

構造物周辺の流れ

中 川 博 次

1. ま え が き

今日のように河川の利用形態が複雑に変化し、河水を時間的・空間的に自由に制御しうる機能が要請されつつある現状では、各種の新しい水理構造物の開発とその水理機能に関する研究は重要な意義をもつものである。

従来から河道や人工水路にはせき、ゲート、断面変化部、減勢池、分合流点などがそれぞれの機能目的に応じて設けられ、一方自然的条件から弯曲部や縮小部・拡大部などの変化部が存在し、さらに河川の機能とは無縁な橋脚が設けられるなど河道の弱点を形成することも少なくない。したがって、水理構造物周辺の流れの挙動に関する研究は、構造物本来の機能設計に必要な作用力や流れの遷移特性を明らかにするのみでなく、構造物の設置によって起こるべき他の機能に対する障害を予測し、その対策がうちてられる性格のものでなければならない。

開水路に設けられた遷移構造物周辺の流れは一般に急激な変化を示し、また複雑な三次元的性状を示すために、流れの水理学的挙動を適確に表示する力学的関係を明確にすることがはなはだ困難である。とくに流れのはく離に伴う渦の発生や乱れの発達・減衰は機能設計上重要な役割を果たすにもかかわらず、理論的表示や計測が困難であるところに現象解析やその積極的利用を阻害していた原因があった。さらに、構造物の機能目的や形式が多種にわたるために問題を複雑にし、このため現在までの研究は主として水理模型実験による考察に重点が注がれてきた。

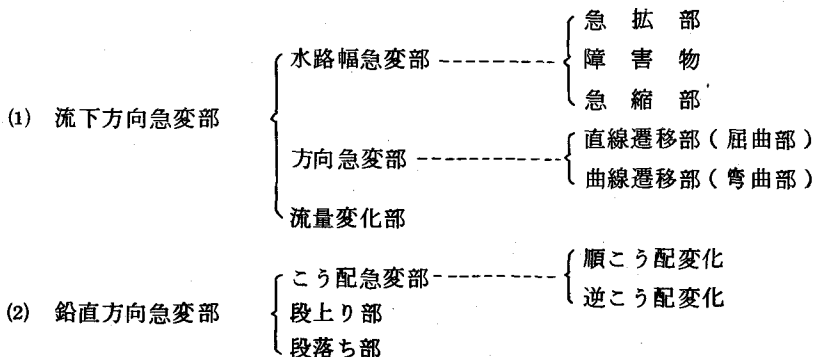
しかしながら、このように複雑な局所急変流の現象を単純化された適切な水理学的モデルに表現することによって、その内部機構を明らかにしようとする研究も多くみられるようになっていく。そしてこれらの研究成果が水路形状の合理的設計法や局所洗掘の防止法など実用的諸問題の解決に有効に利用されている。

以上のように複雑多岐にわたる局所急変流の問題を統一的に論ずるのは到底筆者の任ではない。本文では急変流の断面平均流としての性状、従来の平均流に関する内部機構モデル化の方法、ならびに局所洗掘の特性について述べる。

2. 急変部での遷移流の一般的性状

2-1 開水路急変部の分類

いま、流水の急激な変化をもたらす境界条件を分類すればつぎのとおりである。



(3) 両者を組み合わせた急変部

これら急変部での水理現象の解明は各種の水理構造物を合理的に設計するために必要であるが、従来とりあげられてきた研究課題をまとめるとつぎのようである。

- 1) 遷移水面形状の一般特性
- 2) エネルギー損失の評価
- 3) 平均流の内部機構、とくに流速分布の変化と二次流の特性
- 4) 構造物の流量支配特性と流量配分比
- 5) 乱れの発達・減衰とエネルギー変換過程
- 6) はく離領域のスケールとはく離限界
- 7) 局所的河床洗掘の特性とその防止対策

2-2 水路急変部における遷移水面形状

断面急変部における開水路流れの遷移水面形状は水路の幾何学的形状、上下流水路のこう配によって支配される。急拡部の上下流で等流状態を示す場合の遷移水面形の定性的挙動をこう配ごとに分類して示じたのが図 2.1 である。

(1) 鉛直方向急変部

Jaeger¹⁾ は段上り・

段落ち部および急拡・急縮部における水面形の遷移特性を運動量一次元解析法を用いて系統的に説明している。すなわち、図 2・2 に示す段上りの上流Ⅰ断面と下流Ⅱ断面との間における境界面での表面抵抗を無視した運動量保存の関係から、

$$\frac{1}{2} h_1^2 - \frac{1}{2} (h_2 + d)^2 - \zeta \frac{v_1^2}{2g} d = \beta_2 \frac{v_2^2}{g} h_2 - \beta_1 \frac{v_1^2}{g} h_1 \quad (2.1)$$

が得られる。左辺第 3 項は段に作用する単位水路幅当りの動水圧を表わす。いま、 $h_2/h_1 = \phi$ 、 $F_1 = v_1/\sqrt{gh_1}$ 、 $\delta = d/h_1$ なる無次元量を導入し、 $\beta_1 = \beta_2 = 1$ 、 $\zeta = 0$ と仮定すると、

$$F_1^2 = \frac{\phi \{ (\phi + \delta)^2 - 1 \}}{2(\phi - 1)} \quad (2.2)$$

1) Jaeger, C.; *Engineering Fluid Mechanics*, Blackie & Sons, London, 1956, PP. 157-171

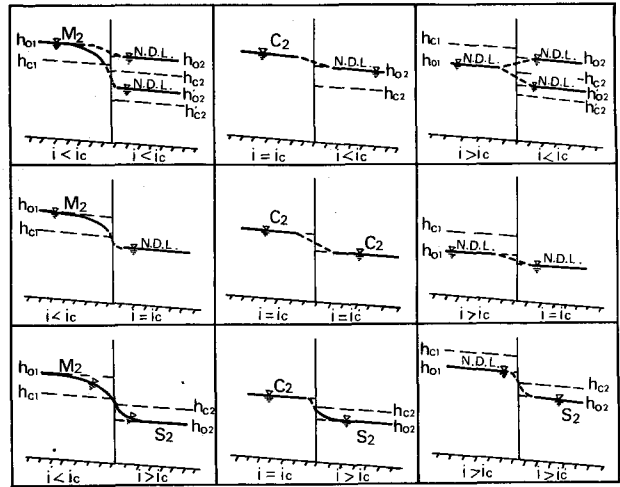


図 2・1 急拡部での遷移水面形

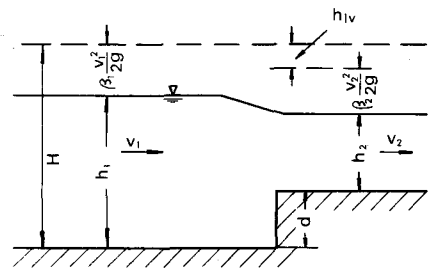


図 2・2 段上り説明図

の関係が得られる。段落ちについても段落底面での圧力水頭が上流水深に等しい静水圧分布を仮定すると、

$$F_1^2 = \frac{\phi \{ \phi^2 - (1 - \delta)^2 \}}{2(\phi - 1)} \quad (2.3)$$

$\delta = 0$ の場合には跳水共役水深の関係が得られる。

$$F_1^2 = \phi(1 + \phi) / 2 \quad (2.4)$$

(2.2), (2.3) および (2.4) 式から δ をパラメータとして F_1 と ϕ との関係を図示したのが図 2・3 である。図に示した全領域を $h_{1,c} \geq h_c$ および $d \geq 0$ によって 8 つの領域に分けることができる。すなわち、 $\phi = F_1^{2/3}$ の曲線より上では $h_2 > h_c$ 、下では $h_2 < h_c$ 。また $F_1 = 1$ より左は $h_1 < h_c$ 、右は $h_1 > h_c$ であり、これによって水面の遷移特性がきまる。また (2.3) 式の曲線と $\phi = 1$ によって囲まれる領域によって段上りおよび段落ちの領域が規定される。各領域についての既往の研究成果をもとにして、段上り・段落の水利機能を説明すればつぎのとおりである。

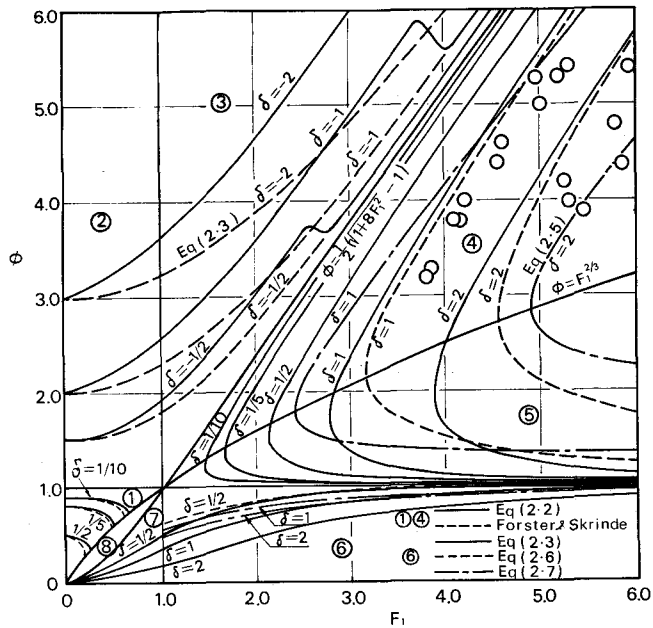


図 2・3 F_1 と ϕ の関係曲線 (鉛直急変部)

- ① 領域 段上りで $h_1 > h_2 > h_c$ であり、常流から常流に遷移する *Submerged flow* の場合である。Forster と Skrinde²⁾ は (2.2) 式では各曲線の F_1 の最大値が $\phi = F_1^{2/3}$ の曲線上にのらないことから、上流水深 h_1 に相当した静水圧が段に作用すると仮定すべきであるとして、破線で示される曲線を示しているが、実験による検証は行なわれていない。
- ② 領域 段落ちで $h_2 > h_1 > h_c$ の場合であり、やはり *Submerged flow* の状態があらわれる。 H_{su} ³⁾ は段落ちで形成される跳水現象 (③領域) に関する実験的考察を行なっているが、その結果から②領域での段落ち部への作用力として下流水深 h_2 に相当した静水圧を考慮した解が実際現象をよく表現することが認められ、その結果は②領域の実線で示され、一方、 h_1 に相当する作用力を仮定した Jaeger の解は破線で与えられる。

2) Forster, J. W. and Skrinde, R. A.; Control of the Hydraulic Jump by Sills, Fans, ASCE, Vol. 115, 1950, pp. 973-1022

3) 同 上 Discussion by En-Yun Hsu, pp. 988-991

③ 領域 段落ちで跳水が形成される場合であり、一定の δ に対して F_1 の小さい範囲では②領域での実線から連続した変化を示すが、 F_1 がある値以上になると、跳水の先端が段落部より下流におしやられ、その結果(2.3)式の曲線へ急激に移行する。その変化点は δ の値によって異なることが H_{su} の実験で確認されている。

④ 領域 段上りによる跳水の発生領域をあらわし、その上限は(2.4)式で与えられる跳水曲線、下限は $h_2 = h_c$ である。Forster と Skrinde は跳水共役水深 $h_j (= \frac{h_1}{2} (\sqrt{1+8F_1^2}-1))$ に相当した静水圧を段前面に仮定することにより、任意の δ に関する F_1 の最小値が $\phi = F_1^{2/3}$ を満足することを得た。図中破線で $\delta = 1, 2$ に対するこの曲線を示しているが、実測値と比較してなお作用力が過小に評価されている。

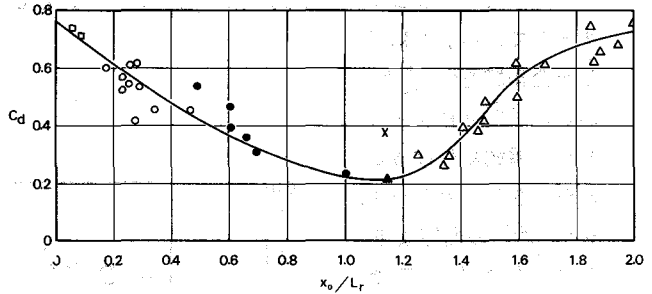


図 2.4 段上り位置と抗力係数

Rajaratnam⁴⁾は跳水中におかれた段上りに作用する力を測定し、図 2.4 に示す段上りの位置による抗力係数 C_d の変化を表わす曲線を得た。図中 x_0 は跳水先端から段上りまでの距離、 L_r は正常跳水の表面渦長であり、 F_1 によって変化する。作用力 P を $(C_d \rho v_1^2 d / 2)$ で表わすと、運動量保存則から、

$$F_1^2 = \frac{\phi}{2} \frac{(1-\phi^2)}{1+\phi[(C_d \delta / 2)-1]} \quad (2.5)$$

が得られる。④領域での(2.5)式の関係として、 $x_0 = 1.5 L_r$ での C_d の値 0.5 を用いて計算した結果は図 2.3 の鎖線で示される。

⑤ 領域 段上りで $h_c > h_2 > h_1$ すなわち射流から射流へ遷移する場合である。段に作用する動水圧の定量的評価が問題であり、Koch と Carstanjen⁵⁾の実験によると(2.1)式の ζ の値は 0.14 である。

