

移動床の抵抗法則

杉 尾 捨三郎

第一章 19世紀末までの平均流速公式^(3, 4, 5)

ドイツ人技師 *Albert Brahms* は、1757年に出版した著書の中で「河床に働らく流れの減速作用は、流れ方向の重力の加速度とつり合い、かつ流速の2乗に比例する」と述べた。しかし公式の形になかったので、平均流速公式として発表されたのは *Chézy* 公式が最初である。

(1) *Chézy* 公式 (1775)

Antoine Chézy (1718-1798) は30才のとき国立の学校 (のちに *Ecole des Ponts et Chaussées* とよばれた) に入学し、来業後そこの職員となり、パリ市内の橋梁、道路などの設計と工事を担当した。当時パリの上水道の水源を付近の *Yvette* 河に求め、それを市内へ導入する計画があり、彼は運河の細部計画をまかせられた。そこで彼はセーヌ河でフロートを用いて実験し、その成果報告書を所長に呈出した (1776)。所長の *Perronet* は彼の計算結果だけを計画書に用いたが、残念なことに *Chézy* が行なった研究部分を報告書に記載し忘れたので、彼の公式は書庫の中で長く塵に埋もれる結果となった。彼は貧困のうちに1790年退職したが、もとの教え子 *Prony* 卿の好意で死ぬ一年前にもとの学校の校長になった。

その後1803年に仏人 *Girard* が、1804年には *Prony* が *Chézy* の研究を発掘したがフランス国内では反響がなく、むしろドイツで有名になり、さらに1897年米人技師の *C. Herschel* が自分の著書に引用したところから急に *Chézy* の名が高くなった。

(2) *Du Buat* 公式 (1786)

Pierre Louis Georges Du Buat (1738-1809) は陸軍技師として仏政府の援助のもとに多くの水流実験を行なう機会に恵まれた。その成果を含めて1779年に出版された彼の著書は全欧州で広く読まれ、各国語に翻訳された。彼の公式はほとんど *Chézy* のものと同型であったが、*Chézy* が無名であったのでフランスでは *Du Buat* 公式が有名となった。彼は長兄の死とともに貴族になったが、2年後 (1793年) フランス革命のため故郷を離れ、1802年に帰郷したときは財産はほとんど没収されていたという。

さて *Chézy* 以後の時代には (i) 河床摩擦は果して V^2 に比例するか、(ii) シエジー係数 C は一定であるか、などの点に議論が集中した。

(3) *Girard* の研究 (1803)

18世紀末の仏物理学者 *De Coulomb* (1736-1806) はワイヤに結んだ円板を液体にひたし、ワイヤのねじりによる回転を測定して抵抗力を求めたが、それは V に比例する部分と V^2 に比例する部分の和で表わされると述べていた。*Pierre Simon Girard* (1765-1835) は *Coulomb* の理論をはじめて河川流に応用して1803年に次式を発表した。

$$qRS = c(V + V^2) \quad (1-1)$$

(4) *Prony* の研究 (1804)

De Prony (1755-1839) は *Chézy* の教え子で、仏、伊で技師として働らき、後 *Ecole des Ponts et Chaussées* の校長になった。彼は1804年 *Du Buat* 公式に対する論文をかき、彼より11年前の1775年に *Chézy* が同一型の、しかもより簡単な式を得ていたと述べ、さらに *Coulomb* 系統の自身の式を提案した。

$$RS = \lambda_1 V + \lambda_2 V^2 \quad (1-2)$$

(5) Eytelwein の研究 (1818)

Johann Albert Eytelwein (1764-1848) は河川・港湾関係のドイツ人技師で、1801年水工学に関する諸外国の研究を翻訳出版した。特に1826年の著者はその方面の標準専門書として高く評価された。1818年に彼は次式を公表した。

$$RS = 0.000024V + 0.000366V^2 \quad (1-3)$$

V がきわめて大になると上式はつぎの *Chézy* 型の式

$$V = 50.9 (RS)^{\frac{1}{2}} \quad (1-4)$$

になると述べた。この式は1830年代イタリーで有名になり、*Tadini* 公式とよばれた。

(6) Lahmeyer の研究 (1845)

水路の曲りを考慮したもので、曲率半径を r 、水路巾を B とすれば

$$RS/V^{1.5} = 0.0004021 + 0.00288 (B/r)^{1/2} \quad (1-5)$$

直線水路では $r = \infty$ であるから次式が得られる。

$$V = 49.8 V^{1/4} R^{1/2} S^{1/2} \quad (1-6)$$

(7) De Saint-Venant (1846)

$$V = 60 (RS)^{11/21} \quad (1-7)$$

(8) Darcy と Bazin の研究 (1865)

Henry Philibert Gaspard Darcy (1803-1858) は仏の *Dijon* 市の水道技師で、卓抜した設計と工事で著名であった。*Henri Emile Bazin* (1829-1917) は彼の有能な助手であった。彼らは第2次仏政府から研究費の後援をうけ、市の郊外に長さ 596.5 m の実験水路を用い、矩形、台形、三角形、半円形など種々な断面形と粗さにつき大規模かつ精密な測定 (*Pitot* 管が用いられた) を実施し、全世界から高く評価された。*Darcy* の没後2年目に *Bazin* は実験を完成し (1860)、1865年には *Darcy* と共著の資料を発表、1886年には技監に昇任した。両氏の平均流速公式は

$$RS = \left(a + \frac{b}{R}\right) V^2 \quad (1-8)$$

(9) Bazin 公式 (1897)

(1-8) 式はその正確さのゆえに世界の注目を集めたが、式の中に2個の係数 a 、 b を含むことが実用上不便であったので、*Bazin* はこれを改良した *Bazin* 公式を発表した。

$$C = 87 / \{1 + r / \sqrt{R}\} \quad (1-9)$$

こゝに r は "*Rugosity factor*" とよばれ、水路潤辺の材料により定まる常数とされた。

(10) Humphreys と Abbot の研究 (1861)

Andrew Atkinson Humphreys (1810-1883) と *Henry Larcom Abbot* (1831-1927) はともに *West Point* を卒業した陸軍軍人で、前者は1851-1860年 *Mississippi* 河デルタ測量部の責任者であり、*Abbot* はその部下であった。彼等は専ら二重浮子を用いて流速を測定したが、水位が同一でも増水期と減水期では流量が20%も異なることを明らかにした。かつてない龐大な測量結果は610頁の報告書となり1861年に出版されたが、*best seller* として歓迎された。平均流速公式としては次式を提案した。⁽⁶⁾

$$V = (5.0 \sim 5.7) R^{0.5} S^{0.25} \quad (1-11)$$

こゝに、径深 R が小さいときは5.0を、大きいときは5.7をとる。上式には粗度に関する係数を含まないなどの理由から余り広く利用されなかったが、彼等の莫大な測量結果は広く活用された。

(11) Ganguillet と Kutter 公式(1869)

Emile Oscar Ganguillet (1818-1894) はスイスのベルン市にある公共事業省の技師長で Wilhelm Rudolph Kutter (1818-1888) はその部下であった。彼等は開水路の流れに興味をもち、スイス山岳河川で一連の実測を行なった。さて前述のハムフリースらは(1-11)式の妥当性を検討したいと考え、ガンギレーらにそれを依頼した。その結果彼等は(1-11)式は緩流河川にしか適しないと結論したが、さらに彼等はどのようなコウ配の流れにも適する流速公式の開発につとめ、次式を得た。

$$C = \frac{a + \frac{b}{n} + \frac{m}{S}}{1 + (a + \frac{m}{S}) \sqrt{\frac{n}{R}}} \quad (1-12)$$

ここに a, b, m は常数, n は粗さに関する係数である。数百にのぼる実測資料(16個は *Humphreys* らから、97個は *Basin* から、残りは自身のもの)を用いて常数を決定し、 n の値は最初6種類しか定めていなかった。彼等の論文の登載された雑誌は直ちに売切れるほどの人気で、1877年に単行本として出版されたものは各国語に訳され、全世界に広く活用された。

(12) Gauckler の研究(1867)

マニングの論文より22年前、仏人技師 *Philippe Gaspard Gauckler* (1826-1905) は、すべての種類の水路に対し適する式として次式を提案していた。

$$S < 0.0007 \quad \text{ならば} \quad V = \lambda_1 R^{1/3} S \quad (1-13)$$

$$S > 0.0007 \quad \text{ならば} \quad V = \lambda_2 R^{2/3} S^{1/2} \quad (1-14)$$

(13) Hagen の研究

G.W. Hagen (独) は *Humphreys* らの測定結果を検討し、次式を得た(1861)。

$$V = 2.425 R^{1/2} S^{1/6} \quad (1-15)$$

さらに1867年には自然河川に対し、

$$V = 3.34 R^{1/2} S^{1/5} \quad (1-16)$$

$$\text{小さい水路に対し} \quad V = 4.9 R S^{1/3} \quad (1-17)$$

を得た。1881年には *A. Cunningham* がガンジス運河で得た資料をもとにして、*Manning* 式と同型の式を発表した。

$$V = 4.37 R^{2/3} S^{1/2} \quad (1-18)$$

(15) Manning の研究⁽⁷⁾⁽⁸⁾ (1889)

愛蘭人 *Robert Manning* (1816-1897) は30才のとき、公共事業省の書記を振りだしとし、種々な排水工事、運河航路工事、港湾工事を担当し、ついには技師長にまで昇進した。愛蘭・土木学会の会長も一時つとめたこともあった。1889年に彼が学会で発表した論文では、従来の7種の平均流速公式を比較し、また *Darcy-Basin* の試料を検討して次式を提案した。

$$V = c_1 R^{2/3} S^{1/2} \quad (1-19)$$

しかし彼自身、上式は次元的に正しくなく、また $2/3$ というべき数が実用的でないと考え、同じ論文のなかで(1-19)式よりむしろ次式の方をすすめている。

$$V = C \sqrt{S} \left[R^{1/2} + \frac{0.22}{m^{0.5}} (R - 0.15) \right] \quad (1-20)$$

ここに m は水銀柱ではかった大気圧である。1895年には彼は(1-20)式のみを挙げ、(1-19)式は全く放棄してしまった。(1-19)式と同型の式を発表した人は少なくとも10人はあると言われるが、同式がマニングの名を完するに到った理由は以下のようなものである。

1890年、Ecole des Ponts et Chausséesの技師、A.A. Flamant は1889年の Manning の論文をよみ、1891年に出版した著書のなかに(1-19)式とマンニングの名を引用した。そのとき彼は(1-19)式の係数 C_1 は Kutter の n の逆数であると誤って説明した。Flamant の著書を読んだ英人 Willcocks と Holt が1899年に著書のなかに、マンニング公式として次式を紹介した。

$$V = (1/n) R^{2/3} S^{1/2} \quad (1-21)$$

その時代以後、上式はマンニング公式として不動のものとなった。近年マンニング公式の名の起源についての研究がすみ、(1-21)式は『Gauckler-Manning』公式とよぶのが定説のようである。(7)

第二章 理論的研究の発展(固定床)

20世紀の前半はドイツの Göttingen 大学の Prandtl 教授を中心として、円管内流れに関する理論的研究が飛躍的に発展した時期で、この理論が次第に開水路(固定床)流れにも応用することができるようになった。

