

地下水(密度流的諸問題)

嶋 裕 之

序

一般に密度差をもつ二種の流体が相接して存在し、それらが違った速度で運動している場合、たとえその密度差がきわめて小さくとも、またその境界がはっきりした境界面を持つときでも持たないときでも、その密度差のために単一流体の運動とは著しく異なった運動を示すような流れを密度流と呼んでいる。感潮河川の塩分遡上、湖沼や貯水池での循環流や躍層、海洋における暖流や寒流、気象学的な温暖・寒冷前線や逆転層などはいづれも地上で生ずる密度流現象である。一方、海岸附近の地下水、温泉のまわりの地下水の対流、注水井のために生ずる油層内の流れなどは地下に生ずる密度流現象であって、それぞれ海水と淡水、温水と冷水あるいは水と油(粘性の相違も入る)といった密度の相違が現象の特異性を引き起すものである。

地下水の密度流現象は海岸地下水を中心として *Bordon, Ghyben, Hersberg* らにより先駆的な研究が行なわれたが、さらに *Nomitsu, Toyohara & Kamimoto*¹⁾ によって解折的な手法による研究が行なわれ、その定常流としての特性が初めて明らかにされた。その後、地下水の過剰揚水による地盤沈下や海水浸透の問題が深刻化するとともに、浸透機構についての基礎的な研究や *Recharge well* による地下水のかん養などの応用的な研究がしだいに活潑となって行った。また最近では、新しい水資源の開発方式の一つとして河口湖開発の計画が各所で検討されている。河口湖とは、山間部にダムで貯水池を設け水を貯溜するかわりに、河口部あるいはその周辺に人工の湖を設け流末の水資源を有効に利用しようとする貯水池である。このような貯水池は、既存水利権との調整の問題が少いこと、上中流部にダムサイドがなくなっても開発可能であること、埋立計画や高潮対策と歩調を合わせることにより経済的に作れること、需要地に近いこと、集水面積を最大限に利用できること等の大きい利点を持つものであるが、他方では海水浸透あるいは池底の塩分拡散による水質の劣化の問題をはじめ、流末における河川水の水質汚濁、池内の水温や水質、集水あるいは排水施設等なお検討を要すべき問題も多く残されている。わが国の河口湖に関する組織的な研究は昭和39年より河口湖開発調査委員会²⁾を中心に始められたが、これを契機に土木工学の分野でも積極的に地下密度流を研究しようとする機運が高まったと考えられる。

農業用水を目的とした河口湖はかなり古くから開発され、オランダのゾイデルゼー、児島湾、八郎潟などはその例であるが、水道水を目的としたものは数年前に完成した香港の *Plover Cove*³⁾ (図-1参照) ぐらいのものである。このことは、農業用水の要求水質が塩分濃度で $1,000 \text{ } \mu\text{m}$ 程度であるのに比べ水道用水のそれが $100 \sim 200 \text{ } \mu\text{m}$ と見なされ、条件的により厳しいものが要求されるためである。しかし大規模な臨海工業地帯を持ちかつ水需要問題の切迫した千葉、福岡の両県や瀬戸内海に面する諸県では早晚県内河川について河口湖開発の計画実施に踏み切らざるを得ないと思われるし、残された新産業都市として注目される陸奥小河原地区あるいは上水道水源の極端に不足する長崎県ではそれぞれ小河原湖や形上湾などの淡水化を行なうこととなろう。海外では現在ライン河口を締切る壮大な *Delta Plan* (図-2参照) が1978年の完成を目指して進行中であり、今年中には最大の可動堰 *Vitwateringssluizen* が出来上ることになっている。*Delta Plan*⁴⁾ は、1953年オランダ全土をおそった高潮による大災害の経験にかんがみ、高潮防禦の抜本対策として計画が発足したものである。しかし、河口の締切りによって生ずる河口湖は *Rotterdam, Amsterdam* 周辺

の水需要をまかなうものであり、また縮切堤や閘門は陸上ならびに海上交通網を形成し地域の開発を促すとともに膨大な水域は国民のリクリエーションの場として活用されることになる。

このような客観情勢を考えれば、河口湖の開発は急を要するものがあり、その実現に支障を及ぼすと思われる事象については徹底的な研究がなされなければならぬが、同時に小規模なものから着手しその建設の課程で多くの技術的対応策や工法等を実際に学び取って行くことが必要である。問題を海水浸透に限っても、貯水された淡水が海水の浸透によってどの程度塩分濃度が上昇するか、あるいはどのような工法を用いれば浸透を防止できるかと言うことは大変に重要な事柄である。河口湖は文字通り河口部やその周辺に設置され、豊水期の水を貯溜し渇水



図-1 Plover Cove

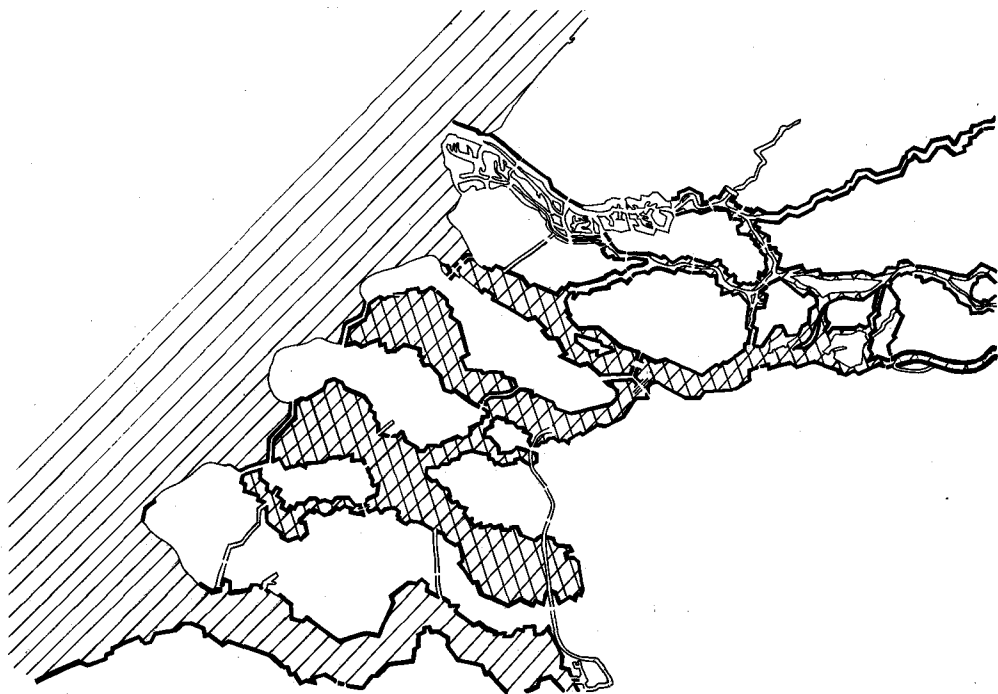


図-2 Delta Project

期に消費するものであるから、河口湖水位が周辺の海水位より十分に高いことは少ない。したがってほとんど常時河口湖内の水は海水の浸透により塩分濃度が上昇する危険性を有し、有効貯水量を増すほど、また河口湖水位の低下する期間が長いほどその危険度が高いと見なければならない。一般に海水の浸透防止対策としては、つぎのような工法が考えられる。

① 広幅堤防

堤防幅を十分大きくとることより、内外水位差による動水勾配を小さくさせ、塩水の浸透流量を実用上さしつかえない程度に抑制しようとするものである。また堤防に降る雨の補給を期待してよいような場合には、動水勾配はさらに小さくなり浸透流量も少なくなる。

図-3のような状況では自由表面（地下水面）が海側に向っても傾斜しているので、海水の浸透は起らないと見なされる。

② ウォーターカーテン工法

前述の降雨による効果を人工的に行なうことにより、海水の浸透を防止しようとするものである。すなわち図-4のように堤防の天端に注入孔あるいは溝を掘り、適当な注入水頭を与えて淡水を注入し、あたかも水のカーテンで海水を遮断するような工法である。しかし、あまり注入圧を高くすると淡水の損失が大きくなるので、損失ができるだけ少くなるような、注入水頭、注入量、内外水位差、堤防幅、注入位置、注入孔径、注入孔間隔などの関係を検討しておくことが必要である。

③ 遮水壁工法

図-5のように、堤体内に透水係数の小さい材料で作った心壁を設けたり、矢板を打込んだりして、遮水しようとする工法である。この場合、完全な止水壁を作るとは技術的に非常に困難であって、遮水壁とはある程度の漏水を許すものと考えた方が妥当である。遮水壁の効果を判定するには、遮水壁の受け持つ損失水頭の大きさを知る必要がある。遮水壁が矢板である場合には、同一の損失水頭を与える透水係数 k 、厚さ l の層が存在すると考え浸透流量などを求める。このさい、 k/l を比透水係数と呼び、この値から矢板の遮水性能を評価する。

④ その他

河口湖は透水性の高い砂地盤に設けられることが多い。不透水層が非常に深い処にあると遮水壁では不十分である。その様な場合には湖底をビニール膜で覆うことも考えられる。

またどのような工法を用いるにしても多少の海水浸透は免れないのであるから、湖底の一部を掘込んでそこに塩水を溜め、ポンプで排出するような方法を講じて置いた方が賢明である。湖底に塩水が浸入すると上層は淡水で下層が塩水となるであろうが、風浪や湖内に生ずる循環流のため境界