⑥ 領域 段落ちで射流から射流に遷移する場合であり、(2.3)式はこの場合の作用力を正しく評価していない。 $\delta < 1$ に対してはエネルギー損失を無視したベルヌーイ式から導びかれる関係式

$$F_1^2 = \frac{2\phi^2}{\phi^2-1} (\phi-1-\delta) \quad (2.6)$$

で近似され、 $1.5 > \delta > 1$ に対しては White⁶⁾が導いた落下水脈の下面が十分給気された状態での関係式

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}F_1} \sqrt{\delta+1+\frac{F_1^2}{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4F_1^2} \quad (2.7)$$

が与えられる。

4) Rajaratnam, N.; The Forced Hydraulic Jump, Water Power, Feb. 1964, pp. 63-64

5) Koch, A. and Carstanjen, M.; Von der Bewegung des Wassers und den dabei auftretenden Kräften, Springer, Berlin, 1926

6) White, M. P.; Discussion on Energy Loss at the Base of Free Overfall by W. L. Moore, Trans. ASCE, Vol. 108, 1943, p.1361

⑦ 領域 $h_1 \geq h_c > h_2$ で段落部が支配断面となる場合である。したがって、 $h_1 = h_c$ であり、 $F_1 = 1$ に対する値のみを確定すればよい。このときの ϕ の値は (2.6) 式および (2.7) 式の曲線と $F_1 = 1$ の交点で近似的に与えられることが実験で確かめられている。

⑧ 領域 この領域で (2.2) 式の解を用いて断面間のエネルギー損失を求めると負の値を示し、実際にはこのような現象は起らない。

(2) 水路幅急変部

図 2.5 に示される水路急拡部および急縮部についても同様に運動量保存則によって水面形の遷移特性を説明することができる。Jaeger は急拡部での水深が上流水深 h_1 に等しいとして、

$$F_1^2 = \frac{\beta_* \phi (1 - \phi^2)}{2[(1/\beta_*) - \phi]} \quad (\phi \geq 1) \quad (2.8)$$

なる関係を得た。ここに $\beta_* = B_2/B_1$ である。

石原・志方⁷⁾は下流水深以上になると常流から常流に遷移し、それ以下では常流→射流→常流の遷移状態があらわれ、その間に不安定な遷移領域の存在することを実験的に確かめた。常流遷移の場合には (2.8) 式が適用され、射流遷移の場合には急拡部での水深を h_2 におくのが適切であるとして、

$$F_1^2 = \frac{\phi (1 - \phi^2)}{2[(1/\beta_*) - \phi]} \quad (\phi < \frac{1}{\beta_*}) \quad (2.9)$$

を与えた。(2.8) 式および (2.9) 式から臨界下流条件

$$2.7 \beta_*^2 F_2^4 - (1 + 2 F_2^2)^3 = 0 \quad (2.10)$$

$$2.7 \beta_*^4 F_2^4 - (1 + 2 \beta_* F_2^2)^3 = 0 \quad (2.11)$$

を求め、図 2.6 に示すような不安定領域を確定した。

急縮部に関しては常流遷移、射流遷移いずれに対しても急縮部での水深は h_1 にほぼ等しいことから、(2.8) 式の関係が成立する。(2.8) 式および (2.9) 式の関係を図 2.7 に示す。志方⁸⁾の実験によれば、 $F_1 > 1$ の場合には急縮部によるせき上げ背水効果があらわれ、上述の仮定が満足されないことから、図 2.7 の急縮部に関する $\phi > 1$ の領域の曲線は実際現象を十分表わしていない。

急縮部の臨界下流水深は急縮部直下流のはく離

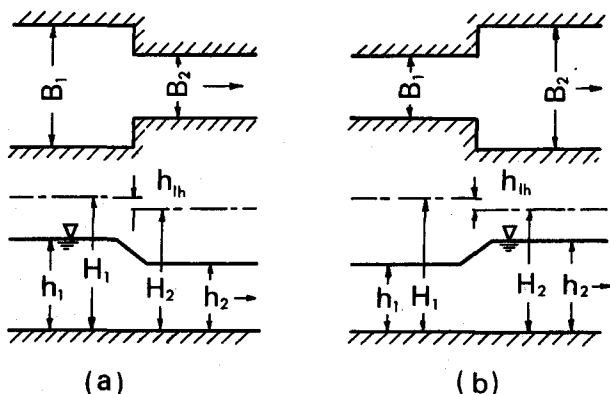


図 2.5 急拡・急縮部

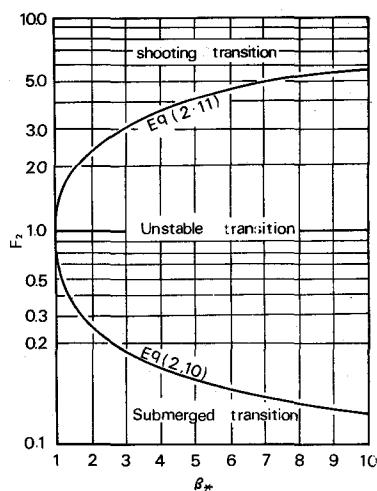


図 2.6 臨界下流条件 (急拡部)

7) 石原藤次郎, 志方俊之: 開水路急拡部の水理学的性状に関する研究, 土木学会論文集, 第128号

1966, pp. 12-28

領域での収縮断面で限界流状態が発生するという条件から求められる。収縮断面での平均水深 h_3 ，収縮係数を C_c とし， $\phi = h_3/h_1$ なる無次元量を導入すると，運動量保存則から，

$$F_1^2 = \frac{\beta_* \phi (1 - \phi^2)}{2[(1/\beta C_c) - 1]} \quad (1 > \phi > 0) \quad (2.12)$$

の関係式が得られ，これを $F_3^2 = v_3^2 / g h_3$ でかき直すと，

$$2 C_c^2 \beta_* F_3^2 \phi^3 - (1 + 2 C_c F_3^2) \phi^2 + 1 = 0 \quad (1 > \phi > 0) \quad (2.13)$$

(2.13) 式で $F_3 = 1.0$ とおくと，与えられた C_c ， β_* に対して臨界下流水深 h_{3c} が求められ，(2.8) 式を用いてこの場合の下流水深 h_2 が求められる。しかし，この場合の急縮部付近の流れは不安定な状態にあるため， $F_3 = 1$ が実際の h_{3c} を与えるとはいえず，志方が $\beta_* = 0.5$ の急縮部について行なった実験によると，図 2・8 に示すように臨界フルード数 F_{3c} は 0.4 ~ 0.6 となっており，臨界下流条件は各 β_* の値について実験によって評価されねばならない。

2-3 エネルギー損失

段上りおよび段落ちでの損失水頭 h_{lv}

は

$$h_{lv} = \zeta_v \frac{v_2^2}{2g} = (h_1 - h_2) + \frac{1}{2g} (v_1^2 - v_2^2) + (z_1 - z_2) \quad (2.14)$$

で表わされる。ここに ζ_v はエネルギー損失係数である。2-2. (1)での表示を用いると， ζ_v は次式で与えられる。

$$\zeta_v = \frac{F_2^2 \phi^3 - (2 + F_2^2) \phi + 2(1 - \delta)}{F_2^2 \phi} \quad (2.15)$$

段上りでは $\delta > 0$ ，段落ちでは $\delta < 0$ である。 $F_1^2 = F_2^2 \phi^3$ であるから，(2.15) 式と (2.2) または (2.3) 式とから ζ_v を求めることができる。

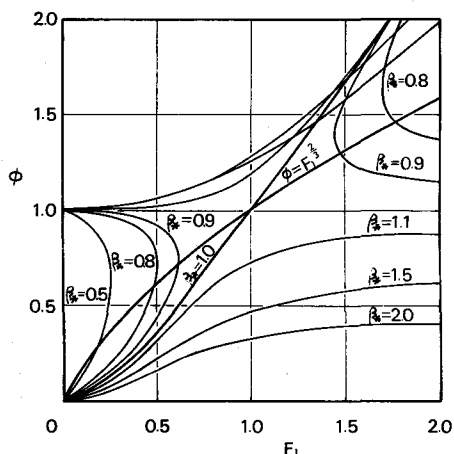


図 2・7 F_1 と ϕ の関係曲線 (水路幅急変部)

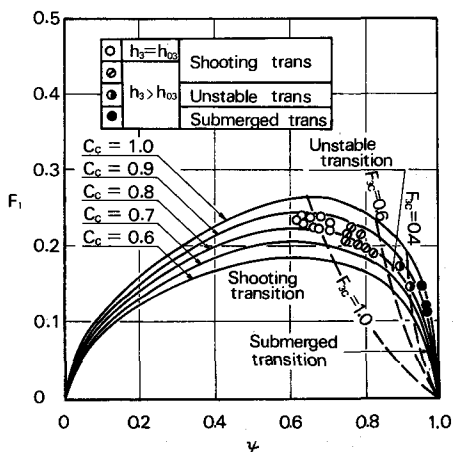


図 2・8 F_3 と ϕ の関係 (急縮部)

急拡・急縮部での損失係数 ζ_h は、

$$\zeta_h = \frac{\beta_*^2 F_2^2 \phi^3 - (2 + F_2^2) \phi + 2}{F_2^2 \phi} \quad (2 \cdot 16)$$

で与えられ、これと(2・8)または(2・9)式を組み合わせ、 $F_1^2 = \beta_*^2 F_2^2 \phi^3$ の関係を用いて ζ_h と F_2 との関係を求めることができる。

志方が急拡部について求めた ζ_h と F_2 の関係曲線を実験値と比較して図2・9に示す。常流遷移では F_2 の増大とともに、 ζ_h は著るしく増大し、逆に射流遷移では速度水頭が大きいいため ζ_h は減少する。また常流遷移では β_* の大きいほど ζ_h が大きい。急縮部では ζ_h は F_2 によってほとんど変化せず、一方 β_* が減少するにつれて増大することが認められる。

3. 急変部での平均流の内部機構

3-1 流れのモデル化

水理構造物周辺における流れの挙動は複雑であり、平均流速の分布や圧力分布などの変化を解析するには、境界形状や水理学的条件に適した流れのモデル化が何より必要である。とくに開水路流れの場合には境界条件の設定が困難な場合が多く、三次元的な流れの挙動に対しても多くの場合二次元流れに関する理論を修正した方法で解析されてきた。従来展開されてきた開水路急変流に関する理論解析の方法を大別すればつぎのとおりである。

- (1) 二次元ポテンシャル流理論とその応用
- (2) Navier-Stokes の式の近似解
- (3) 境界層理論による解析
- (4) 非粘性せん断流の変形過程としての取扱い
- (5) 噴流拡散現象としてのモデル化
- (6) 衝撃波理論の応用

3-2 二次元ポテンシャル流理論とその応用

二次元非回転流で流れ関数と速度ポテンシャルが互いに共役であり、Cauchy-Riemann の方程式を満足することから、複素関数論が広く応用され、図解法としては流線網による解法がよく用いられている。

Strelkoff⁹⁾は刃形せきを越える曲線ポテンシャル流れに関して Laplace の方程式に関する境界値問題として取り扱い、水面および底部境界面での条件と水面に関するベルヌーイ式とから水面形に関する積分方程式を導びき、その数値計算の結果と実験値とを比較して、十分な一致が得られることを確かめた。

Waters¹⁰⁾らは開水路におかれた各種のシルを越える流れを複素関数論にもとづく等角写像に

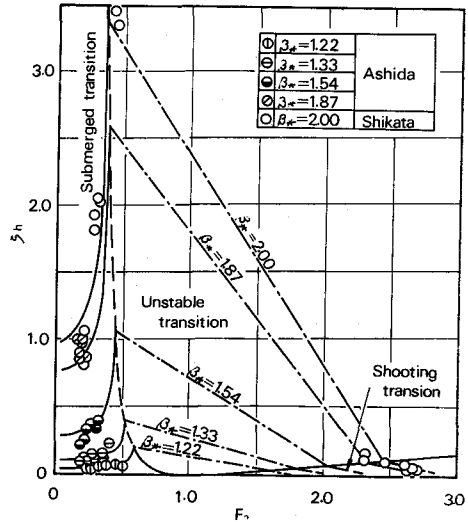


図2・9 エネルギー損失係数
(急 拡 部)

9) Strelkoff, T. S., Solution of Highly Curvilinear Gravity Flows, Proc. ASCE, EM3, 1964, pp. 195-221

よって解析し、補助平面を自由水面に関するベルヌーイ式から定め、その平面での複素変数の関数として流れの任意点での流速と圧力とを決定する方法を示している。

このような二次元ポテンシャル流理論は開水路分水路の分岐点付近の流れの解析に広く応用されている。室田¹¹⁾は水深変化のない場合の水路側壁片側の開口部からの対称流出水束の自由流線を写像計算によって求めることによって分岐端での特異性を除去し、これに一樣流を重ね合わせて分岐端付近の二次元流速分布を求め、