1 円管内の流れ

(1) Friction Factor f の導入⁽¹⁾

1850年ごろ Darcy と Weisbach ははじめて

$$S = f \cdot \left(\frac{1}{4R} \right) \frac{V^2}{2g} \quad (2-1)$$

で定義される無次元量の Friction Factor " f " を導入した。こうして従来の Manning の粗度係数 n や Chézy 係数の C の代りに、摩擦係数 f が用いられるようになった。 C または n と f との関係はつぎのようである。

$$C^2 = \frac{8g}{f} \quad (2-2)$$

$$n^2 = \frac{f}{8g} R^{\frac{1}{3}} \quad (2-3)$$

(2) 境界層理論⁽⁵⁾⁽⁹⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾

1904年、Ludwig Prandtl (1875-1953) は Heidelberg で開かれた国際数学会議において、『粘性がきわめて小さい流体運動』と題する研究を発表し、レーノルズ数が大きい流れではいわゆる境界層が発達することを明らかにした。わずか8頁に過ぎないこの論文が近代流体力学発展の起爆薬となり、さらに航空力学のめざましい進歩をうながすことになろうとは、大部分の聴衆は気付かぬ処であった。たゞ彼の研究に興味をもった Göttingen 大学の F. Klein は Prandtl を同じ年に Göttingen 大学の教授にむかえた。Prandtl は München で機械工学を専攻し、大学では弾性学の分野で学位を得、数年大工場で空気の流れの研究をした後、1901年には Polytechnic Institute of Hannover の教官に任命された。そして3年後に上記の論文を発表した。Göttingen 大学に移った後は、Blasius, von Kármán, Tollmien, Nikuradse ら、多くの有能な教え子の協力の下で、流速の対数分布、形状抵抗、表面抵抗などの研究にすぐれた足跡を残した。1907-1909年に彼等が用いた循環式風洞や種々の測定装置は、他の国々の研究施設のモデルとされた。

(3) Blasius の研究(1911)

Paul Richard Heinrich Blasius (1883-?) は1908年、層流底層の速度分布と抵抗に関する理論解を発表することにより Prandtl の境界層理論を数量的に表わし、さらに実験

的研究によりこれを説明した。さらに滑面円管に対する *friction factor* f をレーノルズ数, $Re = VD/\nu$ のみの関数であるとして次式を発表した。

$$f = \frac{0.316}{Re^{1/4}} \quad (2-4)$$

(4) von Kármán の研究

Theodor von Kármán (1881—1963) は Budapest 大学卒業後 Göttingen 大学で学位を得て教官となった。1912年には Aachen の Polytechnic Institute に新設された航空研究所の所長に任ぜられた。彼は1911年に有名な Kármán の渦列理論を, 1921年には境界層の運動量理論を発表し, その後形状抵抗, 円管内の速度分布, 表面抵抗の研究分野で活躍した。

(5) Nikuradse の研究

Johann Nikuradse (1894 — ?) は, 均一粒の砂を円管内面に塗りつけて水流の実験を行ない, f と Re とを両軸とする有名なグラフ (図2-1) を得た。これより, Re が大になると Re とは無関係に f の値は一定となり, 単に相対粗度 (Relative Roughness) k/r_0 のみの関数となることを明らかにした。ここに r_0 は円管の半径である。

(6) 円管内の流速式 (10, 11, 12, 14)

Prandtl は1926年に発表した混合距離の仮定を基礎にして, 滑面と粗面の円管内の乱流流速分布, 平均流速公式などを von Kármán と協力して1934年ごろまでに完成した。

[A] 滑面の円管

$$\text{流速分布式: } \frac{v}{v_*} = A_s + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} \quad (2-5)$$

ここに v_* は摩擦速度とよばれ $v_* = (\tau/\rho)^{1/2}$ である。

Nikuradse の実験結果から $A_s = 5.5$, $\kappa = 0.40$ であるから結局

$$\frac{v}{v_*} = 5.5 + 5.75 \log \frac{v_* y}{\nu} \quad (2-5')$$

$$\text{平均流速式は } \frac{V}{v_*} = 1.75 + 5.75 \log v_* \frac{r_0}{\nu} \quad (2-6)$$

$$f \text{ を用いると } \frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log (Re \sqrt{f}) - 0.8 \quad (2-7)$$

$$\text{または } = 2 \log \frac{Re \sqrt{f}}{2.512} \quad (2-7')$$

Re が増加して $Re > 100000$ になると (2-4) の Blasius 式は過小の値を与えるので, (2-7) の Prandtl の universal law が用いられる。

[B] 完全粗面の乱流

$$\text{流速分布式: } \frac{v}{v_*} = A_r + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k} \quad (2-8)$$

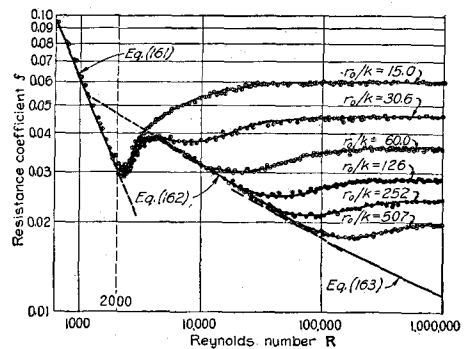


図 2-1 f と Re の関係

Nikuradse の実験結果を用いると $A_r = 8.5$, $\kappa = 0.4$ より

$$\frac{v}{v_*} = 8.5 + 5.75 \log \frac{y}{\kappa} \quad (2-9)$$

$$\text{平均流速式} \quad \frac{V}{v_*} = 4.73 + 5.75 \log \frac{r_0}{\kappa} \quad (2-10)$$

$$f \text{ を用いると } \frac{1}{\sqrt{f}} = 1.74 + 2 \log \frac{r_0}{\kappa} = 2 \log \frac{14.83 R}{\kappa} \quad (2-11)$$

こゝに κ は Nikuradse の実験を用いた砂の径である。

〔C〕 滑面と粗面との区別

層流底層の厚さ $\delta' = 11.6 \nu / v_*$ が粗面高 κ より大ならば水理的には『滑面乱流』, さらに R_e が増大して $\delta' < \kappa$ となれば水理的には『粗面乱流』となると考えられる。実験値を参照して H. Schlichting⁽¹¹⁾ は一種のレーノルズ数, $v_* \kappa / \nu$ を考え

$v_* \kappa / \nu < 4$ ならば 滑面乱流

$v_* \kappa / \nu > 70$ ならば 粗面乱流

この中間領域は R_e と相対粗度の両方の影響をうける Transition 領域であるとみなした。

(7) Colebrook の研究 (1938)

図 2-2 は 1937 年, C.F.

Colebrook と C.M. White が市販

パイプについて, $(1/\sqrt{f} - 2 \log$

$r_0/\kappa)$ と $R_e \sqrt{f}/(r_0/\kappa)$ と

の関係を検討した結果を示してい

る。⁽¹⁷⁾ これによると Transition

に対する市販パイプの抵抗曲線は,

Nikuradse の均一砂の曲線と

Colebrook らの不均一砂の曲線

の中間をゆるやかに変化している。

そこで一般市販パイプについて彼

は次式を発表した。(1938)

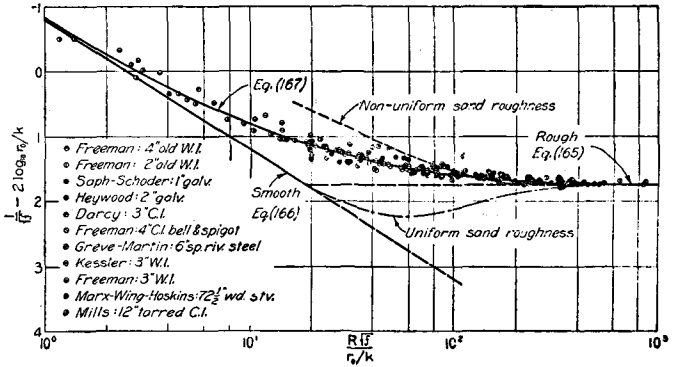


図 2-2 Colebrook の図

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2 \log \frac{r_0}{\kappa_s} = 1.74 - 2 \log \left(1 + 1.87 \frac{r_0}{R_e \sqrt{f}} \frac{\kappa}{\kappa_s} \right) \quad (2-12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[\frac{\kappa_s}{14.83 R} + \frac{2.512}{R_e \sqrt{f}} \right] \quad (2-13)$$

こゝに κ_s は相当粗度 (Equivalent Sand Roughness) とよばれ, 粗面の代表的高さである。

また $R = D/4 = r_0/2$ である。なお上式は

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{R_e}{200} \frac{\kappa_s}{D} \quad (2-14)$$

を示す曲線と滑面に対する曲線との中間領域に適用できるといわれ, (2-12), (2-13) 式は 1944 年発表された Moody 図の考えの基礎になっている。|

2 開水路（固定床）の流れ

開水路の流れの平均流速公式は、流速分布式を断面全体にわたり積分して求められるが、二次元流れでは水深 H の代りに径深 R を使い、かつ v_* の代りに径深を考慮した *Shear velocity* の

$$v_{*R} = (\rho R S)^{1/2} \quad (2-15)$$

を用いればよく、円管の内径 D は $D = 4R$ と考えればよい。

[A] 滑らかな水路

円管の場合と同様な手法を用い、かつ $H \rightarrow R$ とすれば (2-6) 式に相当する次式が得られる。

$$\frac{V}{v_{*R}} = 3.0 + 5.75 \log \frac{v_{*R} \cdot R}{\nu} \quad (2-16)$$

(1) Keulegan の研究⁽¹³⁾ (1938)

米物理学者 *Garbis Hovannes Keulegan* (1890-?) は 1938 年、*von Kármán* の理論を開水路の流れに応用したが、(2-16) 式のほかに断面の形による影響として β/κ 、自由表面およびせん断応力の不均一性による影響として $-\bar{\epsilon} (V/v_{*R})$ の項を加え、次式を提案した。

$$\frac{V}{v_{*R}} = A_s - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \log \frac{v_{*R} \cdot R}{\nu} + \frac{\beta}{\kappa} - \bar{\epsilon} \frac{V}{v_{*R}} \quad (2-17)$$

Keulegan よれば β の値は図 2-3 のような断面積 A の台形断面に対し

$$\begin{aligned} \beta &= \log(H/R) - H^2 \alpha / 4A \\ \alpha &= \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + 2 \operatorname{cosec} \theta_1 + 2 \operatorname{cosec} \theta_2 \end{aligned} \quad (2-18)$$

で、特に長方形断面水路では

$$\beta = \log(1 + 2H/B) - H/B \quad (2-19)$$

で与えられる。⁽¹⁴⁾ $\bar{\epsilon}$ の値は与えられていないが、実際はきわめて小さい値であると思われ、ふつう無視される。

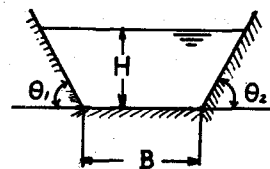


図 2-3 記号図

(2) Powell の研究⁽⁹⁾

R.W. Powell は 1946-1949 年ごろ、Keulegan の (2-17) 式のなかの V/v_* の代りに *Chézy* 係数 C を用いて変形し、緩コウ配の流れにつき理論式を発表した。特に巾の広い水路に対しては次式を提案している。

$$C = 23.2 \log \frac{R}{C} \quad (m \cdot sec) \quad (2-20)$$

さらに急コウ配流れに対しては、フルード数 Fr と流れの不安定性を示す量、*Vedernikov* 数 Ve を含む式を発表した。

(3) 岩垣の研究 (1953)

岩垣は自由表面の影響を検討した結果 (2-16) 式を一般に

$$\frac{V}{v_{*R}} = A_s - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \log \frac{v_{*R} \cdot R}{\nu} \quad (2-21)$$

で表わすとき、 A_s は Fr が大になるとともに減少することを認め、 A_s を Fr の関数で表現した。⁽¹⁹⁾

$$\begin{aligned} Fr &\leq 0.89 ; A_s = 6.3 \\ Fr &\geq 0.89 ; A_s = 6 - 5.75 \log Fr + 1.2 (\log Fr)^2 \end{aligned} \quad \dots (2-22)$$

