

最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用

井 島 武 士

1 は し が き

Dean(1945), Ursell(1947)(1949)等の研究につづいて、最近の数年間にNewman(1965) Miles(1967), Mei & Black(1970)等によって、海底又は水面附近の物体による波の変形や作用に関する境界値問題の解法が発表されているが、著者(1969)(1970)は海面に固定された水平板による波の変形と作用の問題を解くために一つの方法を見出し、之を種々の場合に適用してその有効性を調べたが、上述の研究者の方法と比べると、類似の点もあるが、計算法が直線的で数学的な技巧を余り要しないことと、比較的に応用面が広いと思うので、本文で著者の方法によって解くことの出来る問題の例をあげて計算結果の一部を示し、参考に供したいと思う。各問題の詳しい結果は別の機会に報告するつもりである。

2 従来の解法

Black 及び Mei(1970)によると、之等の境界値問題の解法は次の3つに分けられる。

- (1) Ursellの方法：水中に設けた薄い障壁による波の反射や変形の問題及び水平軸をもつ円筒の、水面における heaving motion (鉛直振動)による波の発生や円筒に対する圧力計算に対して Ursell(1947)(1949)により示された解法で、例えば後者の問題に対しては heaving により発生する進行波と原点における点源(point source)による流れの速度ポテンシャルの重合を基本流とし、之と未知常数をもつ原点からの距離と共に減衰する項の和により表わされる多項式による流れの場を重合して円筒面での境界条件を満足するように未知常数を決める方法で、類似の方法が用才(1959)により、楕円形及び Lewis 型断面の直柱に対して拡張されている。
- (2) 積分方程式を解く方法：例えば Newman(1965)は海底不連続部での波の変形を解くために、そこでの水平流速の分布を未知函数として境界条件を満足するための積分方程式を導き、之を解くことによって解を求めている。
- (3) 変分法による方法：上記の方法では速度ポテンシャルの各項の係数を決めるために多数の連立方程式(Newmanの場合80ヶ)を解く必要があるが、反射率や通過率だけを求めれば良い場合には、変分法を用いると対応する1ヶの方程式だけを解けば良い。Black-Mei(1970)は之によって種々の場合を計算している。(3)の方法が実用上最もかんたんであるが、運動の詳細特に物体近傍の現象は近似的にしかない。(2)の方法は計算上積分方程式の智識を若干必要とする。(1)の方法は問題毎に数学的に異った技巧を要する。こゝに述べる著者の方法では、水面及び水底の条件を満足する速度ポテンシャルの一般解の形が、Sturm-Liouville 型の固有値問題の解として直交函数系によって展開される場合に限られるが、それが求められれば、あとは機械的な計算を直線的に進めるだけで、数ヶの連立方程式を解くことによって容易に解を求めることが出来るものである。

3 基 本 仮 定

与えられた周波数 $\sigma (=2\pi/T, T$ は波の周期)をもつ波による定常流体運動に関する問題を取扱い、非圧縮性完全流体における2次元運動で、水深一定で速度ポテンシャルをもつ微小振幅波に対

象とする。座標系は原点を静水面に取り、水平方向に x 軸、鉛直上方に Z 軸を取る。時間を t で表わすと、速度ポテンシャル $\Phi(x, Z; t)$ は時間項を分離して一般に次の形で表わされる。

$$\Phi(x, Z; t) = \phi(x, Z) e^{i\sigma t} \quad (1)$$

4 自由表面をもつ一様流体の波に対する速度ポテンシャル

質量保存則により、 $\Phi(x, Z; t)$ に対する微分方程式は次の Laplace の方程式である。

$$\partial^2 \Phi / \partial x^2 + \partial^2 \Phi / \partial Z^2 = 0 \quad (2)$$

水平及び鉛直流速 u, w および密度 ρ の流体中の圧力 p は夫々次式で表わされる。 g は重力の加速度である。

$$u = \partial \Phi / \partial x, \quad w = \partial \Phi / \partial Z, \quad p / \rho = -\partial \Phi / \partial t - gZ \quad (3)$$

自由表面を $Z = \zeta(x, t)$ とすると、圧力一定の条件により

$$\zeta(x, t) = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} (Z=0) \quad (4)$$

不透過壁面 $F(x, Z; t) = 0$ に対しては、運動学的条件として

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + w \frac{\partial F}{\partial Z} = 0 \quad (5)$$

が成立する。 $F(x, Z; t) = Z - f(x, t) = 0$ として表わされるときは上式に代入して境界条件は次のようである。

$$Z = f(x, t) \text{ で } w = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{又は} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad (6)$$

自由表面に対しては $Z = 0$ で $\partial \Phi / \partial Z = \partial \zeta / \partial t$ であるから、式(4)によって ζ を消去して、水面条件は次のようになる。

$$Z = 0 \text{ で } \quad \partial^2 \Phi / \partial t^2 + g \partial \Phi / \partial Z = 0 \quad (7)$$

水深 h の不透過水底面に対しては

$$Z = 0 \text{ で } \quad \partial \Phi / \partial Z = 0 \quad (8)$$

従って時間項を分離した式(1)の速度ポテンシャル $\phi(x, Z)$ については、式(2)(7)(8)は次のようである。

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial Z^2 = 0 \quad (9)$$

$$Z = 0 \text{ で } \quad \partial \phi / \partial Z = \sigma^2 \phi / g \quad (10)$$

$$Z = -h \text{ で } \quad \partial \phi / \partial Z = 0 \quad (11)$$

この外に運動の性質上次の条件が入る。

$$|x| \rightarrow \infty \text{ で } |\phi| \text{ は有界} \quad (12)$$

式(10)(11)(12)を満足する Laplace の方程式の解として $\phi(x, Z)$ の一般解は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \phi(x, Z) = & (A e^{ikx} + B e^{-ikx}) \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{-knx} + G_n e^{knx}) \frac{\cos k_n(Z+h)}{\cos k_n h} \end{aligned} \quad (13)$$

こゝで n は整数、 k 及び k_n は条件式(10)による次式で決る固有値である。

$$\sigma^2 h / g = kh \tanh kh = -k_n h \tan k_n h, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

函数 $\cosh k(Z+h)$, $\cos k_n(Z+h)$ は之等の固有値に対応する固有函数として直交完全函数系をなし、 Z に関する任意の連続函数を $Z=0 \sim h$ の区間で展開表示することが出来る。 A , B , C_n 及び G_n は複素常数で x に関する境界条件によって決定される。尚式 (12) の制限によって、 x の変域が ∞ に及ぶときは $x > 0$ に対しては $G_n = 0$, $x < 0$ では $C_n = 0$ とおかねばならない。 x の変域が有界の場合は式 (13) は次のように表わす方が便利である。

$$\phi(x, Z) = (A \cos kx + B \sin kx) \cdot \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cosh k_n x + G_n \sinh k_n x) \times \frac{\cos k_n(Z+h)}{\cos k_n h} \quad (15)$$

式 (14) の左辺 $\sigma^2 h/q$ は周期 T に対する深海波長を L_0 とすると $2\pi h/L_0$ に等しく、波の性質を 1st order において規定する基本量となる。 $k_n h$ は $\tan k_n h$ の周期性によって無限可附番個存在し、近似的には次のように表わされる。

$$k_n h \sim n\pi - \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{\sigma^2 h}{q} \quad (16)$$

尚式 (14) は式 (1) によって、 A が x の負方向、 B が正方向に進行する波 (radiation term) を表わし、 C_n 及び G_n は standing wave (Scattering term) を表わすことになる。

5 自由表面をもつ空隙物質内の波に対する速度ポテンシャル

空隙率 V をもつ空隙物質内の平均流速を $\bar{u}$, $\bar{w}$, 圧力を p とし、流体運動に対する抵抗を流速に比例するとして比例常数を μ とする。すると流体運動の連続及び運動方程式は次のようである。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} = 0, \quad \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \bar{u}, \quad \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Z} - g - \mu \bar{w} \quad (17)$$

之に対する速度ポテンシャルを $\bar{\Phi}(x, Z; t) = \bar{\Phi}(x, Z) e^{i\sigma t}$ とすると、流速と圧力及び自由表面は次式で表わされる。

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x}, \quad \bar{w} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial Z}, \quad \frac{p}{\rho} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \mu \bar{\Phi} + gVZ \right), \quad \zeta(x, t) = -\frac{1}{gV} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \mu \bar{\Phi} \right)_{Z=0} \quad (18)$$

前節と同様に $\bar{\Phi}(x, Z)$ に対する微分方程式と境界条件は式 (9) (10) (11) に対応して次のようになる。

$$\partial^2 \bar{\Phi} / \partial x^2 + \partial^2 \bar{\Phi} / \partial Z^2 = 0 \quad (19)$$

$$Z=0 \text{ で } \partial \bar{\Phi} / \partial Z = (1 - i\mu/\sigma) \cdot \sigma^2 \bar{\Phi} / g \quad (20)$$

$$Z=-h \text{ で } \partial \bar{\Phi} / \partial Z = 0 \quad (21)$$

之に対して $\bar{\Phi}$ は次式で表わされる。

$$\bar{\Phi}(x, Z) = \sum_{r=0}^{\infty} (D_r e^{i\bar{k}_r x + E_r e^{-i\bar{k}_r x}}) \cdot \frac{\cosh \bar{k}_r (Z+h)}{\cosh \bar{k}_r h}, \quad (r \text{ は整数}) \quad (22)$$

こゝで D_r , E_r は積分常数、 $\bar{k}_r$ は式 (14) に対応して次式で決まる複素数個有値である。

$$\bar{k}_r h = \tan h \bar{k}_r h = (1 - i\mu/\sigma) \cdot \sigma^2 h/g, \quad (r=0, 1, 2, \dots) \quad (23)$$

$\bar{k}_r = u + iv$ とおくと上式の実数部と虚数部とから、 u , v に対する次式を得る。

$$\frac{uh \tanh uh \operatorname{sech}^2 vh - vh \tanh vh \operatorname{sech}^2 uh}{1 + \tanh^2 uh + \tanh^2 vh} = \frac{\sigma^2 h}{g},$$

$$\frac{uh \operatorname{sech}^2 uh \tanh vh + vh \operatorname{sech}^2 vh \tanh uh}{1 + \tanh^2 uh + \tanh^2 vh} = -\frac{\mu}{\sigma} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \quad (24)$$

上の2つの式を満足する uh と vh により $\bar{\kappa}_r h$ が決まるが、第1式は $uh-vh$ 平面上に原点に関して対称で、第2式は反対称である。之等の2つの曲線の交点としての uh, vh は原点に関して反対称に無限可附番個存在する。この様子は

Fig.1 に示すようで、数値例は Table-1 に示してある。式(14)による κ と κ_n は、第2式の右辺を0($\mu/\sigma=0$)とした曲線(uh 軸と vh 軸に一致する)と第1式の曲線との交点である。 x の変域が有界のときは $\bar{\phi}(x, Z)$ は次の形におかれる。

$$\bar{\phi}(x, Z) = \sum_{r=0}^{\infty} (D_r \cos \bar{\kappa}_r x + E_r \sin \bar{\kappa}_r x) \times \frac{\cosh \bar{\kappa}_r (Z+h)}{\cosh \bar{\kappa}_r h} \quad (25)$$

6 流体の境界面における力学的連続条件

上述の速度ポテンシャルは水面と水底での力学的及び運動学的条件を満す Laplace の方程式の一般解を表わすが、境界条件を異にする流体域が水平方向に相接する場合には、その境界面において運動は力学的に連続でなければならぬ。その条件は境界面を横切る mass flux と energy flux が連続であるべきことにより表わされる。例えば速度ポテンシャル ϕ_i と ϕ_j をもつ一様流体が境界面 $x=\ell$ で接する場合にはこの条件は次のように表わされる。

$$x=\ell \text{ で } \partial \phi_i / \partial x = \partial \phi_j / \partial x, \text{ 及び } \phi_i = \phi_j \quad (26)$$

速度ポテンシャルが $\phi_i, \bar{\phi}_j$ で表わされる一様流体と空隙物質内の流体とが接するときは次のようである。

$$x=\ell \text{ で } \partial \phi_i / \partial x = \partial \bar{\phi}_j / \partial x, \text{ 及び } \phi_i = \bar{\phi}_j \cdot (1-i\mu/\sigma)/V \quad (27)$$

7 固定境界面をもつ境界値問題

水面、水中又は水底に固定した境界面がある場合の例を示そう。

(1) 水平板防波堤(又は岸壁)の問題

(i) 1枚板の場合: Fig.2 (a)(b)の実線で示すように長さ 2ℓ (又は ℓ)の剛体板を水面に固定したときを考え、流体域を $x=\pm\ell$ によって3つの領域I, II, IIIに分け、Iから入射波 A があると、夫々の速度ポテンシャルを $\phi_1(x, Z), \phi_2(x, Z), \phi_3(x, Z)$ とすると、反射波 B 、通過波 F について、 ϕ_1 と ϕ_3 は、4で述べたように次のように表わされる。

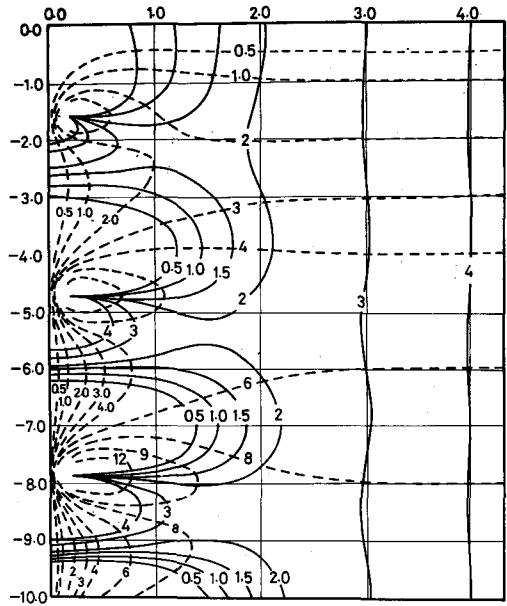


Fig.1 Curves of $\bar{\kappa}_h \cdot \tanh(\bar{\kappa}_h) = (1-i\mu/\sigma) \cdot \sigma^2 h/g$

$$\phi_1(x, Z) = (Ae^{ik(x-\ell)} + Be^{-ik(x-\ell)}) \times \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-kn(x-\ell)} \frac{\cos kn(Z+h)}{\cos knh} \quad (28)$$

$$\phi_3(x, Z) = Fe^{ik(x+\ell)} \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{kn(x+\ell)} \frac{\cos kn(Z+h)}{\cos knh} \quad (29)$$

$\phi_2(x, Z)$ に対しては水面 $Z=0$ と水底 $Z=-h$ の条件は共に $\partial\phi_2/\partial Z=0$ で、之を満足する Laplace の式の一般解は次式で表わされる。

$$\phi_2(x, Z) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(D_r \frac{\cosh \frac{r\pi x}{h}}{\cosh \frac{r\pi\ell}{h}} + E_r \frac{\sinh \frac{r\pi x}{h}}{\sinh \frac{r\pi\ell}{h}} \right) \cos \frac{r\pi Z}{h}, \quad (r \text{ は整数}) \quad (30)$$

上式で $r=0$ に対する項は $r \rightarrow 0$ の極限值を取り、詳しくは次のように表わされることになる。

$$\phi_2(x, Z) = D_0 + E_0 \frac{x}{\ell} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(D_r \frac{\cosh r\pi x/h}{\cosh r\pi\ell/h} + E_r \frac{\sinh r\pi x/h}{\sinh r\pi\ell/h} \right) \cos r\pi Z/h \quad (30)'$$

$r=0$ に対する項はすべて上記の取り扱いを行う。

式(28)(29)(30) で与えられる速度ポテンシャルは境界面 $x=\pm\ell$ で力学的に連続な接続をするために、式(26)の条件が与えられる。即ち、

$$x=\ell \text{ で } \partial\phi_1/\partial x = \partial\phi_2/\partial x, \phi_1 = \phi_2; \quad x=-\ell \text{ で } \partial\phi_3/\partial x = \partial\phi_2/\partial x, \phi_3 = \phi_2 \quad (31)$$

そこで式(28)(29)(30) を上式に代入して次の関係式を得る。

$$\{A-(B-F)\} \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} + i \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - G_n) \frac{kn \cos kn(Z+h)}{k \cos knh} = -2i \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r\pi}{kh} \times E_r \coth \frac{r\pi\ell}{h} \cos \frac{r\pi Z}{h}, \quad (32)$$

$$\{A+(B-F)\} \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - G_n) \frac{\cos kn(Z+h)}{\cos knh} = 2 \sum_{r=0}^{\infty} E_r \cos \frac{r\pi Z}{h}, \quad (33)$$

$$\{A-(B+F)\} \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} + i \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + G_n) \frac{kn \cos kn(Z+h)}{k \cos knh} = -2i \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r\pi}{kh} \times D_r \tanh \frac{r\pi\ell}{h} \cos \frac{r\pi Z}{h}, \quad (34)$$

$$\{A+(B+F)\} \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + G_n) \frac{\cos kn(Z+h)}{\cos knh} = 2 \sum_{r=0}^{\infty} D_r \cos \frac{r\pi Z}{h}. \quad (35)$$

函数系 $\cos(r\pi Z/h)$ は $Z=0 \sim h$ で完全直交函数系をなすから、上式の各項に $\cos(s\pi Z/h)$ (s は整数) を乗じて Z について $-h$ から 0 までの積分を行うと

$$\int_{-h}^0 \cos \frac{s\pi Z}{h} \cos \frac{r\pi Z}{h} dZ = 0 \quad (s \neq r); \quad = \frac{h}{2} \quad (r=s \neq 0); \quad = h \quad (r=s=0),$$

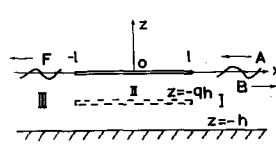


Fig. 2(a)

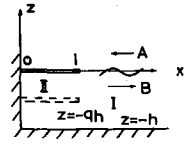


Fig. 2(b)

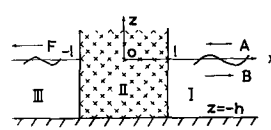


Fig. 3(a)

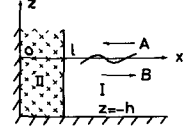


Fig. 3(b)

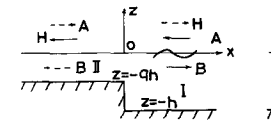


Fig. 4(a)