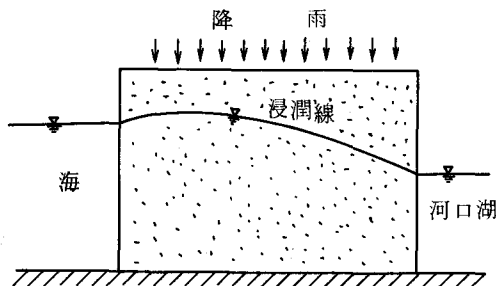


図-3 堤防幅が大きく、水位差が小さく、かつ降雨の補給が大きい場合の浸潤線の形状

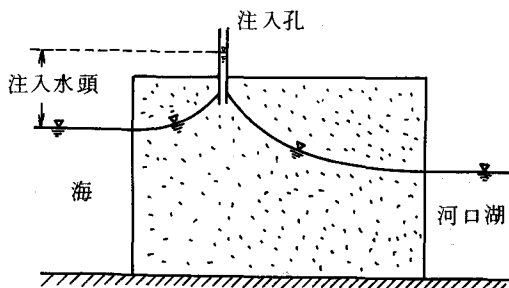


図-4 ウォーターカーテン工法

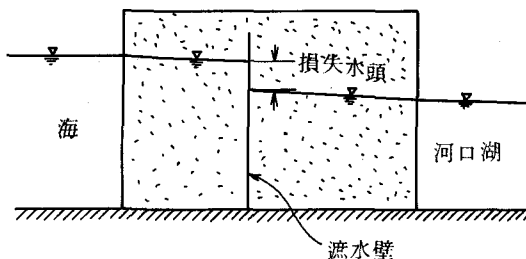


図-5 遮水壁工法

面が乱され、河口湖内全体の水質が劣化するおそれが生ずるからである。

地下密度流の概念から言えば、海岸地下水のような淡塩密度流のみならず前述の温度密度流あるいは密度のみならず粘性も異なる流れ、さらに二つの相が媒質内で共存する流れなどがその範疇に入ることになる。また、境界面が不安定となる条件や、その結果として生ずる混合、拡散の問題なども含まれる。最近では上述のような多孔媒質中の流れの基本的な課題についての研究が、土木工学の分野のみならず土質工学、採油工学、化学工学、繊維工学等の分野でもさかんになっている。このため、各専門分野の研究者が相互の情報を交換しながら研究を進展させて行こうとする動きがあり、1969年にはHaifa (Israel)で *Symposium on the Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media* が、また1971年にはCalgary (Canada)で *Symposium on Flow of Multiphase Fluids in Porous Media* が開催された。1969年京都で行われた13th Congress of I. A. H. R.ではSubject Dが地下水であって、その中で12篇が地下密度流を取扱ったものであった。

このように、地下密度流の現象は各方面から注目され活潑な研究が行なわれているが、本文でそのすべてを紹介することは不可能であるしまた筆者にはそれだけの能力もない。そこで前に述べた河口湖の開発に関連した問題に範囲を限定し、その中で考察すべき流れの基本的特性について解説を行なうこととする。

1. 地下密度流の基本式

海岸附近に現われる地下水流の具体的な流れとして、図-6(a)のような場合を挙げるができる。

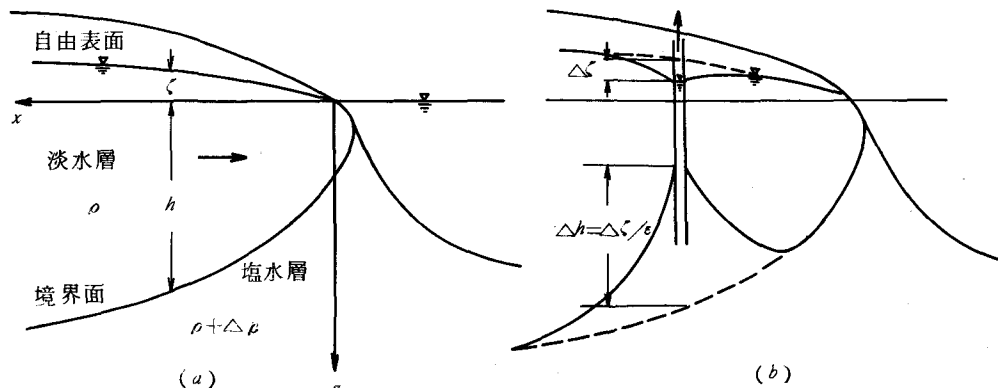


図-6 海岸附近の地下水

すなわち、陸側より海側に向かって地下水流が流れている場合、海岸附近で井戸を掘るとある深さまでは淡水層となっているが、それより深い層では塩水層となり、これがクサビ状に陸側に向けて浸入することが観測される。淡水層の流れが準一様流と見なしてよい場合には、圧力分布は静水圧分布と見なされるので、淡水の密度を ρ 、塩水の密度を $\rho + \Delta\rho$ 、自由表面から境界面までの深さを $\zeta + h$ とするとき、境界面での圧力の強さ p は次式で示される。

$$p = \rho g (\zeta + h)$$

一方、塩水層は定常状態では静止していると考えられるので、海側から見た境界面における圧力の強さは、

$$p = (\rho + \Delta\rho) g h$$

で両者は等しくなければならない。このことより

$$h = \zeta / \varepsilon, \quad \varepsilon = \Delta \rho / \rho \quad \dots\dots\dots (1)$$

このような関係を *Herzberg* の条件と呼んでいる。

また、図-6 (b) のように、井戸で揚水を行なう場合には、井戸周辺の自由表面は低下するので、それに応じ境界面は上昇し、海水を汲み上げるおそれが出てくる。いま自由表面の低下量を $\Delta \zeta$ とすれば、境界面上昇量は *Herzberg* の条件より、次式で概略値が示される。

$$\Delta h = \Delta \zeta / \varepsilon \quad \dots\dots\dots (2)$$

しかし、図からもわかるように海岸線附近や井戸の周辺では、浸透流の鉛直流速が相当に大きくなるので準一様流としての仮定が成立しない。

したがって、このような場所では鉛直流速の影響を考慮した部分的な補正、あるいは問題によっては解析方法自体を変更しなければならない。準一様地下密度流の基礎方程式を導くにあたり、次のような仮定を設ける。

- ① 透水層は、自由表面を有し、流れは二次元的である。
- ② 透水層は *Homogeneous* であって、深さ一定の不透水層上にある。
- ③ 淡水層と塩水層の境界面は明瞭であり、塩分の分散は無視される。
- ④ 海岸線附近を除いては、鉛直流速は小さいとし、層内の圧力は静水圧分布をなし、鉛直断面内では水平流速は一様である。

いま、不透水層から海面までの高さを h_s

透水係数を k とし、各層における水理量を次のように表わす。

	上 層	下 層
水 深	$\zeta + h_1$,	h_2
密 度	ρ_1 ,	$\rho_2 = \rho_1 + \Delta \rho$
流 速	u_1 ,	u_2
海岸線の水深	h_0 ,	h_{20}
水圧の強さ	p_1 ,	p_2

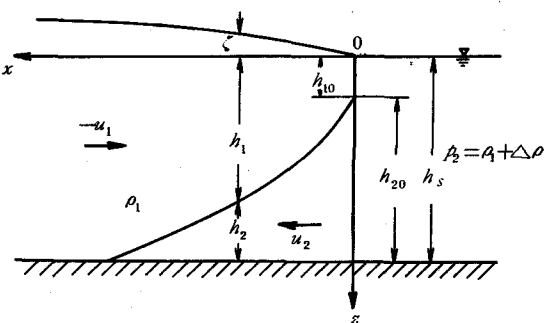


図-7 地下密度流

また、座標系を図-7 のようにとる。流れは

淡水層でも塩水層でも起こるとして、それぞれ *Darcy* 法則に従うとすれば、 u_1 および u_2 は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{k}{\rho_1 g} \frac{\partial p_1}{\partial x} \\ u_2 &= -\frac{k}{\rho_2 g} \frac{\partial p_2}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

上層および下層の圧力分布は仮定④より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \rho_1 g (z + \zeta) \\ p_2 &= \rho_1 g (h_1 + \zeta) + \rho_2 g (z - h_1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

(4)を(3)に代入するにあたり、 ζ は h_1 に対し ε の order であることから、 ε^2 の order を省略し、さらに

$$h_1 + h_2 = h_s \quad \dots\dots\dots (5)$$

を考慮すれば次式が導かれる。

$$u_1 = -k \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$u_2 = -k \left\{ (1-\varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

一方、空隙率を λ とし、淡水層および塩水層に関し連続の方程式をたてれば

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial}{\partial t} (\zeta + h_s - h_2) + \frac{\partial}{\partial x} \{ u_1 (\zeta + h_s - h_2) \} &= 0 \\ \lambda \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_2 h_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

(6)を(7)に代入して、 u_1 および u_2 を消去すれば、 ζ と h_2 に関する連立方程式が求まるはずである。演算の途中で、 ζ は h_2 に対し ε の order であることを考慮し微小項を省略するとともに $h_2 =$ 一定であることを考慮すれば、準一様地下密度流の基礎方程式として次式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\lambda}{k} \frac{\partial h_2}{\partial t} - h_s \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (h_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x}) &= 0 \\ \frac{\lambda}{k} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (h_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x}) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 h_2^2}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

一般の非定常流は上式によらなければならないが、上層流量 Q_1 と下層流量 Q_2 とが絶対値が等しく方向だけが反対である。いわゆる逆転流の場合には次のような取扱いが可能となる。すなわち、(7)において、 ζ は h_1 に比し ε の order であることを考慮し、さらに Q_1 および Q_2 を用いて連続の方程式を書き直せば

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} &= 0 \\ \lambda \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\text{こゝに} \quad Q_1 = u_1 h_1, \quad Q_2 = u_2 h_2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

(9)の両式を加え、さらに(5)を考慮すれば

$$\frac{\partial (Q_1 + Q_2)}{\partial x} = 0$$

$$\text{あるいは} \quad Q_1 + Q_2 = C(t) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$C(t)$ は積分常数で時間のみの任意関数。逆転流の場合には $C(t) = 0$ である。すなわち、このことは(8)の両式を加え積分したとき

$$h_s \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial h_2^2}{\partial x} = C(t)$$

を得るが、 $C(t) = 0$ とおいた場合が逆転流に相等する。その場合の関係式を用いて(8)より ζ を消去すれば、逆転流の場合の基礎方程式として次式が導かれる。

$$\frac{\lambda}{k} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 h_2^2}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon}{2 h_s} \frac{\partial}{\partial x} (h_2 \frac{\partial h_2^2}{\partial x}) = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

この方程式の解については後述する。

2. 定 常 流

1) 地下に生ずる塩水くさび

図-6(a)で示したように、海岸附近では塩水層がくさび状に陸側に浸入している。いま陸側からの淡水流量を Q_L とし図-8で示すような流れの場を考える。現象が定常的であるとすれば下層

は静止しているので、運動方程式は(6)より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -k \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ u_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

連続の方程式は

$$u_1 (\zeta + h_1) = Q_L \dots\dots\dots (14)$$

また *Herzberg* の条件(1)をこの場合に適用すれば

$$\zeta = \varepsilon h_1 \dots\dots\dots (15)$$

(13), (14)および(15)の3式より u_1 , h_1 を消去して積分を行なえば

$$\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \zeta^2 = -\frac{Q_L}{k} x + C \dots\dots\dots (16)$$

境界条件: $x = 0, \zeta = 0$

を考慮すれば $C = 0$

$$\therefore \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \zeta^2 = -\frac{Q_L}{k} x \dots\dots\dots (17)$$