さらに比エネルギー一定の条件から横断水面形を解析して実測値と十分な精度で一致することを示した。図3・1に解析に当って用いられた流れのモデルを示す。

また流量配分比 κ についての限界値

$$\kappa_* = 2 / \left(\frac{2}{n\sigma_0} + 1 \right) \quad (3.1)$$

が存在し、 $\kappa > \kappa_*$ の場合は分水路両側壁に沿っては離領域が現われて、 κ は分岐角にほとんど影響されず、かつ憩流点が分岐下流端より下流に存在して戻り流れの現象がみられるが、 $\kappa < \kappa_*$ では憩流点は分岐先端に一致して、 κ は分岐角の影響を受けることを明らかにした。

(3.1)式で n は開口幅と主水路幅との

比、 σ_0 は対称流出の場合の縮流係数である。 σ_0 と n との関係は写像計算による自由流線の解析から、 α をパラメータとして、

$$\frac{1 - \sigma_0}{\sigma_0} = \frac{2}{\alpha\pi} \log \frac{1}{1 - \alpha} \quad (3.2)$$

$$\alpha = 2n\sigma_0 / [(n\sigma_0)^2 + 4] \quad (3.3)$$

で求められる。(3.1)~(3.3)式を用いて計算された κ_* と n との関係は図3・2に示される。

中川ら¹²⁾は開口部からの非対称流出を考え、主流および分岐流に関するエネルギー保存則および運動量保存則から、縮流係数 σ 、流出角 θ_0 、流量配分比 κ および開口比 n の関係を求め、さらに二次元ポテンシャル流れとして写像解析によって物理平面を確定し、 n お

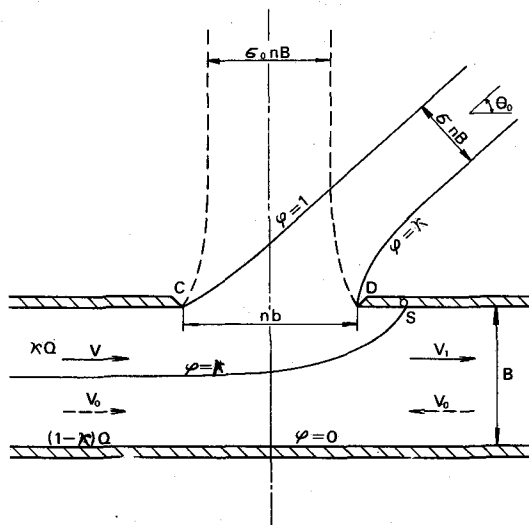


図3・1 分水路流出モデル

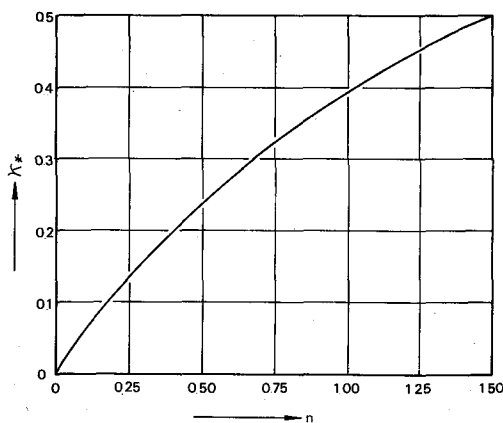


図3・2 κ_* と n との関係

10) Watters, G. Z. and Street, R. L.; Two-Dimensional Flow Over Sills in Open Channels, Proc. ASCE, HY4, 1964, pp. 107-140

11) 室田明: 開水路分水路の研究, 土木学会論文集 第70号, 別冊(1-1), 1961

12) 中川博次, 武内等: 開水路分岐に関する実験的考察 土木学会第22回年次学術講演会講演集, 1967

よび θ_0 が与えられた場合の σ と κ との計算法を示した。

しかしながら、これら開水路せん断流が変化する場合には、表層と底層の流線にきわめて顕著なねじれがあらわれ、上述の解析法はポテンシャル流とみなしうる表層流に対して近似的に適用しうるにすぎない。このような二次流の発生については、流線の曲がりによる遠心力に起因するという考えや流速分布に伴う横断水面の変化によるものとするもの、あるいはせん断流が粘性の影響を受けずに変形する過程として説明されている。いずれにしても遷移構造物周辺での二次流の挙動は局所的な水面変化や河床洗掘、流砂配分比などの問題と密接に関係しており、現象の統一的な記述が何よりも望まれるところであって、3-4、3-5に従来の研究成果を述べる。

3-3 Navier-Stokes の式の近似解

一般に急変流では流線の曲率を無視することはできない。いま、二次元開水路定常流を考え、流線に沿った座標軸 s および鉛直面で流線と直交する座標軸 n とからなる直交曲線座標系におけるエネルギー水頭を考慮した運動方程式および連続式は次のように表わされる。

$$\frac{q}{\alpha_1} \frac{\partial H}{\partial s} = \nabla^2 \varepsilon v \quad (3.4)$$

$$\frac{q}{\alpha_2} \frac{\partial H}{\partial n} = \frac{v}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial}{\partial n} (\alpha_1 v) \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial}{\partial s} (\alpha_2 v) = 0 \quad (3.6)$$

ここに $H = (v^2/2g) + (p/\rho g) + z + z_b$ であり、 v は流速の絶対値、 z は水路床からの鉛直高さ、 z_b は水路床の基準水平面からの高さ、 ε は渦動粘性係数である。また

$$\alpha_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)^2}$$

(3.5) 式から次式をうる。

$$\frac{q}{\alpha_2} \frac{\partial H}{\partial n} = \frac{v}{\alpha_2} \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{v^2}{R} \quad (3.7)$$

ここに R は流線の曲率半径であり、次の関係が成り立つ

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial n} \quad (3.8)$$

(1) 非回転流の場合

非粘性流体で非回転流れと考えられる場合には、 $\partial H / \partial n = 0$ であるから、(3.7) 式は容易に積分され、

$$v = C(s) e^{-\int \alpha_2 dn/R} \quad (3.9)$$

なる流速表示式が得られる。しかしながら、 R や α_2 は場所ごとに異なるから、流速分布や曲率半径の変化を仮定することが必要となる。*Boussinesq*¹³⁾ は一定こう配水路上の開水路流れで流線曲率が水深方向に直線変化するものとして、運動量解析によって3階非線型微分方程式を導びき、これを線型化して水面形に関する波動解を得た。

*Fawer*¹⁴⁾ は曲率の指数関数的変化を仮定して、エネルギー解析によって水面形特性を論じている。*Serre*¹⁵⁾ は各種の遷移構造物上の曲線開水路流れの水面形を定性的に論じている。

13) *Boussinesq, J. V. ; Essai sur la théorie des eaux courantes, Mémoires Présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, Paris, 1877*

14) *Fawer, C. ; Étude de quelques écoulements Permanents à filets courbes, Thèse, Lausanne, 1937*

越流頂上の曲線流の解析では、Jaeger¹⁶⁾が(3・9)式で $\alpha_2 = 1$, $dn/R = dz/R_b + m z$ (R_b : 越流底面の曲率半径)とし、Fawerの実験値から $m = 2$ を定めて、Bélangerの定理によって水位一流量関係を堤頂での底面曲率半径と総水頭との比で表わしたのが最初である。岩佐¹⁷⁾は非粘性流体で非回転運動を仮定した越流頂上の流れについて、エネルギー解析法によって水面形方程式を導びき、特異点の方法によって堤頂に支配断面が存在することを証明するとともに、水位一流量関係を確定した。すなわち、図3・3に示すように越流面に沿って x 軸、それと直角方向に y 軸をとると、(3・9)式で $\alpha_2 = 1$, $R = R_b + y$, $dn \rightarrow dy$ とすればよいから、容易に積分され、

$$v(R_b + y) = C(s)$$

水深を h 、単位幅流量を q とすると、 $q = \int_0^h v dy$ であるから、積分定数 $C(s)$ が求まり、結局

$$v = \frac{q}{\ell n(1 + \frac{h}{R_b})} \cdot \frac{1}{(R_b + y)} \quad (3 \cdot 10)$$

が得られる。底面流速を v_b 、表面流速を v_s とすると、(3・10)式より次式の関係が得られる。

$$v_b R_b = v(R_b + y) = v_s(R_b + h) \quad (3 \cdot 11)$$

圧力分布は(3・11)式を(3・5)式に代入し、 y について積分し、 $y = h$ で $p = 0$ となるよう積分定数を定めると、

$$\frac{p}{\rho g} = (h - y) \cos \theta - \left(\frac{v_b^2 R_b^2}{2g} \right) \left\{ \frac{1}{(R_b + y)^2} - \frac{1}{(R_b + h)^2} \right\} \quad (3 \cdot 12)$$

堤頂を基準とする流れの総水頭 H_0 は

$$H_0 = (1/g) \int_0^h \{ (v^2/2g) + (p/\rho g) + y \cos \theta - Z_b \} v dy = h \cos \theta + (v_s^2/2g) - Z_b \quad (3 \cdot 13)$$

ここに、 Z_b は堤頂と越流底面との標高差である。(3・13)式に(3・10)および(3・11)式の関係を代入し、 x で微分すると次の水面形方程式が得られる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{f_1(x, h)}{f_2(x, h)} \quad (3 \cdot 14)$$

$$\text{ここに} \quad f_1(x, h) = \sin \theta \left\{ 1 + h \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \right\} + \frac{q^2}{g} \left(\frac{dR}{dx} \right) \left\{ \ell n \left(1 + \frac{h}{R_b} \right) - \frac{h}{R_b} \right\}$$

$$f_2(x, h) = \cos \theta - \frac{\frac{q^2}{g} \left\{ 1 + \ell n \left(1 + \frac{h}{R_b} \right) \right\}}{(R_b + h)^3 \ell n^3 \left(1 + \frac{h}{R_b} \right)}$$

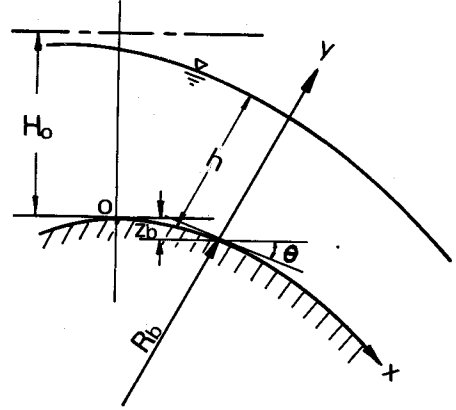


図3・3 越流頂の流れ

- 15) Serre, F.; Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux, La Houille Blanche Juin-Juillet, 1953, pp. 374-388, Dac., 1953, pp. 830-872
- 16) Jaeger, C.; Remarques sur quelques écoulements le long de lits à pente variant graduellement, Schweiz. Bauztg. 114, No. 20, 1939
- 17) Ishihara, T., Iwasa, Y., Ikeda, K.; Basic studies on Hydraulic Performances of Overflow Spillways and Diversion Weirs, Bull. D. P. R. I., Kyoto Univ. No. 33, 1960

越流面が円または放物線であれば、 dR/dx は 0 となり、特異点では $f_1 = f_2 = 0$ であるから、特異点での諸量に添字 c をつけて表わすと、

$$\sin \theta_c = 0 \quad (3.15)$$

$$\cos \theta_c = \frac{q^2 \{ 1 + \ln(1 + \frac{h_c}{R_{bc}}) \}}{q(R_{bc} + h_c)^3 \ln^3(1 + \frac{h_c}{R_{bc}})} \quad (3.16)$$

の関係が得られる。(3.15) 式から $\theta_c = 0$ すなわち堤頂に特異点が存在することがわかり、また(3.14)式の線型化方程式の常数係数を吟味することによって特異点は鞍形点となり、堤頂が支配断面となることが証明される。

流量と貯水頭との関係をせき公式で与える。

$$q = C H_0^{3/2} \quad (3.17)$$

ここに q : 単位幅当り流量, C : 流量係数である。いま, $\kappa = h_c/H_0$, $\lambda = R_{bc}/H_0$ なる無次元量を導入すると, (3.10), (3.11), (3.13), (3.16) 式から, 次の関係が得られる。

$$(\lambda + \kappa) \ln(1 + \frac{\kappa}{\lambda}) = 2(1 - \kappa) \{ 1 + \ln(1 + \frac{\kappa}{\lambda}) \} \quad (3.18)$$

$$C = \sqrt{2q(1 - \kappa)} (\lambda + \kappa) \ln(1 + \frac{\kappa}{\lambda}) \quad (3.19)$$

図 3.4 に(3.18)式および(3.19)式から求められた λ と C との関係, 先述の Jaeger の理論曲線および Lausanne 大学の実験資料から得られた曲線を示している。一定の越流頂形状に対しては貯水頭の増加とともに, 流量係数が急激に増加することがわかる。

通常のダム洪水吐では,

図 3.5 に示す Randolph 曲線や Harrold 曲線で表わさ

れる標準型越流頂が採用される。図中 H_d は設計水頭である。明らかに堤頂で R_b および dR_b/dx は不連続であるから, 支配断面の位置を理論的に求めることはできないが, 堤頂付近の越流面を放物線に近似しうものとする, 堤頂に支配断面があると考えられ, また底面に沿う流線は連続であるから, この断面での底面曲率半径を実験結果から求めるのが妥当である。

石井・藤本¹⁸⁾は堤頂での流速分布の測定値を(3.11)式に代入し, $R_{bc} = 0.9173 H_d$ (H_d : 設計水頭)を得た。これを(3.18)式および(3.19)式に代入して求められた C と H_0/H_d の理論曲線と既往の実測曲線を比較したのが図 3.6 である。さらに越流せきに関する