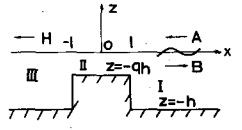


Fig. 4(b)

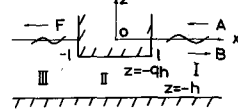


Fig. 5

$$\int_{-h}^0 \cosh k(Z+h) \cos \frac{r\pi Z}{h} dZ = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sinh kh}{1+(r\pi/kh)^2},$$

$$\int_{-h}^0 \cos k_n(Z+h) \cdot \cos \frac{r\pi Z}{h} dZ = \frac{1}{k_n} \cdot \frac{\sin k_n h}{1-(r\pi/k_n h)^2}$$

の関係があるから、次の関係式を得る。

$$\{A-(B-F)\} \frac{\tanh kh}{1+(r\pi/kh)^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - G_n) \frac{\tan k_n h}{1-(r\pi/k_n h)^2} = -i r \pi E_r \coth \frac{r\pi \ell}{h}, \quad (36)$$

$$\{A+(B-F)\} \frac{\tanh kh}{1+(r\pi/kh)^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - G_n) \frac{\tan k_n h}{1-(r\pi/k_n h)^2} \cdot \frac{k}{k_n} = k h E_r \quad (37)$$

$$\{A-(B+F)\} \frac{\tanh kh}{1+(r\pi/kh)^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + G_n) \frac{\tan k_n h}{1-(r\pi/k_n h)^2} = -i r \pi D_r \tanh \frac{r\pi \ell}{h} \quad (38)$$

$$\{A+(B+F)\} \frac{\tanh kh}{1+(r\pi/kh)^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + G_n) \frac{\tan k_n h}{1-(r\pi/k_n h)^2} \cdot \frac{k}{k_n} = k h D_r \quad (39)$$

式(36)(37) から E_r , (38)(39) から D_r を消去し

$$F r n = \frac{\lambda_o^2 + (r\pi)^2}{\lambda_n^2 - (r\pi)^2} \cdot \frac{\lambda_n + r\pi \tanh r\pi H}{\lambda_o^2 + (r\pi \tanh r\pi H)^2}, \quad \phi_{r n} = \frac{\lambda_o^2 + (r\pi)^2}{\lambda_n^2 - (r\pi)^2} \cdot \frac{\lambda_n + r\pi \coth r\pi H}{\lambda_o^2 + (r\pi \coth r\pi H)^2} \quad (40)$$

$$\theta_r = \tan^{-1} \left(\frac{r\pi \tanh r\pi H}{\lambda_o} \right), \quad \varphi_r = \tan^{-1} \left(\frac{r\pi \coth r\pi H}{\lambda_o} \right), \quad \lambda_o = k h, \quad \lambda_n = k_n h, \quad H = \ell/h$$

とおくと、 $(B+F)/A$ と $(C_n+G_n)/A$ 及び $(B-F)/A$ と $(C_n-G_n)/A$ に関する次の2組の無限連立一次方程式を得る。

$$\frac{B+F}{A} e^{-i\theta_r} + i \sum_{n=1}^{\infty} F r n \frac{C_n+G_n}{A} = e^{i\theta_r} \quad (41); \quad \frac{B-F}{A} e^{-i\varphi_r} + i \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{r n} \frac{C_n-G_n}{A} = e^{i\varphi_r} \quad (42)$$

($r = 0, 1, 2, \dots$) ($r = 0, 1, 2, \dots$)

上式の解を夫々 $2K_o, \dots, 2K_n \dots$ 及び $2L_o, \dots, 2L_n \dots$ とすると

$$(B+F)/A = 2K_o, \quad (B-F)/A = 2L_o, \quad (C_n+G_n)/A = 2K_n, \quad (C_n-G_n)/A = 2L_n$$

とおかれるから

$$B/A = K_o + L_o, \quad F/A = K_o - L_o, \quad C_n/A = K_n + L_n, \quad G_n/A = K_n - L_n \quad (43)$$

式(37)(39) から D_r, E_r は次のようになる。

$$\frac{D_r}{A} = \varepsilon_r \cdot \frac{\sigma^2 h}{q} \cdot \left[\frac{1+2K_o}{\lambda_o^2 + (r\pi)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2K_n}{\lambda_n^2 - (r\pi)^2} \right],$$

$$\frac{E_r}{A} = \varepsilon_r \cdot \frac{\sigma^2 h}{q} \cdot \left[\frac{1+2L_o}{\lambda_o^2 + (r\pi)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L_n}{\lambda_n^2 - (r\pi)^2} \right] \quad (44)$$

$\varepsilon_o = 1/2, \quad \varepsilon_r = 1 \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$

例えば $\sigma^2 h/q = 1.0$, $\ell/h = 1.0$ に対する (43)(44) の計算値は Table-2 に示すようである。

入射波の振幅を a , 波形を $\zeta_i = a \cos(kx + \sigma t)$ とすると

$$A = i a q e^{i k \ell / \sigma} \quad (45)$$

となり、この入射波に対する速度ポテンシャルが確定する。

反射波と入射波及び通過波と入射波の振幅比を夫々反射率 K_R 及び K_T とするとそれらは次式で求められる。

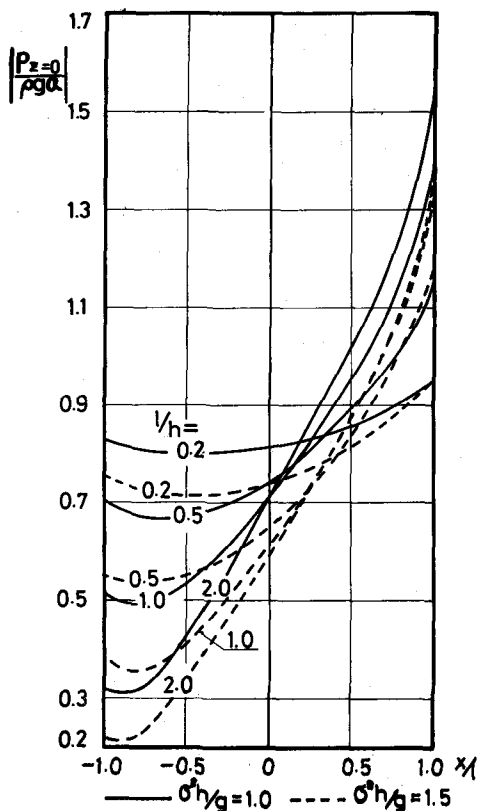
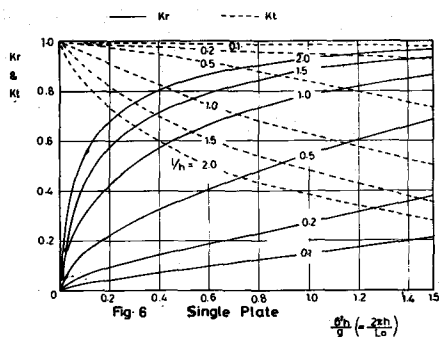
$$K_R = |B/A| = |K_o + L_o|, \quad K_T = |F/A| = |K_o - L_o| \quad (46)$$

水平板に作用する圧力は式(3)で $Z = 0$ として

$$\frac{p_z(z=0)}{\rho g a} = \left[\frac{D_0}{A} + \frac{E}{A} \frac{x}{\ell} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{D_r}{A} \right. \right. \\ \times \frac{\cosh r\pi x/h}{\cosh r\pi \ell/h} + \frac{E_r}{A} \cdot \frac{\sinh r\pi x/h}{\sinh r\pi \ell/h} \left. \left. \right) \right] \\ \times e^{i(k\ell + \sigma t)} \quad (47)$$

全圧力は上式を $x = -\ell$ から ℓ まで積分して

$$\frac{P_U}{2\rho g a \ell} = \left[\frac{D_0}{A} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{D_r}{A} \cdot \frac{\tanh r\pi \ell/h}{r\pi \ell/h} \right] \cdot e^{i(k\ell + \sigma t)} \quad (48)$$



(48)

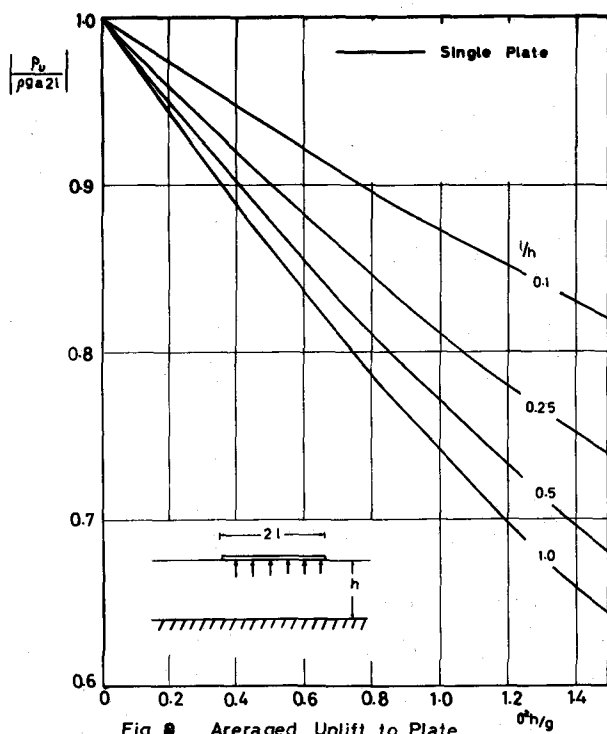


Fig. 8 Averaged Uplift to Plate

Fig. 7 Pressure Distribution to Plate (Single Plate Breakwater)

$\sigma^2 h/g$ に対する反射率と通過率は Fig. 6, 圧力分布は Fig. 7, 全圧力は Fig. 8 に示すように計算される。

Fig. 2 (b) に示すような岸壁に対しては、境界条件として式 (31) の第 2 式の代りに $x = 0$ で $\partial \phi / \partial x = 0$ の条件となる。之に対しては式 (30) で $E_r \equiv 0$ とすれば $\phi_2(x, z)$ の一般解となり $x = \ell$ の条件はそのままである。そして $\phi_1(x, z)$ の常数 B/A と C_n/A を決める連立方程式は次のようになる。

$$\frac{B}{A} e^{-i\theta r} + i \sum_{n=1}^{\infty} F_{r,n} \frac{C_n}{A} = e^{i\theta r} \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (49)$$

之は式 (41) で $(B+F)$ 及び (C_n+G_n) を夫々 B と C_n におきかえた形であるから、解はかんたんに次のように求められる。

$$B/A = 2K_0, \quad C_n/A = 2L_0, \quad \frac{D_r}{A} = \varepsilon_r' \frac{\sigma^2 h}{g} \left[\frac{1+2K_0}{\lambda_0^2 + (r\pi)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2K_n}{\lambda_n^2 - (r\pi)^2} \right], \quad \varepsilon_0' = 1, \quad \varepsilon_r' = 2 \quad (r=1, 2, \dots) \quad (50)$$

こうして岸壁の問題は防波堤の解から直接求められる。

岸壁の場合は反射率は恒等的に1であり、防波堤では反射率と通過率の平方の和が1である。故に式(46)と式(50)とから

$$2|K_o|=1, \quad |K_o+L_o|^2+|K_o-L_o|^2=1 \quad \text{従って} \quad 2|L_o|=1 \quad (51)$$

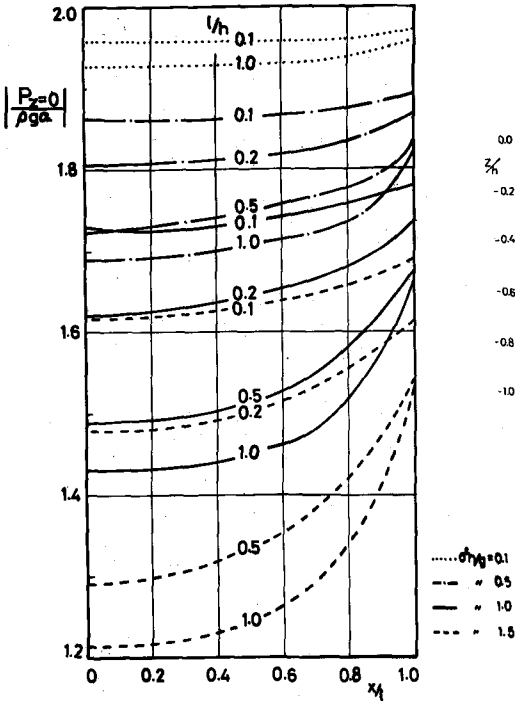


Fig. 9 Pressure Distribution to Plate (Single Plate Quay Wall)

このことから複素平面内のベクトル B/A と F/A は常に直交し、防波堤における反射波と通過波には 90° の位相差があることがわかる。

岸壁の水平板に作用する圧力は式(47)で $E_r=0$ において求められ、合力は式(48)と同じ形で与えられ、長さ l の板に作用する揚圧力は長さ $2l$ の防波堤に対する圧力と等しい。

Fig. 9 は圧力分布の計算例である。 $x=0$ の鉛直壁に対する圧力分布も同様にして求められ、Fig. 10 のようであり、その合力はFig. 11 に示すようである。

(ii) 2枚板の場合：Fig. 2 (a)(b)の破線で示すように、深さ $Z=-qh$

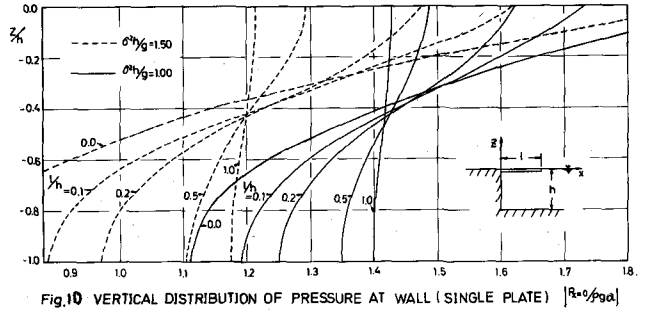


Fig. 10 VERTICAL DISTRIBUTION OF PRESSURE AT WALL (SINGLE PLATE) $|P_x=0|/\rho g a$

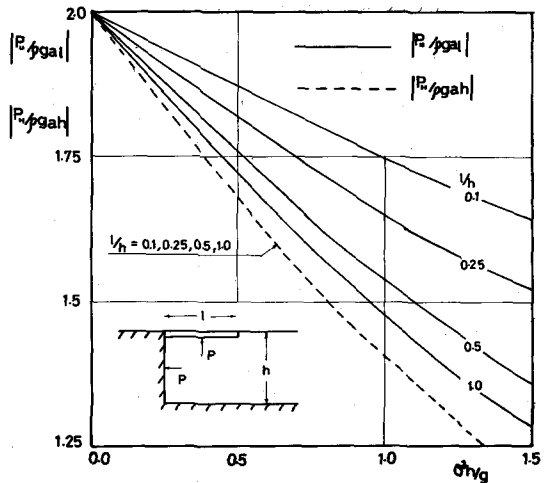


Fig. 11 Averaged Horizontal and Uplift Forces

($1 > q > 0$) に更に板が固定されているときは、領域 II は上、下に分けられる。之に対する速度ポテンシャルは次式で与えられる。但し $\bar{q} = 1 - q$

$$\phi_2^{(1)}(x, Z) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(D_r^{(1)} \frac{\cosh r\pi x/qh}{\cosh r\pi \ell/qh} + E_r^{(1)} \frac{\sinh r\pi x/qh}{\sinh r\pi \ell/qh} \right) \cdot \cos r\pi Z/qh, \quad (0 > Z > -qh) \quad (52)$$

$$\phi_2^{(2)}(x, Z) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(D_s^{(2)} \frac{\cosh s\pi x/\bar{q}h}{\cosh s\pi \ell/\bar{q}h} + E_s^{(2)} \frac{\sinh s\pi x/\bar{q}h}{\sinh s\pi \ell/\bar{q}h} \right) \cdot \cos s\pi(Z+qh)/\bar{q}h, \quad (-qh > Z > -h) \quad (53)$$

上下の領域に対して夫々式 (31) の条件を与えると $D_r^{(1)}$, $D_s^{(2)}$ 及び $E_r^{(1)}$, $E_s^{(2)}$ に関する次の連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} P_{or}^{(1)}(1-iR_{or}) \frac{D_r^{(1)}}{AN_o \sinh \lambda_o} + \sum_{s=0}^{\infty} \bar{P}_{os}^{(1)}(1-i\bar{R}_{os}) \frac{D_s^{(1)}}{AN_o \sinh \lambda_o} &= 1 \\ \sum_{r=0}^{\infty} P_{nr}^{(1)}(1+R_{nr}) \frac{D_r^{(1)}}{AN_o \sinh \lambda_o} + \sum_{s=0}^{\infty} \bar{P}_{ns}^{(1)}(1+\bar{R}_{ns}) \frac{D_s^{(1)}}{AN_o \sinh \lambda_o} &= 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{P}_{or}^{(1)}(1-iS_{or}) \frac{E_r^{(1)}}{AN_o \sinh \lambda_o} + \sum_{s=0}^{\infty} \bar{\tilde{P}}_{os}^{(1)}(1-i\bar{S}_{os}) \frac{E_s^{(1)}}{AN_o \sinh \lambda_o} &= 1 \\ \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{P}_{nr}^{(1)}(1+S_{nr}) \frac{E_r^{(1)}}{AN_o \sinh \lambda_o} + \sum_{s=0}^{\infty} \bar{\tilde{P}}_{ns}^{(1)}(1+\bar{S}_{ns}) \frac{E_s^{(1)}}{AN_o \sinh \lambda_o} &= 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$\text{こゝで } \lambda_o = \pi h, \lambda_n = \pi n h, N_o = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\lambda_o}{\sinh 2\lambda_o} \right), N_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\lambda_n}{\sinh 2\lambda_n} \right)$$

$$P_{or}^{(1)} = \frac{\sinh \lambda_o - (-1)^r \sinh \bar{q}\lambda_o}{1 + (r\pi/q\lambda_o)^2}, \quad P_{nr}^{(1)} = \frac{\sin \lambda_n - (-1)^r \sin \bar{q}}{1 - (r\pi/\bar{q}\lambda_n)^2},$$

$$\bar{P}_{os}^{(1)} = \frac{\sinh \bar{q}\lambda_o}{1 + (s\pi/\bar{q}\lambda_o)^2}, \quad \bar{P}_{ns}^{(1)} = \frac{\sin \bar{q}\lambda_n}{1 - (s\pi/\bar{q}\lambda_n)^2}, \quad R_{or}^{(1)} = \frac{r\pi}{q\lambda_o} \tanh \frac{r\pi \ell}{qh},$$

$$\bar{R}_{os}^{(1)} = \frac{s\pi}{\bar{q}\lambda_o} \tanh \frac{s\pi \ell}{\bar{q}h}, \quad R_{nr}^{(1)} = \frac{r\pi}{q\lambda_n} \tanh \frac{r\pi \ell}{qh}, \quad \bar{R}_{ns}^{(1)} = \frac{s\pi}{\bar{q}\lambda_n} \tanh \frac{s\pi \ell}{\bar{q}h},$$

$$S_{or}^{(1)} = \frac{r\pi}{q\lambda_o} \coth \frac{r\pi \ell}{qh}, \quad \bar{S}_{os}^{(1)} = \frac{s\pi}{\bar{q}\lambda_o} \coth \frac{s\pi \ell}{\bar{q}h}, \quad S_{nr}^{(1)} = \frac{r\pi}{q\lambda_n} \coth \frac{r\pi \ell}{qh},$$

$$\bar{S}_{nr}^{(1)} = \frac{s\pi}{\bar{q}\lambda_n} \coth \frac{s\pi \ell}{\bar{q}h}$$