上式より、自由表面は放物線形状となり、もし淡水流量 Q_L が知られば(15)より境界面形状を求めることが出来る。

実験室でこの現象を起させるには、図-8のように水深 h_f の淡水槽と水深 h_s の塩水楔とを透水層で連絡させれば良い。いま、水槽間の距離を $\bar{L}$ 、塩水くさびの浸入長を L とし、 $\ell = \bar{L} - L$ とおけば、 $L < x < L + \ell$ の範囲では淡水しか存在しないので、*Dupuit-Forchheimer* の公式⁵⁾より Q_L は次式で表わされる。

$$|Q_L| = k \frac{h_f^2 - (h_s + \zeta_L)^2}{2\ell} \dots\dots (18)$$

ここに、 ζ_L は $x = L$ における自由表面の高さ。 $\zeta_L = \varepsilon h_1$

一方(17)より

$$-\frac{Q_L L}{k} = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \zeta_L^2 = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)h_s^2}{2} \dots\dots\dots (19)$$

(18)および(19)より

$$\frac{2|Q_L|}{k} = \frac{h_f^2 - (1+\varepsilon)h_s^2}{\bar{L}} \dots\dots\dots (20)$$

上式は両水槽の水深、水槽間の距離および密度差より淡水流量が求められることを示している。また、 $\zeta_L \doteq \Delta h$ においてよい場合には淡水流量は近似的に次式で表わされる。

$$|Q_L| = \frac{k}{2L} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} (\Delta h)^2 \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 Δh は両水槽の水位差を示す。

また、塩水くさびの長さ L は(19)より次のように示される。

$$L = \frac{k\varepsilon(1+\varepsilon)}{2|Q_L|} h_s^2 \dots\dots\dots (22)$$

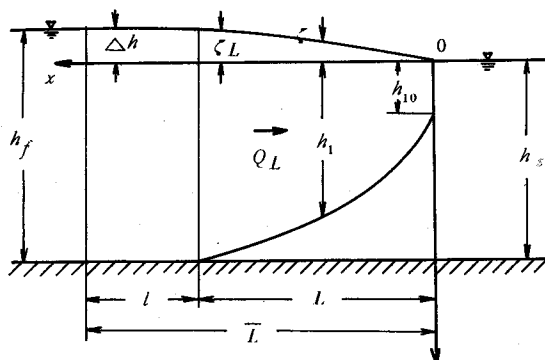


図-8 定常状態の塩水クサビ

2) 海岸線における鉛直流速の効果

前述の解は、海岸線からある程度離れた所では良く一致するが、(15)および(17)で $x=0$ とおくと、 ζ および h_1 は零となり、海側への淡水流速は無限大となる不合理を生ずる。この原因は、海岸線附近では境界面の勾配がきつく鉛直流速が無視できないにもかかわらず、準一様流の仮定を適用しているためである。Henry⁶⁾はHamel⁷⁾と同様の手法を用い二次元流としての厳密な解析を行っており、またGlover⁸⁾は類似の境界条件に対する近似解を求めている。

さらにRumer & Harleman⁹⁾は有限域の場合に対し、Dupuitの仮定から出発して近似式を求め、実験と比較して良好な結果を得ている。野満¹⁰⁾らは序で述べた先駆的な研究に引き続いて海岸線附近の鉛直流速の効果についての研究を行なった。ここでは野満らの手法に従って鉛直流速の影響を説明することとする。

いま、淡水層の任意点の鉛直流速を w_1 とすれば、連続の方程式より w_1 は次のように表わすことができる。

$$w_1 = - \int_{-\zeta}^x \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) dz + [w_1]_{z=-\zeta} \quad \dots\dots\dots (23)$$

一方、(13)、(14)および(15)より

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{Q_L^2}{k} \cdot \frac{1+\epsilon}{\epsilon} \cdot \frac{1}{(h_1+\zeta)^3} \quad \dots\dots\dots (24)$$

とおけるので、この値を(23)に代入し積分を行なうことにより w_1 の近似式を次のように求めることができる。

$$w_1 = - \frac{Q_L^2}{k} \cdot \frac{1+\epsilon}{\epsilon} \cdot \frac{z+\zeta}{(h_1+\zeta)^3} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここに、自由表面の変化は境界面のそれと比較し小さいとして $[w]_{z=-\zeta} = 0$ とする。

一方、鉛直方向の運動方程式は、Darcyの法則より

$$w_1 = - k \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 g} - z \right) \quad \dots\dots\dots (26)$$

(25)を(26)に代入して積分を行なえば、鉛直流速を考慮した場合の淡水層中の圧力分布は次のように表わされる。

$$\rho_1 = \rho_1 g (z+\zeta) + \frac{\rho_1 g Q_L^2}{2 k^2} \cdot \frac{1+\epsilon}{\epsilon} \cdot \frac{(z+\zeta)^2}{(h_1+\zeta)^3} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$x=0$ における淡水層の厚さを h_{10} とすれば、 h_{10} は境界面上で淡水層側から測った圧力の強さと、塩水槽側から測ったそれとが等しいという条件から求められる。すなわち

$$\rho_1 g h_{10} + \frac{\rho_1 g Q^2}{2 k^2} \cdot \frac{1+\epsilon}{\epsilon} \cdot \frac{1}{h_{10}} = (\rho_1 + \Delta \rho) g h_{10}$$

$$\therefore h_{10} = \frac{|Q_L|}{k} \cdot \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{2}} = \frac{|Q_L|}{\sqrt{2} \epsilon k} \quad \dots\dots\dots (28)$$

境界面の方程式は(15)および(16)より

$$\frac{h_1^2}{2} = - \frac{Q_L}{\epsilon (1+\epsilon) k} x + C$$

とおけるが、 $x=0$ では $h_1 = h_{10}$ となるので C が定まる。よって境界面形状は次のようにな

る。

$$\frac{h_1^2}{2} = - \frac{Q_L}{\varepsilon(1+\varepsilon)k} x + \frac{h_{10}^2}{2} \quad \dots\dots\dots (29)$$

上式に(28)を代入し、無次元化を行なえば

$$\frac{\varepsilon k}{|Q_L|} h_1 = \left(2 \frac{\varepsilon k}{|Q_L|} x + 0.5 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (30)$$

が、海岸線で鉛直流速の効果を考慮した場合の、境界面形状を表わす式となる。

Rumer & Harleman は被圧状態の境界面に対する近似式として次式を与えた。

$$\frac{\varepsilon k}{|Q_L|} h_1 = \left(2 \frac{\varepsilon k}{|Q_L|} x + 0.55 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (31)$$

図-9はHenry, Rumer & Harlemanおよび(30)の解相互の関係をグラフに表わしたもので、いずれの解も非常に良く似た結果を与えることが知られる。また、図-10はプラスチック球($k = 0.5 \text{ cm/sec}$)および砂($k = 1.45 \text{ cm/sec}$)を用いて実験を行なった場合の、自由表面のある境界面形状と(30)の結果の比較を示したものである。

3) 二層流

図-8において Δh をしだいに小さくすると、塩水くさびの長さ L は大きくなり $L = \bar{L}$ となる。さらに Δh が小さくなると下層の塩水が淡水槽に向かって流れ出し、二層流が生ずることになる。

このような場合には、運動方程式には(6)を用いる必要がある。しかし、定常流であるので連続の方程式は次のように

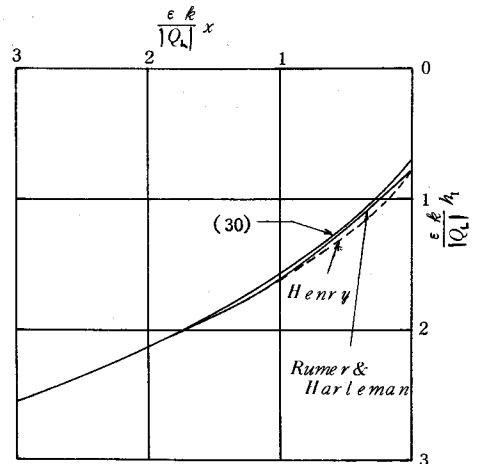


図-9 境界面形状について各解の比較

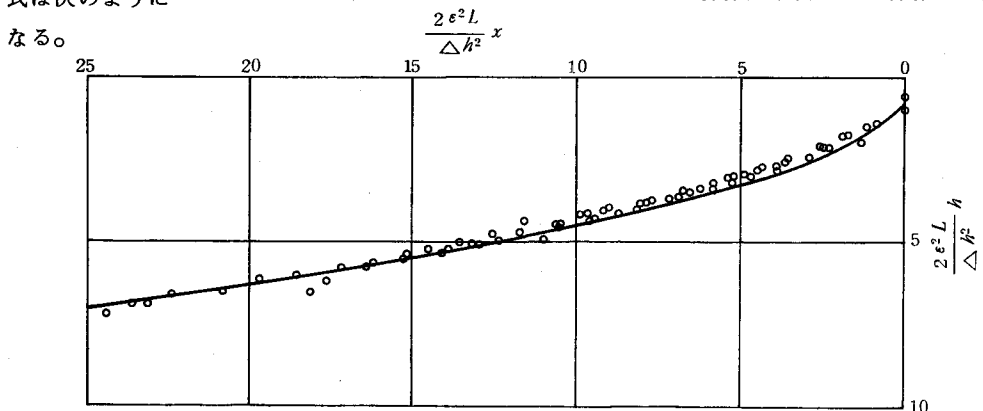


図-10 境界面形状の実験と理論との比較

$$\left. \begin{aligned} u_1(\zeta + h_1) &= Q_1 \\ u_2 h_2 &= Q_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

(32)の第1式において、 ζ の流量に対する寄与は小さいと考えて(6)の第1式に代入すれば

$$\frac{Q_1}{h_1} = -k \frac{d\zeta}{dx} \quad \dots\dots\dots (33)$$

また、(6)の第2式において ζ は ε のorderであるから ε の二次以上を省略し、これに(32)の

第2式を代入すれば、

$$\frac{Q_2}{h_2} = -k \left\{ \frac{d\zeta}{dx} + \varepsilon \frac{dh_2}{dx} \right\} \quad \dots\dots\dots (34)$$

(33)および(34)より ζ を消去し、さらに(5)を考慮すれば次式を得る。

$$k\varepsilon \frac{dh_1}{dx} = \frac{Q_2}{h_s - h_1} - \frac{Q_1}{h_1} \quad \dots\dots\dots (35)$$

いま

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -\frac{Q_2}{Q_1} \quad , \quad \mu = \frac{-Q_1 L}{k\varepsilon h_s^2} \\ x/L &= \xi \quad , \quad \eta = h_1/h_s \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (36)$$

