

流水中における物質の移流と拡散 (特別講演)

林 泰 造

まえがき

水流中の物質の拡散現象に関連するものとしては、この水工学夏期研修会で1966年度に日野幹雄助教授の「河川の乱流現象」の講演がなされており、1968年度には栗原道徳教授の「乱流拡散」と、栗谷陽一教授の「河川汚濁論」、また、1970年度には首藤伸夫教授の「湾内拡散」、の各講演がなされている。そこで、ここではそれらとできるだけ重複を避けて、やゝ総説的な面について若干の記述を試みてみたい。

1 乱れの相関

乱流においては一点の速度は大きさ、方向いずれも時間的に不規則に変る。拡散現象にはこの不規則変動流速が大きな役割をもつ。不規則な現象であるからその運動を決定的な立場で一々追跡することは不可能であって、統計的な取扱いがとられる。

流れの速度の3成分を $U(x, y, z, t)$, $V(x, y, z, t)$, $W(x, y, z, t)$ とすると

$$U = \bar{U} + u, \quad V = \bar{V} + v, \quad W = \bar{W} + w$$

ただし、 $\bar{U}$ などは時間平均値を表わし、 u などは速度変動の成分を表わす。 $\sqrt{u^2}$, $\sqrt{v^2}$, $\sqrt{w^2}$ は“乱れの強さ”の成分とよばれる。

Reynolds の応力は $-\rho \overline{u^2}$, $-\rho \overline{uv}$, ... であるが、“完全に”不規則なものでありとすれば渦による剪断応力の成分 $-\rho \overline{uv}$, $-\rho \overline{vw}$, $-\rho \overline{uw}$ は0となる筈である。渦による剪断応力があるかないかは、その点において速度変動の成分間に相関があるかどうかによる。 u と v との積の時間的平均 $\overline{uv}$ を

$$\overline{uv} = R_{uv} \sqrt{u^2} \sqrt{v^2} \quad (1)$$

とおいて書き表わすとき、 R_{uv} を u , v の相関係数という。従って

$$R_{uv} = \overline{uv} / \sqrt{u^2} \sqrt{v^2} \quad (2)$$

である。

これは先ず相関係数の一例として述べたもので、段々と以下にも述べてゆくように、乱流理論においては相関係数の概念は極めて重要な役割をもつものであり、この現象の決定論的性格と非決定論的性格との相互滲透によって生ずる概念である。

つぎに乱流理論において特に重要な相関係数について以下にのべる。

(a) 時間的二重相関係数 (Euler 的相関係数)

時刻 t および $t + \tau$ における流速の x 方向の変動成分を $u(t)$ および $u(t + \tau)$ とすれば

$$R_u(\tau) = \overline{u(t)u(t+\tau)} / \overline{u^2(t)} \quad (3)$$

によって定義される相関係数を時間的あるいは Euler 相関係数とよぶ。これは一点で記録される変動速度についての自己相関係数ともいわれる。

(b) 空間的二重相関数

式(2)の相関係数は同一点の速度成分間の相関を表わすものであったが、ここでは異なった2点における速度成分間の相関係数を考える。一点における速度変動の成分を u_1, v_1, w_1 とし、もう一つの点におけるそれを u_2, v_2, w_2 とすると、例えば u_1 と u_2 との相関係数は

$$R_{u_1 u_2} = \overline{u_1 u_2} / \sqrt{\overline{u_1^2}} \sqrt{\overline{u_2^2}} \quad (4)$$

で表わされるが、これを空間的相関係数とよび、Taylor-von Karmanの理論では盛んにこれが用いられる。

(c) 時間的自己相関係数 (Lagrange 相関係数)

乱流中の物質の拡散を論ずるときに欠かせない相関係数で、Taylor (1921年)より拡散の理論に導入された。いま着目する一つの水粒子(あるいは物質の粒子)が時刻 t に湧点(図-1)のA点が出た時にもつ変動速度を $u(t), v(t), w(t)$ とし、 ξ 時間後の同一粒子Pの速度を $u(t+\xi), v(t+\xi), w(t+\xi)$ とすると、例えば $u(t)$ と $u(t+\xi)$ との相関係数は、

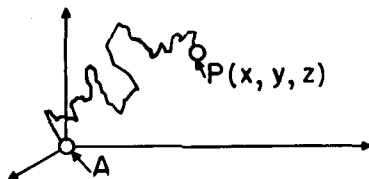


図-1

$$R_u(\xi) = \overline{u(t)u(t+\xi)} / \sqrt{\overline{u^2(t)}} \sqrt{\overline{u^2(t+\xi)}} \quad (5)$$

で表わされるが、これを u についての時間的自己相関係数あるいはLagrange相関係数という。

Lagrange相関係数 $R_u(\xi)$ は一つの粒子が運動している際にもつ変動速度 u についての時間的な自己相関係数であり、一点で記録される変動速度についての自己相関係数(Euler相関係数) $R_u(t)$ とは全く異った性質をもっていることに注意しなければならない。

2 渦のスケール

(a) Prandtlの混合距離とPrandtlの運動量輸送理論の難点

乱流場の状態を特徴づける一つの幾何学的な長さとして最初に導入されたのは恐らくPrandtlの“混合距離”であろう。Prandtlの理論では、混合距離とは、小流体塊がその周囲と完全に混合して同一の運動量及び性質を有するに至るまでに移動する距離と定義される。もちろん個々の小流体塊によってこの距離は異なるが、これを混合距離で表わす。Prandtlの理論では混合距離 ℓ と応力 τ との間の関係は

$$\tau = \rho \ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \frac{dU}{dy} \quad (6)$$

で与えられる。Prandtlの現論は気体分子運動論からの類推により導かれたものであるが、一定の運動には変動圧力勾配あるいは分子拡散係数は全く関係がないとの仮定も置かれており、余り現実的な模型とはいえない。

Prandtlのこの研究に先だってTaylorは小流体塊が、その点における平均の渦の強さを保持したまま一定距離移動して周囲と混合するという例の渦輸送理論を発表している。このように渦を取り上げるならば、もし粘性の影響を無視するときには、変動勾配も定常圧力勾配もその運動には関係をもたないと考えてよい訳である。ただし、Taylorの渦輸送理論の有効性は2次元の場合に限られているので、この理論が適用できる実用的な場合としては円柱の背面の流れ(そこでは大きなスケールの乱れはvon Karmanの渦列のように近似的に2次元的な性格をもつ)が見られる程度であって、そのためにTaylorの渦輸送理論はその後に出版されたPrandtlの運

動量輸送理論の蔭に暫くの間はかくされているような感がある。

Prandtl の運動量輸送理論の理論としての難点は運動量なり他の物理量を保有してある距離移動した小流体塊がなぜ周りの流体中にその物理量を放出するかというその過程の物理像の不明確さにある。すなわち、この理論の考え方は、ある物理量（例えば運動量、熱、あるいは物質濃度等）の荷を背負った一つの小流体塊がある距離移動した時突然の“事故”に遭遇して解体されてバラバラになり、運ばれてきた荷は流体の分子粘性により周囲の流体中に放出されてしまうという風に解釈することが出来るであろう。しかし、乱流構造をこのように一定の物理量を保持したままある距離移動する小流体塊の集合であると考えるのは論理的に無理な話である。

(b) Lagrange 的に記述された平均渦径

Prandtl の運動量輸送理論の上述の難点を取り除くために、Taylor は乱流拡散の記述の中にLagrange 的な概念を導入し、一点から出た一つの小流体塊の保有する物質の性質の変化を追跡してLagrange 的に記述する理論をつくり上げた。彼は一点から発した流体塊の拡散的性質はある時刻 t における一つの流体塊の速度と同じ流体塊の時刻 $t + \tau$ における速度との相関係数 $R_v(\tau)$ (Lagrange 相関係数—前述式(5)) によることを示した（後出6節参照）。いま $R_v(\tau)$ から定義される次の長さを考えてみる。

$$\ell_1 = \sqrt{v^2} \int_0^\infty R_v(\xi) d\xi \quad (7)$$

ここに、 v は主流に垂直な方向の速度変動であり、またこの ℓ_1 が混合距離に相当する長さとなつて、Lagrange 的に記述された平均渦径を表わす。

(c) 平均渦径

Taylor は後に（1935年）さらに空間的相関係数を使用して Euler 風の流儀により渦の大きさを記述することを考えた。いま距離 y だけ離れた2点における u の相関係数 R_y ，すなわち

$$R_y = \overline{u(0)u(y)} / \sqrt{u^2(0)} \sqrt{u^2(y)} \equiv \varphi(y) \quad (8)$$

を考える。この値の y についての变化（図-2）が任意の瞬間における u の y 軸方向への統計的分布を表わす。そこで

$$L_y = \int_0^\infty R_y dy \quad (9)$$

で定義される長さを考えてみると、これが式(7)の ℓ_1 に対応して Euler 風に考えられた長さで、渦の径の平均的な長さを表わす一つの目安となり、“渦の平均径”と名付けられる。