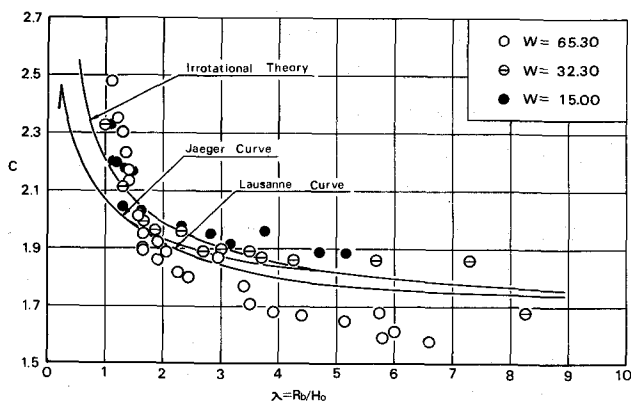
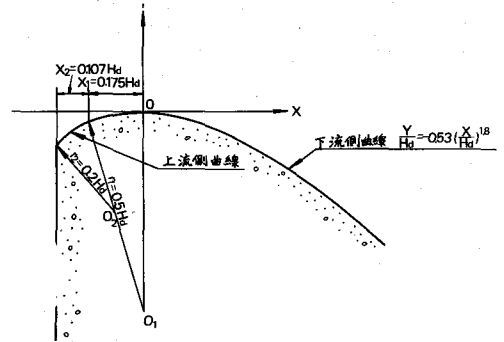


図 3.4 円形せきの流量係数

18) 石井文雄, 藤本成: 越流型余水吐の水利機能に関する研究

(1), (2), (3), 土木研究所報告, 第127号(1966), 第130号(1967), 第132号(1968)

$$C' = C_o \left(1 + K_r \frac{H_o}{R_{bc}} \right)^{1/2} \quad (3.20)$$


布をし、流速分布が与えられているものとする。
このとき H は次式で与えられる。

$$H(n) = \frac{v_0^2(n)}{2g} + h_0 \cos \theta + \Omega_b \quad (3.22)$$

連続の関係 (3.6) 式から $\alpha_2 v$ は n のみの関数であり、 s_0 断面での条件を考慮して次式がえられる。

$$\alpha_2 v = h_0 \cdot v_0(n) \quad (3.23)$$

ここに、 α_1, α_2 は長さの次元をもつように選ぶから、 n および s は無次元量となる。

(3.23) 式を (3.7) 式に代入して変形すると、

$$\frac{\partial}{\partial n} (v_0^2 - v^2) = \frac{2\alpha_2}{R} v^2 \quad (3.24)$$

いま曲率について、 $\alpha_2/R = (h/R_e) n^m$ (R_e : 水面における曲率半径) を仮定した場合の線型微分方程式を解くと、

$$v^2 = \exp \{ 2\kappa (1 - n^{m+1}) \} \left\{ v_e^2 - \int_n^h \frac{h dv_0}{n} \exp (2\kappa n^{m+1}) dn \right\} \quad (3.25)$$

ここに v_e は表面流速であり、 $\kappa = h/R_e(m+1)$ である。括弧内の積分は回転流としての付加項であり、これを除いた解は *Jaeger*²⁰⁾ が非回転流を仮定して求めた段縁の流速分布式を表わしている。

いま、(3.23) 式を (3.24) 式に代入した方程式、すなわち

$$\frac{v_0}{v} \frac{\partial v_0}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{h_0}{R} v_0 \quad (3.26)$$

を考える。この非線型微分方程式の左辺の v を断面平均流速 v_m で近似して線型化し、さらに曲率について、 $1/R = (1/R_e) n^m$, $m = m(s)$ の仮定を設けて、(3.26) 式を 0 から 1 まで積分すると次式の流速分布式が得られる。

$$v - v_i = -\frac{1}{R_e} \int_0^1 v_0 n^m dn + \frac{1}{2v_m} (v_0^2 - v_{0i}^2) \quad (3.27)$$

ここに添字 i は $n = 0$ (底面) における値を示す。

いま、限界水深 h_c の生じる断面を基準断面に選び、そこでの流速が対数分布則にしたがうと仮定する。段縁点における上側自由水面での流速 v_e および下側自由水面での流速 v_i は、(3.22) から、

$$\begin{aligned} v_e &= \sqrt{v_{ce}^2 + 2g(h_c - h_f) \cos \theta} & (n=1) \\ v_i &= \sqrt{2gh_c \cos \theta} & (n=0) \end{aligned} \quad (3.28)$$

ここに、 v_{ce} : 限界水深点での表面流速、 h_f : 段縁点で水路床に直角に測った水深である。(3.23), (3.27), (3.28) および α_2 に関する近似的な条件式

$$h_f = \int_0^1 \alpha_2 dn \quad (3.29)$$

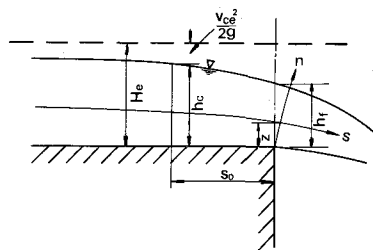


図 3.8 段落流記号図

20) *Jaeger, C.; Commentaires et discussions, Hauteur d'eau à l'extrémité d'un long déversoir, La Houille Blanche, Nov-Déc., 1948, pp. 518-523*

から、基準断面での流速分布および $\xi = h_f/h_c$ が与えられた場合の段縁点での流速分布や圧力分布を求めることができる。いま、 $\xi = 0.711$ とし、基準断面の流速分布を実測結果から、 $v_c/\sqrt{gh_c} = 1.1 + 0.1 \ln n$ で与えて、流速分布を計算した結果が図 3・9 に示され、Jaeger の非回転流れとしての解と比較して実現象をより適確に表示していることがわかる。

3-4 境界層理論による解析

3-2 で述べた二次元ポテンシャル流理論では開水路せん断流の変形機構を包括的に説明しえないことがわかった。主流が障害物付近で曲がるとき、主流の曲率によって境界層内に及ぼされる半径方向の圧力こう配によって発生する二次流を境界層の変形過程によって説明しようとする方法がある。流れは非圧縮性定常流、非回転流れで、乱流境界層を考え、曲がり領域の上流では二次元乱流流速分布を有するものとしている。このような

流れの境界層問題を取扱う方法は一連の境界層方程式から導かれた運動量方程式を解析することであるが、運動量方程式を解くために必要な流速分布の仮定については、Prandtl²¹⁾、Mager²²⁾、Moore と Richardson²³⁾、Coles²⁴⁾、Johnston²⁵⁾らの研究がある。

Prandtl が提案した流速分布モデルは図 3・10 を参照して

$$\frac{u_s}{U} = G\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (3.30)$$

$$\frac{u_n}{U} = eG\left(\frac{z}{\delta}\right) q\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (3.31)$$

ここに、 δ は境界層厚、 e は流れの摩擦特性に関係したパラメーターで、 G 、 q は z/δ に関する普遍的な関数である。Mager

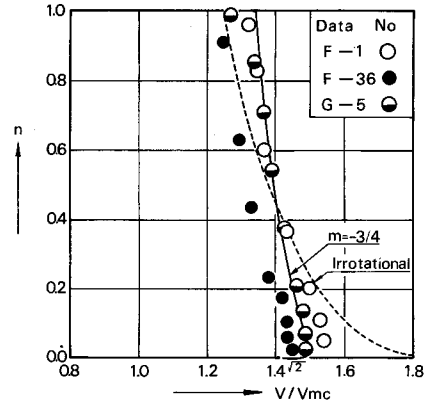


図 3・9 段縁点の流速分布

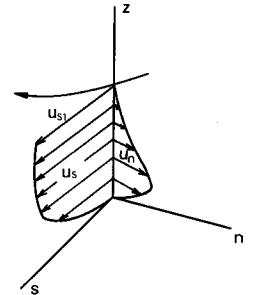


図 3・10 境界層内流速分布モデル

21) Prandtl, L.; On Boundary Layers in three-dimensional Flow, Reports and Trans., No. 64, British M. A. P., 1946

22) Mager, A.; Generation of Boundary Layer Momentum Integral Equations to Three-dimensional Flows Including Those of Rotating Systems, NACA Report, 1067, 1952

23) Moore R. W. and D. L. Richardson; Skewed Boundary Layer Flow Near the End Walls of a Compressor Cascade, Trans, ASME, Vol 79, 1957, pp. 1789-1800

24) Coles, D.; The Law of the Wake in the Turbulent Boundary Layer, Jour. of Fluid Mech., Vol. 1, 1956, pp. 191-226

25) Johnstone, J. P.; On the Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer Generated by Secondary Flow, Trans ASME, 1960, pp. 233-250

は Gruschwitz の実験値を用いて z/δ の普遍関数を求め、 G と g を次のように提案した。

$$G = (z/\delta)^{1/n} \quad (3.32)$$

$$g = [1 - (z/\delta)]^2 \quad (3.33)$$

これらの関数は三次元乱流境界層を常に満足に表示するわけではないが、 $n=7$ に対しては実験値とよく一致している。ただ、流速分布が急変するところ、例えばはく離点付近での流れを計算するには不十分である。

Moore と Richardson は G と g を次の形で表わすと、よりよい結果が与えられることを見出した。

$$G = G(z/\theta_s, H_s) \quad (3.34)$$

$$g = [1 - (z/10\theta_s)]^r \quad (3.35)$$

ここに、 $\theta_s = (1/U^2) \int_0^\infty (U - u_s) u_s dz$, $\delta_s = (1/U) \int_0^\infty (U - u_s) dz$, $H_s = \delta_s/\theta_s$, r は定数である。このモデルでは u_s の分布は実験値とかなりよく一致するが、 u_n は r を実験値に合うように変化させなければならない。

Coles は二次元非圧縮性乱流境界層の流速分布は 2 つの普遍関数の線型結合で表わしうることを提案した。いわゆる "Law of the wall" とはく離などに特徴づけられる "Law of the wake" で、平均流速分布は一般に次式で与えられる。

$$\frac{u}{u_*} = f\left(\frac{zu_*}{\nu}\right) + \frac{\pi}{\kappa} w\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (3.36)$$

ここに π は x , z に無関係のパラメータで、 $w(z/\delta)$ はすべての二次元乱流境界層流に共通な後流関数である。(3.36) 式を三次元流に拡張すれば

$$\frac{u}{u_*} = f\left(\frac{zu_*}{\nu}\right) + \frac{\pi}{\kappa} w\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (3.37)$$

Johnston は上流側で二次元流速分布をもつ流れの円柱の周辺での流速分布を実験的に研究した結果から、 u_s と u_n の間に線型関係があり、図 3.11 に示す三角形モデルが形成されることを見出した。すなわち、各点の流速分布は z 方向に領域 1 と領域 2 とに分けられ、領域 1 では、

$$\frac{u_n}{U} = e \frac{u_s}{U} \quad (3.38)$$

領域 2 では、
$$\frac{u_n}{U} = A \left(1 - \frac{u_s}{U}\right) \quad (3.39)$$

の関係がある。 A は流れのせん断力に影響されないパラメータで、 e は流れの摩擦特性に密接に関係するパラメータである。Perry と Joubert²⁷⁾ は Johnston モデルで外部領域 2 の分布は Coles

の提案した (3.37) 式で表わされる Wall-wake モデルよりも単一のベクトル相似 defect law

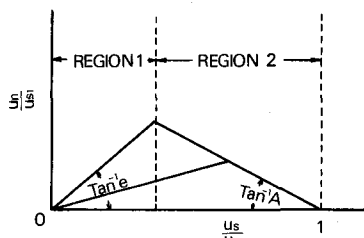


図 3.11
Johnston の三角形モデル

26) Gruschwitz, E.; *Turbulent Reibungsschichten mit Sekundärströmung*, Ingenieur-Archiv, Vol. 4, 1935, pp. 355~365

27) Perry, A. E. and P. N. Joubert; *A Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer*, Jour. of Fluid Mech., Vol. 22, part 2, 1964, pp. 285~304

によって表示されることを示した。

$$\frac{u_1 - u}{u_x} = \pi(x, y) \phi\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (3 \cdot 40)$$

また、*Johnston* のモデルが *Hornung* と *Joubert* の実験結果とよく一致することを示した。しかし、三角形モデルは主流の曲がりに伴う乱流境界層の一般特性として説明されるものでなく、*Johnston* らが用いた実験装置の円柱形状によるものと述べている。

このような境界層内の流速分布を考慮し、境界層の発達状態を運動量方程式によって解析したものに、*岩垣*²⁸⁾の開水路弯曲流での二次流の完全発達域に関する研究がある。

3-5 非粘性せん断流の変形過程としての取扱い

接近流が鉛直方向に速度分布をもつときの障害物の周りの流れの変形機構について、主流をポテンシャル流、二次流をそれからの微小擾乱と考え、渦度保存則にもとづいて解析する方法が、*Squire* と *Winter*²⁹⁾によって翼列および曲管内の二次流に関して展開され、*Hawthorne* や *Lighthill*³²⁾によってこの理論は一般化された。