[B] 粗い面の水路

粗面円管に対する流速分布式

$$\frac{v}{v_*} = A_r + 5.75 \log \frac{y}{k} \quad (2-23)$$

を鉛直方向に積分し、開水路二次元流れの平均流速 V を求めると、

$$\frac{V}{v_*} = A_r - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \ln \frac{H}{k} \quad (2-24)$$

$$\text{または} \quad \frac{V}{v_{*R}} = 6.0 + 5.75 \log \frac{R}{k} \quad (2-25)$$

が得られる。

(1) 相当粗度

一般の粗度要素は *Nikuradse* の均一砂と異なり、その高さも配置状態も不均一であるから、単に高さのみから抵抗法則を規定するのは困難であるが、こゝに相当粗度 k_s の概念を採用することにより問題を単純化することができる。*Hermann Schlichting* (1936) は任意の粗度に対し、

$$\frac{1}{f} = (2 \log \frac{R}{k_s} + 1.74)^2 \quad (2-26)$$

が成立するような k_s を相当粗度 (Equivalent Sand Roughness) とよぶことにした。⁽¹¹⁾ つまりこの不規則な粗面全体を平均化して、均一砂粒径で置換したものを k_s とみなせばよい。彼は数多くのイボ状粗度 (高さを k) を規則正しく配列させた種々の面について、 k_s の値を実験的に確かめた。

(2) Keulegan の研究

Keulegan は滑らかな水路の場合と同様に、つぎのようにおいた。

$$\frac{V}{v_{*R}} = A_r - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \ln \frac{R}{k_s} + \frac{\beta}{k} - \bar{\epsilon} \left(\frac{V}{v_{*R}} \right) \quad (2-27)$$

β および $\bar{\epsilon}$ は滑らかな水路の場合と同様である。 k_s は相当粗度で、*Nikuradse* の実験の砂の平均粒径に相当する。*Keulegan* は *Basin* の実験資料を用いて検討したが、きわめて良好な結果を得たという。

さて縦横比が 1 : 5 までの巾の広い水路では、 $\beta = 0.1$, $\bar{\epsilon} = 0$ とみなすことにすれば、

$A_r = 8.5$, $k = 0.4$ とおき

$$\frac{V}{v_{*R}} = 6.25 + 5.75 \log \frac{R}{k_s} \quad (2-28)$$

となる。⁽²³⁾ (2-25) 式の常数が $A_r = 6.0$ となっているのは、自由表面などの影響を考慮していないからである。

[C] 人工粗度の研究

人工粗度の研究を実験的に行なったのは *Basin* が最初と言われ、彼は水路床と壁面に棧を等間隔に配置したものを用いた。*V.L. Streeter* (1935) は円管内に螺旋溝粗度を、*Schlichting* (1936) はイボ粗度を、*J.W. Johnson* (1944) は棧粗度を用いて実験を行ない、棧間隔と高さの比が k_s/k に関係することを確かめた。その後 *Powell* (1946) は棧粗度を、細井 (1948) はガラス棒による棧粗度を、*W.E.S.* (1953) は *Ripple* 状の三角断面粗度を、*Koloseus* (1958) はイボ粗度を、足立 (1960) は棧粗度を、*Albertson* (1961) は阻壁粗度を、山岡 (1962) は棧粗度の実験をそれぞれ行なった。詳細は文献 (4), (11), (18) を

みられたい。

なお1963年にA.S.C.EのTask Forceがfriction factor f について勧告を行っているので、その要約を巻末の付録〔I〕に記載した。

第三章 移動床の上の流れ（I）概説

(1) 移動床上流れの研究の発展⁽⁵⁾

沖積水路の最も大きい特徴の一つは、ある流量のもとで河床砂れきが移動することである。したがって『砂がどのような条件のときに動きだすか』がまず研究の対象になった。Du Buat(1788)は砂れきの移動限界速度を実験的に研究し、Blackwell(1885)は公式をつくった。W. Diry(1885)は、河底砂れきの移動限界流速は粒子の水中重量の $1/6$ 乗根に比例すると述べ、Du Boys(1879)は限界掃流力の式、 $\tau_c = rDS$ を考案した。

20世紀前半はドイツの大学や研究所を中心に、実験水理学が急速に発達した時期でもあった。1898年には後年河川工学の父といわれたHubert Engels(1854-1945)が可動水路と揚水設備を用いて移動床実験を開始した。KarlsruheのTheodor Rehbock(1864-1950)は、今日みられるガラス壁の実験値を用い、土堰堤、余水路、取水口、橋脚、特に渦を発生する部分の流況の研究に貢献した。1934年にはEugène Meyer-Peter, Armin Schoch⁽²⁰⁾らが流砂量公式を、Hans Kramerは限界掃流力の実験結果を発表した。米国では1887年ごろから各地に水理実験所が設立されたが、移動床流れに関するすぐれた成果を発表したのはU.S. Geological Surveyが最初で、California大学に臨時につくった3個の木製水路（1個はガス壁）を利用し、Grove Karl Gilbert(1843-1918)指揮のもとに行なわれた研究であった。⁽²¹⁾ 主として掃流流砂量公式を求める目的であったが、実験範囲がきわめて広いので現在でも利用度が高い。この研究で明らかにされた重要なことは、水路コウ配や流量の変化につれて河床形態がdune, smooth, antiduneなどに変化し、それが流砂量に影響する点であった（図3-1）。この意味でGilbertの研究は移動床水理学に新しい研究課題を提起した貴重なものとなった。1935年、米工兵隊がW.E.S.で行なった実験も、Gilbertの資料と同じく広く利用された。わが国ではGilbertにやゝ遅れて中山（1924）が、自成本路内の砂の運動に関する実験的研究を発表したが、これがわが国における移動床実験の始まりであった。

(2) 移動床上の流れの特性

以上述べたように、移動床上の流れの研究は、直接現象そのものを観察するという素朴な研究から始められた。

しかし20世紀前半はPrandtlらの理論解析によって固定床上的流れがかなり明確に解明されてきた時期であったので、多くの研究者が同様な手法を用いて移動床上の流れの諸問題を解決しようと試みたのは当然であった。さて移動床上の流れに関する問題点を列挙すれば

1. 限界掃流力

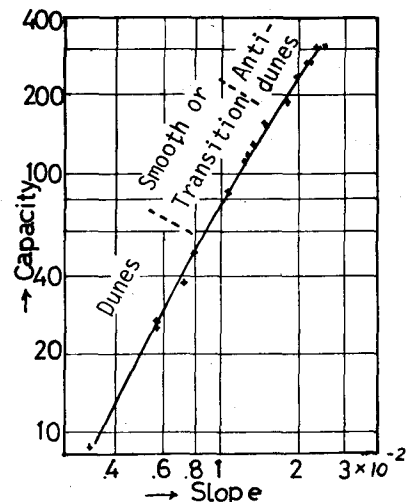


図3-1 流砂量とこう配との関係 (Gilbert)

2. 流砂量法則
3. 河床面形態の区分
4. *Sand Wave* の解析
5. 抵抗法則
6. 浮遊砂の挙動 (カルマン常数の性質)
7. 洗掘と堆積
8. 湾曲部の流れ, 蛇行

などである。はじめ各項目は単独に研究されてきたが、研究が進むにつれ、それらは互に密接な関連をもつことが明らかとなり、移動床流れの研究は予想外の困難に直面した。さらに自然河川の河床砂は粒度が一様でないこと、流量の増減とともに掃流砂から浮遊砂へ、あるいはその逆に変化すること、しかも両者の運搬機構が全く異なっていることが一層問題を複雑にした。室内実験がどの程度に現実河川の移動床の流況を再現できるかにも不安があった。また水理特性と河床砂特性のうち、『どれが独立変数でどれが従属変数であるのか』もつねに論議のまよになった。

さて上述の8項目のそれぞれに関し、従来すぐれた論文が多く発表されているが、紙面の都合で大部分を割受し、本文では特に(5)の抵抗法則のみについて解説する。

以下、第四章では、相当粗度 k_s を用いる法

第五章では、抵抗を2分する法

第六章では、レジム理論

第七章では、指数形の平均流速公式 (20世紀)

の順序で、先人の研究の跡をたどってみたい。

第四章 移動床上の流れ (Ⅱ)

—相当粗度 k_s を用いる法—

沖積河川の抵抗法則に関するわが国内の研究にきわめて強い影響を与えたのは、椿・古屋が発表した k_s を用いる方法である。

(1) 椿・古屋の研究⁽²⁾ (1951)

開水路乱流に関する *Keulegan* の平行壁に対する式

$$\frac{V}{v_*} = 6.0 + 5.75 \log \frac{R}{k_s} \quad (4-1)$$

が成立するものとし、相当粗度 k_s を水理特性と河床砂特性から求めようとするものである。両氏は k_s は河床の状態を規定する砂れんや凹凸の大きさ、砂跳躍の高さなどを示すから、河床付近の物理量に支配されたと考え、次元解析により次式を得た。

$$k_s/d = f \{ \tau/(\sigma-\rho)gd, v_*d/\nu \} \quad (4-2)$$

このうち右辺の第1項を Ψ とおき、

$$\Psi = \frac{v_*^2}{(\sigma/\rho-1)gd} \quad (4-3)$$

が支配的な影響をもつものとみなした。鬼怒川、遼河などの野外資料を用いて k_s/d と Ψ との関係点を点描した結果、次式を提案した (図4-1)。

$$\log \frac{k_s}{d} = 3.48 \left[1 - 0.225 \Psi^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (4-4)$$

これらの野外資料では $S=0.0001 \sim 0.0015$,
水深は $10 \sim 310 \text{ cm}$, $d=0.27 \sim 0.796 \text{ mm}$ 程度
で, $F_r < 0.3$; かつ河床に砂れんが生ず
るほど緩やかな河川に適すると思われて
いる。

(2) 椿の研究 (1955)

椿はコンクリート水路を用い, 抵抗法
則と流砂量の点から砂れんの特性を研究
した。まず流速分布が次式

$$\frac{V}{v_*} = 6.0 + 5.75 \log \frac{h}{k_s} \quad (4-5)$$

を満足することを検討したのち, 上式の
相当粗度 k_s を, 砂れん高 ΔH , 波長 λ
河床砂粒径 d などの無次元の関数で表わ
そうと試み, 若干の図を発表した。(24)

また河床に働く全セン断応力 $\tau_0 (= \tau_{hs})$, 砂れんの圧力抵抗を D , 砂れん背面に沿って発達する
境界層の摩擦応力を τ_2 , 砂れん背面長を λ' とするとき, 一波長について次式がなりたつ。

$$\tau_0 \lambda = D + \tau_2 \lambda' \quad (4-6)$$

D , τ_2 の抵抗係数を C_1 , C_2 とすれば C_1 は $\Delta H / \lambda$ の関数で表わされ, また C_2 は粗い平板
の摩擦に関する *Schlichting* らの研究結果を用いて求めうると考えた。

(3) 石原・岩垣・末石の研究 (1954)

石原・岩垣・末石⁽²⁵⁾ は滑面水路を用い, 底面に砂が堆積することなく流した状態で, かなり
急コウ配の実験を行なった。その結果 (4-5) 式における k_s は, 砂れんが発生しない場合に対
し次式で表わされると述べた。

$$\log(k_s/d) = 1 + 0.769 \log \Psi \quad (4-7)$$

(4) 木下の研究 (1956)

木下⁽²⁶⁾ は砂れき堆に関する実験を巾 13.2 cm の水路で実施したが, 水路コウ配を最大 $1/7.5$
にまで変化させて急コウ配特有の河床面形態を観察した。彼は k_s/d と F_r との関係 を吟味し,
砂の粒度がことなると k_s/d は F_r とともに異なって変化することを明らかにした。

(5) 篠原・椿の研究 (1957)

篠原と椿⁽²⁷⁾ は, V/v_* と $\Psi \times (V/v_*) / \{6.0 + 5.75 \log R/d\}$ との関係を, 日米などの10
河川の実測資料についてしらべて曲線図で示した。須賀らが九州河川の資料を用いて検討した結果
は, 描点の散在がいちゞるしかった。

(6) 久宝の研究 (1958)