同様に、距離 x だけ離れた2点の速度成分 u の相関係数 R_x ，すなわち

$$R_x = \overline{u(0)u(x)} / \sqrt{u^2(0)} \sqrt{u^2(x)} \equiv f(x) \quad (10)$$

から

$$L_x = \int_0^\infty R_x dx \quad (11)$$

が定義される。

なお、相関係数と φ とは、変動速度についての連続方程式

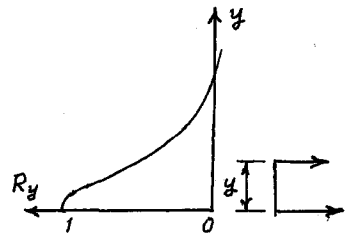


図-2 R_y

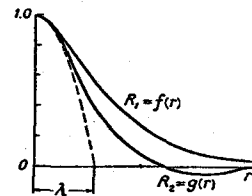


図-3 f と g

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

の両辺に $u_1 \sqrt{u^2}$ (ただし u_1 は u とは違う点における変動流速) をかけて時間平均をとることにより (12) からえられる相関係数間の方程式から関係が結ばれて、

$$2f''(0) = q''(0) \quad (13)$$

となることが示される (図-3)。ただしダッシュは引数についての微分を表わす。

つぎに、もし渦を運ぶ $\bar{u}$ が変動速度 u より遙かに大きい時には、一定点における u の変化は乱流の空間的波形がその点をそのままの形で逐次通過してゆくときの形と同じあると考えて

$$u = \phi(t) = \phi(x/\bar{u}) \quad (14)$$

と考える。ただし x は $t=0$ の瞬間において考える点から上流側に向けて測った距離である。そうすると L_x はつぎのように表わされる。

$$L_x = \int_0^\infty R_x dx = \bar{u} \int_0^\infty R_u(\tau) d\tau \quad (15)$$

(d) 最小渦径

式 (10) の $R_x (\equiv f(x))$ の曲線に、その原点において接する放物線が r 軸をきる図示の長さ λ (前出図-3) を最小渦径という。上述の定義を式で表せば

$$\lambda = 1/\sqrt{-f''(0)} \quad (16)$$

で表わされる。あるいは式と (13) を考慮すると

$$\lambda = 1/\sqrt{-q''(0)/2} \quad (17)$$

と記される。粘性流体内部における流体の単位質量当りのエネルギー逸散率の時間的平均値は

$$\begin{aligned} \epsilon = \mu \{ & 2 \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + 2 \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} + 2 \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \\ & + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \} \end{aligned}$$

で表わされる。ただし μ は流体の粘性係数である。等方性乱れの場合には上式は

$$\epsilon = \mu \{ 6 \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + 6 \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} + 6 \overline{\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}} \} = 7.5 \mu \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

となるから

$$\epsilon = -7.5 \mu \overline{u^2} q''(0) = 15 \mu \overline{u^2} / \lambda^2 \quad (18)$$

で表わされる。

このような考え方においては、式 (16) または (17) で与えられる λ より小さい径の渦は存在せず、大きな渦から分解して次第に小さな渦となり、式 (16) または (17) で与えられる最小渦径の渦になると、その段階でエネルギーは熱になって逸散すると考える。

3 乱れのスペクトルと相関関数との関係

(a) 乱れのスペクトル

乱流場を周波数の異なる多くの渦の集合と考えると、乱れの周波数についてのエネルギーの分布を考える。白色光線をプリズムの作用によってスペクトルに分解すると同じように、流速変動をそれにより熱線流速計に生じた電流変化から電氣的フィルターにより、スペクトルに分解することが出来る。乱れのエネルギー $\overline{u^2}$ に対する周波数が n と $n+dn$ との間における traveling waves の寄与を $u^2 \cdot F(n)dn$ で表わし、 $F(n)$ の一次元スペクトルという。この定義から明らかに

$$\int_0^\infty F(n)dn = 1 \quad (19)$$

である。周波数 n に対してプロットされた $F(n)$ の曲線をスペクトル曲線という。

(b) 相関係数との関係

Taylor は Rayleigh の式

$$\int_0^\infty [\phi(t)]^2 dt = \pi \int_0^\infty (I_1^2 + I_2^2) dk$$

ここに

$$I_1 = (1/\pi) \int_0^T \phi(t) \cos kt dt$$

$$I_2 = (1/\pi) \int_0^T \phi(t) \sin kt dt$$

T : 十分長い時間

を用い、また式 (14) を用いて

$$\int_0^\infty \phi(t) \phi(t + \frac{x}{U}) dt = 2\pi^2 \int (I_1^2 + I_2^2) \cos \frac{2\pi nx}{U} dx$$

の関係式を導き、一方、 $2\pi^2 \lim_{T \rightarrow \infty} (I_1^2 + I_2^2)/T$ は $\overline{u^2}$ に対する周波数が n と $n+dn$ の間の乱れの寄与であることから

$$2\pi^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_1^2 + I_2^2}{T} = F(n)$$

の関係式を考慮することにより

$$\overline{\phi(t) \phi(t + \frac{x}{U})} / \overline{u^2} = \int_0^\infty F(n) \cos \frac{2\pi nx}{U} dn$$

を導き、従って

$$R_x = \int_0^\infty F(n) \cos \frac{2\pi nx}{U} dn \quad (20)$$

を得た。

従って $F(n)$ は逆に R_x で表わされて

$$F(n) = (4/U) \int_0^\infty R_x \cos (2\pi nx/U) dx \quad (21)$$

となる。すなわち相関係数 R_x と $\overline{u} F(n) / \sqrt{8\pi}$ とは相互に Fourier 変換の関係にある。これらの関係は実験によっても確かめられ、乱流理論の核心が流れのスペクトルにあることが明らかになっていった。

(c) 乱れの“粒子模型”による考察

上述のように、Taylor は乱流場を周波数の異なる多くの travelling waves の和と考えるいわば“波動模型”により理論をくみ立てた。しかし、乱流場をちりばめられた渦の場とみなす“粒子模型”によっても同じ式が導かれる。粒子模型による研究は Weizsäcker および井上に始まるものである。この模型によると、乱流場は多くの大きさ（階級）の渦（eddy）あるいは乱子（turbulon）（井上）から成立っているとし、最小渦については添字 0 を、最大渦については ∞ を、中間渦については $1, 2, \dots$ を以て表わすことにする。また、 $u_0, u_1, \dots, u_\infty$ を以てそれぞれの変動速度を示すものとする。そうすると、各時刻の u は各階級の渦速度の合成として得られ、

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0(t) + u_1(t) + \dots + u_\infty(t) \\ u(t+\Delta t) &= u_0(t+\Delta t) + u_1(t+\Delta t) + \dots + u_\infty(t+\Delta t) \end{aligned} \quad (22)$$

したがって

$$\begin{aligned} \overline{u(t)u(t+\Delta t)} &= \overline{\left\{ \sum_n u_n(t) \right\} \left\{ \sum_m u_m(t+\Delta t) \right\}} \\ &= \sum_n \sum_m \overline{u_n(t)u_m(t+\Delta t)} \end{aligned} \quad (23)$$

となる。ここで異なる階級の運動が相互に全く無関係であると仮定すれば

$$u_n(t)u_m(t+\Delta t) = 0 \quad (n \neq m) \quad (24)$$

とみなされ、(23)は

$$\begin{aligned} \overline{u(t)u(t+\Delta t)} &= \overline{u_0(t)u_0(t+\Delta t)} + \overline{u_1(t)u_1(t+\Delta t)} + \dots \\ &\quad + \overline{u_\infty(t)u_\infty(t+\Delta t)} \end{aligned} \quad (25)$$

となる。従って $R(\Delta t)$ は

$$\begin{aligned} R(\Delta t) &= \frac{1}{\overline{u^2}} \sum_{s=0}^{\infty} \overline{u_s(t)u_s(t+\Delta t)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\overline{u_s^2}}{\overline{u^2}} \frac{\overline{u_s(t)u_s(t+\Delta t)}}{\overline{u_s^2}} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\overline{u_s^2}}{\overline{u^2}} R_s(\Delta t) \end{aligned} \quad (26)$$

となり、各階級でこの乱子の時間的自己相関係数に乱子スペクトルの重味をつけて合成したものであることが判る。もし渦（乱子）の運動が全く振動的であり、

$$R_s(\Delta t) = \cos 2\pi n_s \Delta t \quad (s = 0, 1, \dots, \infty)$$

で表わされるとするならば、式 (23) から

$$R(\Delta t) \sim \int F(n) \cos 2\pi n \Delta t dn \quad (27)$$

となり式 (20) と一致し、その逆変換として式 (21) が求められる。但しこの場合の n は相対振動数に対応する。

4 乱れの局所等方性

一様な乱れの場合におけるすべての統計量は、一般に時間とともに変化する。そして乱れの瞬間速度 u, v, w が Navier-Stokes 方程式で支配されている以上、すべての統計量に関する完全な智識を求めるには、 $N-S$ の方程式から適当な平均操作をとることにより導かれたつぎの