式 (54) 及び (55) の解を夫々 $K_o^{(1)} \dots K_r^{(1)} \dots, K_o^{(2)} \dots, K_s^{(2)} \dots, L_o^{(2)}, L_r^{(1)} \dots, L_o^{(2)}, L_s^{(2)}$ とすると次の結果となる。

$$\begin{aligned} D_r^{(1)}/A &= K_r^{(1)} N_o \sinh \lambda_o, \quad D_s^{(2)}/A = K_s^{(2)} N_o \sinh \lambda_o, \quad E_r^{(1)}/A = L_r^{(1)} N_o \sinh \lambda_o, \quad E_s^{(2)}/A = L_s^{(2)} N_o \\ &\times \sin \lambda_o, \quad B/A = -1 + \sum_{r=0}^{\infty} P_{or}^{(1)}(K_r^{(1)} + L_r^{(1)}) + \sum_{s=0}^{\infty} \bar{P}_{os}^{(1)}(K_s^{(2)} + L_s^{(2)}), \\ F/A &= \sum_{r=0}^{\infty} P_{or}^{(1)}(K_r^{(2)} - L_r^{(2)}) + \sum_{s=0}^{\infty} \bar{P}_{os}^{(1)}(K_s^{(2)} - L_s^{(2)}) \\ \frac{C_n}{A} &= \frac{N_o \sinh \lambda_o}{N_n \sinh \lambda_n} \cdot \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} P_{nr}^{(1)}(K_r^{(1)} + L_r^{(1)}) + \sum_{s=0}^{\infty} \bar{P}_{ns}^{(1)}(K_s^{(2)} + L_s^{(2)}) \right\}, \\ \frac{G_n}{A} &= \frac{N_o \sinh \lambda_o}{N_n \sinh \lambda_n} \cdot \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} P_{nr}^{(1)}(K_r^{(1)} - L_r^{(1)}) + \sum_{s=0}^{\infty} \bar{P}_{ns}^{(1)}(K_s^{(2)} - L_s^{(2)}) \right\} \end{aligned} \quad (57)$$

かくしてすべての常数が決まり、反射率 K_R と通過率 K_T とは $|B/A|$ 及び $|F/A|$ として求められる。水面と水中の板に作用する圧力や岸壁に対する取扱いも前と全く同様である。

例えば計算の結果は、 $q = 0.5$ 即ち中間水深に板が固定されているときは反射率と通過率は Fig. 6 と全く同じで、水中の板は波の変形に影響はない。水面の板に対する圧力も前の場合と近似している。水中の板の上下面に対する圧力分布は Fig. 12 のようで、その合力は Fig. 13 の破線ようになる。実線で示した水面の板に作用する圧力とは向きが反対であるため、その

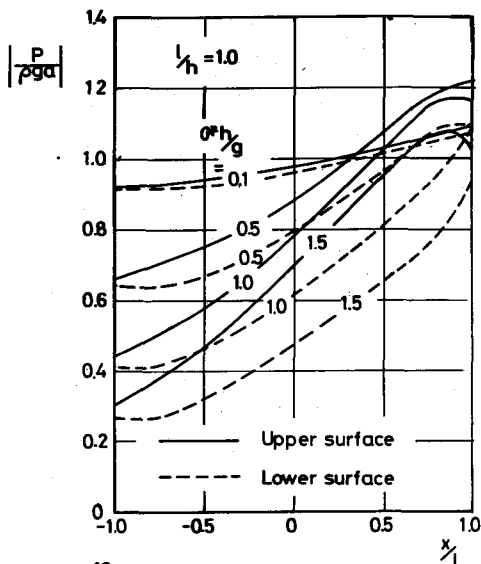


Fig. 12 Pressure Distribution to Submerged Plate

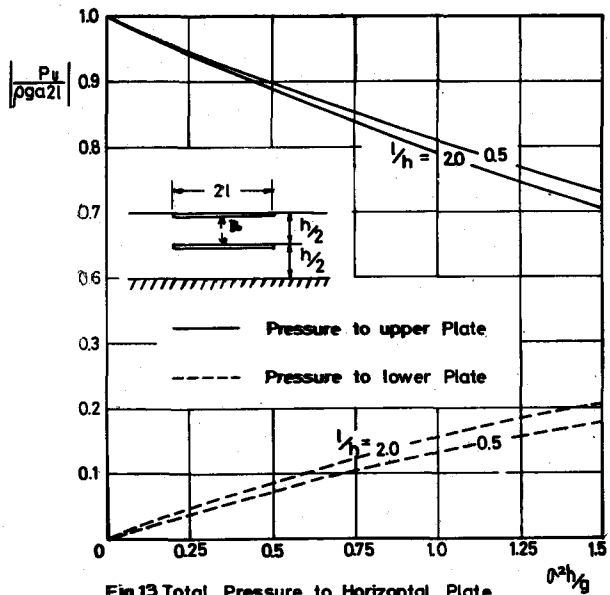


Fig. 13 Total Pressure to Horizontal Plate

和としての全体の揚圧力は、Fig. 8 と比べると約 1 割程度の減少となる。1 枚板の場合と 2 枚板の場合の著しい相異は、岸壁における $x = 0$ の鉛直壁面に対する圧力分布で、Fig. 14 に示すように、水中の板により仕切られた上下両域で圧力は著しく平均化される。しかしその合力は 1 枚板の場合と全く同じである。

(2) 透過性防波堤及び岸壁の問題

Fig. 3 (a)(b) に示すように幅 2ℓ (又は ℓ) の透過性防波堤及び岸壁がある場合は、領域 I、III の速度ポテンシャル ϕ_1 、 ϕ_3 は式 (28)(29)

で表わされ、領域 II の $\bar{\phi}$ は式 (25) により次のように置かれる。

$$\bar{\phi}(x, Z) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(D_r \frac{\cos \bar{\kappa}_r x}{\cos \bar{\kappa}_r \ell} + E_r \frac{\sin \bar{\kappa}_r x}{\sin \bar{\kappa}_r \ell} \right) \frac{\cosh \bar{\kappa}_r (Z+h)}{\cosh \bar{\kappa}_r h}, \quad (r \text{ は整数}) \quad (58)$$

$x = \pm \ell$ での境界条件は式 (27) から

$$x = \ell \text{ で } \partial \phi_1 / \partial x = \partial \bar{\phi} / \partial x, \quad \phi_1 = \beta \bar{\phi}$$

$$x = -\ell \text{ で } \partial \phi_3 / \partial x = \partial \bar{\phi} / \partial x, \quad \phi_3 = \beta \bar{\phi}, \quad \text{但し } \beta = (1 - i\mu/\sigma)/V \quad (59)$$

前と同様にして D_r , E_r に関して次の方程式を得る。

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta + i \frac{\bar{\lambda}_r}{\lambda_0} \tan \bar{\kappa}_r \ell}{1 - (\bar{\lambda}_r / \lambda_0)^2} \cdot \frac{D_r}{N_0 A / i \frac{\mu}{\sigma}} = 1, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta - \frac{\bar{\lambda}_r}{\lambda_n} \tan \bar{\kappa}_r \ell}{1 + (\bar{\lambda}_r / \lambda_n)^2} \cdot \frac{D_r}{N_0 A / i \frac{\mu}{\sigma}} = 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (60)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta - i \frac{\bar{\lambda}_r}{\lambda_0} \cot \bar{\kappa}_r \ell}{1 - (\bar{\lambda}_r / \lambda_0)^2} \cdot \frac{E_r}{N_0 A / i \frac{\mu}{\sigma}} = 1, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta + \frac{\bar{\lambda}_r}{\lambda_n} \cot \bar{\kappa}_r \ell}{1 + (\bar{\lambda}_r / \lambda_n)^2} \cdot \frac{E_r}{N_0 A / i \frac{\mu}{\sigma}} = 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (61)$$

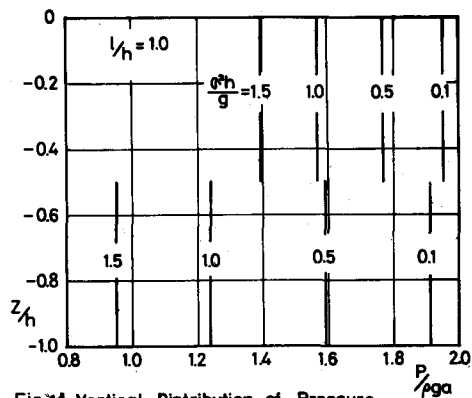


Fig. 14 Vertical Distribution of Pressure to quay Wall (double plate)

上の連立方程式の解を夫々 K_r , L_r とすると各常数は次のように決まる。

$$\frac{D_r}{A} = -i \frac{N_o}{\mu/\sigma} \cdot K_r, \quad \frac{E_r}{A} = -i \frac{N'}{\mu/\sigma} \cdot L_r, \quad \frac{B}{A} = -1 + \beta \sum_{r=0}^{\infty} \frac{K_r + L_r}{1 - (\bar{\lambda}_r/\lambda_o)^2}$$

$$\frac{F}{A} = \beta \sum_{r=0}^{\infty} \frac{K_r - L_r}{1 - (\bar{\lambda}_r/\lambda_o)^2}, \quad \frac{C_n}{A} = \frac{N_o}{N_n} \cdot \beta \sum_{r=0}^{\infty} \frac{K_r + L_r}{1 + (\bar{\lambda}_r/\lambda_n)^2}, \quad \frac{G_n}{A} = \frac{N_o}{N_n} \beta \sum_{r=0}^{\infty} \frac{K_r - L_r}{1 + (\bar{\lambda}_r/\lambda_n)^2} \quad (62)$$

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon \bar{\lambda}_r = \bar{k}_r h \quad \varepsilon, \lambda_0, \lambda_n$$

N_o, N_n は式 (56) と同じである。

反射率 K_R と通過率 K_T は上式から $|B/A|$, $|F/A|$ として求められ、又各領域の水面波形は式(4)と(18)から計算される。Fig. 15 は $V = 0.4$, $\ell/h = 0.62$ に対する K_R と K_T を μ/σ をパラメータとして、実線で K_R 、破線で K_T を示したもので

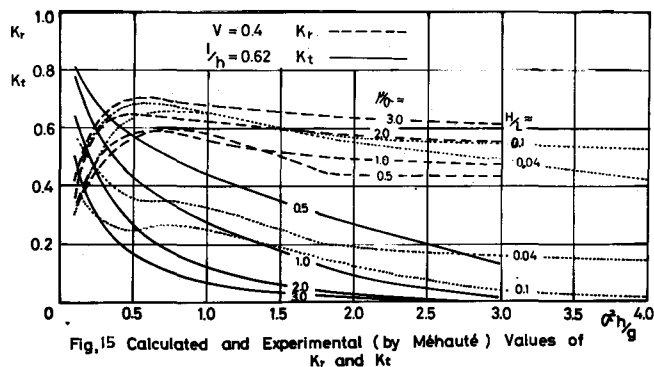


Fig.15 Calculated and Experimental (by Méhauté) Values of K_r and K_t

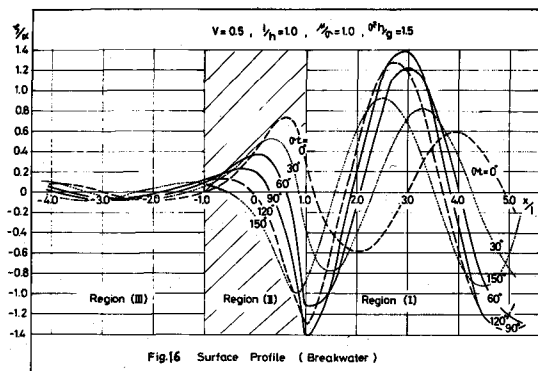


Fig.16 Surface Profile (Breakwater)

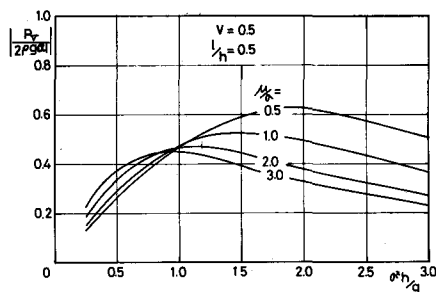


Fig. 18 Total Uplift Force to Breakwater

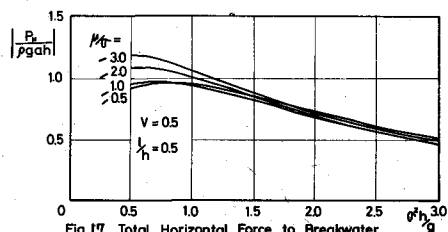


Fig. 17 Total Horizontal Force to Breakwater

点線は同じ条件における M'ehaute (1958) の実験値を入射波の波形勾配 H/L をパラメータとして示している。Fig. 16 は水面波形の計算値である。但し入射波を $\zeta_i = a \cos(kx + \sigma t)$ とする。堤体に対する水平力 P_H と揚圧力 P_V は式 (18) を用いて次式で示される。

$$\frac{P_H}{\rho g a h} = -2i \frac{N_o \beta}{\mu/\sigma} \sum_{r=0}^{\infty} L_r \cdot \frac{\tanh \bar{\lambda}_r}{\bar{\lambda}_r} \cdot e^{i(k\ell + \sigma t)},$$

$$\frac{P_V}{\rho g a \cdot 2\ell} = -i \frac{N_o \beta}{\mu/\sigma} \sum_{r=0}^{\infty} K_r \left(1 - \frac{1}{\cosh \lambda_r}\right) \cdot \frac{\tan \bar{\lambda}_r \ell}{\bar{\lambda}_r \ell} \quad (63)$$

Fig. 17, 18 は $\ell/h=0.5$, $V=0.5$ に対する計算値である。

岸壁に対しては $x=0$ において $\partial \bar{\phi} / \partial x = 0$ の条件を与え、之に対する $\bar{\phi}(x, Z)$ は式 (58) で $E_r \equiv 0$ において示される。このときは、水平板の場合と同じく式 (60) の解 K_r を用い、反射率 K_R と揚圧力 P_V は次のように求められる。

$$K_R = \left| 1 - \beta \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2K_r}{1 - (\bar{\lambda}_r / \lambda_o)^2} \right|, \quad \frac{P_V}{\rho g a \ell} = -i \frac{N_o \beta}{\mu/\sigma} \sum_{r=0}^{\infty} 2K_r \left(1 - \frac{1}{\cosh \bar{\lambda}_r}\right) \cdot \frac{\tan \bar{\lambda}_r \ell}{\bar{\lambda}_r \ell} \cdot e^{i(k\ell + \sigma t)} \quad (64)$$

透過堤体と $x=0$ の不透過壁面に対する水平力を夫々 P_H' 及び P_H とすると次のようである。

$$\frac{P_H'}{\rho g a h} = -i \frac{N_o \beta}{\mu/\sigma} \sum_{r=0}^{\infty} 2K_r \left(1 - \frac{1}{\cos \bar{\lambda}_r \ell}\right) \cdot \frac{\tanh \bar{\lambda}_r}{\bar{\lambda}_r} \cdot e^{i(k\ell + \sigma t)},$$

$$\frac{P_H}{\rho g a h} = -i \frac{N_o \beta}{\mu/\sigma} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2K_r}{\cos \bar{\lambda}_r \ell} \cdot \frac{\tanh \bar{\lambda}_r}{\bar{\lambda}_r} \cdot e^{i(k\ell + \sigma t)} \quad (65)$$

Fig. 19 は $\ell/h=1.0$ に対する反射率の計算値と実験値、Fig. 20 は式 (64)(65) による水平力と揚圧力の計算値を示している。

この計算では μ/σ をパラメーターとして示しているが、 μ/σ は仮定の抵抗係数であるから、実際には $\sigma^2 h/g$, ℓ/h 或は V 等に対してこの値を決めておく必要がある。Fig. 21 は著者の実験と Méhauté の実験結果を用いて防波堤に対して μ/σ と $\sigma^2 h/g$ の関係を求めた例である。