久宝⁽²⁸⁾ は砂利河川の抵抗法則を研究し, 平均粒径 d の代りに $d_s = d_{50} (d_{25}/d_{75})$ で表わされ
る d_s を代表粒径とすれば (4-5) 式が大体成立し, かつ k_s の略値は d_s の1.24倍になると
述べた。さらに砂利の一部が移動する場合について k_s/d_s と vS/d_s との関係を調べた結果, 広
い範囲の混合砂利に対しては k_s は粒径 d_s とは無関係となり,

$$k_s = 2.0 vS \quad (4-8)$$

がほぼ成立することを認め, 結局つぎのように変形できると結論した。

$$V = C_2 R^{0.5} S^{0.333} \quad (4-9)$$

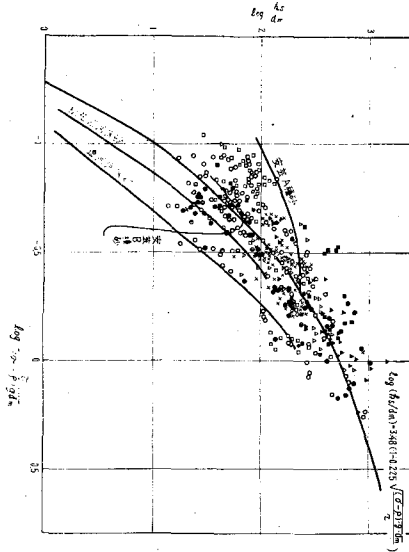


図4-1 椿 公式

(7) 松梨の研究 (1959)

松梨⁽²⁹⁾は開水路移動床の不安定性を論じ、Gilbertの実験値のほか自己の実験値を加え、 k_s/d と Ψ との関係を検討した。その結果duneに対しては(4-4)式が、また大粒径のF, G, H種に対しては(4-7)式がほぼ成立すると述べた。特に砂れんに対しては次式を提案した。

$$\log(k_s/d) = 3.42 - 1.57 F_r + 1.88 \log \Psi \quad (4-10)$$

(8) 芦田の研究 (1959)

芦田⁽³⁰⁾は河川の粗度を検討し、河床砂が移動しない場合の相当粗度 k_s は河床砂の平均粒度程度の大きさであるが、厳密には砂れきの粒径と配置状態に関係するので $k_s/d = 0.5 \sim 4.0$ 程度であると述べた。また k_s/d と F_r との関係をGilbert, 土研の資料について検討し

$$k_s/d = f(\Psi) \times F_r^{-2} \quad (4-11)$$

の関係があると提唱した。しかしこれについては若干疑義があると言われる。⁽³⁶⁾

(9) 杉尾の研究 (1962)

杉尾⁽³¹⁾は堰による堆砂現象の実験を行なったとき、河床面が平滑にちかい状態で砂が移動しているとき、粗度係数 n をふくむ無次元式

$$n g^{1/2} / d^{1/6} = 0.341 \Psi^{0.35} \quad (4-12)$$

(m-sec)

を提案した。

(10) 細井の研究 (1963)

細井⁽³²⁾は日本の代表的河川について V/v_{*k} と R との関係を点描し、大体対数法則が成立することを確かめた。さらに芦田の考えをいれ、自然河川の k_s/d が Ψ と F_r との関数で示されるとのべ、 $F_r = 1.0$ に対し次式を提案した。

$$\log(k_s/d) = 0.625 + 0.485 \log \Psi \quad (4-13)$$

(11) Ackersの研究 (1964)

Peter Ackers⁽³⁵⁾は長さ300ftの野外実験場の中央に台形断面の水路をつくり、安定した自成水路における流砂量と抵抗法則の研究を行なった。その結果、砂れんの平均高さを k とするとき $3 < R/k < 13$ の範囲に対し実験値は大体

$$\frac{V}{v_{*k}} = 7.13 \left(\frac{R}{k} \right)^{0.25} \quad (4-14)$$

で表わされ、粗面乱流の式にかなり近いと述べた。彼が砂れんの高さを粗度の単位にえらんだことは合理的であると思われる。またEroded Bankの資料は、つぎのレジム系の指数式を大体満足すると述べた。

$$V \propto (R^2 S)^{0.285} \quad (4-15)$$

(12) 山口・松田⁽³³⁾の研究 (1964)

両氏はW.E.Sおよび土研資料⁽³⁴⁾

を詳細に検討し、 k_s/d と Ψ との関係を描いた(4-2)。前者は0.205~0.586mmまでの8種類の砂が使われているが、描点は複雑な配置をしていて系統的法則をみ出し難い。しかし土研資料は1.04~4.58mmの均一砂れき

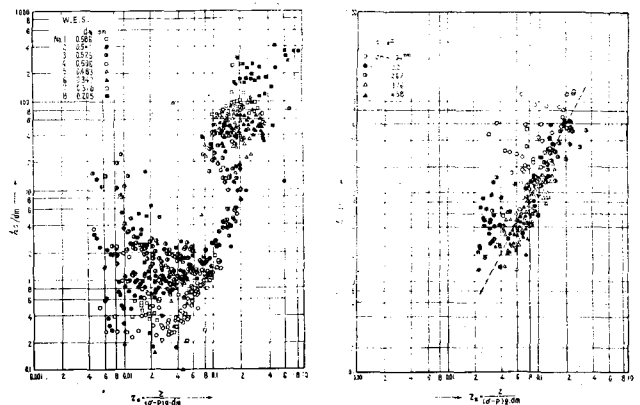


図4-2 実験資料の k_s/d と Ψ との関係(山口と松田)

が用いられ、特に 2.2.1 mm 以上の砂れきに対しては次式で代表できる。

$$k_s/d = m\Psi^2 \quad (4-16)$$

(13) 須賀の研究 (1965)

須賀は⁽³⁶⁾ W. E. S., 土研資料の外に九州河川資料を参考にし、(4-16)式において $m=1000$ と定めた。また (4-11) 式において k_s/d が Ψ^2 に逆比例する意味について検討した。

第五章 移動床の上の流れ (Ⅲ)

-抵抗を2分する法⁽²⁾

Einstein らは河床抵抗全体を、河床上の凸起物による抵抗と河床摩擦による抵抗とに2分することにより、 $Q \sim k$ 曲線を定めようと試みた最初の人々である。彼等の考え方は特に米国内で多くの支持者を得、現在に到るまで彼等の方法を若干修正した多くの研究が跡を断たない。

(1) Einstein と Barbarossa⁽³⁷⁾ の研究 (1952)

両氏は開水路における抵抗の線型性を主張することにより、径深 R を2部分にわけて R' と R'' とし、 R' は河床摩擦のみを負担し、 R'' は河床の不規則性による抵抗を負担するものと考えた。 $v_*' = (gR''S)^{1/2}$ とするとき R' はつぎの Manning-Strickler 公式

$$V/v_*' = 7.66 (R'/k_s)^{1/6} \quad (5-1)$$

を満足するが、 $k_s/\delta' = k_s \cdot v_*'/1.6\nu > 5$ の場合には次式を用いるべきだとした。こゝに δ' は層流底層の厚さである。

$$V/v_*' = 5.75 \log(12.2R'x/k_s) \quad (5-2)$$

また x は更正係数で、 $x \sim k_s/\delta'$ 図が与えられており、かつ $k_s = d_{65}$ が採用された。さて河床の不規則性にもとづく Friction Factor f'' は、

$$f'' = \frac{8f^2}{gR''S} = 8 \left(\frac{V}{v_*'} \right)^2 \quad (5-3)$$

で与えられ、それは河床の凹凸の形に左右され、逆に河床流砂量の関数となると考えられる。流砂量は次式で表わされる無次元量 Ψ の関数とみなされるから、自然河川資料を利用して V/v_*' と Ψ との関係をしらべて図 5-1 が得られた。

$$\Psi = \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \cdot \frac{d_{35}}{R' S} \quad (5-4)$$

さて R , S , d などが既知のとき V または Q を求める手順は以下のようである。

- ① R' の値を適宜えらび、
 $v_*' = (gR''S)^{1/2}$ と Ψ' を計算する。
- ② (5-1), または (5-2) 式より V を計算する。
- ③ 図 5-1 を使い、 Ψ' に対応する V/v_*' をよみ、 v_*' を定める。
- ④ $v_*' = (gR''S)^{1/2}$ より R'' を求め、
 $R' + R'' = R$ となるように試算をくり返す。

- ⑤ 正しい R' が定まれば (5-1), または (5-2) より V または Q は決定される。

なお篠原と薄 (1955) は、白川長六橋付近の n の値を検討したとき、Einstein らの方法が

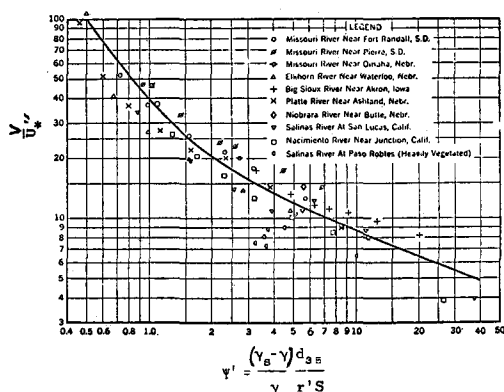


図 5-1 V/v_*' と Ψ' の関係 (Einstein ら)

大体適応すると述べた。(38)

(2) Shen の方法 (1962)

H.W. Shen⁽³⁹⁾ は図 5-1 が、沖積実験水路の資料に適合しにくい点に着目し、この改良を企図した。彼は河床の不規則性による抵抗は、 Ψ' のみならず w_{d50}/ν にも関係することを認め、若干の図を発表した。ここに w は砂の沈降速度である。 $w_{d50}/\nu < 100$ のような微粒砂に対しては

$$v_{*'}^n/V = 0.03 + 0.01 \log(\Psi'/\lambda) \quad (5-5)$$

$w_{d50}/\nu > 100$ のような粗砂に対しては、 f_b は単に Ψ' のみの関数となり、次式で表わされると述べた。ここに $\lambda = f \cdot (w_{d50}/\nu)$ である。

$$v_{*'}^n/V = 0.03 + 0.11 \log(\Psi'/7.12) \quad (5-6)$$

(3) 山岡の研究 (1962)

山岡⁽⁴⁰⁾ は Einstein らの方法を若干 modify し、自然河川に対する bar resistance curve を検討した。すなわちコウ配 S は不変として径深 R を 2 分し

$$\tau'/\tau = \rho v_{*'}^2 / \rho v_{*}^2 = R'/R \quad (5-7)$$

で表わされる τ'/τ と Ψ' との関係性を求めた。ただし平均粒径 d_m を k_s として用い、かつ流速式として

$$V/v_{*'} = 6.0 + 5.75 \log R'/d_m \quad (5-8)$$

を用いている。図 5-2、5-3 は北海道河川について求められた $\tau'/\tau \sim \Psi'$ 図である。

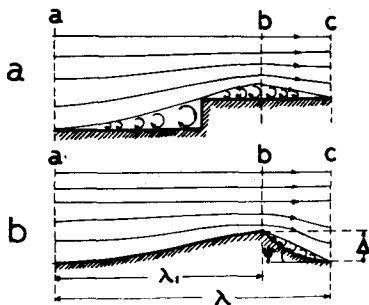


図 5-3 砂れんの急拡損失 (Yalin)

(4) Yalin の研究 (1964)

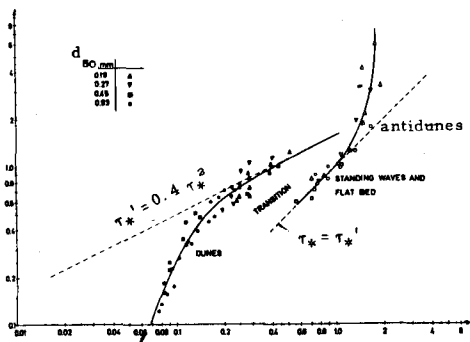


図 5-4 θ と θ' との関係 (Engelund)