とにおいて(35)を無次元化すれば、次のような微分方程式が求められる。

$$\frac{d\eta}{d\xi} = (1-\lambda)\mu \frac{\frac{1}{1-\lambda} - \eta}{(1-\eta)\eta} \quad \dots\dots\dots (37)$$

上式を変数分離して積分すれば

$$(1-\lambda)\mu = \left\{ \frac{\eta^2}{2} + \frac{\lambda}{1-\lambda}\eta + \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \log \{ 1 - (1-\lambda)\eta \} \right\} + C_1 \quad \dots\dots\dots (38)$$

ここに C_1 は積分常数(38)は境界面形状を示すものであるが、その特性を調べるため(37)を微分すれば

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \mu \left\{ \frac{\lambda}{(1-\eta)^2} - \frac{1}{\eta^2} \right\} \frac{d\eta}{d\xi} \quad \dots\dots\dots (39)$$

上式において、 $\frac{d\eta}{d\xi} > 0$, $\lambda > 0$,
 $\mu > 0$, $1 > \eta > 0$

であるので

$$\eta \rightarrow 0 \text{ で } \frac{d^2\eta}{d\xi^2} < 0$$

$$\eta \rightarrow 1 \text{ で } \frac{d^2\eta}{d\xi^2} > 0$$

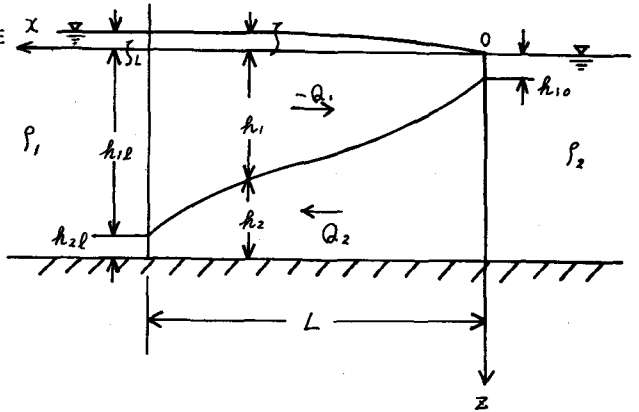


図-11 定常二層流

したがって、図-11に示すような境界面形状特性を持つことになる。(36)を用いて(33)を無次元化すれば

$$\frac{\varepsilon\mu}{\eta} = \frac{d\bar{\zeta}}{d\xi} = \frac{d\eta}{d\xi} \cdot \frac{d\bar{\zeta}}{d\eta} \quad \dots\dots\dots (40)$$

ここに

$$\bar{\zeta} = \zeta/h_s \quad \dots\dots\dots (41)$$

(40)に(37)を代入すれば

$$\frac{d\bar{\zeta}}{d\eta} = \frac{\varepsilon(1-\eta)}{1-(1-\lambda)\eta} \quad \dots\dots\dots (42)$$

変数分離して積分を行なえば

$$\frac{\bar{\zeta}}{\varepsilon} = \frac{\eta}{1-\lambda} + \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \log \{1 - (1-\lambda)\eta\} + C_2 \quad \dots\dots\dots (43)$$

上式は境界面までの深さを与えて自由表面の海面からの高さを与える式である。もし下層が静止していれば(35)より $\lambda = 0$ となり、また鉛直流速を無視すれば($\eta = 0$ で $\bar{\zeta} = 0$) $C_2 = 0$ となるので(43)は $\bar{\zeta} = \varepsilon \eta$ (44)

となり、*Hersberg* の条件が満足される。

こゝで、境界条件を与えて流量特性を示す λ および μ の値を求める方法について考察をする。(38)および(43)の中には4ケの未定常数 C_1, C_2, λ, μ が含まれる。これらを定めるためには $x=0$ および $x=L$ における ξ および h_1 の値を知る必要がある。この中で両端における h_1 の値すなわち h_{10} あるいは h_{1L} の値は鉛直流速の影響を考慮してはじめて決定されるものである。厳密にはその影響を考慮すべきであるが、こゝでは簡単のため鉛直流速を無視して考える。この場合には、境界条件は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0 & \quad ; \quad \eta = 0 & , \quad \bar{\zeta} = 0 \\ \xi = 1 & \quad ; \quad \eta = 1 & , \quad \bar{\zeta} = \frac{\zeta_L}{h_s} = a \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (45)$$

(45)の第1式より $C_1 = C_2 = 0$

第2式より(38)および(43)は次のように表われる。

$$\left. \begin{aligned} (1-\lambda)\mu &= \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{1-\lambda} + \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \log \lambda \\ \frac{a}{\varepsilon} &= \frac{1}{1-\lambda} + \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \log \lambda \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (46)$$

上式より両水槽の無次元水位差 a を与えることによって λ および μ の値を求めることができる。

(38)および(43)を $C_1 = C_2 = 0$ として引き算すれば

$$(1-\lambda)\mu\xi = \frac{\eta^2}{2} - \eta + \frac{\bar{\zeta}}{\varepsilon} \quad \dots\dots\dots (47)$$

特別な場合として、上層流のみの場合を考えれば、 $\lambda = 0$ および(44)より

$$\mu\xi = \frac{\eta^2}{2}$$

となり、明らかに上層流の境界面形状と一致する。

(47)において $\xi = 1; \eta = 1, \quad \bar{\zeta} = a$ とおけば

$$\mu = \frac{a/\varepsilon - 0.5}{1-\lambda} \quad \dots\dots\dots (48)$$

a/ε の値が1に等しいときには、塩水楔は淡水槽の位置まで浸入し静止している。すなわち、二層流の生ずる限界の μ の値は $1/2$ である。

$a/\varepsilon < 1$ となれば二層流が生じ、 a/ε の値に応じ λ および μ の値は図-12のようになる。

4) 塩水くさびに及ぼす降雨の効果

1) 降雨の補給によるウォーターカーテン

いま、塩水槽と淡水槽（海と河口湖）が透水層（広幅堤防）で仕切られているものとすれば、堤防幅を大きくとれば動水勾配は小さくなるので、当然海水の浸透量は少くなる。そこで、さらに堤防の上に降った雨が地中に浸透し、地下水面まで到達したとすると、降雨の補給が十分であれば地下水面の形状は図-13のように上方向へ盛り上がり、雨水は河口湖側へはもちろん海側へ向っても流出するようになる。このような場合には、河口湖への海水の浸透は雨水のウォーターカーテンによって遮断されたことになる。

こゝでは、海水と淡水との密度差を無視した場合のウォーターカーテンの現象について考¹¹⁾察を行なう。現象を簡略化して示したものが図-14である。

すなわち、水平な不透水層上に透水係数 k 、幅 L の長方形堤防があり上方より絶えず単位時間あたり N の降雨補給を受けているとする。また海および河口湖の水深をそれぞれ h_s および h_L とする。実際の降雨は連続的ではないが、こゝでは平均的に考えることとし、また降雨量のうち蒸発あるいは表面流出等の損失は除き地下水面に到達する有効降雨量を対象とする。したがって、年降雨量を N_0 とすれば、

$$N = \alpha N_0, \quad \alpha < 1 \quad (49)$$

透水層には Darcy の法則ならびに準一様流の仮定が成立するものとするれば、運動方程式は次のようになる。

$$u = -k \frac{dh}{dx} \quad (50)$$

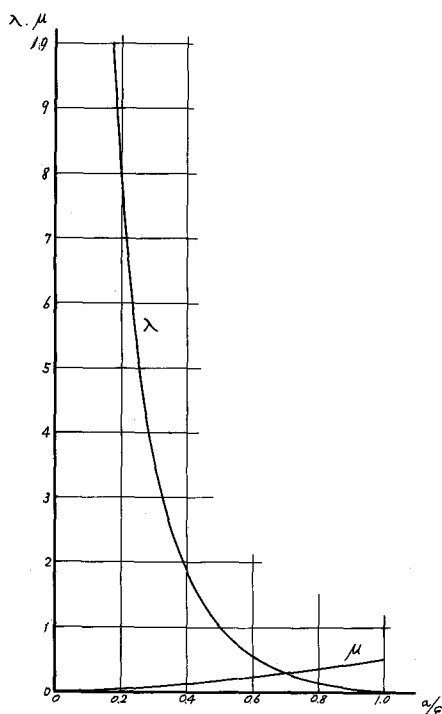


図-12 $\alpha/e - \lambda \cdot \mu$

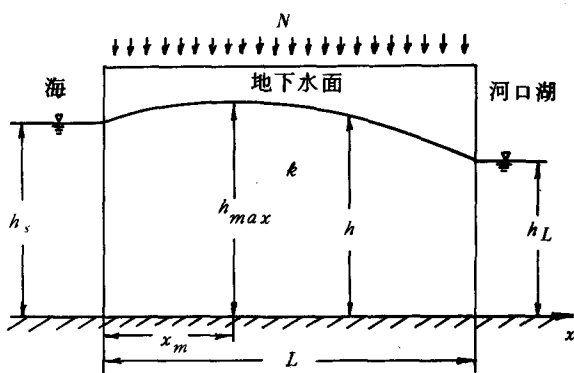


図-13 降雨によるウォーターカーテン

連続の方程式は

$$\frac{d(uh)}{dx} = \frac{dQ}{dx} = N \quad \dots\dots\dots (51)$$

こゝに

$u \dots$ 浸透流速, $h \dots$ 水深, $Q \dots$ 単位厚さの流量

(50) および (51) より

$$\frac{d^2 h^2}{dx^2} = -\frac{2N}{k} \quad \dots\dots\dots (52)$$

上式を積分し、境界条件 $x=0, h=h_s; x=L, h=h_L$ を代入して積分常数を決定すれば、

$$h^2 = h_s^2 + \frac{N}{k}(L-x)x - \frac{h_s^2 - h_L^2}{L}x \quad \dots\dots\dots (53)$$

また

$$Q = uh = -\frac{k}{2} \frac{dh^2}{dx}$$

であるので (53) より

$$Q = \frac{N}{2}(2x-L) + \frac{k(h_s^2 - h_L^2)}{2L} \quad \dots\dots\dots (54)$$