Von Karman-Howarth の方程式 (式 28) をとくことが必要となる。すなわち

$$\frac{\partial(\overline{f u^2})}{\partial t} + 2(\overline{u^2})^{3/2} \left(\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{4h}{r} \right) = 2\nu \overline{u^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (28)$$

ただし、 $h(r, t) = \overline{v_1 u_2} / \sqrt{\frac{1}{3} \overline{u^2}}$ は図示 (図-4) の 3 重相関係数であり、 f は式 (10) で与え

られる 2 重相関係数である。さらに上式をスペクトル方程式とするた

めに両辺に $\cos k \cos kr$ をかけて k (波数) について積分し ($\cos$ 変

換をし)、それに $\frac{1}{3} (k^2 \frac{\partial^2}{\partial k^2} - k \frac{\partial}{\partial r})$ をかけて計算すると次式をうる。

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = W + 2\nu k^2 F \quad (29)$$

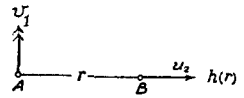


図-4 3 重相関

ただし $F(k)$ は波数スペクトル、

$$W(k, t) = (2k^2/3) [k^2 H_1''(k) - k H_1'(k)]$$

$$k H_1(k) = \{(\overline{u^2})^{3/2}/\pi\} \int_0^\infty h(r) \sin kr dr$$

である。結局、式 (29) が $N-S$ の方程式を書直して得られたものである。式 (29) の左辺 $-\partial F/\partial t$ は与えられた波数に対するスペクトルの値の時間的変化の割合を表わし、右辺第 1 項の W は低周波の渦から高周波の渦へのエネルギーの移行 (transfer of energy)、右辺第 2 項の $2\nu k^2 F$ は粘性による逸散 (dissipation) を表わす。

式 (29) を与えられた初期条件のもとにとくことは等方性乱れについてはある程度遂行されるがかなり困難な仕事である。そこで、一般の乱れの場合においても、何か最も簡単な性質、たとえば定常性が成立するような様相がないものかどうかを考える。

明らかに乱れの場合は全体として等方性と定常性とを同時に持つことはできない。乱れの場合は粘性により絶えず運動エネルギーを逸散しているから、乱れの場合が定常的であるためにはその場の中に何らかのエネルギー供給源がなければならない。しかしそうすれば、完全に一樣でかつ等方性をもつ乱れをつくり出すことは現実には不可能である。管路や開水路の中の乱流は定常的ではあっても一樣でも等方的でもない。しかしその一樣ではない乱れの空間的変化が長さ L (例えば管路の場合は半径、開水路の場合には水深または径深、物体の背面では物体の寸法、など) の規模で起っているとすると、 L に比べて充分小さい視野の中では乱れは一樣でかつ等方性と考えることが出来る。そこでこのような観点からみたこれらの流れの状態を局所等方性の状態という。したがって局所等方性は、空間的には一樣ではないが時間的には定常状態にあるもので、実在の流れは殆どこの型式のものに入る。

5 波数スペクトル

(a) 局所的相以性の仮定と次元解析的考察

局所等方性の流れにおける波数スペクトルについて考える。乱れの場合が時間的に定常であるということは平均流から渦にエネルギーの供給が行われているということである。すなわち波数の

小さい渦により平均流からエネルギーが乱れのエネルギーとして移行し、このエネルギーは波数の小さな渦から順次波数の大きい渦に手渡されてゆく。そして最終的に最小渦径の渦で熱エネルギーとして逸散するものと考えられる。

粒子模型でいえば、乱れのエネルギーが乱子の階級 n に無関係に、すなわち乱子間を流れるエネルギーが特定の階級の乱子に停滞することなく、最終的に分子に至ってその流れが止んですべて熱エネルギーに転化すると仮定する。

さて、このような領域では、慣性力と粘性力の作用の平衡のもとに、一種の相似性が存在することが想像される。このような想像が正しいとすれば、この領域の統計的状态は外部の影響を表わすパラメーターだけに依存しているはずである。このようなパラメーターとしては外部からのエネルギーの供給率 ε と、粘性逸散に関連する ν の二つが考えられる。Kolmogoroffは“局所等方性が成立しているような高周波領域では、乱れの統計的状态はパラメーター ε と ν とによって一義的に決定される”とする局所的相似性の仮説を導入した。このような波数領域では、そこにおいて慣性力と粘性力の釣合いが成立していることから見て、波数の平衡領域とよばれる。

平衡領域におけるスペクトル関数 $F(k)$ に関係すべき要素を考えてみると、 F と k の他には局所的相似性の仮定から ε と ν が考えられる。すなわち

$$F, k, \varepsilon, \nu \dots\dots\dots 4 \text{ 個}$$

が関係量であるが、この4個の量に関係する基本次元は

$$L, T \dots\dots\dots 2 \text{ 個}$$

である。したがって π 定理により $4 - 2 = 2$ 個の無次元積が存在する。いま $\varepsilon, \nu, k, F(k)$ の次元はそれぞれ

$$[\varepsilon] = \frac{[\text{Kinetic energy/mass}]}{[\text{time}]} = \frac{(L/T)^2}{T} = \frac{L^2}{T^3}$$

$$[\nu] = L^2/T$$

$$[k] = 1/L$$

$$[F(k)] = \frac{[\text{Kinetic energy/mass}]}{[\Delta k]} = \frac{(L/T)^2}{1/L} = \frac{L^3}{T^2}$$

であるから、2つの無次元積は

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= F/(\nu^5 \varepsilon)^{1/4} \\ \pi_2 &= k/(\varepsilon/\nu^3)^{1/4} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

となる。したがって、 π 定理により

$$\pi_1 = f_c(\pi_2)$$

が現象を記述する関係式となる。上式に式(30)を代入すると次式をうる。

$$F(k) = \nu^{5/4} \varepsilon^{1/4} f_c[(\varepsilon/\nu^3)^{-1/4} k] \quad (31)$$

ここに f_c は任意関数である。

いま、平衡領域の中で ν の影響を無視しうる領域を慣性小領域 (inertial subrange) とぶと、そこでは式 (31) の右辺が ν に無関係にならねばならぬ。そのためには

$$f_c \propto [k(\varepsilon/\nu^3)]^{-1/4} k^{-5/3}$$

でなければならず、これからよって

$$F(k) = A \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (32)$$

の関係式が導かれる。ここに A は普遍定数で、上式が Kolmogoroff により初めて導かれた $-5/3$ 乗スペクトルである。

(b) スペクトル方程式の解

Von Karman-Howarth の方程式をスペクトル方程式の形にした式 (29) に戻って、これから平衡領域においては式 (29) は

$$W = -2\nu k^2 F(k)$$

となるが、上式の両辺を k について 0 から k まで積分すると

$$\int_0^k W(k') dk' = -2\nu \int_0^k k'^2 F(k') dk' \quad (33)$$

ここで再び粒子模型の観点に戻り、大きい渦から次第に階級の下渦に力学的エネルギーが手渡されてゆき、最終的には分子粘性によって熱となり逸散されるとき、 n 階級の渦はこれより階級の 1 つ上の階級の渦に対して実質上の粘性として作用するものと考えて、その乱子粘性係数を $\eta(k)$ とおくと、式 (33) は一般的に書き直されてつぎのようになる。

$$\int_0^k W(k') dk' = -2\eta(k) \int_0^k k'^2 F(k') dk'$$

さらに $\eta(k)$ についての若干の仮定と若干の計算ののち、上式の解として次式をうる。

$$F(k) = \left(\frac{8\varepsilon}{9A}\right)^{2/3} k^{-5/3} \left(1 + \frac{8\nu^3}{3A^2\varepsilon} k^4\right)^{-1/4} \quad (33a)$$