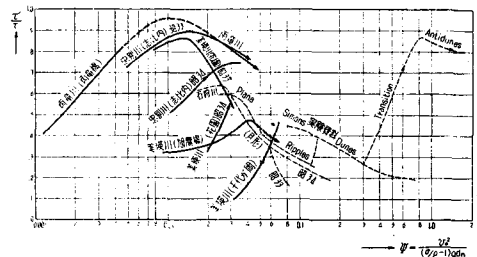
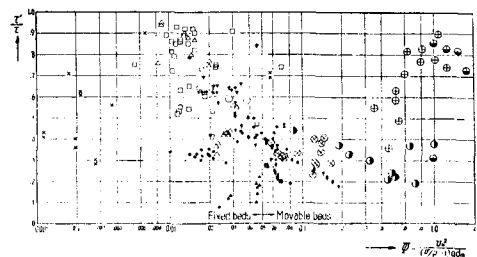


図 5-2 τ'/τ と Ψ' との関係
(北海道河川)
(山岡)

S. Yalin⁽⁴¹⁾ は R を一定とみなし、代りに S を 2 分することにした。図-4 において砂れん上の流れが $b \rightarrow c$ に急転するときの損失水頭を *Carnot* の定理を用い、かつ砂れん背面の部分の摩擦損失コウ配を平均流速の対数法則から算定することにより結局次式を得た。

$$V/v_* = \frac{(1/\kappa) \ln[\alpha(h/k_s)]}{\{1 - (D/\lambda)\sigma\}^{1/2}} \quad (5-9)$$

こゝに

$$\sigma = \cot \theta - \frac{1}{2} \frac{D}{h} \left[\frac{1}{\kappa} \ln \left(\alpha \frac{h}{k_s} \right) \right]^2 \quad (5-10)$$

もし *flat bed* ならば $D=0$ となるから、(5-9) 式から純粋な *skin friction* のみによる流速公式がえられる。彼はまた 0.31 ~ 0.59 mm の砂を用いた実験結果から、 V/u_* と Ψ との関係図を S を *parameter* として描いている。

(5) Simons と Richardson の研究 (1966)

両氏は巾 8 ft, 長さ 150 ft の大水路を利用し、0.19 ~ 0.93 mm の砂床に対して大規模な実験を行なった。*Plane Bed* に対しては

$$\frac{C^*}{\sqrt{g}} = \frac{V}{v_*} = 7.4 \log \frac{D}{d_{85}} \quad (5-11)$$

が得られた。こゝに C は *Chézy* 係数、 D は水深である。*Ripple* や *Dune Bed* に対しては

$$f = \frac{8gRS}{V^2} = \frac{8gR}{V^2} (S^* + DS) \quad (5-12)$$

とき、 S^* は (5-11 式) から求め、 DS は $DS = k(\tau DS)^{\alpha} \cdot D^{\beta}$ において、種々な砂種、河床形態ごとに経験式を提示した。さらに両氏は *Ripple* の下流の流れが剥離のため有効水深が減することに注目し、 S はそのままにして水深 D を修正する別法を提案した。このとき次式のような連続式が成立するものとした。

$$VD = V^* D^* \quad (5-13)$$

こゝに $D^* = D - \Delta D$ で、 ΔD は更正值である。 V^* は *flat bed* 上で各砂ごとに実験で求められた $C^*/\sqrt{g}$ の値を用い、*Chézy* 式から算定された。砂の大きさと河床形態ごとに ΔD と D との関係図が示されているが、この実験で使用した以外の砂に対しては新しく別の図を作る必要がありそうである。

(6) Engelund の研究 (1966)

Frank Engelund⁽⁴³⁾ は $S = S' + S''$ とき、Yalin と同様に *Carnot* 定理を用い

$$S'' = \alpha \frac{V^2}{2gL} \left(\frac{D}{D'} \right)^2 \quad (5-14)$$

を得た。こゝに D' は砂れんの高さ、 L は波長、 α は L , D , D' に関係する係数である。 f を用いれば

$$f = f' + \alpha \frac{D^2}{DL} \quad (5-15)$$

となる。さて彼は『水理学的に相似な 2 種の流れでは f'/f の値は同一である』と仮定し、

$\theta' = R' S / (S_s - 1) d_{85}$ と $\theta = DS / (S_s - 1) d_{85}$ との関係を米国の数河川の資料を用いて検討した結果

$$\theta' = 0.4 \theta \quad (5-16)$$

の関係があることを経験的に明らかにした。また R' は

$$\frac{V}{\sqrt{g R' S}} = 6.0 + 5.75 \log \frac{R'}{k} \quad (5-17)$$

を満足するはずであるから、いま S , D , d_{85} , d_{65} が与えられれば (5-16) 式より R' を求め、(5-17) 式において $k = 2 d_{65}$ とおき V が定められるという。その後彼は *Simons* らの実験資料について θ と θ' との関係点を描いて図 5-5 を得た。これによると (5-16) 式の関係は、実験値では $0.15 < \theta' < 0.6$ の範囲内しか適用できないことがわかったので、この方法には若干疑点が残るようである。

(7) Vanoni と Hwang⁽⁴⁴⁾ の方法 (1967)

両氏は $d_g = 0.137 \sim 0.23 \text{ mm}$ の砂を用い、主として *Ripple* や *Dune* の規模と抵抗法則との関係を実験

的に研究した。抵抗については、 $e\bar{H}$ という量が *Ripple* 河床の粗度に関係する重要な量であると提案した。こゝに $e = A_s / A$ であり、 A_s は *Ripple* の下流面を水平投影にした面積、 A は水平全面積、 $\bar{H}$ は *Ripple* の高さである。その結果、*Einstein* の方法における $f_b'' = f - f''$ と $R_b / e\bar{H}$ は

$$\frac{1}{\sqrt{f_b''}} = 3.5 \log \frac{R_b}{e\bar{H}} - 2.3 \quad (5-18)$$

の関係が実験値に適すると述べた (図 5-6)。こゝに添字 b を付したものは、付録 (Ⅲ) (3) に説明

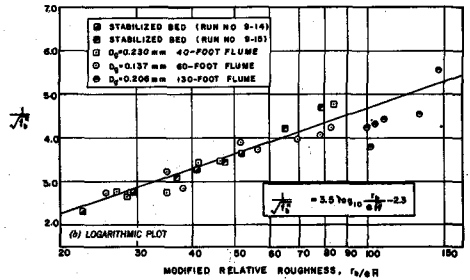


図 5-5 Vanoni と Hwang の実験式

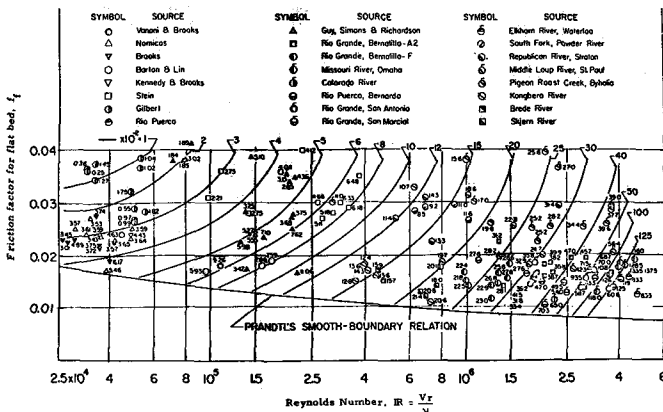


図 5-6 平滑河床の f_f の値 (Lovera と Kennedy)

する方法により、側壁の影響をのぞいたことを意味する。上式は (2-11) 式において $r_o = 2R_b$ とおいたものより適切であると両氏は述べている。

(8) Haynie と Simons⁽⁴⁵⁾ の研究 (1968)

Haynie は (5) の方法の代りに、平均流速 V の調整を行なう一方法を提案した。滑面矩形断面水路に対して Tracey と Lester が発表する方法により V' を

$$\frac{V'}{v_*} = 2.5 + 5.75 \log \frac{v_* d}{\nu} \quad (5-19)$$

より求め、 $\Delta V = V' - V$ を更正値とみなして ΔV と R との関係を $1/S$ を parameter として表わす図表を発表した。

(9) Lovera と Kennedy⁽⁴⁶⁾ の方法 (1969)

両氏は *flat bed* に対する *friction factor* f_f を、次元解析の結果を用いて $R_b = VR_b/\nu$ と R_b/d_{50} との関数であると考え、実験値と野外資料から図5-7を得た。

(10) Alam と Kennedy⁽⁴⁷⁾ の研究 (1969)

Ripple や *Dune* に対する f を $f = f_f + f_b''$ として表わし、 f_f は(9)の方法から定め、 f_b'' は R_b/d_{50} と $V/\sqrt{g d_{50}}$ との関係図(図5-8)から定めようとするものである。

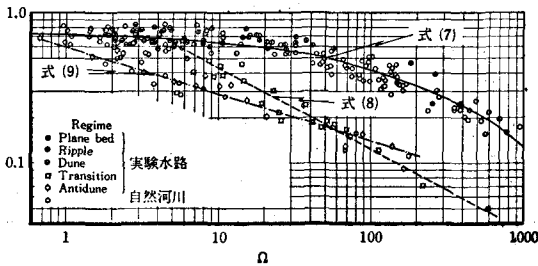


図5-8 $R''/R \sim \Omega$ の関係(菊岡)

(11) 菊岡の研究(1969)

菊岡⁽⁴⁸⁾ は *Einstein* の方法を若干修正し、実験水路と自然河川の両方に適する方法を研究した。まず V/v_*' の代りに R''/R を縦軸に、また

$$\Psi_0 = \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \frac{d}{RS} \quad (5-20)$$

$$\text{とおいたとき} \quad \Omega = \Psi_0 \cdot (R''/R)^{-2} \quad (5-21)$$

で示される Ω を両対数紙の横軸にとって各資料を点描して図5-9を得た。図中の(A)は *Flat Bed*, *Ripple*, *Dune Bed* を、(B)は *Transition* を、(C)は *Antidune* を示す曲線である。 Ω の代りに Ψ_0 を用いた経験式はつぎのようである。

$$(A) \quad \Psi_0 > 2.3.6 \text{ のとき} \quad \Psi_0 = 1.832 (R''/R)^{-0.2} \quad (5-22)$$

$$(B) \quad \text{Transition} \quad \Psi_0 = 2.278 (R''/R)^{0.01818} \quad (5-23)$$

$$(C) \quad \text{Antidune} \quad \Psi_0 = 0.1878 (R''/R)^{-1.185} \quad (5-24)$$

この方法は、さらに過去の多くの資料により検討され、一層信頼度のあるものとなるであろう。なおこの章は文献(2)から多く引用されたことを付記する。

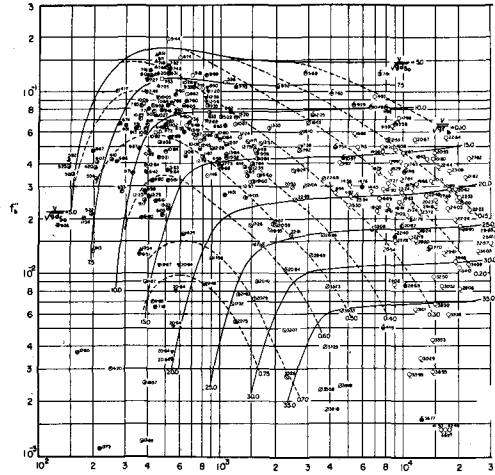


図5-7 f_b'' と R_b/d_{50} との関係 (Alam と Kennedy)

第六章 レジム理論 (49)(5)

以上述べた河川工学的、流体力学的方法とは若干異質で独特な研究が1890年ごろからインドの運河技術者の間に生れ、種々改良を経て今でもインド、パキスタンなどで運河設計の基準となっている。わが国の河川とは河状が異なるので、従来わが国では簡単に紹介された程度に過ぎなかった。しかし後述するように、抵抗法則の面からみると重要な示唆を含んでいるので、その概略を述べてみよう。

(1) レジム理論の起源 (5)