上式において、 $Q=0$ となる位置を x_m とすれば、堤体内の水深はこの断面で最大値 h_{max} をとり、この断面を境とし降雨は左右に振り分けられる。(54) より x_m は次のようになる。

$$x_m = \frac{L}{2} - \frac{k(h_s^2 - h_L^2)}{2NL} \quad \dots\dots\dots (55)$$

いま $h_s > h_L$ であると考えれば、このような x_m が堤体内に存在するためには

$$L/2 > x_m > 0$$

となり、海水が河口湖側へ浸入する危険側の条件は $x_m > 0$ 。したがって、(55) より限界条件を堤防幅について示せば次式のようになる。

$$L > \sqrt{\frac{k}{N}(h_s^2 - h_L^2)} \quad \dots\dots\dots (56)$$

また $x=0$ における流量を Q_0 とすれば (54) より

$$Q_0 = \frac{k(h_s^2 - h_L^2)}{2L} - \frac{NL}{2} \quad \dots\dots\dots (57)$$

上式より、 $Q_0 > 0$ であれば海水の浸透流量を示し、 $Q_0 < 0$ であれば降雨の海への浸出流量を示すことになる。いま、1例として

$$h_s = 7.11m, \quad h_L = 5.0, 5.5, 6.0, 6.5m$$

$$N_0 = 2,000 \text{ mm/year} = 0.62 \times 10^{-5} \text{ cm/sec}$$

$$\alpha = 0.1, 0.2; \quad k = 5 \times 10^{-4} \text{ cm/sec}$$

とした場合、(56) を満足する最小堤防幅 L_m を求めれば次表のようになる。

$\alpha \backslash h_L$	5.0	5.5	6.0	6.5
0.1	450	404	334	145
0.2	319	284	237	104

L_m の 値 (m)

ii) 塩水くさびの存在を考慮した場合¹²⁾

実際の現象では、海水と淡水とに密度差があるため、降雨が海側へ浸出している場合でも海水は下層に浸入し図-14のような塩水くさびを形成するものと考えられる。たとえば、降雨の補給が少くなると、くさびの長さ ℓ はしだいに大きくなり、ついに前述の $x = x_m$ の位置にまで到達することが想定される。もし、さらに降雨の補給が少くなると、くさびは x_m を超えて成長することになるが、もはや、くさびの先端付近では動水勾配は河口湖に向かって傾斜しているので、くさびを押しもどす力は全然働かないことになる。したがって海水は河口湖に向かって定常的に流れ込むようになる。

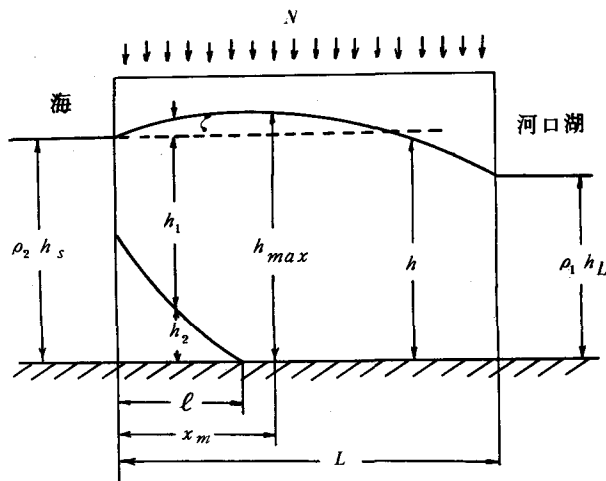


図-14 塩水楔の状況

すなわち、密度差の影響を考慮すると、単一流体として求めた場合より、さらに海水が浸入しやすくなるはずであるので、そのような場合の遮断効果についてこゝでは検討を行なう。

いま、 $0 < \ell < x_m$ の範囲で塩水くさびは停止し平衡状態を保っているとすれば、この範囲では運動方程式は(13)と同一である。また、連続の方程式は、上層について

$$\frac{d \{ u_1 (h_1 + \zeta) \}}{dx} = N \quad \dots\dots\dots (58)$$

下層では $u_2 = 0$ であるから Herzberg の条件

$$\zeta = \varepsilon h_1 \quad \dots\dots\dots (15)$$

が成立している。

(13)の第1式を(58)に代入し、さらに(15)を考慮すれば

$$-\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} k \frac{d^2 \zeta^2}{dx^2} = N \quad \dots\dots\dots (59)$$

上式を積分し、境界条件 $x = 0, \zeta = 0$; $x = \ell, \zeta = \zeta_l$ を代入すれば

$$\zeta^2 = \frac{N \varepsilon}{k(1+\varepsilon)} (\ell - x) x + \frac{\zeta_l^2}{\ell} x \quad \dots\dots\dots (60)$$

こゝに、 ζ_l はくさび先端の ζ の値を示し(15)より

$$\zeta_l = \varepsilon h_s \quad \dots\dots\dots (61)$$

一方、 $\ell < x < L$ の範囲では、くさびが存在しないので単一の流れとして取扱うことができる。すなわち、(52)が基礎方程式となる。これを積分し、境界条件 $x = \ell, h = h_s + \zeta_l = (1+\varepsilon) h_s$; $x = L, h = h_L$ を考慮して積分常数を決定すれば次式が導かれる。

$$h^2 = (1+\varepsilon)^2 h_s^2 + \frac{N}{k} (L-x)(x-\ell) - \frac{(1+\varepsilon)^2 h_s^2 - h_L^2}{L-\ell} (x-\ell) \quad \dots\dots (62)$$

前述のように下層の海水が河口湖へ流入しないためには、くさびの先端が地下水面の最高となる位置 x_m より海側に停止していなければならない。したがって x_m は $\ell < x_m < L$ の範囲にあると見られる。 x_m の位置を求めるため(62)を微分して零とおけば次式が得られる。

$$\frac{d h^2}{d x} = -\frac{N}{k} \{2 x - (L + \ell)\} - \frac{(1 + \varepsilon)^2 h_s^2 - h_L^2}{L - \ell} = 0$$

これより

$$x_m = \frac{L + \ell}{2} - \frac{k \{ (1 + \varepsilon)^2 h_s^2 - h_L^2 \}}{2 N (L - \ell)} \quad \dots\dots\dots (63)$$

$x_m > \ell$ の条件を (63) に与えれば、くさびの先端が x_m を超えない、換言すれば海水が河口湖へ浸入しない限界条件を示すことができる。

すなわち

$$(L - \ell) > \sqrt{\frac{k \{ (1 + \varepsilon)^2 h_s^2 - h_L^2 \}}{N}} \quad \dots\dots\dots (64)$$

上式において、くさびの長さ ℓ は未定である。しかし最も危険な状態はくさびの先端が x_m と一致した時である。すなわち、この時には (60) で示される地下水面も $x = \ell = x_m$ において最高とならなければならない。したがって、(60) の左辺の微係数はこの位置で零となる。よって (60) より

$$\frac{d \zeta^2}{d x} = \frac{-N \varepsilon}{k (1 + \varepsilon)} (2 x - \ell) + \frac{\varepsilon^2 h_s^2}{\ell} = 0$$

とし、 x_m を求めれば

$$x_m = \frac{\ell}{2} + \frac{k \varepsilon (1 + \varepsilon) h_s^2}{2 N \ell}$$

かつ、 $x_m = \ell$ であるので、限界状態では

$$\ell = \sqrt{\frac{k \varepsilon (1 + \varepsilon)}{N}} h_s \quad \dots\dots\dots (65)$$

(65) を (64) に代入すれば、密度差を考慮した場合の限界条件式が求められ、次式のようになる。

$$L > \sqrt{\frac{k \{ (1 + \varepsilon)^2 h_s^2 - h_L^2 \}}{N}} + \sqrt{\frac{k \varepsilon (1 + \varepsilon)}{N}} h_s \quad \dots\dots\dots (66)$$

上式は (56) に対応するものであり、明らかに $\varepsilon \rightarrow 0$ とすればこれと一致する。いま限界条件式を無次元化すれば、それぞれ (56) および (66) に対応して (67) および (68) が求められる。

$$\sqrt{\frac{N}{k}} \frac{L}{h_s} > \sqrt{1 - \left(\frac{h_L}{h_s} \right)^2} \quad \dots\dots\dots (67)$$

$$\sqrt{\frac{N}{k}} \frac{L}{h_s} > \sqrt{1.04 - \left(\frac{h_L}{h_s} \right)^2} + 0.14 \quad \dots\dots\dots (68)$$

こゝに、 $\varepsilon = 0.02$ としている。これらの限界条件をグラフに表わしたものが図-15である。これらの図より降雨によるウォーターカーテンの遮断効果や密度効果が知られるとともに、遮断に必要な堤防断面、降雨量、内外水位差等の設計上必要な諸元を定めることができる。

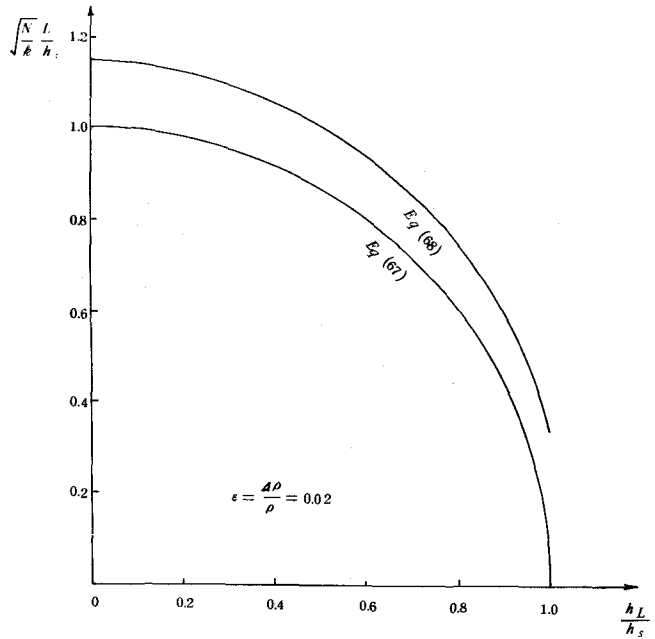


図-15 雨水のウォーターカーテンによる
海水遮断限界条件

3. 非定常流

1) 逆転流¹³⁾

透水層が $x > 0$ の半無限領域に存在し、始めは密度 ρ_1 の流体で占められているとする。一方 $x < 0$ の領域は密度 ρ_2 の流体の湛水池であり、湛水池と透水層とは隔壁で仕切られている。 $t = 0$ で隔壁を取除いたとすると、密度の大きい流体は透水層の底部へ浸入して行くが、密度の小さい流体は湛水池へと排除されることになる。 $x = 0$ での境界面の深さ $h_s - h_{20}$ は、厳密には時間と共に変化し、また最終的に落ち着く位置も周囲の条件によって変化する。

しかし、図-17 のように $-\infty < x < \infty$ に透水層が自由表面を持たない状態で存在し、密度差のみによって、 $x = 0$ に関し対称な流れが生ずる場合には、 h_{20} は一定でかつ $h_s/2$ となる。