これを Heisenberg のスペクトル関数という。上式において

$$k \ll (8\nu^3 / 3A^2\varepsilon)^{-1/4}$$

なる k に対しては、 $F(k)$ は

$$F(k) \approx (8\varepsilon / 9A)^{2/3} k^{-5/3}$$

となり、Kolmogoroff のスペクトル関数と一致し、また

$$k \gg (8\nu^3 / 3A^2\varepsilon)^{-1/4}$$

なる k に対しては

$$F(k) \approx (A\varepsilon / 2\nu^2)^2 k^{-7}$$

となることがわかる。図-5 は Liepmann-Laufer による格子乱流における一次元スペクトル $F(k)$ の測定結果を示す。

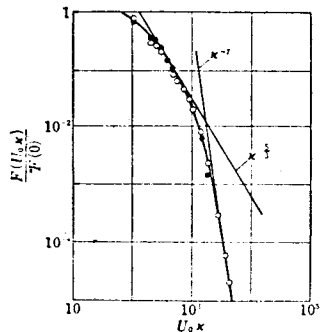


図-5 Liepmann-Laufer の実験

6 乱流拡散と拡散係数

一様等方性乱流中の拡散について考える。 x 方向の速度変動によって、拡散時間 t の後に粒子が変位した x 方向の値を X とする。いま時刻 t と t' における u の値をそれぞれ $u(t)$ および $u(t')$ と記すと

$$\overline{\int_0^t u(t) u(t') dt'} = \overline{u^2} \int_0^t R_{t,t'} dt'$$

ただし $R_{t,t'}$ はLagrange相関係数で

$$R_{t,t'} = \overline{u(t) u(t')} / \overline{u^2}$$

である。いま $t' - t = \xi$ とおき、また $R_{t,t'} = R_\xi$ と記す。 R_t は T の偶関数であるから上式は次のように書き直される。

$$\overline{\int_0^t u_t u_{t'} dt'} = \overline{u^2} \int_0^t R_\xi d\xi$$

ところで

$$\overline{\int_0^t u_t u_{t'} dt'} = \overline{u_t \int_0^t u_{t'} dt'} = \overline{u_t X} = \overline{u X}$$

ゆえに

$$\overline{u^2} \int_0^t R_\xi d\xi = \overline{u X} = (1/2) d\overline{X^2} / dt \quad (34)$$

よって

$$\overline{X^2} = 2\overline{u^2} \int_0^t R_\xi d\xi dt \quad (35)$$

さて、 ξ が小さい時は $R_\xi \rightarrow 1$ となる。よって式(34)は

$$(1/2) d\overline{X^2} / dt = \overline{u^2} \cdot t \quad (36)$$

よって

$$\sqrt{\overline{X^2}} = \sqrt{\overline{u^2}} \cdot t \quad (37)$$

となる。また、ある時間 t_0 より ξ が大きくなると $R_\xi = 0$ となるとすれば、

$$\overline{u X} = \overline{u^2} \int_0^{t_0} R_\xi d\xi = \text{const.} \quad (38)$$

そこでLagrange的渦径の式

$$\ell_1 = \sqrt{\overline{u^2}} \int_0^{t_0} R_\xi d\xi$$

を用いると、式(38)および(34)から

$$\ell_1 \sqrt{\overline{u^2}} = \overline{u X} = (1/2) d\overline{X^2} / dt \quad (39)$$

を得、したがって

$$\overline{X^2} = 2\ell_1 \sqrt{\overline{u^2}} \cdot t \quad (40)$$

をうる。

拡散係数 D は分散の時間的な拡がりの割合,

$$D = (1/2) d\overline{x^2} / dt \quad (41)$$

で定義されるから, t が小さい時には (36) から

$$D = \overline{u^2} \cdot t \quad (42)$$

となって, 時間とともに増大し, $t > t_0$ のときには式 (39) から

$$D = \ell_1 \sqrt{\overline{u^2}} \quad (43)$$

の一定値をとるようになることがわかる。

7 連続固定湧源よりの物質の拡散

乱れは一樣, 等方性と考えれば, $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2}$ で, 物質の拡がり巾 $\overline{y^2}$ は式 (37) あるいは (40) に $t = x/U$ を代入することによりつぎのように与えられる。

$$\sqrt{\overline{y^2}} = (\sqrt{\overline{u^2}}/U) \cdot x \quad (44)$$

$$\sqrt{\overline{y^2}} = [2\ell_1 (\sqrt{\overline{u^2}}/U)]^{1/2} \cdot \sqrt{x} \quad (45)$$

また, 拡散係数は式 (42) および (43) からそれぞれ

$$D = (\overline{u^2}/U) \cdot x \quad (46)$$

$$D = \ell_1 \sqrt{\overline{u^2}} \quad (47)$$

となる。

Lagrange 相関係数は

$$R_\xi = \exp(-\xi/t_0) \quad (48)$$

または

$$R_\xi = \begin{cases} 1 - (\xi/\tau_0) & 0 \leq \xi \leq \tau_0 \\ 0 & \xi \geq \tau_0 \end{cases} \quad (49)$$

で近似されることが多い, そのような場合には, 式 (34) の解はそれぞれつぎのようになる。

$$\overline{y^2} = 2 (\overline{u^2}/U^2) x_0 [x - x_0 \{1 - \exp(-x/x_0)\}] \quad (50)$$

$$\overline{y^2} = \begin{cases} (\overline{u^2}/U^2) x^2 \{1 - (x/3x_0)\} & 0 \leq x \leq x_0 \\ (\overline{u^2}/U^2) x_0 \{x - (x_0/3)\} & x > x_0 \end{cases} \quad (51)$$

ただし, $x_0 = U t_0$ である。

式 (50) をみると $x_0 = U_0 \tau_0$ は 2 つの拡散領域をわけけるある特徴的な長さを意味している。また, この場合の拡散係数はつぎのようになる。

$$D = \begin{cases} (\overline{u^2}/U) x \{1 - (x/2x_0)\} & 0 \leq x \leq x_0 \\ (1/2) (\overline{u^2}/U) x_0 & x > x_0 \end{cases} \quad (52)$$

図-6, はこの場合の Y^2 と D とを距離 x に対して図示したもので, $x \geq x_0$ の領域では拡散巾と拡散係数はともに x にほぼ比例して増加する。しかし $x < x_0$ の領域では巾は放物線的に増大し, 拡散係数は一定値に落つく。

さて, ある瞬間にみた連続源よりの物質あるいはある物理量の拡がり(以後プルームと称する)は決して単純なものではなく, ある瞬間に見たプルームの形状と別の瞬間に見たプルームの形状とは, 一般的には違ったものになっているであろう(図-7)。われわれはは長時間平均したプルームを考えねばならないのであるから, 時間平均プルームの濃度は平均時間すなわち観測時間 T に関係することが容易に理解されよう。小倉は拡散巾と到達時間 t , 観測時間 T との間に次の関係を導いた。

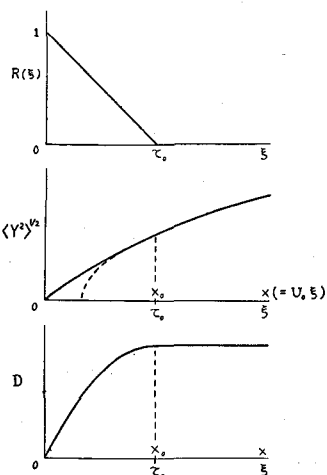


図-6

$$\overline{Y_T^2}(t) = \overline{v^2} \cdot t^2 \int_0^\infty F_\infty(n) \frac{\sin^2(nt/2)}{(nt/2)^2} \left[1 - \frac{\sin(nT/2)}{(nT/2)^2} \right] dn \quad (52)$$

Lagrange 相関係数が(48)で与えられる場合には, (52)で計算される拡散巾を図示すると図-8. のようになる。ただし $A = \sqrt{\overline{v^2}} \tau_0$ である。図中の点線は各断面において到達時間と同じ長さの観測時間で観測したときの値を示すもので, 同図中の $T = \infty$ に対する実線と点線との差が重心の分散に関係するものと解釈されよう。

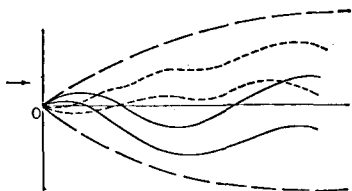


図-7

8 浮遊源よりの物質の拡散

気象学の分野では空中高く打ち上げられた高射砲弾の炸裂によって生じた煙が次第にひろがって大きくなり, 大きくなるにつれてその色が薄れ, こんどはその拡がりの部分が小さくなって遂には全く見えなくなってしまうという現象が大気乱流拡散の一つの問題として Roberts (1923 年) によって取り上げられて以来, 同種の問題を取扱う多くの方法が発表されている。海洋に投入された瞬間的な汚染源の拡がりの研究にも同種の方法が役に立つ。前節に述べられたように, 連続固定湧源型の拡散では, 湧源附近の時間平均的なプルームの特性が問題となった。このため乱れの強さ $\sqrt{\overline{v^2}}/U$, $\sqrt{\overline{w^2}}/U$ および渦の寿命時間 τ_0 などが問題を支配する要素となる。これに対して, 例えば海洋中に瞬間的に投入された汚濁物質のように, 海洋中に拡がりながら浮遊するような場合のように, 個々のパッチがそれぞれの重心の周りに拡散する場合の問題が瞬間的な浮遊点源型の拡散問題となる。この後者の拡散問題の取扱いにおいては, 連続固定湧源型の拡散問題において威力を発揮した Lagrange 相関係数が使用しにくくなるので,