Indus河の中流部の Punjab 地方で1882年ごろ、大運河網の建設計画がたてられた。運河の完成後、取水口から流入した濁水は多量のシルトを含むため、運河の兩岸に沿い $H. W. L.$ 付近に階段状の堆土敷 (Berm) ができ、さらに堆土敷上に植物が茂るなどのため河積が不足するようになった(図6-1)。そのため蛇行を誘発するおそれもあり、常時堆土敷をくさくする必要があるおこり、維持に苦しんだ。しかし年数がたつにつれ水深、コウ配、断面形などは結局ある値に向って安定する傾向がみられた。

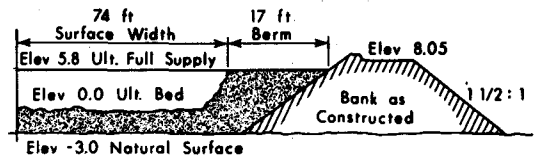


図6-1 レジム運河の堆土敷

当時設計を担当した英人技師 Lindley は『人工運河により濁水を流すときは、河床も河岸も洗掘と堆積をくり返すが、時日の経過とともに水深、川巾、コウ配などは変化し、結局一種の安定状態に到達する』と述べ、これを『レジムの状態にある』と説明した。これが *Regime Canal* の名の起源である。これらの運河ではつねに 1000~2000 ppm の泥土が移動する *active* な *bed* であり、計画流量 Q を与えたとき、堆積も洗掘も起さぬように水路の断面形やコウ配を設計することが彼等の最大の課題であった。表6-1は代表的なレジム運河の資料の一例である。

表6-1 レジム運河の実例(S.V.Chitale)

運河名	地点	Q (cfs)	水面巾 W_s (ft)	水面コウ配 S	平均水深 D_m (ft)	河床砂 d_{50} (mm)	測定年度
Lower Chenab Canal	Sagar	9000	280.5	0.00019	9.9	0.420	1935
	Khaidr	40	14.42	0.00029	1.85	0.318	1933
Sind Canal	Rohri	9057	259.4	0.0000744	11.84	0.129	1941
	Rohri	3261	120.6	0.000060	10.49	0.0995	1941

(2) レジム公式 (5)(2) (特に平均流速公式)

① Kennedy の研究 (1895)

R. G. Kennedy は Upper Bari Doab 運河について堆積も洗掘もしない平均流速 V_o として

$$V_o = 0.84 D_m^{0.64} \quad (\text{ft/sec}) \quad (6-1)$$

を発表した。こゝに D_m は平均水深で、河床砂の平均径は 0.32 mm であった。その後 E. S. Lindley (1919) は、Lower Chenab 運河の 786 個の資料から $V = C_1 B^a$, $B = C_2 D^b$ などの経験式を得た。彼はまた前述のようにレジムの考え方を始めて提唱した。

② Lacey の研究 (1934, 1936, 1946, 1966)

1927 年, 英政府から派遣された技師 *Gerald Lacey* は安定運河の研究に着手し, 1929-1933 年ごろ運河設計に便利な一連の経験式を発表した。

$$\text{流速と水深との関係: } V = 1.17 (fR)^{1/2} \quad (6-2)$$

$$\text{流速と勾配との関係: } V = 1.6 R^{2/3} S^{1/3} \quad (6-3)$$

$$\text{巾と流量との関係: } \rho = 2.67 Q^{1/2} \quad (6-4)$$

(ft/sec)

こゝに ρ は潤辺, f は *silt factor* とよばれる粗度に関する量で, 彼は $f = 1.76 d_g$ とおき, 表 6-2 を発表した。なお (6-3) 式における S のベキ数が $1/3$ である点は注目すべきである。

その後 *Bose, Hurst, Malhotra, White, Inglis, Blench* ら, 多くの研究が行なわれた

が, 後二者については後述する。*Lacey* は 1936 年, 1946 年と何度も公式を改訂したが, 1966 年には, 平均水深 d_* を用い, 次式を提案した。(58)

$$\text{石れき床: } V = 1.422 d_*^{5/8} S^{1/4} \quad (6-5)$$

$$\text{砂 床: } V = 9.5 d_*^{5/8} S^{1/4} \quad (6-6)$$

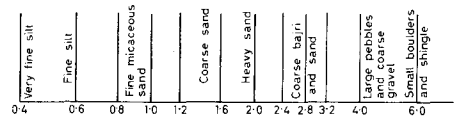


表-2 シルト係数 f の値 (Lacey)

(3) Inglis の研究 (1959)

Sir Claude Inglis (57) は, *Lacey* 公式が土砂量の大小を考慮していない点に注目し, f の値を更正しようと試みた。彼は流量 Q , 流砂量 X , 河床砂粒径 d が独立変数であり, 河巾 B , 水深 D , コウ配 S などは従属変数であると強く主張し, *Inglis-Lacey* 公式とよばれる次式を得た。

$$V = 4.67 Q^{1/6} (Xw d)^{1/12} \quad (6-7)$$

$$S = 3.86 (Xw d)^{5/12} / Q^{1/6} \quad (6-8)$$

こゝに X は流砂量で, 毎秒当りの土砂体積を流量で割ったもの, w は土砂の沈降速度 (ft/s), d は砂の平均径 (ft) である。なお彼は 1941 年に, 次式のような抵抗法則を発表している。また既往最大洪水の 60% が支配流量になるとの発想も提案している。(1949)

$$V = 1.20 R^{4/7} S^{2/7} \quad (ft/s) \quad (6-9)$$

(4) Blench の研究 (1939, 1957)

T. Blench (53) は *bed factor* F_b と *side factor* F_s , という独特の量を導入した経験式群を発表した。特にコウ配については

$$S = \frac{F_b^{5/6} F_s^{1/12} \nu^{1/4}}{3.63 (1 + \alpha C) \rho Q^{1/6}} \quad (6-10)$$

こゝに F_b は $F_b = V^2/D$, $F_s = V^3/W$ で定義され, W は水路巾である。また C は土砂濃度で, 秒当りの流送土の乾燥重量を流量で割り 10 万分で表したもの, α の値は自然河川では $\alpha = 1/233$

とすればよいという。また *bed factor* $F_b = 1.9\sqrt{d_g}$ (d_g はmm) であり, *side factor* F_s は岸の土砂の特性により決定され, $F_s = 0.1 \sim 0.3$ であるという。

(5) Lane の研究 (1937)

米国開拓局が米国とメキシコの国境に *Alt American Canal* ($Q = 15,000 \text{ cfs}$) の建設を企画したとき, *Lacey* らのレジム公式が本格的に検討された。⁽⁵⁴⁾ この指導に当たった *E. W. Lane* は, インドの運河と河状の異なる米国運河に対してはレジム理論は不適であると結論したが, この検討から, 限界掃流力を考慮する運河の側岸コウ配の合理的設計法が *U.S.B.R.* によって開発されるとぐちができた。結局, レジム理論はインド地方のみにしか適用できない特殊の経験式にすぎないと一般に考えられるようになった。

(6) Simons と Albertson の研究 (1960)

D. B. Simons と *M. L. Albertson* ⁽⁵⁵⁾

は図 6-2 に示す 5 種の運河 (うち 3 種は米国) について検討した。*Lacey* 公式にならない V と $R^2 S$ との関係点を点描した結果河床と兩岸の土砂特性により次式で示すような 3 種の経験式を得た。

粗い粘着性土:

$$V = 17.9 (R^2 S)^{0.286} \quad (6-11)$$

河床は砂, 兩岸粘着性土:

$$V = 16.0 (R^2 S)^{0.333} \quad (6-12)$$

河床, 兩岸ともに砂:

$$V = 13.86 (R^2 S)^{0.333} \quad (6-13)$$

(ft/sec)

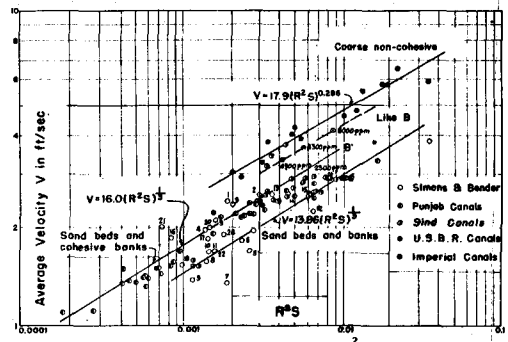


図 6-2 サイモンズのレジム公式

このうち (6-12) 式は *Lacey* の (6

-3) 式と同一で, (6-11) 式は *Inglis* の (6-9) 式と同型である。

なお *Chien* ⁽⁵⁶⁾ *Henderson*, *Gill* らはレジム理論に何らかの流体力学的理論の裏付けを与えようとして論文を発表している。

第七章 指数型の平均流速公式 (20世紀)

20世紀になってもしばらくは *Chézy*, *Manning* 式のように $V = KR^a S^b$ 型, またはそれに近い平均流速公式がかなり発表された。^{(14), (15)} 例えば *R. Siedek* (1901), *J. Hermanek* (1906), *W. Lindboe* (1910), *Gröger* (1913), *Barnes* (1916), *Ph. Forchheimer* (1923) などである。

(1) Ph. Forchheimer の研究 (1923)

$$V = \frac{1}{n_2} R^{0.7} S^{0.5} \quad (7-1)$$

n_2 は *Manning* の n と大体ひとしいが, n と R が小さいときは差が大きくなると言われ, n から n_2 に更正する図が物部によって示されている。

(2) A. Strickler の研究 (1923)

彼は主としてスイスの観測資料に基づき *Gauckler* の (1-14) 式中の係数 λ_2 を種々の潤辺につき検討した。彼はまた土砂水路の n を検討し, d を砂粒粒径 (mm) とするとき次式を提案した。

$$n = 0.016 d^{1/6} \quad (m \text{ 単位}) \quad (7-2)$$

(3) M. Matakiewicz(1927)

土砂の流動・堆積のある沖積水路に対するものである。

$$V = 3.54 R^{0.7} S^{0.483+10 S} \quad (7-3)$$

(4) 溝江の研究(1932)

溝江がドイツで行なった台形砂断面の小型水路の実験から得たものである。⁽⁵⁹⁾

$$V = (150 - 11840 S^{0.793}) R^{0.7} S^{0.56} \quad (m/s) \quad (7-4)$$

(5) 永井の研究(1943)

永井⁽⁶⁰⁾は矩形水路を用いた実験から指数型の式を発表し、また満洲河川の実測資料を最小自乗法で整理して次式を得た。

$$V = \frac{1}{n_N} R^{0.55} S^{0.20} \quad (m/s) \quad (7-5)$$

上式の n_N は砂れき係数とよばれ、主に粒径によって定まる。(7-5)式の S のべき数が 0.20 である点は注目に値する。

(6) Liu と Hwang⁽⁶¹⁾ の研究(1959)

Hsin Kuan Liu と Shoi Yean Hwang は沖積実験水路の抵抗法則を

$$V = C_a R_b^X S^Y \quad (7-6)$$

の形で表わそうとし、次元解析を用いて C_a , X , Y などを定めた。ここに R_b は側壁の影響を除外した径深である。さて多くの実験資料を用いて X , Y , C_a と d_{50} との関係を示す図を発表した。

(図7-1)。これによると $d_{50} < 10 \text{ mm}$

ならば *dune* と *plane bed* に対する X ,

Y は異なるが、 $d_{50} > 10 \text{ mm}$ の範囲では

Manning 式と同型になる。しかし杉尾・築

田が Simons らの資料を用いて検討した結

果は良好でなかった。

(7) Garde と Raju⁽⁶²⁾ の研究(1966)

両氏は多くの実験資料と野外資料を用いて既存の抵抗法則を検討した結果、Einstein, Shen, Liu-Hwang らのいずれも信頼性が乏しいと結論し、つぎの無次元式を提案した。

$$\left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{V}{g d_{50}} \right)^{1/2} = K \left(\frac{R}{d_{50}} \right)^{2/3} \cdot \left(S \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \right)^{1/2} \quad (7-7)$$

上式の K は *Ripple* では 3.2, *Antidune*

と *Transition* では 6.0 をとるとのべた。

しかし上式は Manning 公式において

$n = K' d_{50}^{1/6}$ とした場合と全く同形であ

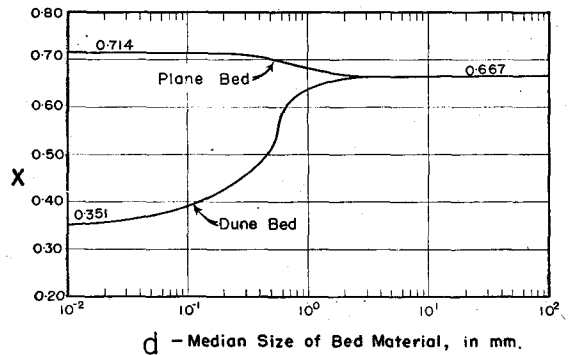


Fig. 6L. Variation of X with d for flow over a fixed bed.