一様せん断流中におかれた障害物周辺での渦度変化を理論的に解析した *Hawthorne*³³⁾ の研究の一部を述べる。

図 3・12 で接近流は x 方向に U で、 z 方向にのみ変化する二次元流れであり、 $U = 1$ のときの二次元ポテンシャル流の速度ベクトルを ∇ とすると、 $U\nabla$ は基本的擬二次元流を表わす。これからの微小摂動量を $\boldsymbol{v}$ とすると、任意点の流速は $(U\nabla + \boldsymbol{v})$ となる。いま、 ∇ は二次元ポテンシャル運動のベクトルであるから、 $\text{div. } \nabla = 0$, $\text{rot } \nabla = 0$ 、また連続式 $\text{div. } (U\nabla + \boldsymbol{v}) = 0$ を用いると、流速と渦度との積は、
($U\nabla + \boldsymbol{v}$) $\times$ $\text{rot } (U\nabla + \boldsymbol{v})$

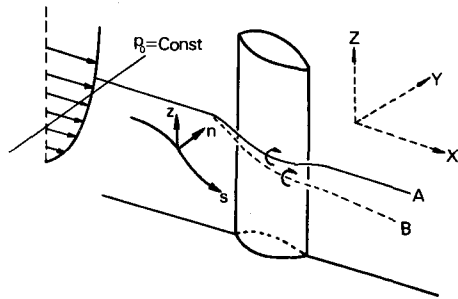


図 3・12 障害物周りの流れ

$$= Uq^2 \text{grad } U + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \text{grad } U - (\boldsymbol{v} \text{grad } U) \cdot \nabla + U\nabla \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (3 \cdot 41)$$

ここで、 $q = |\nabla|$

$|\nabla| \ll Uq$ と仮定されると、右辺第 2, 3 項は 1 項に比べて小さく、5 項は 4 項に比して小さいから、この rot をとり、 $\text{div. } \boldsymbol{v} = 0$, $\text{div. } \boldsymbol{\omega} = 0$ を考えると、

28) 岩垣雄一；河川彎曲部の底面における流れ，応用水理学，中 I，丸善，1958，pp.78-80。

29) *Squire, H. B. and Winter, K. G. ; The Secondary Flow in a Cascade of Airfoils in a nonuniform stream, Jour. of Aeronaut. Sci., 18, 1951*

30) *Hawthorne, W. R. ; Secondary Circulation in Fluid Flow, Proc. Roy. Sci., A206 1951.*

31) *Hawthorne, W. R. ; Engineering Aspects—Research Frontiers in Fluid Dynamics Edited by Seeger & Temple, John Wiley & Sons, New York, 1965, pp. 1-29*

32) *Lighthill ; Drift, Jour. of Fluid Mech., 1, 1956*

33) *Hawthorne, W. R. ; The Secondary Flow about Struts and Airfoils, Jour. of Aeronaut. Sci., 1954*

$$U \text{grad } q^2 \times \text{grad } U + (\omega \cdot \nabla) U \mathbf{V} - (U \mathbf{V} \cdot \nabla) \omega = 0 \quad (3.42)$$

座標系として二次元ポテンシャル流向を s ，それと直角方向を n ，鉛直方向を z とした直交曲線座標を用い，それぞれの単位ベクトルを $\mathbf{s}$ ， $\mathbf{n}$ ， $\mathbf{z}$ とすると，

$$U \text{grad } q^2 \times \text{grad } U = s U \left(\frac{\partial q^2}{\partial n} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) - n \left(\frac{\partial q^2}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

θ を流線方向と x 軸のなす角とし， $\partial \mathbf{s} / \partial s = \mathbf{n} (\partial \theta / \partial s)$ ， $\partial \mathbf{s} / \partial n = -(\mathbf{n} / q) (\partial q / \partial s)$ を考慮すると，

$$(\omega \cdot \nabla) U \mathbf{V} = \mathbf{s} \left[\xi U \left(\frac{\partial q}{\partial s} \right) + \eta U \left(-\frac{\partial q}{\partial n} \right) + \zeta q \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] + \mathbf{n} \left[U \xi q \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right) - U \eta \left(\frac{\partial q}{\partial s} \right) \right]$$

ここで， $(\partial \theta / \partial s)$ は曲率を表わす。また $\partial \mathbf{n} / \partial s = -\mathbf{s} (\partial \theta / \partial s)$ を考慮すると，

$$(U \mathbf{V} \cdot \nabla) \omega = \mathbf{s} U q \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \right) - \eta \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \right] + \mathbf{n} U q \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial s} \right) + \xi \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \right] + \mathbf{z} U q \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s} \right)$$

これら 3 式を (3.42) 式に代入し，各方向成分を整理すれば， $U q (\partial \zeta / \partial s) = 0$ であり，上流では $\zeta = 0$ であるから，

$$\zeta = 0 \quad (3.43)$$

n 方向については， $(\partial / \partial s) (q \eta) = -(\partial q^2 / \partial s) (\partial U / \partial z)$ となり， $q = 1$ ， $\eta = 0$ の上流から流線に沿って積分すると，

$$q \eta = (1 - q^2) (\partial U / \partial z) \quad (3.44)$$

s 方向には $\zeta = 0$ を考えると， $-q^2 (\partial / \partial s) (\xi / q) + 2 (\partial U / \partial z) (\partial \theta / \partial s) = 0$ となり， $\xi = 0$ ， $q = 1$ ， $\theta = 0$ の上流から流線に沿って積分すると，

$$\frac{\xi}{q} = 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{q^2} \quad (3.45)$$

となる。

主流のもっている渦度は

$$\omega_0 = \xi_0 \mathbf{s} + \eta_0 \mathbf{n} + \zeta_0 \mathbf{z} = 0, \mathbf{s} + q \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{n} + 0, \mathbf{z} \quad (3.46)$$

であるから，無次元化された流れの渦度成分 ξ_1 ， η_1 ， ζ_1 は (3.43) ~ (3.46) 式より，

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (\xi + \xi_0) / (\partial U / \partial z) = 2 q \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{q^2} \\ \eta_1 &= (\eta + \eta_0) / (\partial U / \partial z) = 1/q \\ \zeta_1 &= (\zeta + \zeta_0) / (\partial U / \partial z) = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

となる。

いま，半径 a の円柱周辺での二次元ポテンシャル流からの摂動による渦度成分 ξ_1 および η_1 の変化を (3.47) 式により数値計算した結果を図 3.13 に示す。 ϕ は流れ関数を表わす。 ξ_1 は ϕ / Ua が小さい円柱近くでは $X/a = -2.0$ 付近から急激に増大し，円柱側面の前で最大値をとり減少していく。 η_1 は円柱に近づくにつれて増加し，円柱先端より上流で最大値をもつが， $\phi / Ua = 0$ すなわち，円柱先端では明らかに η_1 は無限大となる。円柱側面では 1 より小さくなるが，円柱面に沿った値 0.5 より小さくなることはない。

いま， $u_s \approx 0$ とすると，

$$\xi = -\frac{\partial u_n}{\partial z} = \xi_1 \frac{\partial U}{\partial z}$$

水面流速 $U = U_1$ で $u_n = u_{n1}$ の条件で積分定数を定めると，

$$u_n = \xi_1 (U_1 - U) + u_{n1}$$

u_s についても同様に， $\partial u_s / \partial z = \eta_1 (\partial U / \partial z)$ ，積分し， $U = U_1$ で $u_s = u_{s1}$ とすると，

$$u_s = u_{s1} - \eta_1 (U_1 - U)$$

したがって

$$\frac{u_{s1} - u_s}{u_{n1} - u_n} = - \frac{\eta_1(s, n)}{\xi_1(s, n)} \quad (3.48)$$

の関係が得られる。(3.48)式は z には無関係であるから、*Johnston*の三角形モデルの領域2の存在が理論的に証明される。(3.39)式のパラメータ A は η_1/ξ_1 となり、 $s-n$ 平面の各点で固有な値をとる。いま、十分上流の一樣せん断流領域の流速分布として対数分布則を考える。

$$\partial U / \partial z = U_* / \kappa z$$

この場合は領域2について明らかに、

$$\left. \begin{aligned} u_{s1} - u_s / U_* &= -(\eta_1 / \kappa) \ell_n(z/h) \\ u_{n1} - u_n / U_* &= (\xi_1 / \kappa) \ell_n(z/h) \end{aligned} \right\} (3.49)$$

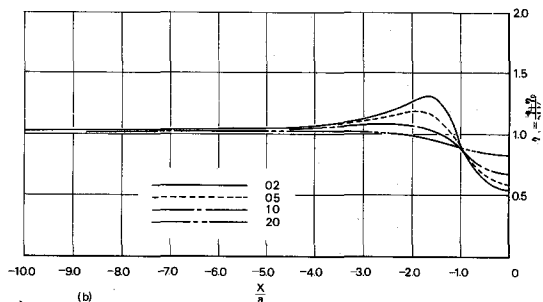
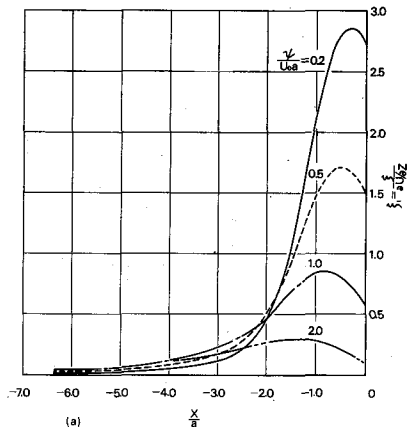


図 3・13

円柱周辺の ξ_1 , η_1 の変化

の関係が成立し、中川³⁴⁾が行なった円柱橋脚周辺での流れに関する実験から得られた速度成分と(3.49)式を比較した一例が図3・14に示される。図に示される測定値は $\psi/U_a = 1.0$ 、 $x/a = -1.5$ の点におけるものであるが、他の測点についても(3.49)式の関係は十分満足される。

粘性の影響の強い領域1については、層流底層を考慮し、乱流領域との接続条件を考えると、図3・15に模式的に示される u_s および u_n に関する分布式が得られる。すなわち、厚さ δ の層流底層内の速度分布を

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{U_*^2}{\nu} \left(1 - \frac{z}{h} \right)$$

と仮定し、 $z' = z/h$ 、 $\delta/h = \delta'$ とすると、 u_s に関して

$$0 \leq z' \leq \delta' : \frac{u_s}{U_*} = \frac{\eta_1 U_* h}{\nu} \left(z' - \frac{z'^2}{2} \right) \quad (3.50)$$

$$\delta' \leq z' \leq 1 : \frac{u_s}{U_*} = \frac{\eta_1}{\kappa} \ell_n \frac{z'}{\delta_s'} + \frac{\eta_1 U_* h}{\nu} \left(\delta_s' - \frac{\delta_s'^2}{2} \right) \quad (3.51)$$

u_n に関して

$$0 \leq z' \leq \delta' : \frac{u_n}{U_*} = \frac{\xi_1 U_* h}{\nu} \left(z' - \frac{z'^2}{2} \right) \quad (3.52)$$

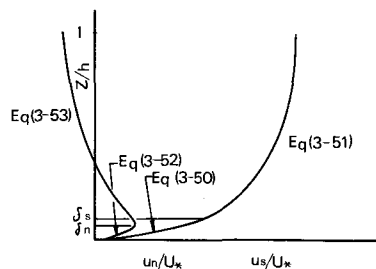


図 3・14 円柱周辺の速度分布

34) 中川博次, 鈴木幸一: 円柱橋脚周辺の流れの特性, 土木学会第26回年次学術講演会 (発表予定), 1971

$$\delta' \leq \varepsilon' \leq 1 : \frac{u_n}{U_*} = -\frac{\xi_1}{\kappa} \ell_n \frac{\varepsilon'}{\delta_n'} + \frac{\xi_1 U_* h}{\nu} \left(\delta_n' - \frac{\delta_n'^2}{2} \right) \quad (3.53)$$

また底面せん断応力 τ_o は層流底層を考えた場合

$$\tau_o = \sqrt{\tau_{so}^2 + \tau_{no}^2} = \rho U_*^2 \sqrt{\eta_1^2 + \xi_1^2}$$

すなわち, $\tau_o / \rho U_*^2 = \sqrt{\eta_1^2 + \xi_1^2} \quad (3.54)$

また, せん断力と二次元ポテンシャル流向とのなす角 α は,

$$\tan \alpha = \frac{\tau_{no}}{\tau_{so}} = \frac{\xi_1}{\eta_1} \quad (3.55)$$

となる。(3.54)式による τ_o の理論値と滑面水路床におかれた円柱橋脚周辺での底面せん断力の測定値とを比較した結果, 計算結果では τ_o に及ぼす円柱の影響がそのごく近傍に限られるのに反して, 実験ではかなり広範囲に影響が及ぶことが確かめられ, 障害物周辺での三次元境界層のはく離と馬蹄渦の発生によって実際現象ではみかけの円柱径が大きくなっている結果をもたらすものと考えられる。

村本は^{35), 36)}開水路彎曲部の二次流の発生機構について, 上流直線部のせん断流れを代表する渦度が彎曲部で主流(ポテンシャル流)によって変形する過程として把握し, 三次元渦度成分の流下方向変化を実験的に検討し, 彎曲部の流れを二次流の発生域, 発達域, 一樣域にわけ, 各領域の渦度特性が図3.16のように与えられることを実験的に見出した。発生域 I に対しては定常流における渦度保存式

$$\text{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \nabla) \boldsymbol{\omega} = 0$$