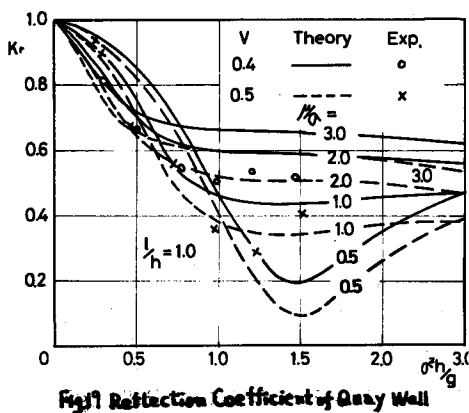


Fig. 19 Reflection Coefficient of Quay Wall

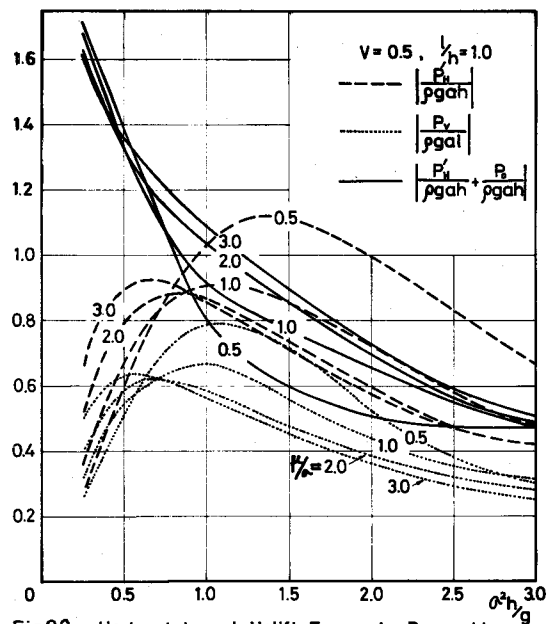


Fig. 20 Horizontal and Uplift Forces to Permeable Quay Wall

(3) 海底不連続による波の変形

Fig. 4 (a) に示すように $x=0$ で水深が h から qh ($1 > q > 0$) に階段状に急変する場合を考える。

- (i) 深海部からの波の入射：入射波，反射波，通過波を夫々 A ， B ， H とすると，速度ポテンシャルは次のようである。

$$\begin{aligned} \phi_1(x, Z) = & (Ae^{ikx} + Be^{-ikx}) \\ & \times \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-k_m x} \frac{\cos k_m(Z+h)}{\cos k_m h}, \\ & (x > 0) \quad (66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(x, Z) = & He^{ik'x} \frac{\cosh k'(Z+qh)}{\cosh k'qh} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} I_n e^{k'_n x} \frac{\cos k'_n(Z+qh)}{\cos k'_n qh}, \\ & (x < 0) \quad (67) \end{aligned}$$

k' 及び k'_n は式 (14) で h の代りに qh において決まる固有値である。このときは $x=0$ の境界条件は

$$x=0 \text{ で } \phi_1 = \phi_2, \quad \partial \phi_1 / \partial x = \partial \phi_2 / \partial x \quad (0 > Z > -qh); = 0 \quad (-qh > Z > -h) \quad (68)$$

故に式 (66)(67) から

$$\begin{aligned} (A+B) \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{\cos k_m(Z+h)}{\cos k_m h} \\ = H \frac{\cosh k'(Z+qh)}{\cosh k'qh} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \frac{\cos k'_n(Z+qh)}{\cos k'_n qh}, \quad (0 > Z > -qh) \quad (69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A-B) \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} + i \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{k_m \cos k_m(Z+h)}{k \cos k_m h} \\ = \frac{k'}{k} \left[H \frac{\cosh k'(Z+qh)}{\cosh k'qh} - i \sum_{n=1}^{\infty} I_n \frac{k'_n \cos k'_n(Z+qh)}{k' \cos k'_n qh} \right], \quad (0 > Z > -qh) \\ = 0, \quad (-qh > Z > -h) \quad (70) \end{aligned}$$

式 (69) の各項に $\cosh k'(Z+qh)$ と $\cos k'_n(Z+qh)$ を乗じて $Z=-qh$ から 0 まで，又式 (70) の各項に $\cosh k(Z+h)$ と $\cos k_m(Z+h)$ を乗じて $Z=-h$ から 0 までの積分を行うと次の関係式を得る。

$$H = b_{oo}(A+B) - \sum_{m=1}^{\infty} b_{om} I_m, \quad I_n = -b_{on}(A+B) + \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} C_m, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (71)$$

$$A-B = a_{oo} H + i \sum_{n=1}^{\infty} a_{on} I_n, \quad C_m = i a_{mo} H - \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} I_n, \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (72)$$

ここで $\lambda_o = kh$, $\lambda'_o = k'qh$, $\lambda_m = k_m h$, $\lambda'_n = k'_n qh$, $\bar{q} = 1-q$

$$\begin{aligned} N_o &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\lambda_o}{\sinh 2\lambda_o} \right), \quad N_m = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\lambda_m}{\sin 2\lambda_m} \right), \quad N'_o = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\lambda'_o}{\sinh 2\lambda'_o} \right), \\ N'_n &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\lambda'_n}{\sin 2\lambda'_n} \right), \quad a_{oo} = \frac{\sin \bar{q} \lambda_o}{N_o \sinh \lambda_o \cosh \lambda'_o} \cdot \frac{\lambda'_o / q \lambda_o}{(\lambda'_o / q \lambda_o)^2 - 1}, \end{aligned}$$

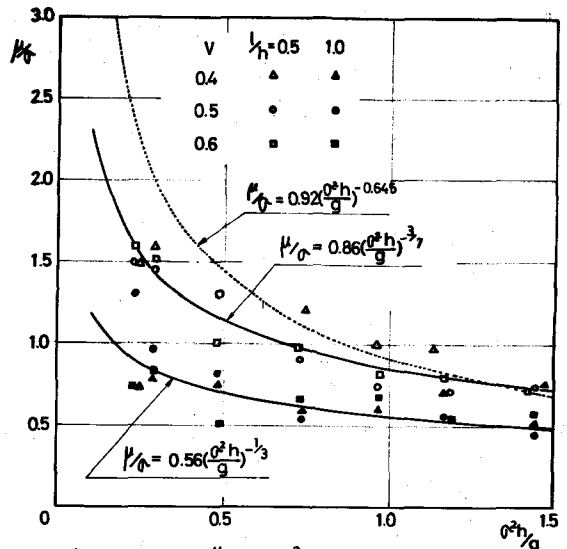


Fig.2 Relations of μ_0 and $d^2 h/g$ for Permeable Breakwater ($l/h=0.5$ and 1.0) (for Cubic Block)

$$\begin{aligned}
 a_{on} &= \frac{\sinh \bar{q} \lambda_o}{N_o \sinh \lambda_o \cos \lambda'_n} \cdot \frac{\lambda_n / q \lambda_o}{(\lambda'_n / q \lambda_o)^2 + 1}, & a_{mo} &= \frac{\sin \bar{q} \lambda_m}{N_m \sin \lambda_m \cosh \lambda'_o} \cdot \frac{\lambda_o / q \lambda_m}{(\lambda'_o / q \lambda_m)^2 + 1}, \\
 o_{mn} &= \frac{\sin \bar{q} \lambda_m}{N_m \sin \lambda_m \cos \lambda'_n} \cdot \frac{\lambda_n / q \lambda_m}{(\lambda'_n / q \lambda_m)^2 - 1}, & b_{oo} &= \frac{\sinh \bar{q} \lambda_o}{N'_o \sinh \lambda'_o \cosh \lambda_o} \cdot \frac{\lambda'_o / q \lambda_o}{(\lambda'_o / q \lambda_o)^2 - 1}, \\
 b_{om} &= \frac{\sinh \bar{q} \lambda_m}{N'_o \sin \lambda'_o \cos \lambda_m} \cdot \frac{\lambda'_o / q \lambda_m}{(\lambda'_o / q \lambda_m)^2 + 1}, & b_{no} &= \frac{\sinh \bar{q} \lambda_o}{N'_n \sin \lambda'_n \cosh \lambda_o} \cdot \frac{\lambda'_n / q \lambda_o}{(\lambda'_n / q \lambda_o)^2 + 1}, \\
 b_{nm} &= \frac{\sin \bar{q} \lambda_m}{N_n \sin \lambda'_n \cos \lambda_m} \cdot \frac{\lambda'_n / q \lambda_m}{(\lambda'_n / q \lambda_m)^2 - 1}
 \end{aligned} \quad (73)$$

式 (71) を (72) に代入して B/A と C_m/A に関する次の連立方程式を得る。

$$\begin{aligned}
 (1 + a_{oo} b_{oo} - i \sum_{n=1}^{\infty} a_{on} \bar{b}_{no}) \frac{B}{A} - \sum_{m=1}^{\infty} (a_{oo} b_{om} - i \sum_{n=1}^{\infty} a_{on} b_{nm}) \frac{C_m}{A} &= 1 - a_{oo} b_{oo} + i \sum_{n=1}^{\infty} a_{on} \bar{b}_{no} \\
 (a_{mo} b_{oo} - i \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \bar{b}_{no}) \frac{B}{A} - \sum_{s=1}^{\infty} (a_{mo} b_{os} - i \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} b_{ns}) \frac{C_s}{A} + i \frac{C_m}{A} &= -(a_{mo} b_{oo} - i \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \bar{b}_{no})
 \end{aligned} \quad (m = 1, 2, 3 \dots) \quad (74)$$

上式の解を K_o , K_m とすると式 (71) を考慮して

$$B/A = K_o, \quad C_m/A = K_m, \quad H/A = b_{oo}(1 + K_o) - \sum_{m=1}^{\infty} b_{om} K_m, \quad I_n/A = b_{no}(1 + K_o) + \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} K_m \quad (75)$$

を得る。故に反射率 K_R は $|B/A|$, 通過率 K_T は $|H/A|$ として求められる。Fig. 22 はこの計算値を示すものである。

(ii) 浅海部からの波の入射：Fig. 4(b)の破線で示すように入射後、反射波、通過波を A , B , H とすると、同様の取り扱いによって式 (71)(72) に対応する次の関係式を得る。

$$A + B = b_{oo} H - \sum_{m=1}^{\infty} b_{om} I_m, \quad C_n = -b_{no} H + \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} I_m \quad (76)$$

$$H = a_{oo}(A - B) - i \sum_{n=1}^{\infty} a_{on} C_n, \quad I_m = -i a_{mo}(A - B) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} C_n \quad (77)$$

之から B/A と C_n/A に関する方程式は式 (74) に対応して

$$\begin{aligned}
 (1 + a_{oo} b_{oo} + i \sum_{n=1}^{\infty} a_{mo} b_{on}) \frac{B}{A} + i \sum_{n=1}^{\infty} (a_{on} b_{oo} + i \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} b_{om}) \frac{C_n}{A} &= -(1 - a_{oo} b_{oo} - i \sum_{m=1}^{\infty} a_{mo} b_{om}) \\
 (a_{oo} b_{no} + i \sum_{m=1}^{\infty} a_{mo} b_{nm}) \frac{B}{A} + i \sum_{s=1}^{\infty} (a_{os} b_{no} + i \sum_{m=1}^{\infty} a_{ms} \times b_{nm}) \frac{C_s}{A} - \frac{C_n}{A} &= a_{oo} b_{no} + i \sum_{m=1}^{\infty} a_{mo} b_{nm}
 \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (78)$$

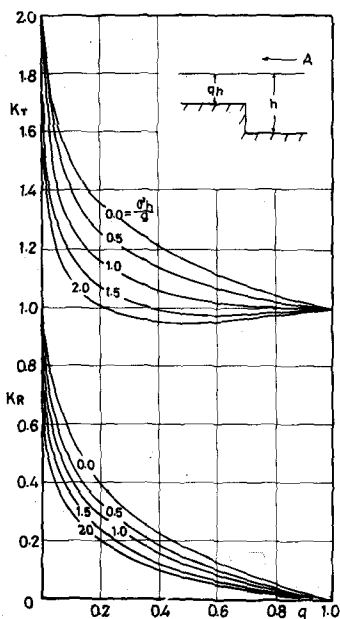


Fig. 22 Reflection and Transmission Coef.
(from deep to shallow water)

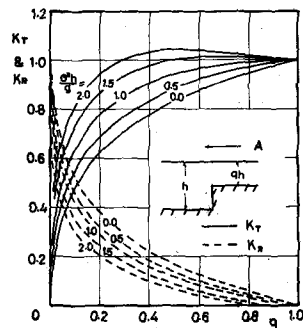


Fig. 23 Reflection and Transmission Coef.
(from shallow to deep water)

上式の解を L_o, L_n とすると

$$\frac{B}{A}=L_o, \frac{C_n}{A}=L_n, \frac{H}{A}=a_{oo}(1-L_o)-i\sum_{n=1}^{\infty} a_{on}C_n, \frac{I_m}{A}=-i a_{mo}(1-L_o)-\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}L_n \quad (79)$$

Fig. 23 はこの計算による反射率 $K_R=|B/A|$ と通過率 $K_T=|H/A|$ を示したものである。

(4) 潜堤による波の変形

Fig. 4 (b) に示すような潜堤に対しては速度ポテンシャルは次のように表わされる。

$$\phi_1(x, Z) = (Ae^{ik(x-\ell)} + Be^{-ik(x-\ell)}) \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-k_m(x-\ell)} \frac{\cos k_m(Z+h)}{\cos k_m h}, \quad (x > \ell) \quad (80)$$

$$\phi_2(x, Z) = \left(D \frac{\cos k'x}{\cos k'\ell} + E \frac{\sin k'x}{\sin k'\ell} \right) \frac{\cosh k'(Z+qh)}{\cosh k'qh} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n \frac{\cosh k'_n x}{\cosh k'_n \ell} + G_n \frac{\sinh k'_n x}{\sinh k'_n \ell} \right) \times \frac{\cos k'_n(Z+qh)}{\cos k'_n qh}, \quad (\ell > x > -\ell) \quad (81)$$

$$\phi_3(x, Z) = He^{ik(x+\ell)} \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} I_m e^{k_m(x+\ell)} \frac{\cos k_m(Z+h)}{\cos k_m h}, \quad (x < -\ell) \quad (82)$$

前と類似の $x = \pm \ell$ での条件を適用して計算を行うと、 $(B+H)/A$ と $(C_m+I_m)/A$ 及び $(B-H)/A$ と $(C_m-I_m)/A$ に関する次の 2 組の連立方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \left[1 + i(a_{oo}b_{oo} \tan k'\ell - \sum_{n=1}^{\infty} a_{on}b_{no} \tanh k'_n \ell) \right] \cdot \frac{B+H}{A} - i \sum_{m=1}^{\infty} (a_{om}b_{om} \tan k'\ell - \sum_{n=1}^{\infty} a_{on}b_{nm} \tanh k'_n \ell) \frac{C_m+I_m}{A} \\ & = 1 - i(a_{oo}b_{oo} \tan k'\ell - \sum_{n=1}^{\infty} a_{on}b_{no} \tanh k'_n \ell) \\ & \quad (a_{mo}b_{oo} \tan k'\ell - \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}b_{no} \tanh k'_n \ell) \cdot \frac{B+H}{A} - \sum_{s=1}^{\infty} (a_{mo}b_{os} \tan k'\ell - \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \\ & \quad \times b_{ns} \tanh k'_n \ell) \frac{C_s+I_s}{A} + \frac{C_m+I_m}{A} = -(a_{mo}b_{oo} \tan k'\ell - \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}b_{no} \tanh k'_n \ell), \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left[1 - i(a_{oo}b_{oo} \cot k'\ell + \sum_{n=1}^{\infty} a_{on}b_{no} \coth k'_n \ell) \right] \cdot \frac{B-H}{A} + i \sum_{m=1}^{\infty} (a_{om}b_{om} \cot k'\ell + \sum_{n=1}^{\infty} a_{on}b_{nm} \coth k'_n \ell) \frac{C_m-I_m}{A} \\ & = 1 + i(a_{oo}b_{oo} \cot k'\ell + \sum_{n=1}^{\infty} a_{on}b_{no} \coth k'_n \ell) \\ & \quad (a_{mo}b_{oo} \cot k'\ell + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}b_{no} \coth k'_n \ell) \cdot \frac{B-H}{A} - \sum_{s=1}^{\infty} (a_{mo}b_{os} \cot k'\ell + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \\ & \quad \times b_{ns} \coth k'_n \ell) \frac{C_s-I_s}{A} + \frac{C_m-I_m}{A} = -(a_{mo}b_{oo} \cot k'\ell + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}b_{no} \coth k'_n \ell), \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

上式の解を夫々 $2K_o, 2K_m$ 及び $2L_o, 2L_m$ とすると

$$\begin{aligned} B/A &= K_o + L_o, C_m/A = K_m + L_m, H/A = K_o - L_o, I_m/A = K_m - L_m \\ D/A &= b_{oo} \left(\frac{1}{2} + K_o \right) - \sum_{m=1}^{\infty} b_{om} K_m, F_n/A = -b_{no} \left(\frac{1}{2} + K_o \right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} K_m \\ E/A &= b_{oo} \left(\frac{1}{2} + L_o \right) - \sum_{m=1}^{\infty} b_{on} L_m, G_n/A = -b_{no} \left(\frac{1}{2} + L_o \right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} L_m \end{aligned} \quad (85)$$

かくして反射率は $|B/A|$ 、通過率は $|F/A|$ として求められる。

入射波 $\zeta_i = a \cos(kx + \sigma t)$ による堤体全体に対する水平圧力の合力 P_H は $x = \pm \ell$ での鉛直壁に対する圧力計算により次式の実数部分で与えられる。

$$\frac{P_H}{\rho g a q h} = \left[(1+2L_o) \frac{\sinh q \lambda_o}{q \lambda_o \cosh \lambda_o} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} L_m \cdot \frac{\sin q \lambda_m}{q \lambda_m \cos \lambda_m} \right] \cdot e^{i(k\ell + \sigma t)} \quad (86)$$

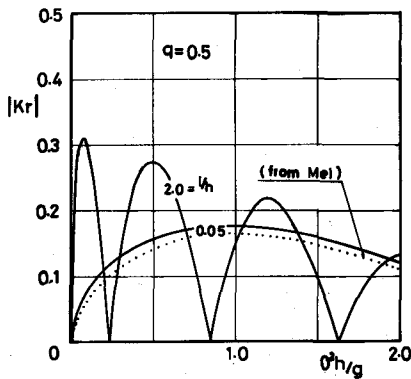


Fig. 24 Reflection Coefficient for a Submerged Breakwater

Fig. 24 は $q=0.5$ に対する反射率の計算値で, Fig. 25 は同じく水平力の計算値である。

(5) 半浸水角柱による波の変形

Fig. 5 に示すように吃水 qh をもって角柱が固定されているときは, ϕ_1 , ϕ_3 は式 (28)(29), ϕ_2 は式 (53) で表わされるから,

$$x=l \text{ で } \phi_1 = \phi_2, \quad \partial \phi_1 / \partial x = 0 \quad ; \quad x=-l \text{ で } \phi_3 = \phi_2, \quad \partial \phi_3 / \partial x = 0 \quad ; \quad (0 > Z > -qh) \\ = \partial \phi_2 / \partial x; \quad = \partial \phi_2 / \partial x; \quad (-qh > Z > -h) \quad (87)$$