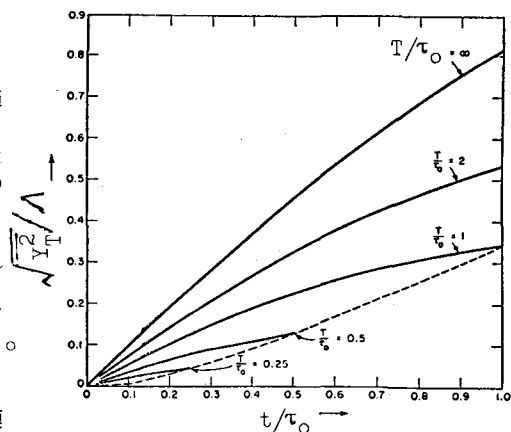


図-8 (小倉)

連続固定湧源型の拡散問題において威力を発揮した Lagrange 相関係数が使用しにくくなるので,

両者の問題を異った立場から取扱うのが現在ではむしろ普通である。

浮遊点源型の拡散問題を取扱う方法は数多く発表されているが、ここでは局所等方性乱れの局所的相似性の仮定に基づき理論のみを取上げて考えてみる。

浮遊している多数の粒子の中で相互に ℓ_0 という距離だけ離れた幾組かの粒の対を選び出し、その対の相互間隔が次第に大きくなってゆく過程を考える。(図-9)。対になっている粒の個々はそれより小さい径の渦の運動によって動かされる(それより大きい径の渦によっては、対の粒子は平行的または回転的に動かされるに過ぎない。)が、それらの渦の運動の統計的性質は Kolmogoroff の相似理論で表わされるものと考えれば、粘性が直接関係しない慣性小領域においては $\sqrt{\ell^2}$ は次元解析により

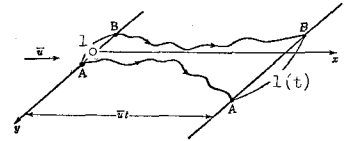


図-9

$$\sqrt{\ell^2} \propto \varepsilon^{1/2} t^{3/2} \quad (53)$$

でなければならない。したがって拡散係数 D は

$$D = (1/2) d\ell^2 / dt \propto \varepsilon t^2 \propto \varepsilon^{1/3} (\sqrt{\ell^2})^{4/3}$$

よって

$$D = A \varepsilon^{1/3} \ell^{4/3} \quad (54)$$

となり、拡散領域のスケールの $4/3$ 乗に比例することとなる。 $D \propto \ell^{4/3}$ の関係は Richardson (1926年) により見出されていた。Richardson の式となるべくよく合うように (54) の定数 A をきめると

$$A = 0.13$$

位となると考えられている。

水平方向の円形パッチの拡散についての Ozmidov の理論 (1959年) はこのような線に沿うものであるが、Joseph-Sendner の理論 (1958年) では拡散係数 D は $D \propto \ell$ のように仮定されている。

9 湧源からの拡散による濃度分布

前節において点湧源からの拡散巾が判ったがまだ濃度分布を求めることができていなかったで、ここでは濃度分布を考えてみる。ただし、流体に定常流れがない3次元の場合を取り扱う。時刻 $t=0$ において原点に投入された多数の粒子は乱れの変動流速により拡散されてクラウドを形成する。乱れが一様かつ等方性の場合にはクラウドは球形をなして対称に拡がる。いま、ある一定数の粒子が点 (x, y, z) を中心に含む $dx dy dz$ の四面体内に見出される確立を $\phi(x, y, z) dx dy dz$ とおくと、 $\phi(x, y, z)$ を確率密度関数という。明らかに

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y, z) dx dy dz = 1 \quad (55)$$

である。いま3次元 Gauss 分布を仮定すれば、確率密度関数は次式の形に書かれる。

$$\phi(x, y, z) = (\ell^3 / \pi^{3/2}) \exp[-\ell^2 (x^2 + y^2 + z^2)] \quad (56)$$

ただし k は未だ任意の定数であるから、これを定めるためにこの分布における $\overline{y^2}$ を計算すると、

$$\overline{y^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \phi(x, y, z) dx dy dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y, z) dx dy dz} = \frac{1}{2k^2}$$

この関係式から k が書き直されて、(56) から

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi \overline{y^2})^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\overline{y^2}}(x^2 + y^2 + z^2)\right] \quad (57)$$

(a) 静止流体内の瞬間点源の場合

流体は静止しているが一様かつ等方性の乱れは存在しているものとする。時刻 $t = 0$ に原点において質量 M の物質が瞬間的に投入されたとする。時刻 t に $dx dy dz$ の体積の中に存在すべき物質の質量は $\rho c(x, y, z) dx dy dz$ 、ただし $c(x, y, z)$ は点 (x, y, z) における濃度の時間平均値である。したがって (57) から

$$\frac{\rho c}{M} dx dy dz = \frac{dx dy dz}{(2\pi \overline{y^2})^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\overline{y^2}}(x^2 + y^2 + z^2)\right]$$

を得、よって次式をうる。

$$c = \frac{M/\rho}{(2\pi \overline{y^2})^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\overline{y^2}}(x^2 + y^2 + z^2)\right] \quad (58)$$

ただし、 $\overline{y^2}$ は Taylor の式 (35) で計算される値であるが Lagrange 的な渦の寿命時間を t_0 とするとき、式 (37) と (42)、および (40) と (43) とから、これは拡散係数 D をもってそれぞれつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} t \ll t_0 \quad & \text{に対して} \quad \overline{y^2} = Dt \\ t > t_0 \quad & \text{に対して} \quad \overline{y^2} = 2Dt \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

同様に、 x, y 面内における 2 次元拡散 (平面的な拡散) の場合には次式をうる。

$$c = \frac{M/\rho h}{2\pi \overline{y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\overline{y^2}}(x^2 + y^2)\right] \quad (60)$$

ただし、 h は拡散が行われる 2 方向の厚み (拡散層の厚み) である。また、 $\overline{y^2}$ は式 (59) で与えられる通りである。

(b) 流水中の瞬間点源の場合

x 方向に一様流速 U がある場合には、時刻 $t = 0$ に原点において質量 M の物質を投入するとき、

$$c = \frac{M/\rho}{(2\pi \overline{y^2})^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\overline{y^2}}\{(x - Ut)^2 + y^2 + z^2\}\right] \quad (61)$$

また x, y 平面内拡散の場合は

$$c = \frac{M/\rho h}{2\pi \overline{y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\overline{y^2}}\{(x - Ut)^2 + y^2\}\right] \quad (62)$$

となる。

(c) 静水中における連続点源の場合

式 (58) または (60) を時間的に積分することにより求められる。平面拡散の場合についてのみ記せば次のようになる。

$$c = \frac{m}{2\pi\rho h} \int_0^t \frac{1}{y^2} \exp\left[-\frac{1}{2y^2}(x^2+y^2)\right] dt \quad (63)$$

ただし、 m は単位時間当りに投入される物質の質量で前の M との関係は $M = mdt$ である。

既述(6節)のように、 $\overline{y^2}$ は

$$\begin{aligned} t \ll t_0 \text{ のとき } \sqrt{\overline{y^2}} &\approx \sqrt{\frac{v^2}{2}} t \\ t \gg t_0 \text{ のとき } \sqrt{\overline{y^2}} &\approx 2\ell_1 \sqrt{\frac{v^2}{2}} t = 2v^2 T t \end{aligned}$$

で与えられる(ただし $T = \int_0^\infty R_\xi d\xi$, Lagrange 時間スケール)。この二つの各場合の $\overline{y^2}$ をそれぞれ(63)に代入して(63)の積分を遂行するとそれぞれ次式をうる。

$t \ll t_0$ のとき

$$c = \frac{l}{2\pi\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \exp \frac{x - \sqrt{x^2+y^2}}{2UT} \quad (64)$$

$t > t_0$ のとき

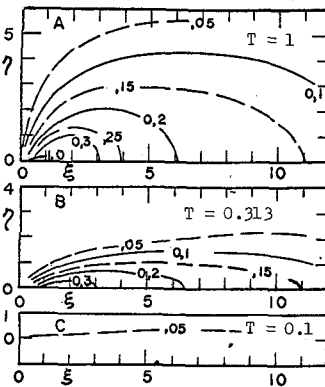
$$c = \frac{m}{2\pi\rho h v^2 T} K_0\left(\frac{U}{2T v^2} \sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \exp\left(\frac{Ux}{v^2 T}\right) \quad (65)$$

ただし、 K_0 は零次の変形

Bessel 関数である。図一 10 (a) および (b) はそれぞれ式(64) および (65) を図示したものである(市栄 1959 年)。ただしこれらの図は無次元表示されており、無次元量の記号はつぎのようである。