および, 自由渦分布

$$\omega r = \text{const.}, \quad \partial u / \partial \theta = 0$$

を与え, η は上流側の η_s に等しいとして

$$\xi = \xi_s - 2\eta_s \theta \quad (3.56)$$

を求めた。(3.56)式によると, ξ は θ に比例して直線的に増加しており,

これによって発生域ではある程度実際現象を説明できることが示された。また, 二次流の流速分布について ξ, η を積分することによって求めているが, 渦度保存式において拡散項を無視する場合と考慮する場合とについて, それぞれ直線部での流速分布を層流, 乱流の場合について与え,

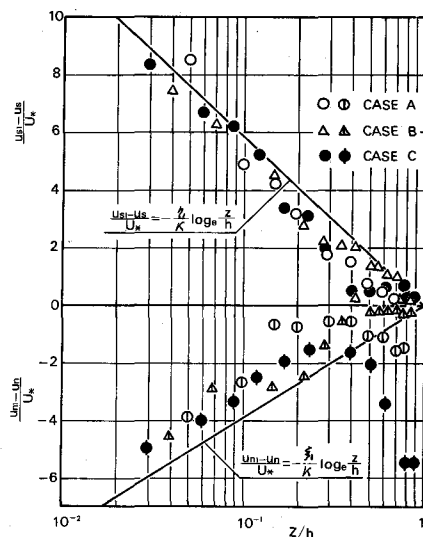


図3.15 u_s, u_n の分布

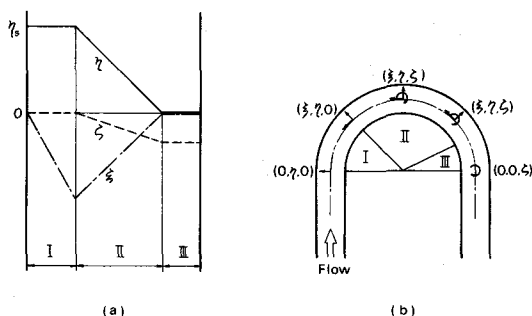


図3.16 開水路彎曲部の渦度変化

35) 村本嘉雄：開水路彎曲部の内部機構, 京大防災研究所年報,

第8号, 1965, pp. 415-427

36) 村本嘉雄：開水路彎曲部の内部機構(Ⅱ), 京大防災研究所年報,

第9号, 1966, pp. 525-537

直線部の渦度が粘性の影響を受けずに変形する過程を主現象と考え、底面の摩擦による拡散を副次的なものとして解析した。この場合、主流の自由渦分布と底面近傍の層流底層の接続は連続の関係を考慮することによって実際現象を比較的良好に説明しうることを実証した。

3-6 噴流拡散現象としてのモデル化

開水路急拡部における流れが常流遷移する場合は側壁による拘束のある場における二次元噴流の拡散現象として取り扱われてきた。^{37), 38)} 噴流理論に若干の実験的パラメータを導入することによって、急拡部に形成されるはく離領域の二次元的特性や流速分布の変化特性を求めることができる。流速分布は *Prandtl* の混合距離の仮定を導入した運動方程式を混合領域の幅 b が流下距離 x に比例し、また流速分布形の *self-preserving* の仮定が成り立つとして、図 3・17

に示すような混合領域に関する適切なモデルの設定によって与えられる境界条件のもとで解くことにより求めることができるが、実用的にはモデルの相違による流速分布の差異は実測による誤差に比して小さい。開水路急拡部での流れを問題とする場合、流速分布よりはむしろ、はく離領域の形状、寸

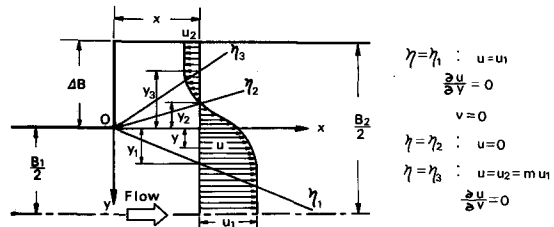


図 3・17 急拡部の流れのモデルと境界条件

法あるいは一様な流速分布に回復するまでの流下距離などが重要な問題となる。志方ははく離領域内に等逆流領域を仮定したモデルを用い、噴流拡散の拘束の程度を表わすパラメータ σ を考慮した混合領域の幅 $b = x/\sigma$ を与え、急拡部と下流断面との間の運動量保存式と連続の関係および流速分布式とから、混合領域、はく離領域、渦動域および逆流域の流下方向の拡がりをも求めている。また拘束係数 σ の流下距離に対する変化を実験的に検討している。

このような二次元自由噴流の理論を応用した研究としては、土屋³⁹⁾が水門下流部における砂礫の移動限界を考察するに当たって、滑面水路床上での *wall jet* 内での底部境界層の発達機構を境界層の運動量方程式により解析し、*zone of flow establishment* および *zone of established flow* の領域について層流・乱流境界層を仮定した場合の境界層厚と摩擦速度の変化を明らかにしている。*Rajaratnam* はもぐり跳水と自由跳水内での流速拡散の機構を圧力が流下方向に増加する場における *wall jet* として取り扱い、実験資料にもとづいて境界層厚、自由混合領域の幅および境界面せん断応力の変化が従来の *wall jet* に関する研究結果とどのように異なるかを考察した。

3-7 衝撃波理論の応用

急こう配水路の途中に屈曲部や縮小部、拡大部がある場合の流れの変化は衝撃波や擾乱波の発

37) 芦田和男：河川改修に伴う断面急変部の水理とその適用に関する研究。

京都大学学位論文、1961

38) 志方俊之：前出 8)

39) 土屋義人：水門下流部における洗掘限界に関する研究、土木学会論文集

第 82 号、1962, pp. 21-51

40) *Rajaratnam, N.*; *Submerged Hydraulic Jump, Proc. ASCE, Vol. 91, HY 4, 1965*

41) *Rajaratnam, N.*; *The Hydraulic Jump as a Wall Jet, Proc. ASCE, Vol. 91, HY 5, 1965*

生で特徴づけられる。この場合の衝撃波高の計算法やそれを除去するための水路設計法については、Knapf, Ippen, Rouse ら⁴²⁾の研究があり、それを余水吐や減勢工上の流れに適用し、実際設計に当たっての問題点を詳細に論じたものに岩崎⁴³⁾の研究がある。

ここでは、射流状態で越流する場合の横越流せきの越流量について考察した中川ら⁴⁴⁾の研究について説明する。

図3・18に示すように、横越流せきの越流区間を射流で流下する場合はせき上流端でそのせき頂より上の側壁が急にとり除かれた状態であるから、その点から連続的な衝撃波が発生し、あたかも気体の超音速流における角を曲がる流れ、すなわち Prandtl-Meyer flow と同様な流れの特色を示す。嶋ら⁴⁵⁾は射流分岐水路の流量配分比についてこの解析方法を適用している。

図に示すように、せきの上流端を原点とする円筒座標系をえらび、摩擦、こう配の影響と鉛直方向速度を無視した運動方程式は、

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.57)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (3.58)$$

圧力は近似的に静水圧的分布をするものとして

$$p = \rho g \lambda (d - z) \quad (3.59)$$

ここに、 λ ：圧力係数、 d ：せき頂を基準とした水深である。いま、鉛直方向には速度分布が一様であると考え、 E をせき頂から測られたエネルギー水頭、 B を水路幅、 u を水路軸方向の流速成分とすると、

$$E = \frac{B}{Q} \int_0^d \left\{ \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2g} + \lambda (d - z) + z \right\} u dz = \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2g} + \frac{(1 + \lambda)}{2} d \quad (3.60)$$

超音速流の性質から、 v_r 、 v_θ 、 d は r に無関係で θ のみの関数となる。したがって、(3.57) (3.58) 式および連続式は、

$$\frac{dv_r}{d\theta} - v_\theta = 0 \quad (3.61)$$

$$v_\theta \frac{dv_\theta}{d\theta} + v_r \cdot v_\theta = -\lambda g \frac{dd}{d\theta} \quad (3.62)$$

$$v_\theta \frac{dd}{d\theta} + \left(v_r + \frac{dv_\theta}{d\theta} \right) d = 0 \quad (3.63)$$

(3.60) 式を θ で微分し、(3.63)式より $dd/d\theta$ を消去すると、

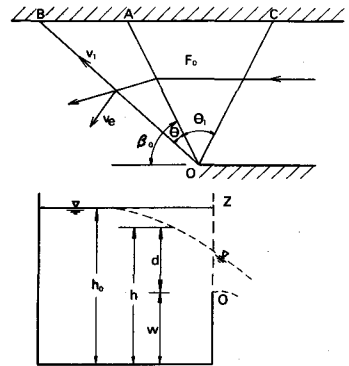


図3・18 記号説明

42) High Velocity Flow in Open Channel, A Symposium, Trans. ASCE, Vol. 75, 1949, pp. 1290-1317

43) 岩崎敏夫： Δ の Spillway の設計，水工学に関する夏期研修会講義集，65-01，土木学会水理委員会，1965

44) 中川博次，中川修：横越流せきの越流特性について，京大防災研究所年報，第11号B，1968，pp. 249-265

45) 嶋裕之，富永正照：射流分岐水路の流量配分比について，土木学会論文集，第55号，1958

$$(v_r + \frac{dv_\theta}{d\theta})(1 - \frac{v_\theta^2}{C^2}) = 0 \quad (3.64)$$

ここに、 $C = \sqrt{g(1+\lambda)d/2}$ である。(3.64)式の解の一つは平行流を示し、他の解は

$$u_\theta = \pm C \quad (3.65)$$

(3.60), (3.61) および (3.65) 式から、 v_r, v_θ を求めると、

$$v_r = \sqrt{2gE} \sin \frac{\theta + \theta_1}{\sqrt{3}} \quad (3.66)$$

$$v_\theta = \sqrt{2gE} \cos \frac{\theta + \theta_1}{\sqrt{3}} \quad (3.67)$$

ここに、 θ_1 は積分常数であり、 $\theta = 0$ で $F = F_0$ なる条件より定まる。すなわち、 $F^2 = 2(v_r^2 + v_\theta^2)/gd(1+\lambda)$ とすると、(3.66), (3.67) および (3.60) 式から

$$d = \frac{4E}{3(1+\lambda)} \cos^2 \frac{\theta + \theta_1}{\sqrt{3}} \quad (3.68)$$

$$\frac{2}{2+F^2} = \frac{2}{3} \cos^2 \frac{\theta + \theta_1}{\sqrt{3}} \quad (3.69)$$

の関係が求められる。

越流量 ΔQ はせき長を L 、初期マツハ角を β_0 とすると、

$$\Delta Q = (v_\theta \cdot d)_{\theta=\beta_0} L \quad (3.70)$$

であるから、これに (3.67) および (3.68) 式の関係代入し、さらに $\theta = 0$ で $d = d_0$ なる条件を用いると、

$$\Delta Q = \frac{2\sqrt{g} L d_0^{3/2}}{(1+\lambda)} (\cos \frac{\beta_0 + \theta_1}{\sqrt{3}})^3 (\cos \frac{\theta_1}{\sqrt{3}})^{-3} \quad (3.71)$$

で与えられる。したがって、せき上流端での越流水深 d_0 、初期流量 Q_0 およびせき長 L が与えられると、 β_0 および θ_1 は初期フルード数 F_0 によって定まるから、越流量を理論的に求めることができる。

実験によって得られた圧力係数 λ の平均値 0.751 を用いて (3.71) から計算された越流量と測定値とを比較したのが図 3.19 であり、

$L/B < 2$ の範囲では、(3.71) 式による最大推定誤差は 4% であることが確かめられている。

しかしながら、 $L/B > 2$ の範囲では対岸からの反射波の影響によって実際の越流水深は流下方向に減少していくから、(3.71) 式による流量の推定値は実際より大きい値となることが示された。

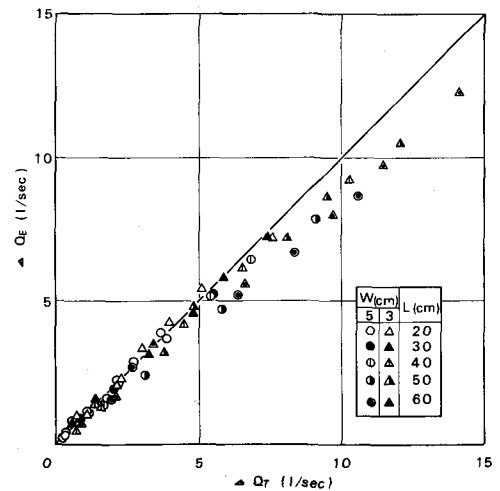


図 3.19

横越流量の理論値と実験値

4. 構造物周辺における局所洗掘

4-1. 局所洗掘の分類

構造物周辺における流れの局所的擾乱によって起こされる局所洗掘は設置された構造物の機能を阻害するのみならず、構造物自体の安全をも脅かすものである。局所洗掘の防止対策を見出すには、洗掘領域での流れの挙動とそれによる河床境界面の動きとの相互作用（洗掘機構）を系統的に把握するとともに、洗掘領域内での砂礫の移動量と洗掘領域の規模の時間的変化との関係（洗掘特性）を確定しなければならない。しかしながら、洗掘機構の複雑さから従来は主として水理模型実験によって定性的に現象を把握してきたにとどまっており、統一的な説明をうるには至っていないようである。