の条件を与えて計算すると, D_r/A と E_r/A を決める連立方程式は次のようである。

$$\sum_{s=0}^{\infty} (a_{or} b_{os} + i \sum_{m=1}^{\infty} a_{mr} b_{ms}) \cdot \tanh \frac{s\pi\ell}{qh} \cdot \frac{Ds}{A} + i \epsilon_r \cdot \frac{D_r}{A} = i a_{or}, \quad (r=0, 1, 2, \dots) \quad (88)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (a_{or} b_{os} + i \sum_{m=1}^{\infty} a_{mr} b_{ms}) \cdot \coth \frac{s\pi\ell}{qh} \cdot \frac{Es}{A} + i \epsilon_r \cdot \frac{E_r}{A} = i a_{or}, \quad (r=0, 1, 2, \dots) \quad (89)$$

こゝで $\epsilon_0=1, \epsilon_r=1/2 \quad (r=1, 2, 3, \dots)$

$$a_{or} = \frac{\sinh \bar{\lambda}_o}{\bar{\lambda}_o \cosh \bar{\lambda}_o} \cdot \frac{1}{1 + (r\pi/\bar{\lambda}_o)^2}, \quad a_{mr} = \frac{\sin \bar{\lambda}_m}{\bar{\lambda}_m \cos \bar{\lambda}_m} \cdot \frac{1}{1 - (r\pi/\bar{\lambda}_m)^2} \\ b_{or} = \frac{\sinh \bar{\lambda}_o}{N_o \sinh \bar{\lambda}_o} \cdot \frac{r\pi/\bar{\lambda}_o}{1 + (r\pi/\bar{\lambda}_o)^2}, \quad b_{mr} = \frac{\sin \bar{\lambda}_m}{N_m \sin \bar{\lambda}_m} \cdot \frac{r\pi/\bar{\lambda}_m}{1 + (r\pi/\bar{\lambda}_m)^2}$$

式 (87)(88) の解を K_r, L_r とすると

$$D_r/A = K_r, \quad E_r/A = L_r, \quad B/A = 1 + i \sum_{r=0}^{\infty} b_{or} (K_r \tanh \frac{r\pi\ell}{qh} + L_r \coth \frac{r\pi\ell}{qh}), \\ F/A = i \sum_{r=0}^{\infty} b_{or} (K_r \tanh \frac{r\pi\ell}{qh} - L_r \coth \frac{r\pi\ell}{qh}), \quad C_m/A = - \sum_{r=0}^{\infty} b_{mr} (K_r \tanh \frac{r\pi\ell}{qh} + L_r \coth \frac{r\pi\ell}{qh}), \\ G_m/A = - \sum_{r=0}^{\infty} b_{mr} (K_r \tanh \frac{r\pi\ell}{qh} - L_r \coth \frac{r\pi\ell}{qh}) \quad (90)$$

角柱に対する揚圧力と水平力の合力 P_U 及び P_H は入射波 $\zeta_i = a \cos(kx + \sigma t)$ に対しては夫々次式で計算される。

$$\frac{P_U}{2\rho g a \cdot \ell} = [K_0 + \sum_{r=0}^{\infty} K_r \frac{\tanh r\pi\ell/\bar{q}h}{r\pi\ell/\bar{q}h}] \cdot e^{i(k\ell + \sigma t)} \quad (91)$$

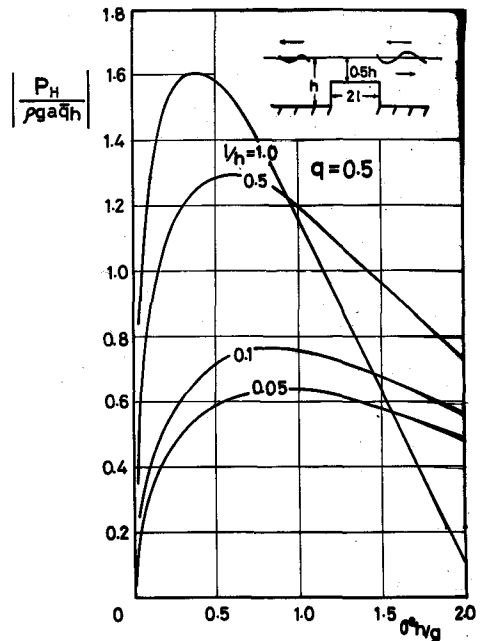


Fig. 25 Total Horizontal Force to Submerged Breakwater

$$\frac{P_H}{2\rho g a \cdot b} = (1+i \sum_{r=0}^{\infty} b o r L r \coth \frac{r \pi \ell}{q h}) \frac{\sin \lambda o - \sin \bar{\lambda} o}{\lambda o \cosh \lambda o} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} b m r L r \coth \frac{r \pi \ell}{q h} \frac{\sin \lambda m - \sin \bar{\lambda} m}{\lambda m \cos \lambda m} \quad (92)$$

Fig. 26, 27, 28

は夫々 $|B/A|, |F/A|$ による反射率と通過率, 式 (91)(92) による揚圧力と水平力を示すもので, $q=0$ の場合は(1)に述べた水平板防波堤に一致することになる。

以上著者が取扱った場合について述べたが, その他之等の組合わされた場合についても同様の方法が適用される。

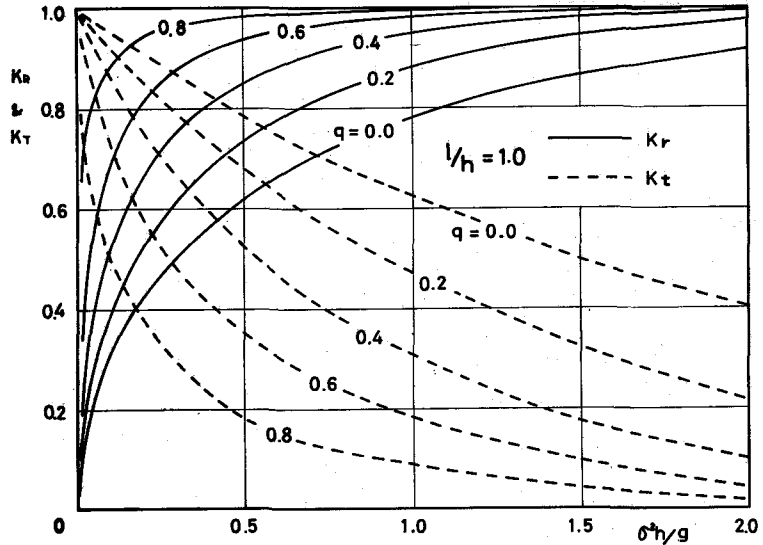


Fig. 26 Reflection and Transmission Coefficient for a Fixed Rectangular Obstacle

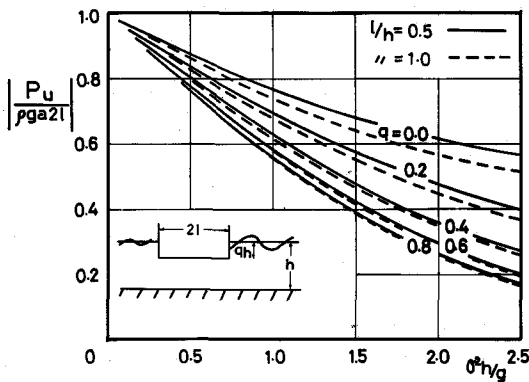


Fig. 27 Averaged Uplift to a Fixed Rectangular Obstacle

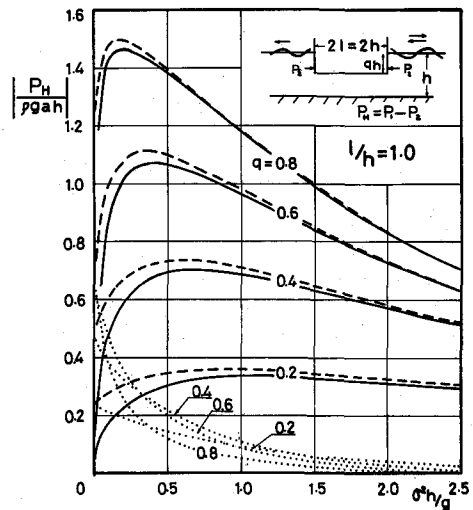


Fig. 28 Horizontal Force to a Fixed Rectangular Obstacle

8 振動境界面をもつ境界値問題

今迄は境界面が固定の場合であったが, 特定の周波数 σ をもって振動する場合にも応用することが出来る。最も興味ある問題は浮体の運動であるが, 有限水深の場合に対して容易に拡張出来る点で, 海岸工学上有益であると思う。

(1) 水底の鉛直運動による波の発生

Fig. 29に示すように, 幅 2ℓ の水底部分が振幅 a をもって $\eta = ae^{i\sigma t}$ で表わされる鉛直運

動をする場合を考えると、運動は原点に関して対称であるから領域Ⅰ、Ⅱを考え、前者では x の正方向に進行する波 B とstanding wave C_n があるから速度ポテンシャル $\phi_1(x, Z)$ を次のようにおく。

$$\phi_1(x, Z) = B e^{-i k (x - \ell)} \times \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh k h} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n(x-\ell)} \times \frac{\cos k_n(Z+h)}{\cos k_n h} \quad (93)$$

領域Ⅱでは水底の鉛直流速が $w = i a \sigma e^{i \sigma z}$ で与えられることになるから、速度ポテンシャル $\phi_2(x, Z)$ に対する水面と水底条件は次のようになる。

$$Z=0 \text{ で } \partial \phi_2 / \partial Z = \sigma^2 \phi, \\ Z=-h \text{ で } \partial \phi_2 / \partial Z = i a \sigma \quad (94)$$

第2式の右边をFourier級数で展開すると

$$i a \sigma = 4 i a \sigma \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)\pi} \cdot \cos \frac{(2s+1)\pi}{2\ell} \cdot x \quad (s \text{ は整数}) \quad (95)$$

故に式(94)の条件を満足するLaplaceの式の特解は次のように表わされることが容易に分る。

$$2i \frac{a g}{\sigma} \cdot \tau \cdot \frac{h}{\ell} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(\mu_s h)^2} \cdot \frac{\tau \sinh \mu_s Z + \mu_s h \cosh \mu_s Z}{\tau \cosh \mu_s h - \mu_s h \sinh \mu_s h} \cdot \cos \mu_s x, \\ \mu_s = \frac{(2s+1)\pi}{2\ell}, \quad \tau = \frac{\sigma^2 h}{g} \quad (96)$$

一方式(81)で $q=1.0$ とおいた場合はその ϕ_2 は式(94)の水面条件を満し、水底 $Z=-h$ では $\partial \phi_2 / \partial Z = 0$ を与える。故に之と式(96)の和は式(94)を満すLaplaceの式の一般解として用いることが出来る。故に運動の対称性を考えて $\phi_2(x, Z)$ は次式で与えられる。

$$\phi_2^-(x, Z) = D \frac{\cos k x}{\cos k \ell} \cdot \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh k h} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\cosh k_n x}{\cosh k_n \ell} \cdot \frac{\cos k_n(Z+h)}{\cos k_n h} + \\ 2i \frac{a g}{\sigma} \cdot \tau \cdot \frac{h}{\ell} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(\mu_s h)^2} \cdot \frac{\tau \sinh \mu_s Z + \mu_s h \cosh \mu_s Z}{\tau \cosh \mu_s h - \mu_s h \sinh \mu_s h} \cdot \cos \mu_s x \quad (97)$$

$x=\ell$ における境界条件は式(31)と同じであるから、今迄と同じ方法で係数を求めると次のようになる。

$$B = D = -2 \frac{a g}{\sigma} \cdot \tau \cdot \frac{h}{\ell} \cdot \frac{1}{(1+i \tan k \ell) N_0 \sinh \lambda_0} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu_s h)^2 - \lambda_0^2} \quad (98)$$

$$C_n = F_n = -2i \frac{a g}{\sigma} \cdot \tau \cdot \frac{h}{\ell} \cdot \frac{1}{(1+\tanh k \ell) N_n \sin \lambda_n} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu_s h)^2 + \lambda_n^2} \quad (99)$$

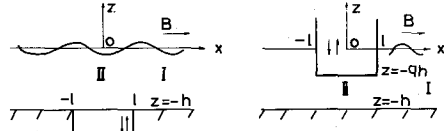


Fig. 29

Fig. 30

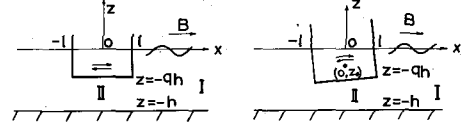


Fig. 31

Fig. 32

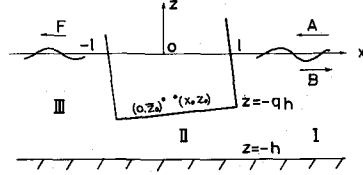


Fig. 33

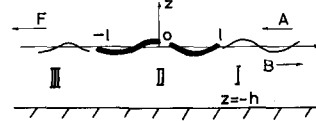


Fig. 34

然るに

$$\tan x = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2x}{(s+1/2)^2 \pi^2 - x^2}, \quad \tanh x = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2x}{(s+1/2)^2 \pi^2 + x^2} \quad (100)$$

であるから、式(98)(99)は次の形となる。

$$B=D=-4 \frac{aq}{\sigma} \cdot \frac{\sinh \lambda_0 \sin k \ell}{2 \lambda_0 + \sinh 2 \lambda_0} \cdot e^{-i k \ell},$$

$$C_n=F_n=4i \frac{aq}{\sigma} \cdot \frac{\sin \lambda_n \sinh k \ell}{2 \lambda_n + \sin 2 \lambda_n} \cdot e^{-k n \ell} \quad (101)$$

振幅 a を実数とすると水底運動は $\eta = a \cos \sigma t$ となり、之に対して領域 I の水面波形は次のようになる。

$$\zeta_1(x, t) = 4a \left[\frac{\sin k \ell \sin \lambda_0}{2 \lambda_0 + \sinh 2 \lambda_0} \cdot \sin(kx - \sigma t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh k n \ell \sin \lambda_n}{2 \lambda_n + \sin 2 \lambda_n} \cdot e^{-k n x} \cos \sigma t \right] \quad (102)$$

故に進行波の振幅と水底運動の振幅 a との比を造波率 Kw とすると

$$Kw = \frac{4 \sinh \lambda_0}{2 \lambda_0 + \sinh 2 \lambda_0} \cdot \sin k \ell \quad (103)$$

之は合田(1964)が別の方法で求めた結果と同じで、Fig. 35 に示すようである。

(2) 半浸水角柱の鉛直振動 (heaving) に よる波の発生

Fig. 30 に示すような吃水 qh の角柱が鉛直振動を行うときは、 $\phi_2(x, Z)$ の条件は式(94)の代りに $Z = -qh$ で $\partial \phi_2 / \partial Z = i a \sigma$ となるから、次の形を取る。

$$\phi_2(x, Z) = \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ D_s \frac{\cosh s \pi x / \bar{q} h}{\cosh s \pi \ell / \bar{q} h} \right.$$

$$\times \cos \frac{s \pi (Z + qh)}{\bar{q} h} + 2i \frac{aq}{\sigma} \cdot \frac{\sigma^2 h}{q} \cdot \frac{h}{\ell}$$

$$\times \frac{(-s)^2}{(\mu_s h)^2} \cdot \frac{\cosh \mu_s (Z + h)}{\sinh \mu_s \bar{q} h} \cdot \cos \mu_s x \left. \right\} \quad (104)$$

$x = \ell$ の条件は式(87)と同じで、 B/aq と C_n/aq に対する方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (1-i \sum_{s=0}^{\infty} a_{os} d_{so}) \frac{B}{aq/\sigma} - i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{os} d_{sn} \cdot \frac{C_n}{aq/\sigma} &= \sum_{s=0}^{\infty} b_{os}, \\ \sum_{s=0}^{\infty} a_{ns} d_{so} \cdot \frac{B}{aq/\sigma} + \frac{C_n}{aq/\sigma} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{ns} d_{sr} \cdot \frac{C_r}{aq/\sigma} &= \sum_{s=0}^{\infty} b_{os}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

ここで

$$a_{os} = \frac{\sinh \bar{\lambda}_0}{N_0 \sinh \lambda_0} \cdot \frac{\frac{s \pi}{\bar{\lambda}_0} \tanh \frac{s \pi \ell}{\bar{q} h}}{1 + (s \pi / \bar{\lambda}_0)^2}, \quad a_{ns} = \frac{\sin \bar{\lambda}_n}{N_n \sin \lambda_n} \cdot \frac{\frac{s \pi}{\bar{\lambda}_n} \tanh \frac{s \pi \ell}{\bar{q} h}}{1 - (s \pi / \bar{\lambda}_n)^2}$$

$$b_{os} = 2 \frac{h}{\bar{q}} \cdot \frac{\sinh \bar{\lambda}_0 \tanh \lambda_0}{N_0 \sinh \lambda_0 \cdot \mu_s h} \cdot \frac{\frac{\bar{\mu}_s}{\bar{\lambda}_0} \cosh \bar{\lambda}_0 - \cosh \bar{\mu}_s}{(\bar{\mu}_s / \bar{\lambda}_0)^2 - 1},$$

$$b_{ns} = 2 \frac{h}{\bar{q}} \cdot \frac{\sin \bar{\lambda}_n \tanh \lambda_n}{N_n \sin \lambda_n \cdot \mu_s h} \cdot \frac{\frac{\bar{\mu}_s}{\bar{\lambda}_n} \cot \bar{\lambda}_n + \cosh \bar{\mu}_s}{(\bar{\mu}_s / \bar{\lambda}_n)^2 + 1}, \quad d_{oo} = \frac{\sin \bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_0 \cosh \lambda_0},$$