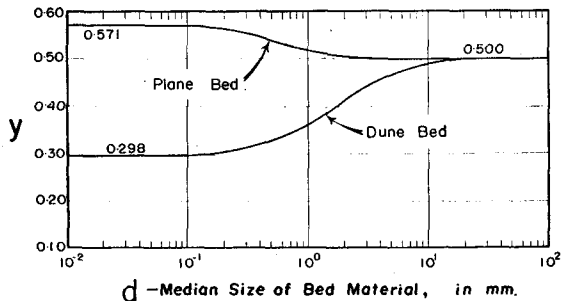


図7-1 X , Y と d の関係(Liu と Hwang)

るから、同式以上の精度は期待できない。

(8) 杉尾の研究 (1969)

杉尾は⁽⁶⁴⁾ Lacey や Simons にならい、 V と $R^2 S$ との関係世界各地の河川資料について描いた結果、巨視的に3種の群に分類され、かつ河床面形態は各群ごとに、*Ripple*, *Dune*, *Transition* と推定できると述べた。(図7-2, 7-3)。

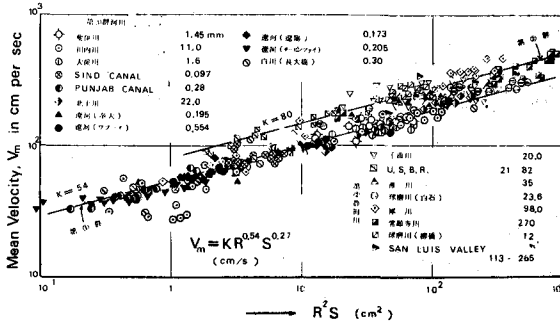


図7-2 V と $R^2 S$ との関係 (第①, ②群河川)

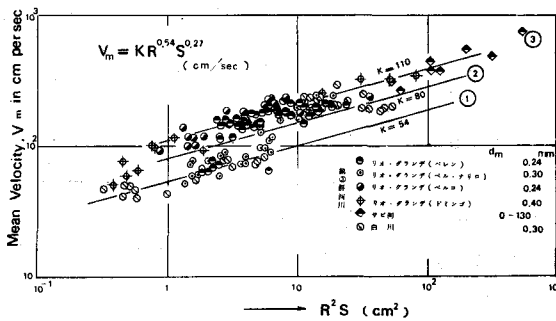


図7-3 V と $R^2 S$ との関係 (第③群河川)

第①群 (*Ripple*): $V = 5.4 R^{0.54} S^{0.27}$ (7-8)

第②群 (*Dune*): $V = 8.0 R^{0.54} S^{0.27}$ (7-9)

第③群 (*Transition*): $V = 11.0 R^{0.54} S^{0.27}$ (7-10)

冲積実験水路の資料は、*Einstein* 法 (巻末付録 (Ⅲ) (1) 参照) により R の代りに R_b を用いると大体上式を満足する。また流量の変化にともない②群から①群へ、または①群から③群へ描点が『移行』する現象が認められたが、これは混合粒をもつ河床の限界掃拂力を考慮すれば説明できることが明らかになった。⁽⁶⁵⁾ なお河床形態区分図 ($S \sim q/w_m$ 図) を利用すれば、水理特性と河床砂特性から、どの群の公式に属するかを大畧判定できると述べた。⁽⁶³⁾

付録 (I) 粗度係数 n の意義

粗度係数 n は元来経験的に求められたもので、かつ無次元量ではないから物理的意義が明確でなく、すべての範囲に対して成立するとは考えられない。そこで平均流速に関する *Keulegan* 式と関連させると n の意味が明らかになる。⁽¹⁹⁾ いま開水路の粗面乱流に関する *Keulegan* の (2-28) 式より⁽⁶⁶⁾

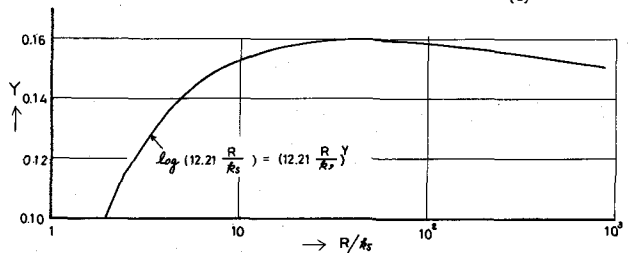
$$\frac{V}{v_*} = 6.25 + 5.75 \log \frac{R}{k_s} = 5.75 \log \left(12.21 \frac{R}{k_s} \right) \quad (1)$$

$$\text{いま} \quad \log \left(12.21 \frac{R}{k_s} \right) = \left(12.21 \frac{R}{k_s} \right)^Y = x^Y \quad (2)$$

$$\text{とおけば} \quad Y = \frac{\log \log \left(12.21 \frac{R}{k_s} \right)}{\log \left(12.21 \frac{R}{k_s} \right)} = \frac{\log \log x}{\log x} \quad (3)$$

種々な R/k_s の値に対する Y を示したのが図-Aで、 $x = 400 \sim 700$ 、すなわち $R/k_s = 33 \sim 57$ の範囲では Y はほぼ一定値となり 0.16 をとる。すなわち

$$\frac{V}{v_*} = A \left(\frac{R}{k_s} \right)^{1/6} \quad (4)$$



付図-A Y と R/k_s との関係

とおいた場合、実験的には $15 < R/k_s < 500$ の範囲内で $A = 8.12$ となり、これより *Manning* 系の式がえられる。⁽⁶⁶⁾ 結局 *Manning* 式は粗面乱流で $15 < R/k_s < 500$ の範囲で成立するといえ、このとき $n = \alpha k_s^{1/6}$ の形で表わすことができる。また直接流速の対数法則をつかえば

$$n = \frac{R^{1/6}}{v_*^{1/2} \left[A_r - \frac{1}{K} - \frac{1}{K} \log n R/k_s \right]} \quad (5)$$

と書くことができる。*Froude* 数の小さいときを考えて $A_r = 8.5$ とし、種々の R に対する k_s と n との関係図が作られている。⁽¹⁵⁾⁽¹⁹⁾

滑面乱流に対する *Blasius* 公式、(2-4) 式を指数形に直すと

$$V = 5.6 v_*^{-1/4} R^{5/4} S^{1/4} \quad (6)$$

が得られる。⁽⁶¹⁾ つぎに粗面乱流においては R_e がきわめて大きいと *friction factor* f'' は R_e に無関係に一定になるが、このときは (2-2) 式から明らかなように *Chézy* 係数 C が一定となる。しかし粗度係数 n と f との関係は R を消去することにより

$$f = \frac{5.174 g S^{0.18}}{v_*^{0.2} R_e^{0.2}} \quad (7)$$

で表わされ、⁽¹⁾ n と S とが一定となるとき $f \sim R_e$ 図は -0.2 というコウ配をもつ平行線で表わされる。その位置が粗面領域にあれば n を一定とするのがよいが、もし *Transition* 領域にあれば *Colebrook* の式を用い、 k_s を一定とするのがよい。つまり n を用いるときは十分適用範囲をわきまえて使うことが肝要である。

付録(Ⅱ) A.S.C.E.の勧告⁽¹⁾

1963年, A.S.C.E.のTask Forceがfriction factor " f "について若干の勧告を行ったので, その要旨を紹介しておく。

- ① (2-1)式で表わされる無次元量の friction factor " f "を用いて抵抗を表わすことはきわめて有効である。
- ② 実用的には f も n も同程度に役立つと思われるが, f は土木以外の工学で広く使用され, 検討も進んでいるので, 教育者, 研究者はなるべく f をつかうのが望ましい。 n を使い馴れた現場技術者は n を使ってよいが, ③に述べる注意を心得て, 使用してよい範囲を知っておく必要がある。
- ③ R_e がきわめて大ならば f は $1/R^{1/3}$ にほぼ比例し, n はほぼ一定になる。ゆえに n は完全粗面のときだけに使うべきである。それ以外の場合に n を使うときは, (2-3)式を f に対する円管の抵抗図に適用して大体の傾向をみる必要がある。

$R_e \approx 100,000$ 程度の滑面乱流に対しては (2-4)式から f を求めればよいが, それ以上の R_e に対しては (2-7)式を用いるのがよい。

以上は固定床に対する抵抗であって, 移動床については適用できない。なお今後の研究課題としては

- a 相当粗度 k_s を適切に定義すること。
- b 種々なタイプの粗さをもつ Transition の抵抗
- c 相対粗度 k/r がきわめて大きい流れの抵抗
- d 複合断面をもつ流れの抵抗
- e 移動床の抵抗と固定床から移動床への変化を規定する条件, などである。

付録(Ⅲ) 矩形断面水路の側壁の影響

長方形断面を用いた一般冲積水路実験では, 河床抵抗と水路壁面抵抗の両方が作用するから, 現実には両者を総合して現れる抵抗のなかから壁面抵抗を除外した, 真の河床抵抗のみを求める必要がある。これを最初に提案したのは Einstein で, わが国では専らこの法が用いられていた。⁽²³⁾⁽³⁴⁾ その後 Johnson が若干改良を加え, 最近 Vanoni らは別法を提案したので, これを紹介しておく。

(1) Einsteinの方法(1942)

$$R_b = h \left[1 - \frac{2}{B} \left(\frac{n_s \cdot V}{\sqrt{S}} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (8)$$

n_s は側壁の粗度係数, h は水深, B は水路巾, R_b は水路床抵抗のみによる径深である。

(2) Johnson⁽³³⁾の方法(1942)

(8)式を若干改良したもので, n_s をつかう代りに滑面乱流の式 (2-7)式を用い, 試算で解く必要がある。 R_e を $R_e = 2V R/\nu$ としている点が気掛りであるが, 従来米国で多く用いられた。

(3) VanoniとBrooks⁽²⁾の方法(1957)

原理は前二者と同様である。 A を2分して $A = A_b + A_w$ とおき, かつ V と S とを共通と考え

$$\frac{V^2}{8gS} = \frac{A}{f\rho} = \frac{A_b}{f_b\rho_b} = \frac{A_w}{f_w\rho_w} \quad (9)$$

がなりたつものとする。これより $\rho = 2d + b$, $\rho_b = b$, $\rho_w = 2d$ とおけば (図-B),

$$f_b = f + \frac{2d}{b} (f - f_w) \quad (10)$$

レーノルズ数を

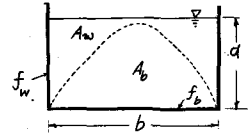
$$R_b = \frac{4 R_b V}{\nu}, \quad R_w = \frac{4 R_w V}{\nu}, \quad R = \frac{4 R V}{\nu} \quad (11)$$

とおけば(9)と(11)式よりつぎの関係式がえられる。

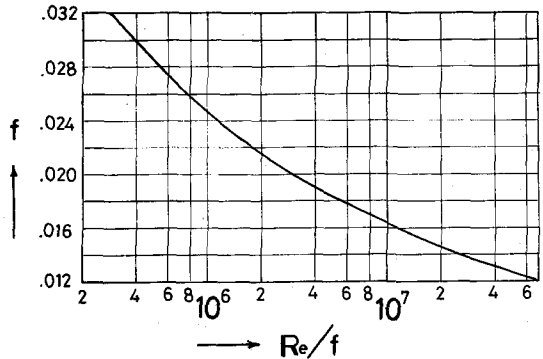
$$\frac{R}{f} = \frac{R_b}{f_b} = \frac{R_w}{f_w} \quad (12)$$