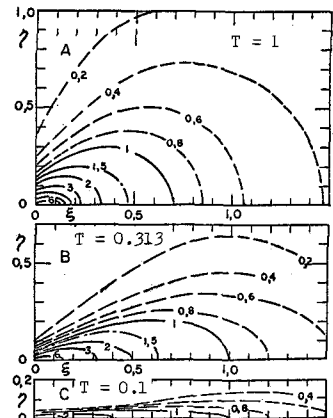
(d) 流水中の連続固定湧源の場合

式(61)または(62)を時間的に積分することにより求められる。平面拡散の場合についてのみ記せば次のようである。



(a)

(a) x の小さい範囲



(b)

(b) x の大きい範囲

図一 10 連続点源による濃度分布

$$\sigma = (\rho U^3 T^2 / m) c, \quad \xi = x / UT$$

$$\eta = y / UT, \quad \tau^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad T^2 = \overline{v^2} / U$$

(e) 流水中の連続固定線湧源

原点を通り、流れに直角に存在する長さ b の水平な連続湧源を考え、放出物質質量を単位長さ単位時間当り σ とする。これによる拡散濃度は式(58)または(60)から、点源による濃度の重ね

合せとして求められる。平面拡散の場合についてのみその式を示せば次のようである。

$$c = \frac{\sigma}{2\pi\rho h} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2} \exp\left[-\frac{1}{2y^2}((x-U\tau)^2 + \eta^2)\right] d\tau d\eta \quad (67)$$

ただし σ は単位時間単位長さ当りに放出される物質の質量で前の m との関係は $m = b\sigma$ である。

10 Fickの拡散方程式

全く静止している水の中に色素を注入した場合でも、色素は次第に拡がってゆくが、この拡散現象は流体の分子運動(Brown運動)により起されるものである。そしてこの拡散現象はつぎの熱伝導型の微分方程式で記述され、Fickの拡散方程式(1855年)といわれる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_m \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \quad (68)$$

ただし、 D_m は分子拡散係数でTeans(1940年)によれば

$$D_m \approx \nu \quad (69)$$

である。

瞬間的に原点に物質を投入した場合には、(68)より

$$c = \text{const} \times \frac{1}{(Dt)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4Dt}\right] \quad (70)$$

をうるがこれは $2Dt$ を標準偏差とする3次元対称Gauss分布である。したがって、分子拡散による y 方向の分散を y_m^2 と記すと、

$$\overline{y_m^2} = 2Dt = 2\nu t \quad (71)$$

となる。

つぎに乱流拡散のときのFickの方程式もやはり式(68)と同じ形であるが、この場合の D は渦拡散係数で拡散時間に関係しない定数と考えたものとなる。7節における理論から見られたように、 D が定数となるのはLagrange的な渦の寿命時間を t_0 とすると、 $t = t_0$ の拡散時間以後のことである。したがって $t < t_0$ に対してはFickの拡散方程式は正しいものではない。そしてその期間においては、正しくは前節記載の諸式から計算しなければならない。

しかし、一様かつ等方性の乱れの仮定から外れるような場合や、拡散物質それ自身に自然的なdecayがあるような場合には、前節までに記述した確率統計理論はそのままでは使えないものになり、Fick型の拡散方程式によらねばならなくなる。

拡散係数は異方性であるとして、 x 、 y 、 z 各方向にそれぞれ D_x 、 D_y 、 D_z とし(ただしこれらの値はいずれも時間 t には無関係とする)、投入物質の物質減衰率を λ 、流れの時間平均流速の3成分を v_x 、 v_y 、 v_z とすると、Fick型の拡散方程式はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x} (v_x c) - \frac{\partial}{\partial y} (v_y c) - \frac{\partial}{\partial z} (v_z c) - \lambda c \end{aligned} \quad (72)$$

これについて求められている、工学的に特に重要な二つの場合の解(岩井、寺島 1965年他)を以下に記しておく。

(a) $v_x = \text{const.}$, $v_y = v_z = 0$, 瞬間点源の場合

$$c = \frac{M}{4\pi\rho h \sqrt{D_x D_y} t} \exp\left[-\frac{1}{4t}\left\{\frac{(x-v_x t)^2}{D_x} + \frac{y^2}{D_y}\right\} - \lambda t\right] \quad (73)$$

(b) $v_x = \text{const.}$, $v_y = v_z = 0$, 連続固定湧源の場合

$$c = \frac{m}{2\pi\rho h \sqrt{D_x D_y}} K_0\left(\frac{v_x}{2\sqrt{D_x}} \sqrt{\frac{x^2}{D_x} + \frac{y^2}{D_y}}\right) \cdot \exp\left(-\frac{v_x x}{2D_x} - \lambda t\right) \quad (74)$$

ただし(73)および(74)中に現われる記号は前節の対応する式(64)および(65)におけると同じである。

11 移流分散

われわれが取扱う管路や開水路の流れはいずれも剪断流であるが、剪断流の中では一様流の中におけるよりも見かけの拡散効果が増大する(図-11参照)。同図(b)の場合には x 方向の移流速度の不等と y 方向への拡散の作用とが重って x 方向に濃度の大きな分散(variance)を生じているのであって、このような現象をdispersion(移流分散)という。言葉の混合を防ぐためにvarianceを統計的分散ということもある。移流分散においては移流方向への見かけの拡散係数が増大する。

前節までに述べた拡散の現象はTaylorによりはじめられたLagrange流の解析手法によってすべて取扱われていたのであるが、TaylorはさらにLagrange流の手法とEuler流の手法を結合しうることとしてはじめてこの移流拡散の問題に着目し、これを円管の場合についてとり上げた(1953, 54年)。

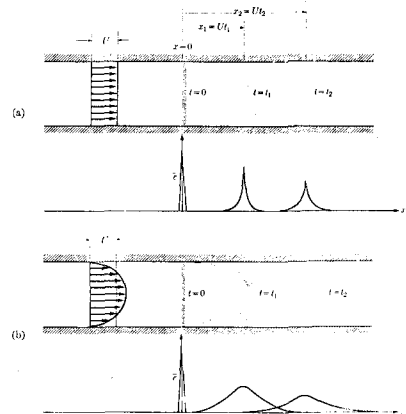


図-11 移流分散
(Daily-Harleman)

12 円管内の移流分散

円管の軸線附近の流速は壁面附近より速いので、中心部に投入された物質は中心線上において早く移流される。このため図-11(b)に示されるように断面平均流速 U で移流する断面に対して相対的な統計的分散が増大し、あたかも x 方向の拡散係数が増大したかのような結果を示す。このときの増大した見かけの拡散係数を移流分散係数(coeff. of longitudinal diffusivity)という。その記号を D_L とすれば、いま物質を一点において投入したときに、その物質の移流拡散濃度は、投入点の近くを除いては、一次元の拡散方程式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (75)$$

で記述されることを示し、またこの D_L は

$$D_L = 10.1 a v_* \quad (76)$$

で与えられることをTaylorは示した。ただし a は円管の半径、 v_* は摩擦速度である。 ϵ は単位質量当りのエネルギーの逸散率で、壁面剪断力を τ とすると

$$\epsilon = 2\pi \tau \cdot U / \rho \pi a^2$$

である。これに $\tau = \rho v_*^2$ を代入することにより

$$\varepsilon = 2 U v_*^2 / a$$

をうる。この関係式を (76) に代入すると

$$D_L = 10.1 \left(\frac{v_*}{2U} \right)^{1/3} a^{4/3} \varepsilon^{1/3} \quad (77)$$

となり、これは Richardson-Kolmogoroff の拡散係数の形 (54) 式と同じであり、ただその係数が異なるのみである。いま $U/v_* = 20$ の管路流については、(77) から $D_L = 2.94 a^{4/3} \varepsilon^{1/3}$ となり、式 (54) の場合の係数 0.12 と比べると約 20 倍以上大きい。

このような D_L の値を用い、(75) から工学上所要の解をうることができる。例えば、 $t = 0$ 、 $x = 0$ の瞬間点源からの移流分散による濃度は次式で与えられる。

$$c(x, t) = \frac{s}{\rho \sqrt{4\pi D_L t}} \exp \left[-\frac{(x-Ut)^2}{4D_L t} \right] \quad (78)$$

ただし、 s は単位面積当り投入された物質の質量である。

13 開水路内の移流分散

Taylor の手法に従って Elder (1959 年) は深さ方向にのみ流速が変化するような開水路（すなわち両側壁の影響を無視しうる場合）の移流分散の計算を行って

$$D_L = 5.9 h v_* \quad (79)$$

を求めた。ただし h は水深である。これを $\varepsilon = \tau \cdot U / \rho h$ および $\tau = \rho v_*^2$ を用いて書き直すと

$$D_L = 5.9 \left(\frac{v_*}{U} \right)^{1/3} h^{4/3} \varepsilon^{1/3} \quad (80)$$