1. で述べたように、このような流れを逆転流と呼ぶことにすれば、

$$(11) \text{ において, } Q_1 + Q_2 = C(t) = 0 \quad \cdots \cdots (69)$$

であり、基礎方程式は (12) で示される。

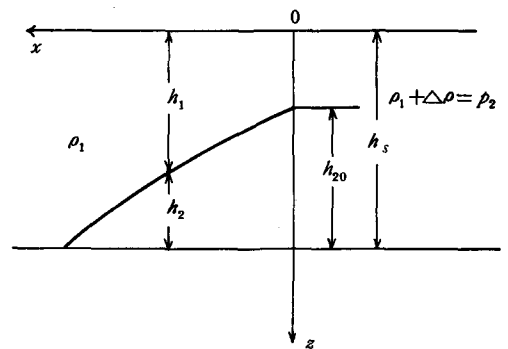


図-16 塩水楔の進入

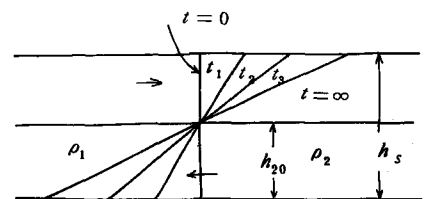


図-17 自由表面を持たない対称な流れ

この方程式は熱伝導型であるので

$$\eta = x / m \sqrt{t} \quad \dots\dots\dots (70)$$

とおけば、次のように常微分化される。

$$\frac{\lambda m^2}{k \epsilon} \eta \frac{d h_2}{d \eta} + \frac{d^2 h_2^2}{d \eta^2} - \frac{1}{h_s} \frac{d}{d \eta} \left(h_2 \frac{d h_2^2}{d \eta} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (71)$$

さらに、 $x = 0$ の境界面の深さは不動であると考え、次のような無次元化を行なう。

$$\left. \begin{aligned} r &= h_2 / h_{20}, & m &= 2 \sqrt{k \epsilon h_{20}} / \sqrt{\lambda} \\ \beta &= h_{20} / h_s, & \xi &= \sqrt{2} \eta = \frac{\sqrt{\lambda x}}{\sqrt{2 k \epsilon h_{20} t}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (72)$$

上のような変数変換を行なうことにより、(71)は次のようになる。

$$\frac{d^2 r^2}{d \xi^2} + 2 \xi \frac{d r}{d \xi} - \beta \frac{d}{d \xi} \left(r \frac{d r^2}{d \xi} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (73)$$

境界条件は

$$\xi = 0, \quad r = 1 \quad \dots\dots\dots (74)$$

上記方程式を解くにあたり、浸入する塩水くさびの先端に注目する。こゝでは、 $r = 0$ であるが、それに対応する ξ の値を $\xi = \ell$ とする。いま r を $\xi = \ell$ の近傍で展開すれば、

$$r(\xi) = r(\ell) + \frac{\dot{r}(\ell)}{1!} (\xi - \ell) + \frac{\ddot{r}(\ell)}{2!} (\xi - \ell)^2 + \frac{\dddot{r}(\ell)}{3!} (\xi - \ell)^3 + \dots\dots\dots (75)$$

そこで、(75)が(73)を満足するように、 $r(\ell)$ 、 $\dot{r}(\ell)$ 、 $\ddot{r}(\ell)$ ……を決定し、さらに(74)を満足するように ℓ の値を求めようと試みる。

先づ、 $\dot{r} \neq \infty$ 、 $\ddot{r} \neq \infty$ と考え、(73)において $\xi = \ell$ 、 $r(\ell) = 0$ とおけば

$$\dot{r}(\dot{r} + \ell) = 0$$

$$\dot{r} \neq 0 \text{ とすれば } \dot{r}(\ell) = -\ell \quad \dots\dots\dots (76)$$

つぎに、(73)を1階微分すれば

$$\dot{r} \ddot{r} + r \ddot{\dot{r}} + 2 \dot{r} \ddot{r} + \dot{r} + \xi \ddot{r} - \beta (2 \dot{r}^3 + 2 r \cdot 2 \dot{r} \ddot{r} + 2 r \dot{r} \ddot{r} + r^2 \ddot{\ddot{r}}) = 0$$

となるが、 $\xi = \ell$ 、 $r(\ell) = 0$ および(76)を代入することにより

$$\ddot{r}(\ell) = -\frac{1}{2} + \beta \ell^2 \quad \dots\dots\dots (77)$$

が求められる。以下同様な計算を繰返すことにより、(73)を満足すべき級数解として

$$\begin{aligned} r(\xi) = & -\ell (\xi - \ell) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\beta \ell^2}{2} \right) (\xi - \ell)^2 - \\ & + \left(-\frac{1}{72} + \frac{5}{18} \beta \ell \right) (\xi - \ell)^3 + \frac{5}{96} \beta (\xi - \ell)^4 + \dots\dots\dots (78) \end{aligned}$$

が求められる。上式は4階の微係数まで求めたものである。

ℓ の値は β によって異なるが、これは上式に(74)を代入することによって求められる。数値計算の結果は次のようになる。

β :	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
ℓ :	1.048	1.033	1.014	1.009	0.996	0.986

図-18は β の値をParameterとして、任意時刻のくさび形状を無次元化して表わしたものである。この図よりくさび形状は明らかに上方に凸となることが知られ、次節で示すような通常

の場合のくさびの形状とは本質的に異なったものとなる。

浸入する塩水くさびの先端の位置を x_t とすれば、そのときの ξ の値は ℓ であるので、(72) の第2式および第4式を考慮すれば x_t は次のように表わされる。

$$x_t = \ell \sqrt{\frac{2\beta k \epsilon h_s}{\lambda}} t = C \sqrt{\frac{k \epsilon h_s}{\lambda}} t \dots\dots (79)$$

こゝに C は $\ell \sqrt{2\beta}$ に対応するものであり、 ℓ の値は β の値に応じ前表によって定められる。

Rumer & Harleman¹⁴⁾ は、 $x = 0$ における境界面の位置として

$h_{20} = \frac{h_s}{2}$ ($\beta = 1/2$) の場合の逆転流について解析を行ない、その近似解として $C = 1$ を与えた。この解によれば $C = 1.05$ となる。また、Bear & Dagan¹⁵⁾ も同様な流れに関し、 $\beta = 1$ の場合を考察し、 $C = 1.32$ を与えた。これに対応するものは本解によれば $C = 1.36$ となる。

すなわち、本解法の結果は、くさびの浸入長が他の結果よりやや大目の値を示しているが、 β のいかなる値に対してもくさびの長さや任意時刻の形状が与えられる点に特色を持つものである。

2) 塩水くさびの非定常運動¹⁶⁾

前節で述べた逆転流の場合には、(79) によっても明らかなように、くさび先端の位置 x_t は時間の経過とともにどこまでも浸入を続けることとなる。しかし現実の塩水くさびの場合には、陸側の地下水面のポテンシャルが密度差によって生ずる海側のポテンシャルより高いので、くさびの先端はある距離までしか浸入できない。このことは、塩水くさびの非定常課程には逆転流としての取扱いが適当でないことを示すものである。

いま、図-19で示すように厚さ一様で水平な透水層から、定常的には淡水流量 Q_L が海側に流出しているとする。現象の初期には、透水層は隔壁によって海側

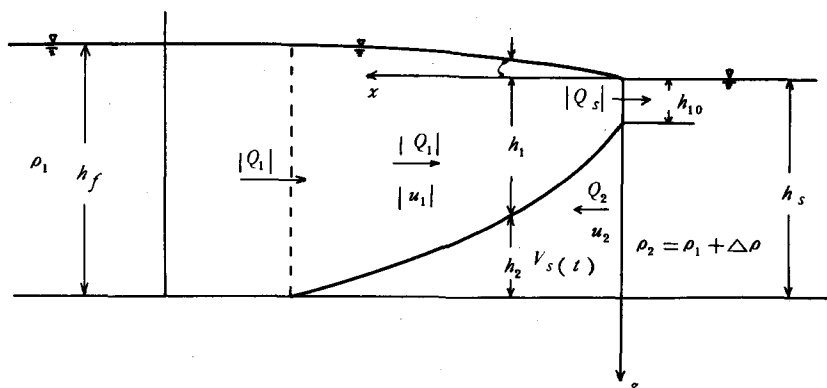


図-19 塩水楔の非定常課程

とは遮断され、淡水のみによって占められており、その水面は海面よりやや高くなっている。

$t = 0$ で隔壁を急に取除くと、下層には塩水が浸入し、上層からは淡水が流出し始めるので、淡塩境界面はしだいに透水層内部へと浸入し、やがて最終的には定常状態に達してくさびは停止する。

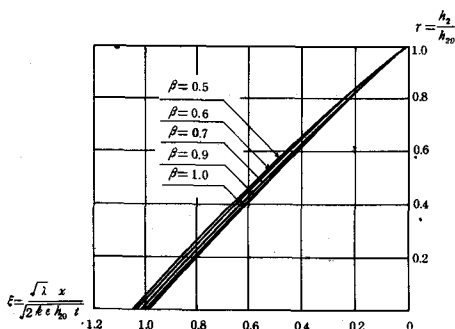


図-18 任意時刻の楔形状

このような非定常課程は、すでに *Bear & Dagan*^{17) 18)} や 玉井, 嶋¹⁹⁾ らによって取扱われてきており、その特性の多くの部分が明らかにされている。しかし、これらの研究では解析の便宜上、① $x=0$ における境界面の位置を固定していること、②境界面形状が常に下側に凸であるとしていること、のため実際現象とは合致しない点が生じている。①および②は現象がかなり進行した後には当てはまるが、現象の初期あるいは透水係数の小さい場合にはなお考慮を必要とする。

この意味から次のような手順を踏むことにより、塩水くさびの非定常解を導いたものである。

- (I) $x=0$ における鉛直流速効果を考慮することより、海側と透水層の間で成立すべき圧力の釣り合い条件をそれぞれ上層および下層に関し求め、このことより任意時刻における境界面位置と淡水流量との関係式を求める。
- (II) *Bear & Dagan* が淡水流量の場所的分布を与えた水深に関する線型仮定を拡張し、高次の項を入れることにより、現象の初期においては上向きに凸、以後においては下向きに凸となる実際現象に近い境界面形状が与えられるようにする。
- (III) これらを、準一様流の運動方程式あるいは連続の方程式と組み合わせることにより最終的な解を導く。

鉛直流速の効果：

連続の方程式より上層の鉛直流速は(23)で示されるが、自由表面上での鉛直流速は微小であるとすれば

$$w_1 = - \int_0^x \frac{\partial u_1}{\partial x} ds \quad \dots\dots\dots (80)$$