局所洗掘についてはすでに1965年の当研修会で土屋教授⁴⁶⁾が噴流による洗掘限界と洗掘機構を系統的に論述されており、この分野に浅学な筆者にとってそれ以上に説明を加えることは到底できがたいが、ここでは流路中に設置された橋脚周辺における局所洗掘問題に関する最近の研究成果を中心に説明する。

Laursen⁴⁷⁾は洗掘速度は洗掘領域に流送される土砂の輸送量 q_{si} とこの領域から下流へ流送される土砂の輸送量 q_{so} との差であるとして次式の関係を提案している。

$$dV_s/dt = q_{so} - q_{si} \quad (4.1)$$

Shenら⁴⁸⁾は(4.1)式にもとづいて、局所洗掘を次の3つに分類している。すなわち、

- (1) 洗掘が起こらない場合、 $q_{so} = q_{si}$
- (2) 洗掘領域への土砂供給のない場合、 $q_{so} > 0$ で $q_{si} \cong 0$
- (3) 連続的な土砂輸送を伴う場合、 $q_{so} \geq q_{si} > 0$

Carstens⁴⁹⁾はEinsteinのflow intensity ϕ と同様な無次元数

$$N_s = U / \sqrt{\{(\sigma/\rho) - 1\}gd} \quad (4.2)$$

を定義し、橋脚周辺の局所洗掘が始まるときの N_s の値は橋脚のない場合の洗掘限界での N_s の値の約1/2となることを示している。上式で U は上流の一樣流の平均流速、 σ 、 ρ はそれぞれ砂礫および水の密度、 d は砂礫の代表粒径である。(2)と(3)の場合の洗掘特性の差異は図4・1に示すように、(2)では最終安定状態に時間とともに漸近していくが、(3)の場合は最終洗掘深のまわりを周期的に振動することである。

4-2 橋脚周辺の局所洗掘機構

- (1) 洗掘領域への土砂供給のない場合

橋脚周辺の局所洗掘機構

を考察した最近の研究では、

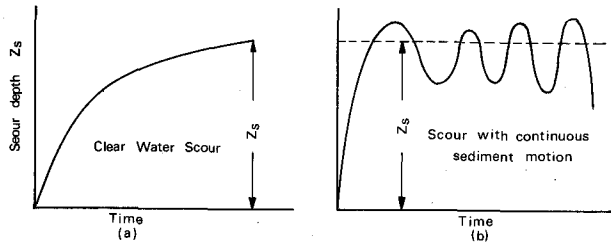


図4・1 洗掘深の変化

46) 土屋義人：局所洗掘論，1965年度水工学に関する夏期研修会講義集，65-03，土木学会水理委員会，1965

47) Laursen, E. M.; Observations on the Nature of Scour, Proc. 5th Hydraulics Conference, State Univ. of Iowa, Iowa City, Iowa, 1952, pp. 179-197

48) Shen, H. W., Schneider, V. R. and Karaki, S.; Local scour around Bridge Piers Proc. of ASCE, HY6, 1969, pp. 1919-1940

49) Carstens, M. R.; similarity Laws for Localized Scour, Proc. of ASCE, Vol. 92, HY3, 1966, pp. 13-36

橋脚の設置による流れの掃流力の変化に着目するものと橋脚底部に形成される馬蹄渦による洗掘を支配的とみるものとに大別される。

Laurssen⁵⁰⁾は洗掘が完全に発達した状態では流れによる底面せん断応力が限界掃流力に丁度等しくなる最終洗掘深が存在するものとして理論的考察を行なった。すなわち、図4・2のように直径 D の円柱橋脚の周りに幅 $2.75 Z_s$ (Z_s : 最大洗掘深)の円錐状洗掘孔を仮定し、また洗掘領域内の一様流域での元河床からの洗掘深を Z_s/r として、流れの連続式とエネルギー式とから次式の関係を導びいている。

$$\frac{1}{r} \frac{Z_s}{h_1} = \frac{h_2}{h_1} - 1 + \frac{(1+K)}{2} F_1^2 \left\{ \left(\frac{D}{5.5 Z_s} + 1 \right)^2 \times \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 - 1 \right\} \quad (4.3)$$

ここに、 h_1 、 h_2 はそれぞれ上、下流水深、 K はエネルギー損失係数、 $F_1^2 = v_1^2 / g h_1$ である。一様流でのせん断応力をManning式およびStricklerの d と n の関係を用いて、

$$\tau_0 = \frac{v_1^2 d_{50}^{1/3}}{30 h_1^{1/3}} \quad (4.4)$$

で与えた。ここに d_{50} は砂礫の平均粒径、 v_1 は上流側流速であり、単位は $ft-sec$ である。また限界掃流力 τ_c は

$$\tau_c = 4 d_{50} \quad (4.5)$$

(4.4) および (4.5) 式から

$$\tau_0 / \tau_c = v_1^2 / 120 d_{50}^{2/3} h_1^{1/3} \quad (4.6)$$

$$F_1^2 = 3.74 (d_{50} / h_1)^{2/3} (\tau_0 / \tau_c) \quad (4.7)$$

橋脚上、下流でのせん断応力の比は

$$\tau_{01} / \tau_{02} = (v_1 / v_2)^2 (h_2 / h_1)^{1/3} = \tau_0 / \tau_c \quad (4.8)$$

連続の関係から

$$\frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{\tau_0}{\tau_c} \right)^{3/7} \left(\frac{D}{5.5 Z_s} + 1 \right)^{6/7} \quad (4.9)$$

(4.7) および (4.9) 式を (4.3) 式に代入すると、最終洗掘深は次式で表わされる。

$$\frac{1}{r} \frac{Z_s}{h_1} = \left(\frac{\tau_0}{\tau_c} \right)^{3/7} \left(\frac{D}{5.5 Z_s / h_1} + 1 \right)^{6/7} - 1 + 1.87 (1+K) \left(\frac{d_{50}}{h_1} \right)^{2/3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_c} \right) \left[\frac{\left(\frac{D}{5.5 Z_s / h_1} + 1 \right)^{2/7}}{\left(\frac{\tau_0}{\tau_c} \right)^{6/7}} - 1 \right] \quad (4.10)$$

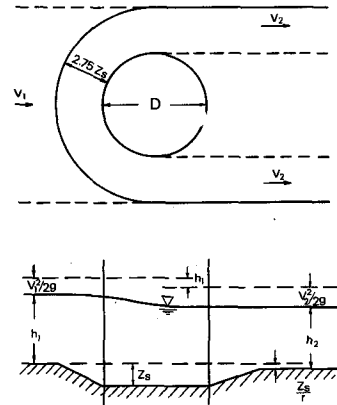


図 4・2
Laurssen のモデル

50) Laurssen, E. M. ; An Analysis of Relief Bridge scour, Proc. of ASCE, Vol. 89, HY 3, 1963, pp. 93-118

運動エネルギーを無視し、 Z_s/rh_1 がきわめて小さいとすると、

$$\frac{Z_s}{D} = \left[5.5 \left\{ \frac{1}{(\tau_0/\tau_c)^{1/2}} - 1 \right\} \right]^{-1} \quad (ft-sec \text{ 単位}) \quad (4.11)$$

となり、最終洗掘深が橋脚幅に比例するという結果を得た。また、時間 t での洗掘孔形状がそのときの最大洗掘深 Z を高さとする円錐体であり、洗掘形状の相似性が成立するものとして洗掘孔の容積を計算し、(4.1) 式の左辺 dV_s/dt を求め、一方、流砂量公式から (4.1) 式の右辺として

$$q_{s0} = \frac{3 v_1 d_{50}^{7/6}}{h_1^{1/6}} \left(\frac{\tau_t}{\tau_c} - 1 \right) \quad (ft-min \text{ 単位}) \quad (4.12)$$

を与え、これに (4.10) 式から近似的に求められる関係式

$$\tau_t/\tau_c = (Z_s/Z_0)^{3/2} \quad (4.13)$$

を代入して洗掘速度に関する微分方程式を導びいた。ここに τ_t は最大洗掘深 Z_0 の境界面に働くせん断応力である。

このような洗掘機構モデルに関して若干の疑問が残るのは、洗掘孔内の掃流力に関して収縮した流れによる一様分布に近似していることならびに洗掘孔形状の相似性を仮定していることであろう。事実、中川ら⁵¹⁾の実験によると、粗面水路上にたてられた円柱周辺の底面せん断応力は図 4・3 に示すよう

に、場所的に著しい変化がみられ、また図 4・4 に示す円柱前面および側面での洗掘形状の時間的変化を考察してわかるように、前面での形状の相似性は認められるが、側面では時間とともに洗掘孔斜面のこう配が大きくなり、またその形状も複雑に変化することが認められる。

Gradowczyk⁵²⁾ は以上の断面平均的取扱いでは局所洗掘現象を十分表現しえないところから、円柱周辺での剝離領域を含めて障害物とし、その周りにポテンシャル流による流管を考え、各流管について土砂の連続式をた

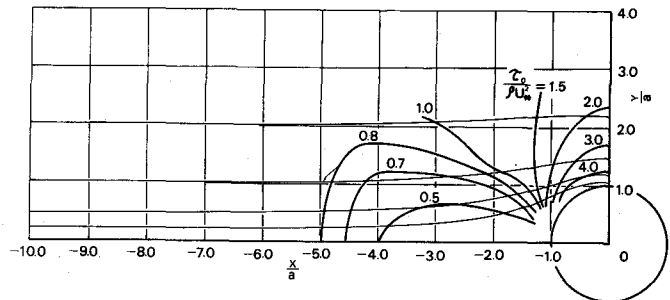


図 4・3 底面せん断応力の分布

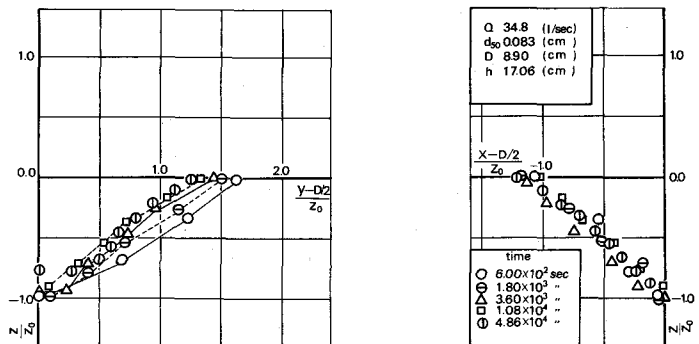


図 4・4

橋脚側面(a)および前面(b)での洗掘形状

51) 中川博次、鈴木幸一：円柱橋脚周辺の局所洗掘に関する実験的研究，土木学会関西支部年次学術講演会講演概要，1971

52) Gradowczyk, M. H., Maggiolo, O. J. and Folguera, H. C.; Localized Scour in Erodible Channels, Jour. of Hydraulic Research, Vol. 6, No. 4, 1968, pp. 289-326

て、数値計算によって洗掘特性を求めている。すなわち、Wehausen と Laitone によって導びかれた定常二次元流に関する浅水方程式は摂動ポテンシャルに対して、

$$(1 - F_r^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{h} \left(U + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (4 \cdot 14)$$

である。ここに、 $F_r^2 = U^2 / gh(x, y)$ であり、 U は上流の一様流の平均流速、 h は考えている点での水深である。 x, y 方向の速度成分は次式で与えられる。

$$u = U + \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4 \cdot 15)$$

$\partial \phi / \partial x, \partial \phi / \partial y$ は摂動ポテンシャルによる量である。これを図 4・5 に示すような実験的に求められたはく離面 (Re 数によって決まる) を障害物とする境界条件のもとに解き、得られた ϕ を用いて流管を求め、各流管について一次元移動床水路の運動方程式および連続式を用いる。すなわち、流れを擬定常流とみなすと次式の関係が成立する。

$$\begin{aligned} (1 - F_r^2) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{Q^2}{gh^2 b^3} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \\ + \frac{f Q^2}{8 gh^3 b^2} = 0 \end{aligned} \quad (4 \cdot 16)$$

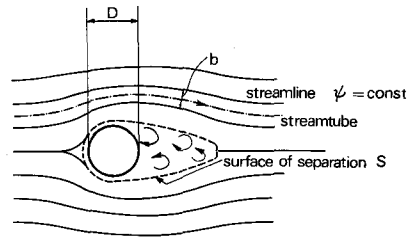


図 4・5 Gradowczyk のモデル

ここに、 z : 局所河床高、 F_r : 局所フルード数 ($= Q / g \frac{1}{2} h \frac{3}{2} b$)、 b : 流管の幅、 f : 摩擦損失係数、 q_s : 流砂量である。流砂量に関して Brown 型公式を用い、 (x, t) 空間において Euler の方法にもとづく有限差分法による数値計算を行ない、円柱および角柱に関する実験結果と比較してかなり良好な結果が得られることを確かめている。