水路壁の粗さが既知ならば、 f_w の値は *Moody* 図か、*ニクラゼ* の図から求めることができ、図-C は *Vanoni* らが滑面壁に対して R_e/f から f を求めるために作った図である。さて実測資料から R と f が既知であるとすれば、 R_b はつぎの手順で計算できる。すなわち、

(12) 式の R/f は既知となるから R_w/f_w は定まり、図-C より f_w を求める。それを(10)式に代入して f_b を計算し、さらに(9)式より $v^2 \cdot f_b / 8 g S$ とおいて R_b を求めればよいこれは試算を要しないが、*Einstein* 法よりかなり面倒である。



付図-B 記号図



付図-C f と R_e/f との関係
(*Vanoni* と *Brooks*)

参考文献

- (1) Progress Report of the Task Force on Friction Factors in Open Channels of the Committee on Hydromechanics of the Hydraulics Division: Friction Factors in Open Channels; Proc.ASCE, Vol.89, No.HY2, March 1963, pp.97-143.
- (2) Task Committee for Preparation of the Sedimentation Manual, Committee on Sedimentation of the Hydraulics Division: Hydraulic Relations for Alluvial Streams (Sediment Transportation Mechanics:F); Proc.ASCE, Vol.97, No.HY1, Jan. 1971, pp.101-141.
- (3) Biswas, A.K.: History of Hydrology; North-Holland Publ.Co., London, 1970.
- (4) Leliavsky, S.: River and Canal Hydraulics; Design Textbooks in Civil Eng., Vol.4, Chapman & Hall Co., 1965.
- (5) Rouse, H.: History of Hydraulics; Iowa Inc. of Hydraulics Research, State Univ. of Iowa, 1959.
- (6) Forchheimer, Ph.: Hydraulik; 2te Auflage, Verlag und Druck von B.G.Teubner, 1924.
- (7) Williams, G.P.: Manning Formula - A Misnomer?; Proc.ASCE, Vol.96, No.HY1, Jan. 1970, p.7036.
- (8) 久野重一郎: マニングの流速公式の考証; 土木学会誌, 第14巻第2号, 1928.
- (9) Prandtl, L. & Tietjens, O.G.: Applied Hydro-and Aeromechanics (Translated by J.P.Hartog); McGraw-Hill Book Co., 1934.
- (10) Streeter, V.L.: Fluid Mechanics; McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- (11) Schlichting, H.: Boundary-Layer Theory (Translated by J. Kestin); McGraw-Hill Book Co., 1968.
- (12) Kármán, V.: Some Aspects of the Turbulence Problem; Proc. 4th Intern. Congress for Applied Mechanics, 1934.
- (13) Keulegan, G.H.: Laws of Turbulent Flow in Open Channels; Journal, Natl. Bureau of Standards, Washington, D.C. Research Paper, 1151, Vol.21, Dec. 1938, pp.707-741.
- (14) 本間・安芸編: 物部水理学; 岩波書店, 1962, pp.59-113.
- (15) 佐藤清一: 水理学; 森北出版, 1960.
- (16) 岡部淳一: 境界層; 水工学シリーズ(河川), 68-15, 1968, pp.15-1~35.

- (17) Rouse, H. : Elementary Mechanics of Fluids; John Wiley & Sons, Inc., 1946.
- (18) 足立昭平 : 流れの抵抗則 ; 水工学シリーズ (河川) , 67-02, 1967.
- (19) 岩垣雄一 : 開水路水 flow の理論 ; 土木学会水工学最近の進歩 ; 1953, pp.5-24.
- (20) Schöcklitsch, A. : Handbuch des Wasserbaues; Erster Band, Springer-Verlag, 1950.
- (21) Gilbert, G.K. : Transportation of Debris by Running Water; U.S.Geological Survey; Prof. Paper, No.86, 1914, pp. 1-259.
- (22) 樺東一郎 : 流砂 ; 水工学シリーズ (河川) , 66-02, 1966.
- (23) 樺東一郎 : 古屋朝治 : 流砂ある河川における流速公式について ; 九大流体力学研究所報告 : 第7巻4号, 1951, pp.8-24.
- (24) 樺東一郎 : 砂れんをとまう掃流作用について ; 土木学会誌, 第40巻第8号, 1955, pp.14-22.
- (25) Ishihara, T., Iwagaki, Y. & Sueishi, T. : On the Effect of Bed-Load Movement in Thin Sheet Flow; Proc. 3rd Japan National Congress for Applied Mechanics, 1953, pp.265-269.
- (26) 木下良作 : 砂れき堆に関する実験 (第3報) ; 昭和30年度栃木県砂防依託調査報告書, 1956
- (27) 篠原謹爾・樺東一郎 : 移動河床の粗度 ; 土木学会第2回水理講演会, 1957.
- (28) 久宝保 : 砂利河川の工法に関する水理学的研究 ; 京大学位論文, 1958, pp.121-152.
- (29) 松梨順三郎 : 開水路における移動床の不安定性について ; 土木学会論文集, 第62号, 1959, pp.25-32.
- (30) 芦田和男 : 河道の設計法 (河川の粗度について) ; 土木技術資料, 第1巻7号, 1959, pp.8-11.
- (31) 松尾捨三郎 : 矩形水路におけるせきの堆砂現象に関する次元解析的研究 ; 土木学会論文集, 第80号, 1962, p.10.
- (32) 細井正延 : 河川急流部の粗度係数と河道計画との関連について ; 建設省土木研究所報告, 第115号, 1953, pp.1-47.
- (33) 山口高志・松田芳夫 : 移動床水路の粗度について ; 第18回建設省技術研究会報告 ; 1964, pp.469-473.
- (34) 佐藤・吉川・芦田 : 河床砂れきの掃流運動に関する研究(I) ; 土木研究所報告, 第98号, 1955, pp.13-30.
- (35) Ackers, P. : Experiments on Small Streams in Alluvium; Proc.ASCE, Vol.90, No.HY4, July 1964, pp. 1-38.
- (36) 須賀堯三 : 河川の粗度に関する雑考 ; 土木技術資料, 第7巻6号, 1965, pp.21-31.
- (37) Einstein, H.A. & Barbarossa, N.J. : River Channel Roughness; Trans.ASCE, Vol.117, 1952, pp.1121-1146.
- (38) 篠原謹爾・薄慶治 : 長六橋付近の白川の粗度係数について ; 九大応力研究所報告, 第7号, 1955, pp.27-38.
- (39) Shen, H.W. : Development of Bed Roughness in Alluvial Channels; Proc.ASCE, Vol.88, HY3, Proc. Paper 3113, May 1962.
- (40) 山岡勲 : 自然河川の粗度に関する一考察 ; 北海道開発局, 土木試験所報告, 第27号, 1962, pp.57-66.
- (41) Yalin, S. : On the Average Velocity of Flow over a Movable Bed; La Houille Blanche, No.1-1964, pp.45-50.
- (42) Simons, D.B. & Richardson, E.V. : Resistance to Flow in Alluvial Channels; U.S.Geological Survey Prof. Paper, 422-J., 1966.
- (43) Englund, F. : Closure to "Hydraulic Resistance of Alluvial Streams" ; Proc.ASCE, Vol.93, No.HV4, July 1967, pp.287-296.
- (44) Vanoni, V.A. & Hwang, L.S. : Relation between Bed Forms and Frictions in Streams; Proc.ASCE, Vol.93, No.HY3, Proc. Paper 5242, May 1967, pp.121-144.
- (45) Haynie, R.B. & Simons, D.B. : Design of Stable Channels in Alluvial Materials; Proc.ASCE, Vol.94, No.HV6, Proc. Paper 6217, Nov. 1968, pp. 1399-1420.
- (46) Lovera, F. & Kennedy, J.F. : Friction Factors for Flat-Bed Flows in Sand Channels; Proc.ASCE, Vol.95, No.HY4, proc. Paper 6678, July 1969.
- (47) Alam, A.M.Z., Cheyer, T.F. & Kennedy, J.F. : Friction Factors for Flows in Sand Bed Channels; Hydrodynamics Laboratory Report No. 78, Mass. Institute of Technology, Cambridge, Mass. June 1966.
- (48) 菊岡保人 : 自然河川 (移動床) の粗度に関する一考察 ; 土木学会論文報告集, No. 163, 1969, pp.67-71.
- (49) Thorn, R.B. : Theory of Flow in Alluvial Channels (River Engineering & Water Conservation Works); Lutterworths, London, 1966, pp.205-216.
- (50) Blench, T. : Regime Theory for Self-Formed Sediment-Bearing Channels; Trans. ASCE, Paper No.2499, May 1951, pp.383-408.
- (51) Lacey, G. : Stable Channels in Alluvium; Proc. Inst. Civ. Engrs., Vol.229, 1930, pp.229.
- (52) Lacey, G. : Flow in Alluvial Channels with Sandy Mobile Beds; Proc. Inst. Civ. Engrs., Feb. 1953.
- (53) Blench, T. : Mobile-Bed Fluviology; Dept. of Technical Services, Univ. of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, 1965.
- (54) Leliavsky, S. : An Introduction to Fluvial Hydraulics; Dover Publ. Inc., New York, 1966.
- (55) Simons, D.B. & Albertson, M.L. : Uniform Water Conveyance Channels in Alluvial Materials; Proc. ASCE, Vol.86, No.HY5, May 1960, pp.33-71.

- (56) Chien, N. : A Concept of the Regime Theory ; Trans.ASCE. Vol.122, Paper No.2884, pp.785-793.
- (57) Inglis, S.C. : Discussion to "Stability of Alluvial Channels" by Henderson; Proc.ASCE. HY4, 1962, pp.328-332.
- (58) Lacey, G. : Discussion to "Stable Channels with Gravel-Paved Beds" by R. Kellerhals; Proc.ASCE, Vol.93, No.WW4, Nov. 1967, pp.248-250.
- (59) Mizoe, N. : Versuche zur Bestimmung der Gleichförmig Fliessenden Bewegung des Wassers und Herleitung einer Allgemeinen Geschwindigkeitsformel für Natürliche Wasserläufe/土木学会誌, 第18巻6号, 1942, pp.531~555.
- (60) 永井莊七郎 : 移動床を有する小水路および自然河川における新流速公式 ; 土木学会誌, 第28巻6号, 1942, pp.531-555.
- (61) Liu, H.K. & Hwang, S.Y. : Discharge Formula for Straight Alluvial Channels; Proc.ASCE, June 1958, pp.65-97.
- (62) Garde, R.J. & Raju, G.R. : Resistance Relationships for Alluvial Channel Flow; Proc.ASCE, Vol.92, No.HY4, July 1966, pp.77-100.
- (63) 杉尾捨三郎 : 河川の平均流速公式と河床面形態との関係について ; 土木学会論文報告集, 第171号, 1969, pp.25-33.
- (64) Sugio, S. : On the Mean Velocity Formulas of Rivers; 13th IAHR Congress, Seminar paper, Vol.5-1, Sept. 1969, pp.257-261.
- (65) 杉尾捨三郎・築田哲男 : 冲積実験水路の抵抗法則について ; 第15回水理講演会, 1971, pp.49-54.
- (66) Advani, M. & Modi, P.N. : Discussion to "Manning Formula- A Misnomer ?"; Proc.ASCE, Vol.96, No.HY9, Sept. 1970, p.1910.
- (67) 本間仁・石原藤次郎編 : 応用水理学中 I ; 丸善, 1958, pp.1-124.
- (68) Johnson, J.W. : The Importance of Considering Side-Wall Friction in Bed-Load Investigations; Civil Engineering, Vol.12, No.6, June 1942, pp.329-331.