しかるに(10)より(上層流量に及ぼす ϵ の寄与は小さいとする)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} \frac{1}{h_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{Q_1}{h_1^2} \quad \dots\dots\dots (81)$$

一方(6)の第1式および第2式より ϵ を消去し、(10)を用いて u_1 および u_2 を消去するとともに(5)を考慮すれば次式が求められる。

$$k \epsilon \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{Q_2}{h_2} - \frac{Q_1}{h_1} \quad \dots\dots\dots (82)$$

ただし、 ϵ は ϵ の order とし、 ϵ の二次以上の項は省略している。

1.で述べたように、上層および下層流量の和は一般に時間のみの関数で場所にはかゝらない。したがって、くさび先端の淡水流量を Q_L とすれば(11)より

$$Q_1 + Q_2 = Q_L \quad \dots\dots\dots (83)$$

(82)において、(5)および(83)を用いて h_2 および Q_2 をそれぞれ消去すれば

$$\left. \begin{aligned} k \epsilon \frac{\partial h_1}{\partial x} &= \frac{Q_L h_1 - Q_1 h_s}{h_1 (h_s - h_1)} \\ &= \frac{Q_L}{h_s - h_1} - \frac{Q_1 h_s}{h_1 (h_s - h_1)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (84)$$

上式を(81)に代入して $\frac{\partial h_1}{\partial x}$ を消去するとともに、(9)の第1式をやはり(81)に代入して $\frac{\partial Q_1}{\partial x}$ を消去すれば次のようになる。

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = - \frac{\lambda}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{Q_1 (Q_L h_1 - Q_1 h_s)}{k \epsilon h_1^3 (h_s - h_1)} \quad \dots\dots\dots (84)$$

上式を(80)に代入して、積分を行なえば上層の鉛直流速は次のように表わされる。

$$w_1 = \frac{\lambda}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial t} z + \frac{Q_1(Q_L h_1 - Q_1 h_s)}{k \varepsilon h_1^3 (h_s - h_1)} z \quad \dots\dots\dots (86)$$

(86)を鉛直方向のDarcy 法則を示す(26)に代入して、さらに z について積分を行ない、境界条件 $z = 0, \quad p_1 = 0$ を考慮すれば、上層の圧力分布に関し次式が求められる。

$$p_1 = \rho_1 g \left\{ z - \frac{1}{2k} \left\{ \frac{\lambda}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial t} z^2 + \frac{Q_1(Q_L h_1 - Q_1 h_s)}{k \varepsilon h_1^3 (h_s - h_1)} z^2 \right\} \right\} \quad \dots\dots\dots (87)$$

海岸線においては圧力は連続でなければならないので

$$x = 0, \quad z = h_1 = h_{10}, \quad Q_1 = Q_s \quad \dots\dots\dots (88)$$

とし、とき、上式の p_1 は海側の静水圧 $\rho_2 g h_{10}$ に等しくならなければならない。すなわち、

$$\rho_2 g h_{10} = \rho_1 g \left\{ h_{10} - \frac{1}{2k} \left\{ \lambda \frac{d h_{10}}{d t} + \frac{Q_s(Q_L h_{10} - Q_s h_s)}{k \varepsilon h_{10}^2 (h_s - h_{10})} \right\} \right\}$$

あるいは

$$2 \varepsilon = -\frac{\lambda}{k} \frac{d h_{10}}{d t} - \frac{Q_s(Q_L h_{10} - Q_s h_s)}{k^2 \varepsilon h_{10}^2 (h_s - h_{10})} \quad \dots\dots\dots (89)$$

上式は海岸線で鉛直流速効果を考えた場合の、上層に関する圧力の平衡条件式である。

特別な場合として $t = \infty$ の時を考えれば、定常状態となる筈であるので

$$\begin{aligned} \frac{d h_{10}}{d t} &= 0, \quad Q_L = Q_s \\ \therefore (h_{10})_{t=\infty} &= \frac{|Q_L|}{\sqrt{2} k \varepsilon} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (90)$$

この値は、定常流の h_{10} を示す(28)と一致している。

下層においても全く同様な考察を行なえば、圧力分布に関し次式が求められる。

$$p_2 = \rho_2 g \left\{ z - \frac{1}{k} \left\{ \frac{\partial Q_1}{\partial x} \frac{1}{h_s - h_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{Q_L - Q_1}{(h_s - h_1)^2} \right\} \left(\frac{z^2}{2} - h_s z \right) \right\} + C \quad \dots\dots\dots (91)$$

こゝで境界条件 $x = 0, \quad h_1 = h_{10}, \quad Q_s$ において

$$\begin{aligned} z &= h_s, \quad p_2 = \rho_2 g h_s \\ z &= h_{10}, \quad p_2 = \rho_2 g h_{10} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (92)$$

を与えて積分常数 C を消去すれば

$$\frac{1}{k} \left\{ \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} \right)_{x=0} \frac{1}{h_s - h_{10}} - \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)_{x=0} \frac{Q_L - Q_s}{(h_s - h_{10})^2} \right\} \left\{ \frac{1}{2} (h_s^2 - h_{10}^2) - h_s (h_s - h_{10}) \right\} = 0$$

第2項は明らかに零でないので第1項が零である。こゝで、さらに(9)の第1式および(84)を考慮し、それぞれ $\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} \right)_{x=0}$ および $\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)_{x=0}$ を書き直せば次式が導かれる。

$$-\lambda \frac{d h_{10}}{d t} - \frac{(Q_L h_{10} - Q_s h_s)(Q_L - Q_s)}{k \varepsilon h_{10} (h_s - h_{10})^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (93)$$

上式は海岸線で鉛直流速効果を考えた場合の、下層に関する圧力の平衡条件式である。

上式を変形すれば

$$-\lambda \frac{d h_{10}}{d t} = \left(u_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right)_{x=0} \quad \dots\dots\dots (94)$$

上式は次のような物理的意味を持っている。すなわち下層では、境界面上昇による鉛直上向き流速と、境界面にそって流入する鉛直下向き流速とが相殺された状態になっている。したがって、下層では見かけ上鉛直流速の効果が静水圧分布を乱さないで、塩水層と海とは同一の流体同志で圧力の釣合いを保っていると考えられる。

(89) および (93) から $\frac{d h_{10}}{d t}$ を消去すれば

$$\frac{Q_L h_{10} - Q_s h_s}{\sqrt{2 k \epsilon h_{10} (h_s - h_{10})}} = \frac{\beta (\bar{Q}_s - \alpha)}{\alpha (1 - \alpha)} = 1 \quad \dots\dots\dots (95)$$

が成立する。上式の第2式は第1式の無次元表示である。

こゝに

$$\left. \begin{aligned} \frac{h_{10}}{h_s} &= \alpha, \quad \left(\frac{h_{10}}{h_s} \right)_{t=\infty} = \beta = \frac{|Q_L|}{\sqrt{2 k \epsilon h_s}} \\ \frac{Q_s}{Q_L} &= \bar{Q}_s, \quad \bar{Q}_s_{t=\infty} = 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (96)$$

淡水流量の場所的分布：

(84) に注目すれば、もし Q_1 が h_1 のみの関数で表わせるものであるならば、同式は容易に積分され境界面形状が導かれる。このことより、Bear & Dagan は塩水くさびの先端および海岸線の境界条件

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= h_s, & Q_1 &= Q_L \\ h_1 &= h_{10}, & Q_1 &= Q_s \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (97)$$

を満足する最も簡単な次のような関数

$$Q_1 = Q_L - (Q_L - Q_s) \frac{h_s - h_1}{h_s - h_{10}} \quad \dots\dots\dots (98)$$

を仮定した。しかし、この仮定から求められる境界面形状は常に下向きに凸となる。一方実際の現象では、現象の初期には境界面形状は上向きに凸、時間が経過するにつれ下向きに凸となる傾向が支配的である。そこで、このような特性の表現されることを期待して、こゝでは新しく次式のような仮定を設ける。

$$Q_1 = Q_L + (Q_s - Q_L) \left\{ \eta \frac{h_s - h_1}{h_s - h_{10}} + (1 - \eta) \left(\frac{h_s - h_1}{h_s - h_{10}} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (99)$$

こゝに、 η は未定の常数であり実験結果から定めることとする。

なお、 $\eta = 1$ とおいたものが (98) となる。

図-20(a)は淡水流量の場所的分布に関する Bear らの仮定を示し、(b)はこの解法における仮定を示している。

境界面形状：

(99) を (84) に代入し無次元化を行なえば次式が求められる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{A + B - B \zeta}{\xi} \quad \dots\dots\dots (100)$$

こゝに

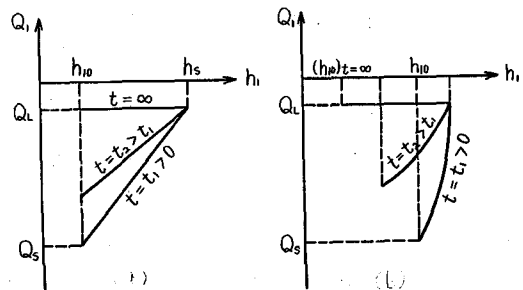


図-20 淡水流量の場所的分布

$$A = \sqrt{2} \beta \left\{ 1 + \frac{(\bar{Q}_s - 1) \eta}{1 - \alpha} \right\} \quad \dots\dots\dots (101)$$

$$B = \frac{\sqrt{2} \beta (\bar{Q}_s - 1) (1 - \eta)}{(1 - \alpha)^2}$$

また

$$\zeta = h_1 / h_s, \quad \xi = x / h_s \quad \dots\dots\dots (102)$$

いま

$$\mu = \frac{B}{A + B} \quad \dots\dots\dots (103)$$

とにおいて (100) を積分し、境界条件 $\xi = 0, \zeta = \alpha$ を代入する。
さらにこの結果に (101) および (95) を考慮すれば次式が求められる。

$$\bar{x} = \frac{(1 - \alpha) \beta}{(1 - \eta) (\alpha - \beta)} \left\{ \frac{1}{\mu} \log \frac{1 - \mu \alpha}{1 - \mu \zeta} - (\zeta - \alpha) \right\} \quad \dots\dots\dots (104)$$

こゝに

$$\bar{x} = \sqrt{2} \beta \xi = \frac{|Q_L| x}{k \varepsilon h_s^2} \quad \dots\dots\dots (105)$$

また (101) および (95) より

$$\mu = \frac{(1 - \eta) (\alpha - \beta)}{\alpha \{ 1 + \beta (\eta - 1) - \eta \alpha \}} \quad \dots\dots\dots (106)$$