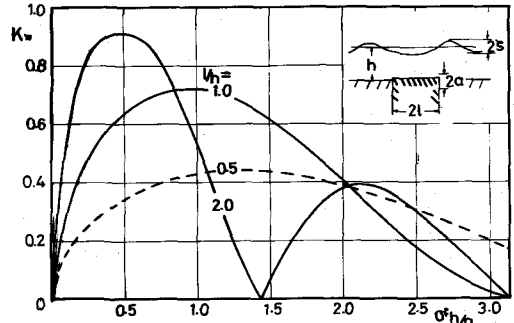


Fig. 35 Ratio of Generated Wave Amplitude to Bottom Plate Amplitude

$$d_{s0} = \frac{\sinh \bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_0 \cosh \bar{\lambda}_0} \cdot \frac{2}{1 + (s\pi/\bar{\lambda}_0)^2}, \quad d_{0n} = \frac{\sin \bar{\lambda}_n}{\bar{\lambda}_n \cos \bar{\lambda}_n},$$

$$d_{sn} = \frac{\sin \bar{\lambda}_n}{\bar{\lambda}_n \cos \bar{\lambda}_n} \cdot \frac{2}{1 - (s\pi/\bar{\lambda}_n)^2} \quad (106)$$

$$\bar{q} = 1 - q, \quad \bar{\lambda}_0 = k h, \quad \bar{\lambda}_0 = \bar{q} \lambda_0, \quad \bar{\lambda}_n = k_n h, \quad \bar{\lambda}_n = \bar{q} \lambda_n, \quad \bar{\mu}_s = \mu_s \bar{q} h$$

式(105)の解を K_0, K_n とすると

$$B = \frac{a q}{\sigma} K_0, \quad C_n = \frac{a q}{\sigma} K_n, \quad D_s = \frac{a q}{\sigma} \left(d_{s0} K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_{sn} K_n \right) \quad (107)$$

角柱の運動を $\eta = a \cos \sigma t$ とすると領域Iの進行波の振幅は $a \cdot |K_0|$ で与えられることになり、造波率 K_w は $|K_0|$ で示される。角柱の底面に作用する流体の全圧力 P_U は、静水圧を除くと式(3)で $Z = a e^{i \sigma t}$ とおいて次のように計算される。

$$\frac{P_U}{2 \rho g a h} = -i e^{i \sigma t} \left[\sum_{s=0}^{\infty} (d_{s0} K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_{sn} K_n) \frac{\tanh s\pi \bar{q} h}{s\pi \bar{q} h} - 2i \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \left(\frac{h}{\ell} \right)^2 \cdot \frac{\coth h \bar{\mu}_s}{(\mu_s h)^3} - i \right] \quad (108)$$

実数 a に対しては
上式の括弧内の虚数部分が角柱の運動の加速度と同位相の圧力（附加質量成分）を与え、実数部分が速度と同位相の圧力（減衰力成分）を与える。Fig. 36, 37は造波率と圧力成分の計算値である。

(3) 半浸水角柱の水平振動 (swaying) による波の発生

Fig. 31に示すように角柱が $\xi = a e^{i \sigma t}$ なる水平振動を行うときは、 $\phi_2(x, Z)$ は原点に関する運動の反対称性を考慮して次のように表わされる。

$$\phi_2(x, Z) = \sum_{s=0}^{\infty} E_s \cdot \frac{\sinh \bar{s} x}{\sinh \bar{s} \ell} \cos \bar{s} (Z + q h),$$

$$\bar{s} = s\pi/\bar{q} h \quad (109)$$

$$x = \ell \text{ では } \phi_1 = \phi_2, \quad \partial \phi_1 / \partial x = i a \sigma (0 > Z > -q h);$$

$$= \partial \phi_2 / \partial x (-q h > Z > -h) \quad (110)$$

之から E_s に対する方程式は次のようになる。

$$E_s \frac{\bar{s}}{\sigma a h} - 2i \sum_{r=0}^{\infty} (R_{os} Q_{or} + i \sum_{n=1}^{\infty} R_{ns} Q_{nr}) \frac{E_r}{\sigma a h}$$

$$= 2 (f_o R_{os} + i \sum_{n=1}^{\infty} f_n R_{ns}), \quad (s=1, 2, \dots) \quad (111)$$

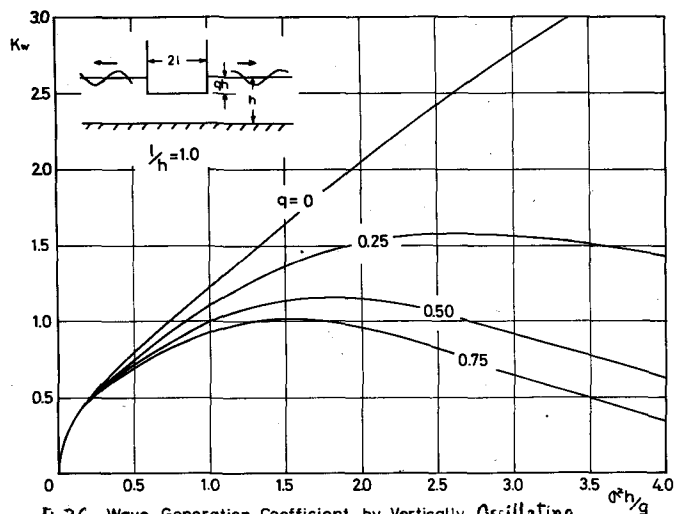


Fig. 36 Wave Generation Coefficient by Vertically Oscillating Cylinder ($l/h = 1.0$)

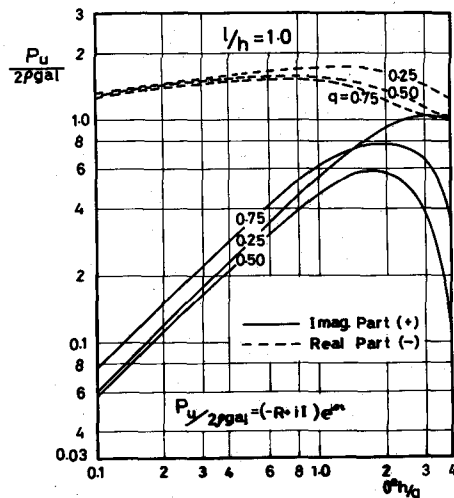


Fig. 37 Dynamical and Inertial Forces to the Bottom of Cylinder

こゝで $\epsilon_0=2, \epsilon_s=1 (s=1, 2, \dots)$

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{\sinh \bar{\lambda}_0}{N_0 \lambda_0 \sinh \lambda_0} \left(1 - \frac{\sinh \lambda_0}{\sinh \bar{\lambda}_0} \right), \quad f_n = \frac{\sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n} \cdot \left(1 - \frac{\sin \lambda_n}{\sin \bar{\lambda}_n} \right), \\ Q_0 s &= \frac{h}{\ell} \cdot \frac{\sinh \bar{\lambda}_0}{N_0 \lambda_0 \sinh \lambda_0} \cdot \frac{\bar{s} \ell \coth \bar{s} \ell}{1 + (s\pi/\bar{\lambda}_0)^2}, \quad Q_n s = \frac{h}{\ell} \cdot \frac{\sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n} \cdot \frac{\bar{s} \ell \coth \bar{s} \ell}{1 - (s\pi/\bar{\lambda}_n)^2}, \\ R_0 s &= \frac{\sinh \bar{\lambda}_0}{\lambda_0 \cosh \lambda_0} \cdot \frac{1}{1 + (s\pi/\bar{\lambda}_0)^2}, \quad R_n s = \frac{\sin \bar{\lambda}_n}{\lambda_n \cos \lambda_n} \cdot \frac{1}{1 - (s\pi/\bar{\lambda}_n)^2} \end{aligned} \quad (112)$$

式(111)の解を K_s とすると

$$E_s/\sigma a h = K_s, \quad B/\sigma a h = f_0 + i \sum_{s=0}^{\infty} Q_0 s K_s, \quad C_n/\sigma a h = i \left(f_n + i \sum_{s=0}^{\infty} Q_n s K_s \right) \quad (113)$$

之から造波率 K_w , 及び角柱の側面に作用する水平力の合力 P_H は次のようである。

$$K_w = \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \left| f_0 + i \sum_{s=0}^{\infty} Q_0 s K_s \right| \quad (113)'$$

$$\begin{aligned} \frac{P_H}{2\rho g a h} &= -i e^{i\sigma t} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \left[\frac{\sinh \lambda_0 - \sinh \bar{\lambda}_0}{\lambda_0 \cosh \lambda_0} \left(f_0 + i \sum_{s=0}^{\infty} Q_0 s K_s \right) \right. \\ &\quad \left. + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n - \sin \bar{\lambda}_n}{\lambda_n \cosh \lambda_n} \left(f_n + i \sum_{s=0}^{\infty} Q_n s K_s \right) \right] \end{aligned} \quad (114)$$

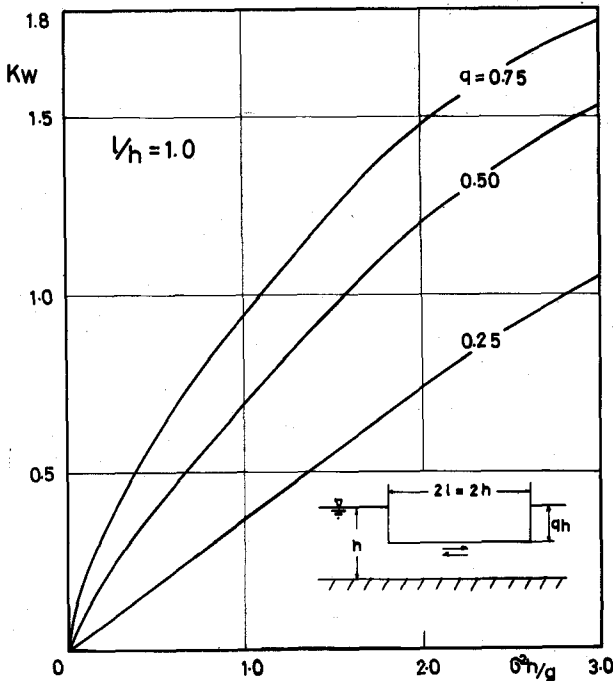


Fig.38 Wave Generation Coefficient by Swaying Motion of Cylinder

上式の括弧内の虚数部分が附加質量成分, 実数部分が減衰力成分を示すことになる。Fig.38, 39 は上式の計算値を示している。

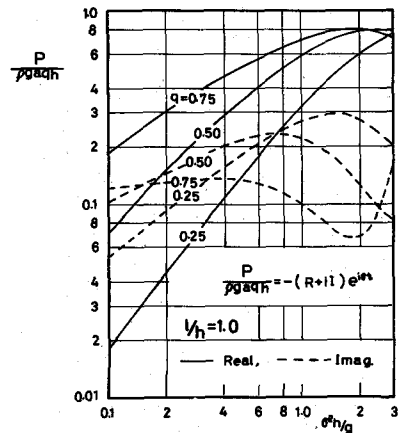


Fig.39 Horizontal Force to Cylinder by Swaying Motion

(4) 半浸水角柱の回転運動(rolling)による波の発生

Fig.32に示すように点 $(0, Z_0)$ を中心として $\omega e^{i\sigma t}$ なる回転運動を行う場合は, 角柱の底面と左右側の方程式は第1近似では次式ようになる。

$$Z = -q h + \omega x e^{i\sigma t}, \quad x = \pm \ell - \omega (Z - Z_0) e^{i\sigma t} \quad (115)$$

故に式(5)により境界条件は次のようである。

$$Z = -q h \text{ で } w = i \sigma \omega x e^{i\sigma t}; \quad x = \pm \ell \text{ で } u = -i \sigma \omega (Z - Z_0) e^{i\sigma t} \quad (116)$$

故に $\phi_2(x, Z)$ に対する境界条件は

$$Z=-qh \text{ で } \partial\phi_2/\partial Z=i\sigma\omega x; \quad Z=-h \text{ で } \partial\phi_2/\partial Z=0 \quad (117)$$

然るに

$$i\sigma\omega x=8i\sigma\omega\ell \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)^2\pi^2} \cdot \sin \frac{(2s+1)\pi}{2\ell} \cdot x \quad (s \text{ は整数}) \quad (118)$$

であるから、前と同様に $\phi_2(x, Z)$ は次のように表わされる。

$$\phi_2(x, Z)=\sum_{s=0}^{\infty} \left\{ E_s \frac{\sinh \frac{sx}{\ell}}{\sinh \frac{s\ell}{\ell}} \cdot \cos \frac{s}{\ell}(Z+qh)+2i(-1)^s \omega \sigma \ell \cdot \left(\frac{h}{\ell}\right)^3 \frac{\sin \mu_s x \cosh \mu_s(Z+h)}{(\mu_s h)^3 \sinh \frac{\mu_s}{\ell}} \right\} \quad (119)$$

$$x=\ell \text{ では } \phi_1=\phi_2, \quad \partial\phi_1/\partial x=-i\sigma\omega(Z-Z_o), \quad (0>Z>-qh); \quad \partial\phi_2/\partial x(-qh>Z>-h) \quad (120)$$

従って $E_s/\omega\sigma\ell$ に関する次の方程式を得る。

$$e_s \cdot \frac{E_s}{\omega\sigma\ell^2} - i \sum_{r=0}^{\infty} (R_{os}Q_{or} + i \sum_{n=1}^{\infty} R_{ns}Q_{nr}) \frac{E_r}{\omega\sigma\ell^2} = (a_o R_{os} + i \sum_{n=1}^{\infty} a_n R_{ns} - i b_s), \quad (s=0, 1, 2, \dots) \quad (121)$$

ここで $e_o=1$, $e_s=1/2$ ($s=1, 2, 3, \dots$), また Q_{os} , Q_{ns} , R_{os} , R_{ns} は式 (112) と同じで

$$\begin{aligned} a_o &= \frac{\sinh \bar{\lambda}_o}{N_o \lambda_o \sinh \lambda_o} \cdot \frac{h}{\ell} \left\{ \left(q + \frac{\cosh \bar{\lambda}_o}{\lambda_o} - \frac{\cosh \lambda_o}{\lambda_o \sinh \bar{\lambda}_o} \right) \frac{h}{\ell} + \left(1 - \frac{\sinh \lambda_o}{\sinh \bar{\lambda}_o} \right) \frac{Z_o}{\ell} \right\}, \\ a_n &= \frac{\sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n} \cdot \frac{h}{\ell} \left\{ \left(q - \frac{\cot \bar{\lambda}_n}{\lambda_n} + \frac{\cos \lambda_n}{\lambda_n \sin \bar{\lambda}_n} \right) \cdot \frac{h}{\ell} + \left(1 - \frac{\sin \lambda_n}{\sin \bar{\lambda}_n} \right) \frac{Z_o}{\ell} \right\}, \\ b_s &= \frac{2}{q} \cdot \left(\frac{h}{\ell}\right)^3 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu_r h)^2 \{ (\mu_r h)^2 + (\bar{s} h)^2 \}} \end{aligned} \quad (122)$$

側面 $x=\pm\ell$ 及び底面に沿う流体圧力 (静水圧を除く) を p_1 , p_2 とすると

$$\frac{p_1}{\rho\sigma^2\omega\ell^2} = i e^{i\sigma t} \left[(a_o + i \sum_{s=0}^{\infty} Q_{os} K_s) \frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh} + i \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i \sum_{s=0}^{\infty} Q_{ns} K_s) \frac{\cos k_n(Z+h)}{\cos k_n h} \right] \quad (123)$$

$$\frac{p_2}{\rho\sigma^2\omega\ell^2} = -i e^{i\sigma t} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \left\{ K_s \frac{\sinh \frac{sx}{\ell}}{\sinh \frac{s\ell}{\ell}} + 2i(-1)^s \left(\frac{h}{\ell}\right)^3 \cdot \frac{\cosh \bar{\mu}_s}{(\mu_s h)^3} \sin \mu_s x \right\} + \frac{1}{\sigma^2 h/q} \cdot \frac{h}{\ell} \cdot \frac{x}{\ell} \right] \quad (124)$$

回転中心 ($0, Z_o$) に関する圧力の全モーメント T は

$$\begin{aligned} \frac{T}{\rho\sigma^2\omega\ell^2 h^2} &= -2i e^{i\sigma t} \left\{ \left\{ \frac{q\lambda_o \sinh \bar{\lambda}_o + \cosh \bar{\lambda}_o - \cosh \lambda_o}{\lambda_o} - (\sinh \lambda_o - \sinh \bar{\lambda}_o) \frac{Z_o}{h} \right\} \cdot \right. \\ &\quad \times \frac{(a_o + i \sum_{s=0}^{\infty} Q_{os} K_s)}{\lambda_o \cosh \lambda_o} + i \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{q\lambda_n \sin \bar{\lambda}_n - \cos \bar{\lambda}_n + \cos \lambda_n}{\lambda_n} - (\sin \lambda_n - \sin \bar{\lambda}_n) \frac{Z_o}{h} \right\} \cdot \\ &\quad \times \frac{(a_n + i \sum_{s=0}^{\infty} Q_{ns} K_s)}{\lambda_o \cos \lambda_n} - \left(\frac{\ell}{h}\right)^2 \left\{ \frac{i}{3} \cdot \frac{h}{\ell} \cdot \frac{1}{\sigma^2 h/q} - \sum_{s=0}^{\infty} (K_s \frac{\bar{s}\ell \coth \bar{s}\ell - 1}{(\bar{s}\ell)^2} \right. \\ &\quad \left. \left. + 2i \left(\frac{h}{\ell}\right) \frac{\cosh \bar{\mu}_s}{(\mu_s h)^5} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (125)$$

領域 I の進行波の振幅と角柱の Water line の $x=\ell$ における振幅との比を造波率 K_w とすると

$$K_w = \frac{\sigma^2 h}{q} \cdot \frac{\ell}{h} \cdot |a_o + i \sum_{s=0}^{\infty} Q_{os} K_s| \quad (126)$$

Fig. 40 と 41 は式 (126) の造波率と式 (125) の回転モーメントの計算値を示す。(此の場合

$\ell/h=1.0$, $Z_o/h=-\frac{3}{4}q$ としている)

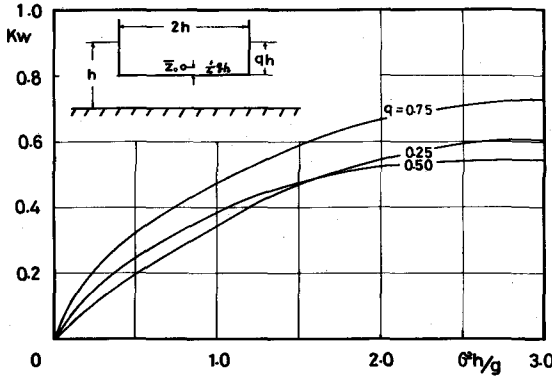


Fig.40 Wave Generation Coefficient by Rolling motion
by Cylinder

(5) 矩形浮体の運動

Fig. 33 に示すように幅 2ℓ , 吃水 qh , 静止時の重心が $(0, \bar{Z}_o)$ の矩形断面の浮体が周波数 σ の入射波によって運動する場合を考える。運動は重心の変位とそれに関する回転とから成るので、運動中の重心位置を (x_o, Z_o) , その水平及び鉛直変位及び回転角 δ の振幅を夫々 ξ, η, ω とすると

$$x_o = \xi e^{i\sigma t}, Z_o = \bar{Z}_o + \eta e^{i\sigma t}, \delta = \omega e^{i\sigma t} \quad (127)$$