となる。ところが自然河川にありて観測される移流分散係数は (79) で計算されるものよりも数十倍大きく、さらに河口部においては数百倍大きいことが過去 10 年間の間に明らかとなってきた。自然河川の断面流速分布形状は、最も三次元的な場合としての円管の場合と、完全に二次元的な開水路の場合との中間にあると考えられるので、その移流分散係数 D_L が (76) と (79) の中間にあるであろうとの当時の Elder の予想は当たっていなかった。そこで Fischer は一般の断面流速分布形状の流れに対して Taylor-Elder と同様の手法で計算を行い移流拡散係数が次式で与えられることを示した。

$$D_L = \frac{1}{A} \int_0^b q'(z) dz \int_0^z \frac{1}{D_2 h(z)} dz \int_0^z q'(z) dz \quad (81)$$

ただし b は水路巾、 A は流水断面積、 z は横方向座標、 h は水深で z の関数、また q' は

$$q'(z) = \int_0^{h(z)} u'(y, z) dy \quad (82)$$

u' は断面平均流速 U からのずれ ($u' = u - U$)、 y は鉛直方向座標である。

式 (81) および (82) をみると、 D_L は u' の関数の空間的な積分から成っており、全く Euler 的な量であり、Lagrange 的な考えから出されていた量 D (式 (41) と (35)) と驚きの目をもって対比される。

なお、(81) の近似式として Fischer は次式を導いている。

$$D_L / R v_* = 0.30 (\overline{u'^2} / v_*^2) (L/R)^2 \quad (83)$$

ただし R は径深、 L は各断面における最大流速の点から最も遠い河岸までの距離である。

14 往復流中の移流分散

剪断流往復流の中の移流分散についても既になりの研究がなされている。

定常流の場合(図-12(a))には既に前節にのべた Elder あるいは Fischer, らの研究がそのまま役にたつが, その場合現象が一次元の拡散方程式(75)で表わされているようになるのは物質投入後ある時間経ってからで, その時間を T_c とすると

$$T_c = (3 \sim 6) T_L \quad (84)$$

であることが Fischer によって示されている。ただし T_L は Lagrange 時間スケールで

$$T_L = 0.30 L^2 / r u_* \quad (85)$$

と導かれる。

往復流の場合には, 往復流の周期を T とすると, $T \gg T_c$ のときは, 往復流の半周期の期間中に速い流速によって移流した物質が鉛直拡散によってまだ低濃度である低流速の部分に拡散し, 次の半周期の間に遅い流速に運ばれて帰ってくることからして, その差として移流分散が起る。そして $T \rightarrow \infty$ の場合には当然定常流における移流拡散の現象と一致するものとなることが考えられる。

他方, $T < T_c$ の場合には, 半周期の間に移流した物質のクラウド(図-12(b))は, まだ鉛直方向の拡散を行う以前に既に次の半周期でもとの方向に戻されるため, クラウドの形は一周期前のそれと同じ(同図(c))となり, 移流分散を生じない。このようにして, 剪断往復流による移流分散には無次元化時間

$$T' = T / T_c \quad (86)$$

が大きな関係を有することが理解される。この T' の影響を調べるために, 一様な 2 次元開水路における往復流の場合の解析がなされている。往復流による流速は y 方向(水深方向)には直線約であるとすると, 断面平均流速からのずれ u' は

$$u' = \alpha y \sin \sigma t \quad (87)$$

で表わされる。ただし, 水深 h の $1/2$ の点を y の原点にとることとする。また σ は $\sigma = 2\pi/T$ である。濃度の満足すべき式は Taylor, Elder の解析の時と同様に, つぎのようになる。

$$\frac{\partial \bar{c}'}{\partial t} - D_y \frac{\partial^2 \bar{c}'}{\partial x^2} = u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (88)$$

ただし, $\bar{c}$ は断面平均濃度(—は時間平均ではない), c' は断面平均濃度からのずれで $c' = c'(x, y, t)$, D_y は鉛直方向の拡散係数でこの解析においては便宜的に定数とおかれる。(87)を(88)に代入して

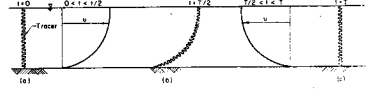


図-12

$$\frac{\partial c'}{\partial t} - D_y \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2} = -\alpha y \sin \sigma t \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (89)$$

がこの場合の基本式となる。 $T' \rightarrow \infty$ 、すなわち定常流の場合には、(89)の解はつぎのように与えられている。(大久保 1968年)。

$$D_{L\infty}(\tau) = (1/120)(\alpha^2 h^4 / D_y) \sin^2 \sigma \tau \quad (90)$$

ただし、 h は水深、 $D_{L\infty}$ は $T' \rightarrow \infty$ に対する移流分散係数、また τ は定数で、定常流のずれ流速分布を $u' = (\alpha \sin \sigma \tau) \cdot y$ と考えたということを意味する。したがって、 τ が $0 \sim T$ の間に値化する(式(87)参照)ときには、 $D_{L\infty}(\tau)$ の1サイクル間の平均値は

$$D_{L\infty} = \frac{1}{T} \int_0^T D_{L\infty}(\tau) d\tau = \frac{1}{240} \frac{\alpha^2 h^4}{D_y} \quad (91)$$

で与えられる(Holley-Harleman-Fischer 1970年)。

つぎに T' が任意の値のときの(89)の解を求め、

$$D_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \int_0^h u' c' dy = D_L \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}$$

の関係から移流分散係数 D_L を求めるとつぎのようになる(H-H-F 1970年)。

$$\frac{D_L}{D_{L\infty}} = \frac{240 T'^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 \left[\left\{ \frac{\pi}{2} (2n-1)^2 T' \right\}^2 + 1 \right]} \quad (92)$$

図-13はこの関係を図示したものである。若干の実験値がプロットされているが、比較的合っているというべきであろう。

剪断往復流の中の移流分散係数について、その他の研究としてつぎのような式がある(Bowden 1965年)。

$$D_L(\text{alternating flow}) \approx (1/2) D_L(\text{steady flow}) \quad (93)$$

これはElder流の解析で求めたものであるが、部分的に逐次代入法を行っているところがある。式(93)をHolley-Harleman-Fischerの理論(図-13)と比較してみると一致しないし、物理的に考えてもこの結論は疑問があるように思われる。

往復流の断面流速分布が一様なとき、すなわち u が単に $u = a \sin \sigma t$ なるときには $u' = 0$ であるから移流分散は生ぜず、単に拡散のみが起る。その場合の解は、近似的にFickの方程式に基けば、瞬間点源による濃度の式をDuhamelの定理により $0 \sim t$ の間で加え合わせるによりつぎのように与えられる。すなわち平面拡散の場合に対しては

$$c = \frac{m}{4\pi\phi h \sqrt{D_x D_y}} \int_0^t \exp \left[-\frac{1}{4\tau} \left\{ \frac{(x-U\tau-a \sin \sigma \tau)^2}{D_x} + \frac{y^2}{D_y} \right\} \right] d\tau \quad (94)$$

また、一次元的拡散の場合に対しては

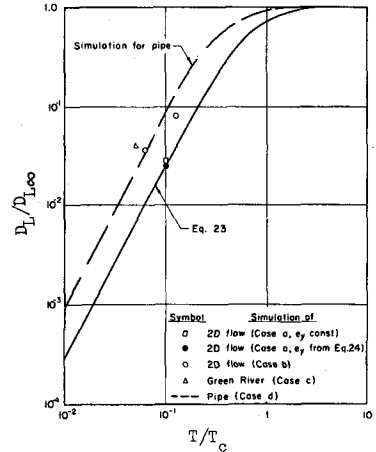


図-13 往復流の移流分散係数

$$c = \frac{m'}{2\rho h \sqrt{\pi D_x t}} \int_0^t \exp\left[-\frac{(x-U\tau-a \sin \sigma \tau)^2}{4\tau D_x}\right] d\tau \quad (95)$$

である。ただし、 U は恒流の流速、 m' は単位巾当りの物質の投入質量である。

15 Estuaryでの移流分散

塩水くさびを形成することなく塩分が河水に混合しているような河口部においては、河道方向の塩分濃度分布を測定することにより見かけの拡散係数、すなわち移流分散係数 D_L を計算してみると、Elder の理論式 (79) より数百倍も大きな値をとる場合が屢々あることが判ってきている。図-14 は D_L の実測結果の一例を示すもので、塩分濃度の増加とともに（すなわち河口に近付くとともに）急激に D_L の値が増大していることが認められる。図-15 は河口附近における物質（塩分）の移動の状況を示すもので、塩分濃度による密度勾配によって大規模な循環が起され、それにより底面をはって侵入した塩分が水面近くに上昇して流下する。この循環の影響をうけて x 方向における見掛けの拡散係数 D_L が大きくなっているのである。この移流分散係数についても解析並びに調査がなされており、これはつぎのような関数形で表わしうるのであることが示されている (Ippen 1966 年)

$$D_L/D_{LT} = f(P_f a/Q_f T h (\Delta\rho/\rho)) \quad (96)$$

ただし D_{LT} は Taylor による円管内の移流分散係数であり、これは (76) から

$$D_{LT} = 20.2 R u_*$$

と書き直される。また、 Q_f は河川流量、 T は潮汐の同期、 P_f は入ってくる潮汐の一周期当りのエネルギーフラックス、 a は半波高、 h は水深である。図-16 にプロットされた実測流結果をみると、(96) の関数関係は存在しており、また D_L/D_{LT} の値には 400 近くにも達しているものがあることが認められる。

