木学会 (1970)
5. 室田 明・神田 徹: 貯水池による水供給の信頼性 (第2報), 第26回年次学術講演会講演集, 第2部, p.411, 土木学会 (1971)
6. 高棹琢馬・横田穰二: DP利用によるダム貯水池の洪水調節方式について, 第26回年次学術講演会講演集, 第2部, p.417, 土木学会 (1971)

Ⅲ ウィナー・フィルターによる線型応答系の予測問題

1. Wiener, N.: Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, MIT Press (1949)
2. 本間 仁編: 応用水理学 下Ⅱ, 1.5章, 丸善 (1971)
3. 木下武雄: 石狩川上流流域の流出機構の変化について, 土木学会論文集, No. 59, (1958)
4. Eagleson, P.S., Mejia, R. and March, F.: Computation of optimum realizable unit hydrographs, Water Res. Res., Vol. 2, (1966)
5. 日野幹雄: 情報理論的水文学への序説, I, II, III, 東京工業大学土木工学科研究報告 Nos. 4, 6 (1968)
6. Hino, M.: Runoff forecasts by linear predictive filter, J. Hydr. Div., Proc. ASCE, Vol. 96, No. HY3, (1970)
7. 石原藤次郎・高棹琢馬・池淵周一: 長期間流出解析法に関する二三の考察, 土木学会論文集 No. 196 (1971)

Ⅳ 非線型応答系の予測問題

1. Wiener, N.: Nonlinear Problems in Random Theory, MIT Press (1958)
2. Amoroch, J.: Measures of the linearity of hydrologic systems, J. Geophy. Res., Vol. 68, 2237 (1963)
3. Jacoby, S.L.S.: A mathematical model for nonlinear hydrologic system, J. Geophy. Res., Vol. 71, 4811 (1966)

4. 吉川秀夫・日野幹雄・鋤柄徹：C.M.W.法による非線型流出の解析，第15回水理講演会講演集，p.55（1971）
5. Hino, M., Sukigara, T. and Kikkawa, H.: Nonlinear runoff kernels of hydrologic system, Systems Approach to Hydrology, Proc. 1st Bilateral U.S.-Japan Seminar in Hydrology, (1971)
6. 日野幹雄：流出の非線型性について，第16回水理講演会講演集，p.105（1972）
7. Bidwell, V.J.: Regression analysis of nonlinear catchment system, J. Geophy. Res., Vol. 7, 1118 (1971)
8. Amorocho, J. and Brandstetter, A.: Determination of nonlinear functional response functions in rainfall-runoff processes, J. Geophy. Res., Vol. 7, 1087 (1971)

V カルマン・フィルタによる推定と予測

1. Kalman, R.E.: A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol. 82, pp. 35 (1960)
2. Jazwinski, A.H.: Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press (1970)
3. 住友 恒：都市における上水需要の変動特性について，——需要の時間変動の分析——，土木学会論文集，No. 192, p. 69 (1971)
4. 日野幹雄・石川和秀：水需要変動予測へのカルマン・フィルタ理論の適用，「水資源計画の最適化に関する基礎的研究」，文部省科学研究費（水資源）昭和46年度報告書（1972）

VI 伝達行列と行列微分方程式

1. Bellman, R.: Introduction to Matrix Analysis, McGraw Hill (1970)
2. Chaudry, M.H.: Resonance in pressurized piping systems, J. Hydr. Div., Proc. ASCE, Vol. 96, No. HY9, 1819-1839 (1970)
3. Chaudry M.H.: Resonance in pipes having variable characteristics, J. Hydr. Div. Proc. ASCE, Vol. 98, No. HY2, 325-333 (1972)

VII グラフの理論

1. Enger, T. and Feng, C.C.: Flowgraph analysis of pipeline networks, J. Hydr. Div., Proc. ASCE, Vol. 97, No. HY10, 1607-1624 (1971)
2. Kesavan, H.K. and Chandrashekar, M.: Graph-theoretic models for pipe networks analysis, J. Hydr. Div., Proc. ASCE, Vol. 98 No. HY2, 345-364 (1972)
3. Lam, C.F. and Walla, M.L.: Computer analysis of water distribution systems; Part I - Formulation of equations, J. Hydr. Div., Proc. ASCE, Vol. 98, No. HY2 335-344 (1972)

（単行本については，次の文献参照のこと）

4. 毛利正光・西村 昂：グラフの理論（その(1)(2)），新数学講座 7，8，土木学会誌，55巻 4号5号（1970）