(104) は任意時刻における無次元化された境界面形状を表わすもので、 α を *parameter* として含んでいる。また、塩水くさび先端の位置は $\zeta = 1, \bar{x} = \bar{x}_t$ と置くことにより

$$\bar{x}_t = \frac{(1 - \alpha) \beta}{(1 - \eta) (\alpha - \beta)} \left\{ \frac{1}{\mu} \log \frac{1 - \mu \alpha}{1 - \mu} - (1 - \alpha) \right\} \quad \dots\dots\dots (107)$$

で示される。(104) で示される境界面形状は

$$1 + \beta (\eta - 1) - \eta \alpha = 0 \quad \dots\dots\dots (108)$$

を満足する α の値を α_c とすれば、 $\alpha > \alpha_c$ であれば上向きに凸、 $\alpha < \alpha_c$ であれば下向きに凸となり、実際現象の曲率の変化に合致するものである。

Parameter α の決定：

α は海岸線における淡水深を無次元化して示したものであるが、これは時間の経過とも 1 から β まで減少する。この時間的変化を求めるため、くさびの体積に関する連続の方程式を考慮するいま、くさびの体積を V_s とし無次元化されたそれを $\bar{V}_s$ で表わせば

$$\frac{d\bar{V}_s}{d\bar{t}} = 1 - \bar{Q}_s \quad \dots\dots\dots (109)$$

こゝに

$$\bar{V}_s = \frac{|Q_L| V_s}{k \varepsilon h_s^3}, \quad \bar{t} = \frac{Q_L^2 t}{\lambda k \varepsilon h_s^3} \quad \dots\dots\dots (110)$$

しかるに

$$\bar{V}_s = \int_{\alpha}^1 \bar{x} d\zeta$$

であるから (104) より

$$\bar{V}_s = \frac{(1 - \alpha) \beta}{(\eta - 1) (\alpha - \beta)} \left[\frac{(1 - \alpha)^2}{2} - \frac{(1 - \alpha)}{\mu} - \frac{1 - \mu}{\mu^2} \log \frac{1 - \mu}{1 - \mu \alpha} \right] \quad \dots\dots\dots (111)$$

一方(109)において $\bar{V}_s$ は α の関数であることを考慮し、さらに(95)を用いて $\bar{Q}_s$ を消去すれば次式が求められる。

$$\frac{d\bar{V}_s}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{(1-\alpha)(\alpha-\beta)}{\beta} \quad \dots\dots\dots (112)$$

(111)および(112)を連立して解けば、 α の時間的変化を求めることができる。また、得られた結果を(104)および(107)に代入すればそれぞれ任意時刻の境界面形状および塩水くさび先端の位置が計算できる。

数値計算結果：

図-21は境界面形状の時間的変化を実験と理論とを対比させて示したものである。この図より、理論は明らかに境界面曲率の変化特性を裏付けるものであることが知られる。

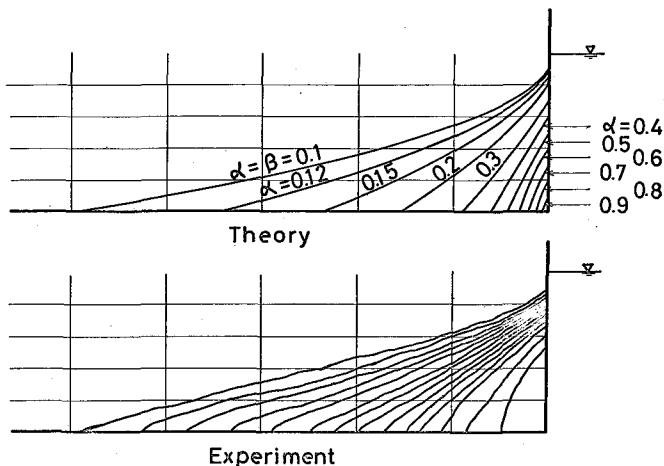


図-21 境界面の時間的変化

図-22は α と $\bar{x}_t$ の関係について理論と実験結果を比較したものである。すなわち、境界面の海岸線との交点の位置はくさび先端の位置が進むにつれ上昇することが知られ、この場合 $\eta=2$ とすれば良いことがわかる。

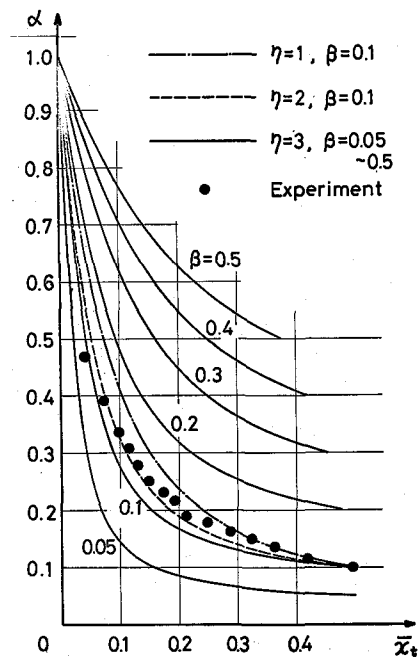


図-22 $\alpha - \bar{x}_t$ に関する理論と実験との比較

図-23はくさび先端の時間的進行状況について、玉井、嶋の前に行った理論結果、こゝで示した理論結果および実験結果を示したものである。この図より、この理論に基づいてやはり $\eta=2$ としたときのものが最も良い結果を与えることが知られる。

図-24は、 α を一定とした場合、 $\eta=1$ および4にとったときの α が変化するとした場合につき、それぞれ β をparameterとしてくさび先端の進行状況を理論的に示したものである。この図より、 α を固定するとくさびの進行が早目になることが知られる。

なお、(111)および(112)の計算は $\eta=1$ 以外は解析解が求められなかったもので、電算機による数値積分を行なって求めている。

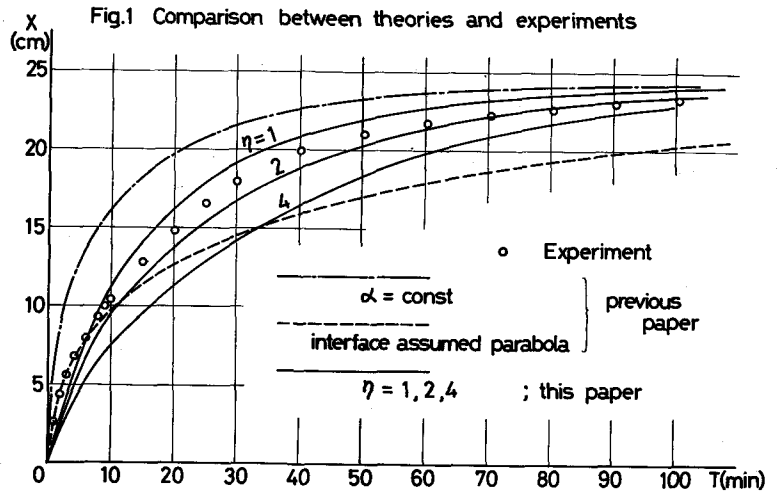


図-23 くさびの進行についての理論と実験との比較

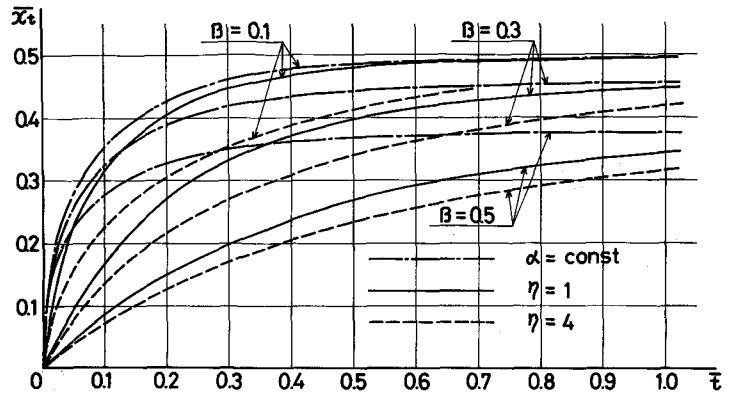


図-24 くさびの進行状況

参 考 文 献

- 1) Nomitsu, Toyohara, Kamimoto, On the Contact Surface of Fresh and Salt-water under the Ground near a Sandy Sea Shore, Memoires of Coll. Sci., Kyoto Imperial Univ., A, Vol. 10, No. 7, 279, 1927
- 2) 河口湖工学, 日本工業用水協会, 1968
- 3) S. E. H. Ford, S. G. Elliot, Investigation and Design of the Plover Cove Water Scheme, Proc. of I. C. E., Vol 32, PP. 255-293 Oct., 1965
- 4) D. Groenman, Delta, Land in Development, Uitg. Roelofs van Goor Amersfoort
- 5) 応用水理学上, 石原藤次郎, 本間仁編 P. 197, 1957 等を参照せよ。

- 6) H. R. Henry , *Salt Intrusion into Fresh—Water Aquifers* , *Journr. Geophysics Res.* , Vol. 64, No. 11, P. 1911 — 1919, Nov. 1959
- 7) G. Hamel , *Über Grundwasserströmung* , *Z. A. M. M.* , XIV. 129, 1934
- 8) R. E. Glover , *The Pattern of Fresh—Water Flow in a Coastal Aquifer* , *Journr. Geophysics Res.* , Vol. 64, No. 4, P. 457 ~ 459 Apr. 1959
- 9) R. R. Rumer, D. R. F. Harleman , *Introduced Salt —Water Wedge in Porous Media*, *Proc. of A. S. C. E.* , Vol. 89, No. HY6, Nov. 1963
- 10) 応用水理学Ⅱ, 石原藤次郎, 本間仁編, 丸善, P. 301~309, 1958 参照
- 11) 荏田地区工業用水道水源調査報告書 P. 133, 1962
- 12) 嶋裕之, 河口湖工学, P. 79, 1968
- 13) N. Tamai, S. Shima, *Salt—Water Wedge in Unconfined Coastal Aquifers*, 土木学会 論文集, No. 139, March 1967
- 14) 前出 9) と同じ
- 15) J. Bear, G. Dagan, *Moving Interface in Coastal Aquifers*, *Proc. of A. S. C. E.* , Vol. 90, No. HY4, July 1964
- 16) S. Shima, *Transient Characteristics of Salt —Water Wedge*, *Proc. of 13th Congr. of I. A. H. R.* , Vol. 4, 1969
- 17) 前出 15) と同じ
- 18) G. Dagan, *The Simmlation of the Movement of an Interface between Salt and Fresh Waters in a Coastal Aquifer hy the Aid of a RC Analag*, *Proc. of 13th Congr. of I. A. H. R.* , Vol. 4, 1969
- 19) 前出 13) と同じ