16 剪断流の場における拡散

11~14 節において、断面速度分布の不等により生ずる移流分散について述べた。すなわち、移流分散係数 D_L を導入することにより、断面平均濃度分布を (75) のような一次元拡散方程式で表わしうする場合について述べたのである。

しかし、大気や海洋のように広い拡がりをもつスペースの中での剪断流中の拡散においては、(75) のような形への一次元化は困難である。したがってこの場合には移流分散という言葉を使うのは誤りで、正しくはやはり剪断流中の拡散というべきであろう。

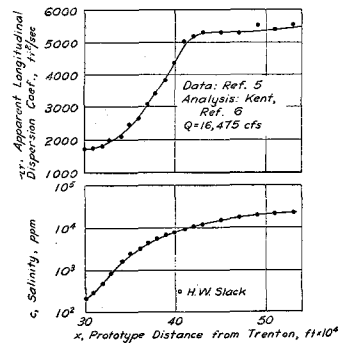


図-14 河口における実測値

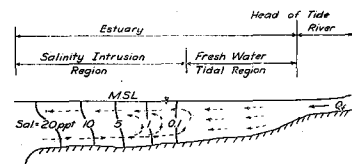


図-15

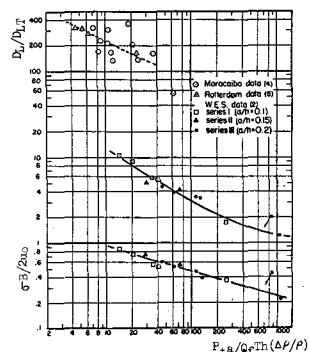


図-16

剪断流中では見掛けの剪断応力が存在し、 $\overline{\rho u' v'}$ は 0 ではない。したがって、乱れは異方性であり、異方性の乱れ理論の適用が必要となる。

異方性乱れの場合における瞬間点源による時間平均濃度分布は次式で与えられる (Hinze 1959 年)。

$$\frac{c(y/x)}{c(0)} = \frac{1}{\left[1 - 2 \frac{\sqrt{u^2}}{v^2} R_{uv} \frac{y}{x} + \left(\frac{u^2}{v^2} \right) \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right]^{1/2}} \cdot \exp \left[\frac{-u^2 (y/x)^2}{2 v^2 \left\{ 1 - 2 \frac{\sqrt{u^2}}{v^2} R_{uv} \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{u^2}}{v^2} \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right\}} \right] \quad (97)$$

ただし、 u および v は x および y 方向の乱れの成分、 R_{uv} は

$$R_{uv} = \overline{uv} / \sqrt{\overline{u^2} \overline{v^2}}$$

である。

一方、Fick の拡散方程式 (72) による研究も行われている。剪断場の流速を

$$U = U_0(t) - ay - bz \quad (98)$$

とすると、瞬間点源よりの物質の拡散の解は次式で与えられる (大久保 1968 年)。

$$c = \frac{M}{8 \rho \pi^{3/2} \sqrt{K_x K_y K_z} t^{3/2} \sqrt{1 + \phi_3^2 t^2}} \times \exp \left[\frac{\left\{ x - \int_0^t U_0(t) dt - \frac{1}{2} (ay + bz) t \right\}^2}{4 K_x t (1 + \phi_3^2 t^2)} + \frac{y^2}{4 K_y t} + \frac{z^2}{4 K_z t} \right] \quad (99)$$

以上は瞬間点源の場合であるが、連結固定源の解も同様にして求められる。この場合には、剪断流によりプリュームの形状は図-17 のように曲げられる (プリュームの“屈折”)。これは $x = x_1$ の断面を考えれば、流れの早い領域は遅い領域に比べて寿命時間の短いパッチからの影響が強いののでそれだけ未だ拡散が進んでいないためであって、このためにその部分での濃度勾配が急になっているのである。

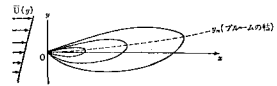


図-17

参 考 文 献

乱流拡散に関係ある文献については下記の土木学会水工学夏期研修会講義集に示された文献を参照されたい。

日野 幹雄 : 河川の乱流現象 (1966年)

栗原 道德 : 乱流拡散 (1968年)

栗谷 陽一 : 河川汚濁論 (1968年)

首藤 伸夫 : 湾内拡散 (1970年)

また、本講において直接引用したものはつぎのようである。

Taylor, G.I. : Diffusion by continuous movements, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, Vol. 20, 1921, pp. 196 - 211.

Taylor, G.I. : Statistical theory of turbulence, Proc. Roy. Soc., A151, 1935, pp. 421 - 478.

Von Karman, T. and L. Howarth. : On the statistical theory of isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc., A 164, 1938, pp. 192-215.

Taylor, G.I. : The spectrum of turbulence, Proc. Roy. Soc., A. 164, 1938, pp. 476-490.

Dryden, H.L. : A review of the statistical theory of turbulence, Quart. App. Math. 1, 1943, pp. 7-42.

Batchelor, G.K. and A.A. Townsend. : Turbulent shear flow, Surveys in Mech., 1956, pp. 352-399.

Taylor, G.I. : The present position in the theory of turbulent diffusion, Advances in Geophysics, Vol. 6, 1959, pp. 101-112.

Hinze, J.O. : Turbulence (McGraw-Hill), 1959, pp. 275-439.

Frenkiel, F.N. : Turbulent diffusion, Advances in App. Mech. III, 1953, pp. 61-107.

井上 栄一 : 地表風の構造, 農業技術研究所報告 A, ㊦ 2, 1952, pp. 1-93

井上 栄一 : 煙の研究(1), 農業気象, Vol. 15, ㊦ 4, 1960, pp. 123-129.

井上 栄一 : 煙の研究(2), 同上 Vol. 16, ㊦ 1, 1960, pp. 20-26.

Batchelor, G.K. : The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric turbulence, Quart. J. Roy. Met. Soc. Vol. 76, 1950, pp. 133-146.

巽 友正 : 乱流 (槇書店), 1962.

Stommel, H. : Horizontal diffusion due to oceanic turbulence, Journ. Marine Research, Vol. 8, 1949, ㊦ 3, pp. 199-225.

Ogura, Y. : Diffusion from a continuous source in relation to a finite observation interval, Advances in Geophy., Vol. 6, 1959, pp. 149-159.

- Bowden, K.F. : Horizontal mixing in the sea due to shearing current ,
T.F.M., Vol. 21, 1965, pp.83-95.
- Iwai, S., Y.Inoue and H.Higuchi. : Survey and prediction of pollution in
the Omuta Industrial Harbour , Advances in Water pollution Research , 1964,
pp.883-899.
- Ichie, T. : A note on horizontal diffusion of dye in the ocean , Journ.
Oceanogr.Soc.Japan , Vol.15, No.4, 1959, pp.171-179.
- Taylor, G.I. : The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe ,
Proc.Roy.Soc., A.223, 1954, pp.446-468.
- Elder, J.W. : The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow ,
J.F.M.Vol.5, 1959, pp.544-560.
- Fischer, H.B. : The Mechanics of dispersion in natural streams , Proc.
ASCE, HY6, 1967, pp.187-216.
- Fischer, H.B. : Dispersion prediction in natural streams , Proc.ASCE, SA5,
1968, pp.927-942.
- Harleman, D.R.F. : The significance of longitudinal dispersion in the
analysis of pollution in estuaries , Proc.2nd Internat.Water Pollution
Research, 1964, pp.279-306.
- Holley, E.R., D.R.F.Harleman and H.B.Fischer. : Dispersion in homogeneous
estuary flow , Proc.ASCE, HY8, 1970, pp.1691-1709.
- Okubo, A. : A review of theoretical models for turbulent diffusion in the
sea , Journ , Oceanogr.Soc.Japan , 20th Ann.Vol., 1962, pp.286-320.
- Okubo, A. : Some remarks on the importance of the shear effect on
horizontal diffusion , Journ.Oceanogr.Soc.Japan , Vol.24, No.2, 1968,
pp.20-29.
- Ippen, A.T. : Salt-water fresh-water relationships in tidal channels ,
Proc , 2nd Ann.Conf.Amer.Water Resources Assoc., 1966 .