このとき浮体の左右側面と底面の方程式は第1近似では次のようである。

$$\text{右及び左側面: } x = \pm \ell + \{\xi - \omega(Z - \bar{Z}_o)\} e^{i\sigma t}, \text{底面: } Z = -qh + (\eta + \omega x) e^{i\sigma t} \quad (128)$$

故に式(5)により各面での境界条件は次のようである。

$$x = \pm \ell \text{ で } u = i\sigma \{\xi - \omega(Z - \bar{Z}_o)\} e^{i\sigma t}; Z = -qh \text{ で } w = i\sigma(\eta + \omega x) e^{i\sigma t} \quad (129)$$

速度ポテンシャル $\phi_1(x, Z)$, $\phi_3(x, Z)$ は式(28)(29) で表わされるが $\phi_2(x, Z)$ に対する境界条件は上式から

$$Z = -h \text{ で } \partial\phi_2/\partial Z = 0; Z = -qh \text{ で } \partial\phi_2/\partial Z = i\sigma(\eta + \omega x) \quad (130)$$

となり、式(104)(119) を参照して $\phi_2(x, Z)$ は次のように表わされる。

$$\phi_2(x, Z) = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\left(D_s \frac{\cosh \bar{s}x}{\cosh \bar{s}\ell} + E_s \frac{\sinh \bar{s}x}{\sinh \bar{s}\ell} \right) \cdot \cos \bar{s}(Z + qh) + 2i \frac{h}{\ell} \left\{ \eta \sigma h \cos \mu_s x + \omega \sigma \ell \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{h}{\ell} \right)^2 \frac{\sin \mu_s x}{\mu_s h} \right\} \frac{(-1)^s \cosh \mu_s (Z + h)}{(\mu_s h)^2 \sinh \bar{\mu}_s} \right] \quad (131)$$

$x = \pm \ell$ の条件は次のようである。

$$x = \ell \text{ で } \phi_1 = \phi_2, \partial\phi_1/\partial x = i\sigma \{\xi - (Z - \bar{Z}_o)\omega\}, (0 > Z > -qh); = \partial\phi_2/\partial x, (-qh > Z > -h) \quad (132)$$

$$x = -\ell \text{ で } \phi_3 = \phi_2, \partial\phi_3/\partial x = i\sigma \{\xi - (Z - \bar{Z}_o)\omega\}, (0 > Z > -qh); = \partial\phi_2/\partial x, (-qh > Z > -h) \quad (133)$$

次に浮体の質量を M , 重心 (x_o, Z_o) に関する慣性モーメントを I とし、静水圧を含んだ浮体の両側面と底面に対する流体圧力を夫々 $p_1(\theta)$, $p_3(-\ell)$ 及び p_2 とすると

$$M = 2\rho \cdot qh\ell, \quad I = \frac{2}{3} \rho qh \cdot \ell^3 \quad (134)$$

$$p_1(\theta) - p_3(-\ell) = -i\rho\sigma \left[(A+B-F) \frac{\cosh \bar{\mu}(Z+h)}{\cosh \bar{\mu}h} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - G_n) \frac{\cos \bar{\mu}_n(Z+h)}{\cos \bar{\mu}_n h} \right] e^{i\sigma t} \quad (135)$$

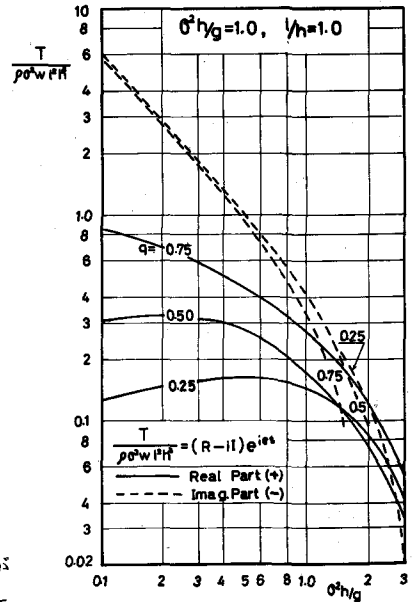


Fig.41 Resultant Torque by Rolling Motion
of Cylinder

$$\rho_2 = -i \rho_0 \sum_{s=0}^{\infty} \left[D_s \frac{\cosh sx}{\cosh s\ell} + E_s \frac{\sinh sx}{\sinh s\ell} + 2i \frac{h}{\ell} \left\{ \eta \sigma h \cos \mu_s x + \omega \sigma \ell^2 \cdot \left(\frac{h}{\ell} \right)^2 \frac{\sin \mu_s x}{\mu_s h} \right\} \right. \\ \left. \times \frac{(-1)^s \coth \mu_s}{(\mu_s h)^2} \right] e^{i \sigma t} + \rho q q h - \rho q (\eta + \omega x) e^{i \sigma t} \quad (136)$$

浮体の水平，鉛直及び回転に関する運動方程式は

$$M \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \int_{-qh}^0 (\rho_1(\ell) - \rho_3(-\ell)) dZ, \quad (137)$$

$$M \frac{d^2 Z_0}{dt^2} = \int_{-\ell}^{\ell} \rho_2 dx - Mg, \quad (138)$$

$$I \frac{d^2 \delta}{dt^2} = \int_{-qh}^0 (\rho_1(\ell) - \rho_3(-\ell)) (Z - Z_0) dZ + \int_{-\ell}^{\ell} \rho_2 (x - x_0) dx \quad (139)$$

であるから上式に式(134)(135)(136)を代入すると次式を得る。

$$\xi \sigma \ell = i \left[f_0 (A+B-F) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n (C_n - G_n) \right] \quad (140) \quad \eta \sigma h = i \alpha \sum_{s=0}^{\infty} H_s \cdot D_s \quad (141)$$

$$\omega \sigma \ell^2 = i \beta \left[q_0 (A+B-F) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n (C_n - G_n) \right] + \sum_{s=0}^{\infty} I_s \cdot E_s \quad (142)$$

こゝで

$$f_0 = \frac{1}{2q} \cdot \frac{\sinh \lambda_0 - \sinh \bar{\lambda}_0}{\lambda_0 \cosh \lambda_0}, \quad f_n = \frac{1}{2q} \cdot \frac{\sin \lambda_n - \sin \bar{\lambda}_n}{\lambda_n \cos \lambda_n}, \\ \alpha = \frac{1}{\left\{ q - \frac{1}{\sigma^2 h/q} + 2 \left(\frac{h}{\ell} \right)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\coth \bar{\mu}_s}{(\mu_s h)^3} \right\}}, \\ \beta = \frac{1}{\left\{ q - \frac{1}{\sigma^2 h/q} + 6 \left(\frac{h}{\ell} \right)^4 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\coth \bar{\mu}_s}{(\mu_s h)^5} \right\}}, \quad H_s = \frac{\tanh s\ell}{s\ell}, \quad I_s = 3 \cdot \frac{\ell}{h} \cdot \frac{s\ell \coth s\ell - 1}{(s\ell)^2} \\ q_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{\ell} \left\{ \frac{q \lambda_0 \sinh \lambda_0 + \cosh \bar{\lambda}_0 - \cosh \lambda_0}{\lambda_0^2 \cosh \lambda_0} - \left(\frac{Z_0}{h} - \frac{1}{\sigma^2 h/q} \right) \frac{\sinh \lambda_0 - \sinh \bar{\lambda}_0}{\lambda_0 \cosh \lambda_0} \right\} \\ q_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{\ell} \left\{ \frac{q \lambda_n \sin \lambda_n - \cos \bar{\lambda}_n + \cos \lambda_n}{\lambda_n^2 \cos \lambda_n} - \left(\frac{Z_0}{h} - \frac{1}{\sigma^2 h/q} \right) \frac{\sin \lambda_n - \sin \bar{\lambda}_n}{\lambda_n \cos \lambda_n} \right\} \quad (143)$$

式(132)(133)に ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を代入し式(140)(141)(142)を用いて計算を行うと， D_s/A に関しては次の連立方程式を得る。

$$\varepsilon_s \cdot D_s/A - i \sum_{r=0}^{\infty} \{ R_{os} (P_{or} + \alpha a_o H_r) + i \sum_{n=1}^{\infty} R_{ns} (P_{nr} + \alpha a_n H_r) \} D_r/A = 2R_{os}, \\ (s=0, 1, 2, \dots) \quad (144)$$

また $(B-F)/A, (C_n - G_n)/A, E_s/A$ に関する連立方程式は次のようになる。

$$\left[1 + i (d_o f_o + \beta b_o q_o) \right] \frac{B-F}{A} + i \sum_{n=1}^{\infty} (d_o f_n + \beta b_o q_n) \frac{C_n - G_n}{A} - i \sum_{s=0}^{\infty} (Q_{os} - \beta b_o I_s) \frac{E_s}{A} \\ = 1 - (d_o f_o + \beta b_o q_o), \quad (145)$$

$$(f_o d_n + \beta q_o b_n) \frac{B-F}{A} - \frac{C_n - G_n}{A} + \sum_{r=1}^{\infty} (d_n f_r + \beta b_n q_r) \frac{C_r - G_r}{A} - \sum_{s=0}^{\infty} (Q_{ns} - \beta b_n I_s) \frac{E_s}{A} \\ = - (f_o d_n + \beta q_o b_n), \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (146)$$

$$(R_{os} + \beta q_o e_s) \frac{B-F}{A} + \sum_{n=1}^{\infty} (R_{ns} + \beta q_n e_s) \cdot \frac{C_n - G_n}{A} - \varepsilon_s \frac{E_s}{A} + \sum_{r=0}^{\infty} \beta e_s I_r \cdot \frac{E_r}{A} = \\ = - (R_{os} + \beta q_o e_s), \quad (s=0, 1, 2, \dots) \quad (147)$$

こゝで $\varepsilon_0=2, \varepsilon_s=1 (s=1, 2, \dots)$

$$P_{os} = 2 \cdot \frac{h}{\ell} \cdot \frac{\sinh \bar{\lambda}_0}{N_o \lambda_0 \sinh \lambda_0} \cdot \frac{s\ell \tanh s\ell}{1 + (s\pi/\bar{\lambda}_0)^2}, \quad P_{ns} = 2 \cdot \frac{h}{\ell} \cdot \frac{\sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n} \cdot \frac{s\ell \coth s\ell}{1 - (s\pi/\bar{\lambda}_n)^2}$$

$$\begin{aligned}
Q_0 &= 2 \frac{h}{\ell} \cdot \frac{\sinh \bar{\lambda}_0}{N_0 \lambda_0 \sinh \lambda_0} \cdot \frac{\bar{s} \ell \coth \bar{s} \ell}{1 + (s \pi / \bar{\lambda}_0)}, \quad Q_n = 2 \frac{h}{\ell} \cdot \frac{\sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n} \cdot \frac{\bar{s} \ell \coth \bar{s} \ell}{1 - (s \pi / \bar{\lambda}_n)^2}, \\
R_0 &= \frac{\sinh \bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_0 \cosh \lambda_0} \cdot \frac{1}{1 + (s \pi / \bar{\lambda}_0)^2}, \quad R_n = \frac{\sin \bar{\lambda}_n}{\bar{\lambda}_n \cos \lambda_n} \cdot \frac{1}{1 - (s \pi / \bar{\lambda}_n)^2}, \\
d_0 &= 2 \frac{h}{\ell} \cdot \frac{\sinh \lambda_0 - \sinh \bar{\lambda}_0}{N_0 \lambda_0 \sinh \lambda_0}, \quad d_n = 2 \frac{h}{\ell} \cdot \frac{\sin \lambda_n - \sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n}, \\
a_0 &= 4 \frac{h}{\ell} \cdot \frac{\sinh \bar{\lambda}_0}{N_0 \lambda_0 \sinh \lambda_0} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\coth \bar{\lambda}_0}{\lambda_0} - \frac{\coth \bar{\mu}_s}{\mu_s h} \right) / \left\{ \left(\frac{\mu_s h}{\lambda_0} \right)^2 - 1 \right\}, \\
a_n &= 4 \frac{h}{\ell} \cdot \frac{\sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\cot \bar{\lambda}_n}{\lambda_n} + \frac{\coth \bar{\mu}_s}{\mu_s h} \right) / \left\{ \left(\frac{\mu_s h}{\lambda_n} \right)^2 + 1 \right\}, \\
b_0 &= 2 \frac{h}{\ell} \cdot \left(\frac{\sinh \lambda_0 - \sinh \bar{\lambda}_0}{N_0 \lambda_0 \sinh \lambda_0} \cdot \frac{\bar{Z}_0}{\ell} - \frac{q \lambda_0 \sinh \bar{\lambda}_0 + \cosh \bar{\lambda}_0 - \cosh \lambda_0}{N_0 \lambda_0^2 \sinh \lambda_0} \cdot \frac{h}{\ell} \right), \\
b_n &= 2 \frac{h}{\ell} \cdot \left(\frac{\sin \lambda_n - \sin \bar{\lambda}_n}{N_n \lambda_n \sin \lambda_n} \cdot \frac{\bar{Z}_0}{\ell} - \frac{q \lambda_n \sin \bar{\lambda}_n - \cos \bar{\lambda}_n + \cos \lambda_n}{N_n \lambda_n^2 \sin \lambda_n} \cdot \frac{h}{\ell} \right), \\
c_s &= 4 \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{h}{\ell} \right)^3 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu_r h)^2 \{ (\mu_r h)^2 + (\bar{s} h)^2 \}} \quad (148)
\end{aligned}$$

式(144)の解を K_s 、式(145)(146)(147)の解を M_0, M_n, L_s とすると

$$\begin{aligned}
D_s / A &= K_s, \quad (B - F) / A = M_0, \quad (C_n - G_n) / A = N_0, \quad E_s / A = L_s, \\
B / A &= \frac{1}{2} \left[1 + M_0 + i \sum_{s=0}^{\infty} (P_0 s + \alpha a_0 H_s) \cdot K_s \right], \quad F / A = \frac{1}{2} \left[1 - M_0 + i \sum_{s=0}^{\infty} (P_0 s + \alpha a_0 H_s) K_s \right], \\
C_n / A &= \frac{1}{2} \left(M_n - \sum_{s=0}^{\infty} (P_n s + \alpha a_n H_s) K_s \right), \quad G_n / A = -\frac{1}{2} \left(M_n + \sum_{s=0}^{\infty} (P_n s + \alpha a_n H_s) K_s \right) \quad (145)
\end{aligned}$$

又式(140)～(142)から

$$\xi \sigma \ell / A = i \left[f_0 (1 + M_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n M_n \right] \quad (146) \quad \eta \sigma h / A = i \alpha \sum_{s=0}^{\infty} H_s \cdot K_s \quad (147)$$

$$\omega \sigma \ell / A = i \beta \left[q_0 (1 + M_0) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n M_n + \sum_{s=0}^{\infty} L_s \cdot L_s \right] \quad (148)$$

故に波の反射率と通過率は $|B/A|$ 及び $|F/A|$ として求められ、又入射波 $S_i = a \cos(kx + \sigma t)$ による浮体重心の変位と回転は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
\frac{x_0}{a} &= \frac{i}{\sigma^2 h / q} \cdot \frac{h}{\ell} \cdot \frac{\xi \sigma \ell}{A} \cdot e^{i(k\ell + \sigma t)}, \quad \frac{Z_0 - \bar{Z}_0}{a} = \frac{i}{\sigma^2 h / q} \cdot \frac{\eta \sigma h}{A} \cdot e^{i(k\ell + \sigma t)} \\
\frac{\delta \ell}{a} &= \frac{i}{\sigma^2 h / q} \cdot \frac{h}{\ell} \cdot \frac{\omega \sigma \ell^2}{A} \cdot e^{i(k\ell + \sigma t)} \quad (149)
\end{aligned}$$

例として $\ell/h=1.0$, $\bar{Z}_0/h=-\frac{3}{4}q$ としたとき, $q=0, 0.05, 0.10, 0.25, 0.50, 0.75$ に対する反射率と $|x_0/a|$, $|(Z_0 - \bar{Z}_0)/a|$, $|\delta \ell/a|$ を計算した結果を示すとFig. 42, 43, 44, 45のようであり, かなり複雑な変化を示し, 特に反射率において特徴的である。またswaying, heaving, 及びrollingの振幅には, 吃水が浅い場合, 所謂固有振動は現われず, 吃水が深くなると次第にそれに近い現象が現われるようになることが分る。この取扱いは自由浮体に対するものであるが, mooring forceが変位に対してlinearであると考えられるときは, 類似の方法で, mooring systemに対して計算を行うこと

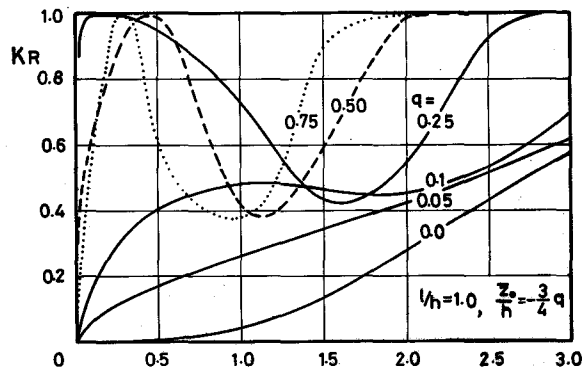


Fig.42 Reflection Coefficient of Freely Floating Body

が出来る。浮防波堤はその一つの応用例である。

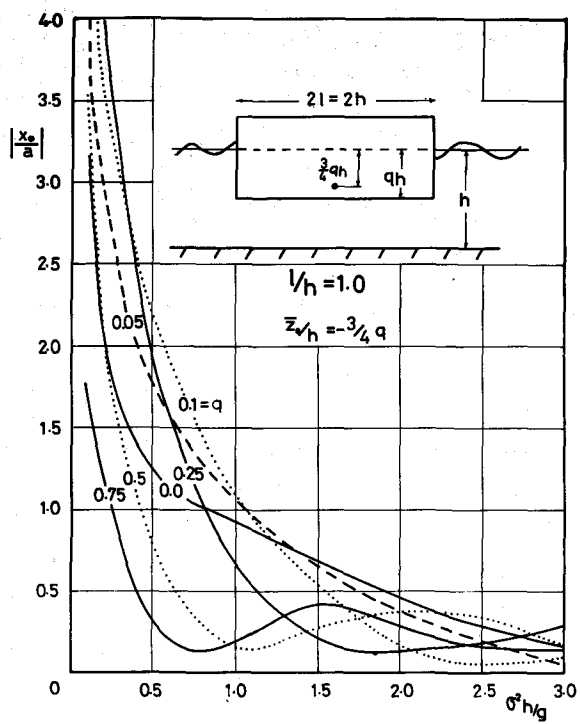


Fig.43 Swaying Amplitude of Freely Floating Body

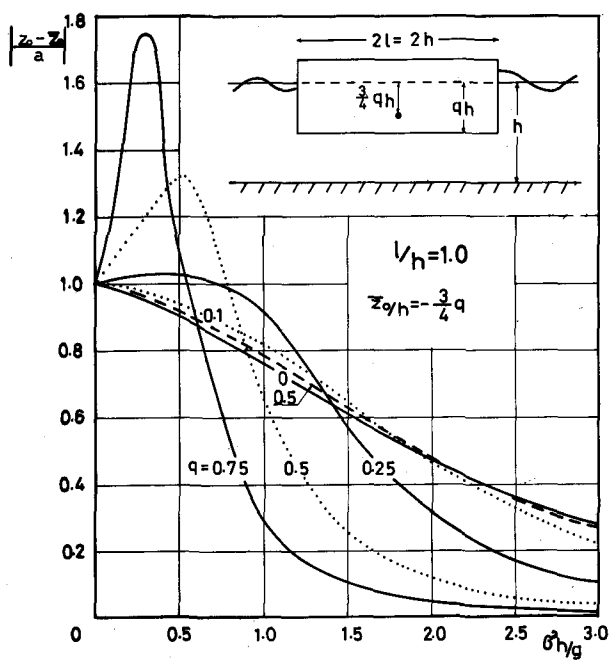


Fig.44 Heaving Amplitude of Freely Floating Body

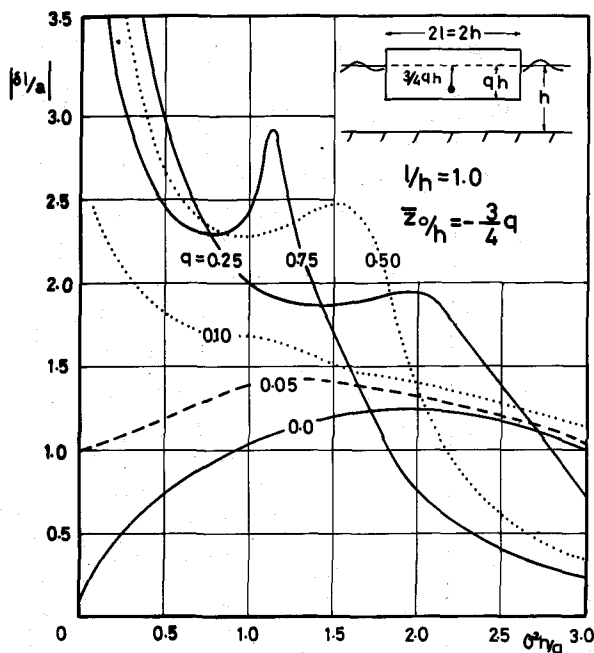


Fig.45 Rolling Amplitude of Freely Floating Body

(6) 水面に浮いた可撓性薄板による波の変形

Fig. 34 に示すように、長さ 2ℓ の完全に flexible な薄い板が浮いている場合、板の下の流体域の水面変動を $Z = \zeta_2(x, t)$ とすると、板の下面の圧力を P_0 とすれば

$$P_0 / \rho = -(\partial \Phi_2 / \partial t)_{Z=0} - g \zeta_2, \quad \text{及び} \quad \partial \zeta_2 / \partial t = (\partial \Phi_2 / \partial Z)_{Z=0} \quad (150)$$

の関係があり、また板の厚さと密度を d 及び ρ' とすると板の鉛直運動について $\rho' d \cdot d^2 S_2 / dt^2 = P_0$ の方程式が成立するから、式 (150) によって

$$Z=0 \text{ で } \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial Z} + \frac{\rho'}{\rho} d \cdot \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial Z \partial t^2} = 0 \quad (151)$$

故に $\phi_2(x, Z)$ に対する境界条件は

$$Z=0 \text{ で } \partial \phi_2 / \partial Z = \alpha \cdot \sigma^2 \phi_2 / g; \quad Z=-h \text{ で } \partial \phi_2 / \partial Z = 0; \quad 1/\alpha = 1 - \frac{\rho' d}{\rho h} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \quad (152)$$

となる。故にこの場合の ϕ_2 の固有値を k' , $k'h$ とすると、式 (14) に類似の形の次式で決まる。

$$\sigma^2 \alpha h / g = k' h \tanh k' h = -k'_n h \tanh k'_n h \quad (153)$$

之による $\phi_2(x, Z)$ は式 (81) で $q=1$ とおいた形、 ϕ_1 , ϕ_2 は式 (80) と (82) の形で表わされる。之について $x = \pm \ell$ の条件を用いて計算すると、 D , F_n 及び E , G_n に関して次の連立方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1+i \frac{k'_o}{\lambda_o} \tanh k' \ell}{(\lambda'_o / \lambda_o)^2 - 1} \cdot \frac{(\alpha-1) D}{N_o A} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-i \frac{k'_n}{\lambda_o} \tanh k' \ell}{(\lambda'_n / \lambda_o)^2 + 1} \cdot \frac{(\alpha-1) F_n}{N_o A} = 1 \\ & \frac{1-\frac{k'_o}{\lambda_m} \tanh k' \ell}{(\lambda'_o / \lambda_m)^2 + 1} \cdot \frac{(\alpha-1) D}{N_o A} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{k'_n}{\lambda_m} \tanh k' \ell}{1-(\lambda'_n / \lambda_m)^2} \cdot \frac{(\alpha-1) F_n}{N_o A} = 0, \quad (m=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1-i\frac{\lambda'_o}{\lambda_o} \cot h k' \ell}{(\lambda'_o/\lambda_o)^2-1} \cdot \frac{(\alpha-1)E}{N_o A} + \sum_{n=1}^{\infty} \\ & \frac{1-i\frac{\lambda'_n}{\lambda_o} \cot h k' \ell}{1+(\lambda'_n/\lambda_o)^2} \cdot \frac{(\alpha-1)G_n}{N_o A} = 1 \\ & \frac{1+\frac{\lambda'_o}{\lambda_m} \cot h k' \ell}{(\lambda'_o/\lambda_m)^2+1} \cdot \frac{(\alpha-1)E}{N_o A} + \sum_{n=1}^{\infty} \\ & \frac{1+\frac{\lambda'_n}{\lambda_m} \cot h k' \ell}{1-(\lambda'_n/\lambda_m)^2} \cdot \frac{(\alpha-1)G_n}{N_o A} = 0, \end{aligned} \right\} (155)$$

($m=1, 2, 3 \dots$)

上式の解を K_o , K_n 及び L_o , L_n とすると

$$D/A = N_o K_o / (\alpha-1), \quad F_n/A = N_o K_n / (\alpha-1),$$

$$E/A = N_o L_o / (\alpha-1), \quad G_n/A = N_o L_n / (\alpha-1),$$

$$\frac{B}{A} = \frac{K_o + L_o}{(\lambda'_o/\lambda_o)^2-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n + L_n}{(\lambda'_n/\lambda_o)^2+1} - 1,$$

$$\frac{C_m}{A} = -\frac{N_o}{N_m} \left[\frac{K_o + L_o}{(\lambda'_o/\lambda_m)^2+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n + L_n}{1-(\lambda'_n/\lambda_m)^2} \right]$$

$$\frac{H}{A} = \frac{K_o - L_o}{(\lambda'_o/\lambda_o)^2-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n - L_n}{(\lambda'_n/\lambda_o)^2+1},$$

$$\frac{G_m}{A} = -\frac{N_o}{N_m} \left[\frac{K_o - L_o}{(\lambda'_o/\lambda_m)^2+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n - L_n}{1-(\lambda'_n/\lambda_m)^2} \right] \quad (156)$$

上式から反射率及び通過率は $|B/A|$, $|H/A|$ として求められ、その他薄板に対する圧力分布や薄板の運動について計算することが出来る。Fig. 46 は反射率の計算値で、潜堤に対する Fig. 24 と類似であるが、 $\sigma^2 h/\varphi$ と共に極大値は増加の傾向を示している。この取り扱いには自由浮体に対するものであるが、mooring の場合にも類似の方法で計算される。(この取扱は水面波形の曲率が小さく板の Tension の影響を省略出来ることを前提としている)

9 む す び

以上の計算は、各例題で示したような、速度ポテンシャルの係数を連立方程式を解くことによって決めることに帰着する。すべての場合にその方程式の数は 5~10 ケで充分であるが、計算はすべて電子計算機によることになる。又無限級数の中の有限項について計算するものであるから、収束の速さによって計算精度が多少異なることになる。このような計算誤差とミスをチェックするためには、すべての答を得た後に、再び初めに与えた境界条件式 (26) 又は (27) が $0 \sim -h$, (或は $0 \sim -qh$, 等) の間の任意の z について成り立っているかどうかを計算によって確かめることが必要である。

尚こゝで述べた問題の取り扱い方は 2 次元問題に限ったが、3 次元の場合にも簡単な形の境界条件に対しては拡張することが出来る。之については別の機会に述べる。

終りに、実際計算に当たった九州大学工学部助手、江口泰彦、田淵幹修、佐々木富雄、同研究補助員、湯村やす、図面整理と実験に当たった小林彰、坂井久雄の各氏に深く謝意を表するものである。

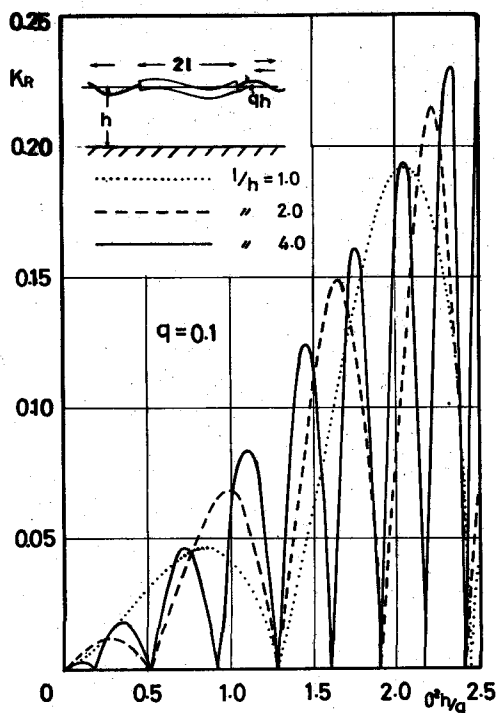


Fig. 46 Reflection Coefficient for Flexible, Freely Floating Slab

参 考 文 献

- Stoker, J.J.(1957): "Water Waves" Interscience Publishers, New York
- Holtord, R.L.(1964): "Short surface waves in the presence of a finite dock"
Proc. Camb. Phil. Soc. vol.60
- Friedrichs, K.O.& H.Levy(1948): "The dock problem" Comm.Pure, Applied Math.
vol.1
- 井島, 尾崎, 松尾, 小林(1969): "直立消波岸壁に関する研究" 第16回海岸工学講演会論文集
- 井島, 尾崎, 江口, 小林(1970): "水平板による防波堤と岸壁の理論的研究" 第17回海岸工学講演会
論文集
- 近藤淑郎(1969): "透過性防波堤の伝達波" 第16回海講論文集
- 富永正照他(1969): "透過性構造物による波の変形に関する研究," 第16回海講論文集
- B.LeMéhauté(1958)(1959): "Perméabilité des digues en enrochements aux ondes
de gravité périodiques," (The perviousness of rock
fill break waters to periodic gravity waves), La
 Houille Branche, №2, №3
- 井島, 江口, 小林(1971): "透過性防波堤及び岸壁の研究" 九州大学工学集報, 44 卷4号
- Newman, J.N.(1965): "Propagation of water waves over an infinite step" J.F.M.
vol.23, part 2
- Dean, W.R.(1945): "On the reflexion of surface waves by a submerged plane
barrier", Proc.camb.phil.soc.vol.41
- Uvsell, F.(1947): "The effect of a fixed vertical barrier on surface waves in
deep water" Proc.Camb.Phil.Soc.vol.43
- Miles, J.W.(1967): "Surface-wave scattering matrix for a shelf" J.F.Mech.vol.
28, part.4
- Miles, J.W.(1968): "Scattering of gravity waves by a circular dock" J.F.Mech.
vol.34
- 井島, 佐々木(1971): "海底不連続による波の変形" 土木学会九州支部研究発表会論文集
- Newman, J.N.(1965): "Propagation of water waves past long two-dimensional
obstacles", J.F.M.vol.23, part 1,
- Mei, C.C.&J.L.Black(1969): "Scattering of surface waves by rectangular obsta-
cles in water of finite depth," J.F.M.vol.38, part.3
- Ursell, F.(1949): "On the heaving of a circular cylinder on the surface of
a Fluid", Quat.J.Mech.Appl.Math.vol.2
- 田才福造(1959): "船の上下動揺並びに縦動揺における減衰力及び附加質量について" 造船協会論
文集第105号
- 田才福造(1960): "柱状体の強制上下動揺によって生ずる進行波高の計測" 造船協会論文集第107
号
- Goda Y.& T.Kikuya(1964): "The Generation of Water Waves with a Vertically
Oscillating Flow at a Channel Bottom", Rep.№9

Port and Harbour Tech.Res.Inst.

Mac Camy, R.C.(1961): "On the Heaving Motion of Cylinders of Shallow Draft",

J.Ship Research

Kim, D.(1963): "The pitching motion of a circular disk", J.F.M.vol.17

" (1963): "On the Forced Oscillations of Shallow-Draft Ships" J.Ship
Research

Newman, J.N.(1962): "The Exciting Forces on Fixed Bodies in Waves" J.Ship
Research

井島, 小林, 湯村(1971): "水底又は水中の柱の鉛直振動による波の発生" 九州大学工学集報
44巻3号

Black, J.L. & C.C.Mei(1970): "Scattering and radiation of water waves" Rep.
№ 121, U.S.Dep.Navy, Washington. D C

Johnston, A.K.(1958): "Recherches sur les bris-lames flottants destinés a
réfléchir la houle en eau peu profonde" (Observations
on floating breakwaters for reflection of shallow
waves) La Houille Branche, № 5, № 6

Korvin-Kroukovsky, B.V.(1961): "Theory of Seakeeping", Soc.Naval Arch.Mari.
Eng.New York

St.Denis, M. & W.J.Pierson(1953): "On the Motions of Ships in Confused Seas"
Trans.Soc.Naval Arch.Mari.Eng.vol.61

Muga, B.J. & J.F.Wilson(1970): "Dynamic Analysis of Ocean Structures" Plenum
Press, New York ,

井島, 田淵(1970): "浮防波堤に関する研究" 土木学会西部支部研究発表会論文集

Figures and Tables

- Fig. 1 Curves of $\bar{K}_r h \tanh \bar{k}_r h = (1-i\mu/\sigma)\sigma^2 h/g$
- Fig. 2(a)(b)~Fig. 5 Definition Sketch
- Fig. 6 K_R and K_T for Single Plate Break water
- Fig. 7 Pressure Distribution to Plate (Single Pl.Br.)
- Fig. 8 Total Uplift Force (Single Plate Br.)
- Fig. 9 Pressure Distribution to Plate (Single Pl.Quay Wall)
- Fig. 10 Pressure Distribution to Vertical Wall(Single Pl.Quay wall)
- Fig. 11 Total Horizontal Force and Uplift Force to Quay wall
- Fig. 12 Pressure Distribution to Submerged Plate (Double pl.Break.)
- Fig. 13 Total Uplift Force to Upper and lower plate(")
- Fig. 14 Pressure Distribution to Vertical Wall(Double pl.Qu.wall)
- Fig. 15 K_R and K_T of Permeable Break water($\ell/h=0.62$, $V=0.4$)
- Fig. 16 Surface Wave Profiles for Permeable Br.
- Fig. 17 Total Horizontal Force to per.Br.
- Fig. 18 Total Uplift Force to Per.Br.
- Fig. 19 K_R of Permeable Quay Wall
- Fig. 20 Total Horizontal and Uplift Forces to Quay Wall
- Fig. 21 Experimental Relations of μ/σ and $\sigma^2 h/g$
- Fig. 22 K_R and K_T of Bottom Discontinuity(from deep to shallow water)
- Fig. 23 K_R and K_T of Bottom Discontinuity(from shallow to deep water)
- Fig. 24 K_R of Submerged Break water($q=0.5$)
- Fig. 25 Total Horizontal Force to Submerged Break water
- Fig. 26 K_R and K_T of Surface Obstacle
- Fig. 27 Total Uplift Force to Surface Obstacle
- Fig. 28 Total Horizontal Force to Surface Obstacle
- Fig. 29, 30, 31, 32, 33, 34 Definition Sketch
- Fig. 35 Wave Generation Coefficient of Bottom Oscillation
- Fig. 36 K_w of heaving motion of Semi-immersed Cylinder
- Fig. 37 Total Force to Bottom of Cylinder
- Fig. 38 K_w of Swaying motion of Cylinder
- Fig. 39 Total Horizontal Force to Swaying Cylinder
- Fig. 40 K_w of rolling motion of Cylinder
- Fig. 41 Total Moment of rolling motion
- Fig. 42 K_R of floating Cylinder
- Fig. 43 Swaying Amplitude $|x_o/a|$
- Fig. 44 Heaving Amplitude $|Z-\bar{Z}_o|/a$
- Fig. 45 Rolling Amplitude $|\omega\ell/a|$
- Fig. 46 K_R of flexible floating plate
- Table 1 Numerical Values of $\bar{K}_r h$
- Table 2 Numerical Values of B/A , F/A etc. for single plate Br.