この研究では主流からの摂動量がポテンシャル流として解析できるという考えにたっているが、このモデルでは予め橋脚周辺のはく離面 S と流線 ψ が与えられていなければならず、またはく離領域内の洗掘特性が説明できないところに限界があろう。

Shen⁵⁴⁾ は円柱橋脚前面に形成される馬蹄形渦のもつ洗掘力に着目して局所洗掘の特性を論じている。二次元非擾乱速度場に鈍端構造物があると、流れを横ぎる渦フィラメントが集中して馬蹄形渦系を形成する。この集中機構には障害物によってもたらされる圧力場が密接に関係し、圧力場が十分強いと境界層の三次元のはく離を生じ、障害物の前面で巻き込んで馬蹄形渦を形成する。円柱橋脚では図 4・6 のように馬蹄形渦を構成する渦フィラメントは下流に無限にのび、渦運動は運動学的法則に従って渦心内の回転速度を増していく。明らかに障害物の幾何学的形状は馬蹄形渦の強度を決定する重要な要素で

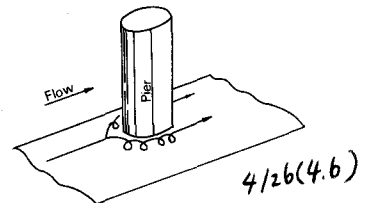


図 4・6 円柱橋脚と馬蹄渦

53) Wehausen, J. V. and Laitone, E. V. ; Surface Waves in Handlrccch der Physik, Band XI, Berlin, Springer, 1960, pp. 446 - 778

54) Roper, A., Schneider, V. R. and Shen, H. W. ; Analytical Approach to Local sconnr, Proc. of 12th I. A. H. R. Congress, Vol. 3, 1967, pp. 151 - 161

ある。

この渦に関して図4・7に示すように円柱前面のよどみ面内のコントロール・ボリューム $ABCD$ を考え、円柱の存在による $ABCD$ に関する循環の変化を求めて、これによって渦の強さを表わした。すなわち、循環 Γ は、

$$\Gamma = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \int_{ABCD} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{A} \quad (4.18)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k} \quad (4.19)$$

と表わされるが、図4・7で AB 面を流れが x 方向成分のみをもつ十分上流の位置 X_0 にとり、 AD 、 CD 面の流れに *no slip* の条件を適用すると、

$$\int_{X_0}^0 u \, dx = \int_{ABCD} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{A} \quad (4.20)$$

となり、 BC 面の流れにポテンシャル理論が適用されると、

$$u(x) = U_0 \left[1 - \frac{a^2}{(a+x)^2} \right]$$

ここに、 a は円柱半径、 U_0 は点 B での流速である。これを(4.20)式に代入して積分すると

$$\int_{ABCD} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{A} = U_0 x_0 - U_0 \frac{a x_0}{(a+x_0)} \quad (4.21)$$

したがって、橋脚が存在するために生じる循環の変化 $\Delta \Gamma$ は

$$\Delta \Gamma = - \frac{U_0 a x_0}{(a+x_0)} \quad (4.22)$$

となる。 $x_0 \gg a$ ととると、

$$\Delta \Gamma \approx -a U_0 \quad (4.23)$$

循環の減少は橋脚があるための渦度の再分布に関係しており、その再分布の特徴は馬蹄渦の形成であるから、渦の強さが損失と関数関係にあると仮定するのが合理的である。したがって、

$$(\omega A)_{core} = f(a U_0)$$

$$(\omega A / \nu)_{core} = f(q U_0 / \nu) = f(Re) \quad (4.24)$$

したがって、馬蹄渦の強さが円柱半径 a を基準長とした *Reynolds* 数に関係づけられ、ひ

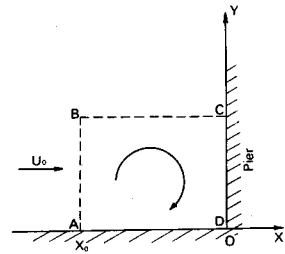


図4・7 コントロール・ボリューム

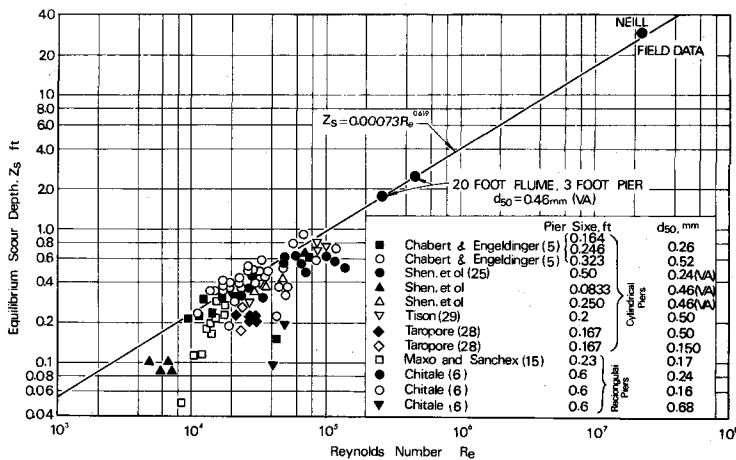


図4・8 最大洗掘深と Re の関係

いては最大洗掘深も R_e に支配されるものとした。

$$Z_s = q(R_e) \quad (4.25)$$

図4・8に既往の実験資料から最大洗掘深 Z_s と R_e との関係を示したものである。 $d_{50} \leq 0.52 \text{ mm}$ の Shen らの測定結果からはその包絡線として次式の関係が得られている。

$$Z_s = 0.00073 R_e^{0.619} \quad (ft) \quad (4.26)$$

他の資料のパラツキの原因としては、図4・9の Chabert と Engeldinger の実験結果に示されるように Z_s と R_e の関係は橋脚寸法および粒径によって異なる傾向を示すこと、さらに R_e が大きくなると洗掘領域外からの土砂流入によって Z_s が減少することが考えられる。しかし、実物橋脚や3'径の橋脚に関する測定値が(4.26)式を満足しているのは注目される。

- (2) 洗掘領域へ連続的に土砂供給のある場合
障害物の影響が及ばない様流領域での掃流力が大きく、河床砂礫の移動が完全に発達している場合には、(4.1)式の q_{si} を考慮しなければならない。

Carstens⁵⁵⁾は直径 D の円柱周辺に深さ Z 、傾斜角 ϕ の円錐状洗掘孔を仮定し、洗掘容積 V_s を次式で表わした。

$$V_s = \frac{\pi}{3 \tan \phi} \left(\frac{Z^3}{\tan \phi} + \frac{3 D Z^2}{2} \right) \quad (4.27)$$

また、Chabert と Engeldinger⁵⁶⁾の実験結果にもとづいて洗掘孔内の流砂量式として次式の関係を得た。

$$\frac{q_{so}}{U \left(\frac{D+2Z}{\tan \phi} \right) d} = 1.3 (10^{-5}) (N_s^2 - N_{sco}^2)^{5/2} \left(\frac{Z}{D} \right)^{-3} \quad (4.28)$$

ここに、 U は接近流の平均流速、 d は砂礫の代表粒径、 N_s は(4.2)式で与えられる無次元量、 N_{sco} は洗掘限界での N_s の値である。円柱の影響を受けない上流における流砂量 q_{si} は dune に関する Simons と Richardson⁵⁷⁾の実験結果から、

$$\frac{q_{si}}{U \left(\frac{D+2Z}{\tan \phi} \right) d} = 4 (10^{-5}) (N_s^2 - N_{sci}^2)^{5/2} \quad (4.29)$$

(4.27) ~ (4.29) 式を(4.1)式に代入し、ポテンシャル流理論から近似される $N_{sco} = N_{sci}/2$ の関係および砂礫の空隙率 $\lambda = 0.5$ として、最大洗掘深の時間的変化を求める微分

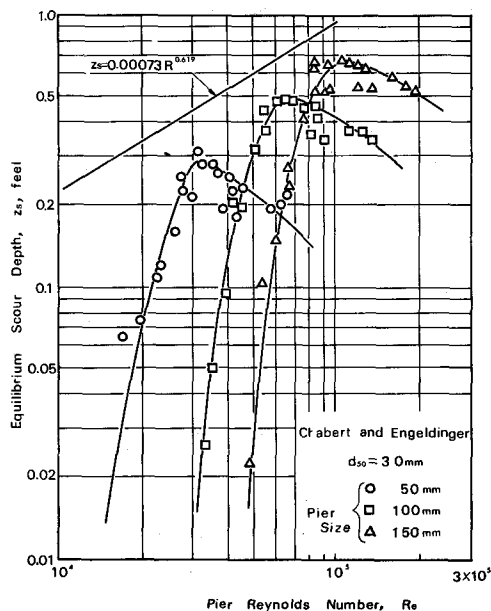


図4・9 橋脚寸法と Z_s

55) 前出 49)

56) Chabert, J. and Engeldinger, P.; Etude des Affouillements Autour des Piles de Ponts, Report, Natl. Hydr. Lab, Chatou, France, Series A, 1956

57) Simons, D. B. and Richardson, E. V.; Studies of Flow in Alluvial Channels—Basic Data from Flume Experiments, Report CER31EVR31, Colorado State Univ., Fort Collins, Colo., 1961

程式を得、 $dz/dt = 0$ として最終洗掘深 Z_s を表わす次式を得た。

$$\frac{Z_s}{D} = 0.546 \left(\frac{N_s^2 - 1.64}{N_s^2 - 5.02} \right)^{5/6} \quad (4.30)$$

(4.30) 式は図 4・10 に示されるが、

Chabert らの実験資料による最大および最小の洗掘深も併記されている。実験値の振幅は明らかに橋脚部を通して *dune* が下流へ移動していくためである。すなわち、*dune* 上の流れによって洗掘孔内の流れが著るしく変化することによる。

なお、Carstens のモデルによれば上流からの土砂輸送がある場合には最終洗掘深が存在するが、土砂供給のない場合には洗掘の終局的状態は存在しないことになる。

斉藤ら⁵⁸⁾も同じく洗掘孔形状の相似性を仮定し、流れの収縮を考えて、Brown 型の流砂量公式および上流からの土砂輸送を考慮した場合の流砂の連続式を用いて、円柱橋脚周辺での洗掘特性を考察している。

Shen ら⁵⁹⁾も Carstens と同じ洗掘孔モデルを考え、かつ (4.1) 式で

$$V_s = \int_0^\infty (q_{so} - q_{si}) = f(\text{渦の特性, 砂礫特性}) \quad (4.31)$$

として、連続した土砂輸送のある場合の平衡洗掘深を論じており、この場合には洗掘深が流速に無関係になると述べている。また、実用的な推定式として Breusers の式

$$Z_s = 1.4 D \quad (ft) \quad (4.32)$$

および Larras の式

$$Z_s = 1.42 D^{0.75} \quad (ft) \quad (4.33)$$

を示し、多くの実験・実測資料により橋脚直径が小さいときには (4.32) 式が、大きいとき ($D > 3 ft$) には (4.33) 式の適用精度が高いことを明らかにしている。

4-3 橋脚洗掘の防止法の研究

橋脚周辺の局所洗掘を防止するために、コンクリート保護土、コンクリートブロック、捨石工などが実際に用いられているが、いずれも経験に依存した工法であって理論的根拠に乏しい現状である。

田中ら⁶⁰⁾は円柱橋脚周辺での局所洗掘が橋脚前面の洗掘孔に発生する水平軸をもつ渦と橋脚前面に沿う鉛直下向流によるものであると考え、渦を制御するための図 4・11 に示す各種形状の円柱橋脚に関する実験的考察を行ない、渦や下向流の局所洗掘に及ぼす影響を検討した。*type I* は直径 3 cm の円柱、*type II* は円柱に主流方向の正方形の孔を通したもの、*type III* は薄い円板

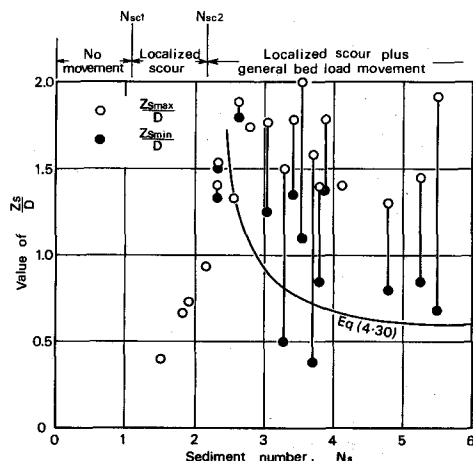


図 4・10 最大・最小洗掘深

58) 斉藤隆, 浦勝, 柴田幸信: 円柱周囲の洗掘について,

山口大学工学部研究報告, 第20巻, 第1号, 1969, pp. 83~90

59) 前出 48)

60) Tanaka, S. and Yano, M; Local Scour Around A Circular Cylinder, Proc. of IAHR, Fort Collins, Colo., 1967

をとりつけ、その直径や取付け位置を変えたものである。*type* IV はもぐり状態にしたもの、*type* V は円柱を底面から浮かしたものである。

図 4・12 および 13 に各型式における最大洗掘深および洗掘孔の最大幅と *type* I とのそれらとの比の高さ h に対する変化を示す。 δ は境界層厚であり、図の曲線からつぎのことが結論づけられる。すなわち、*type* II の円柱に設けた孔はほとんど効果がないことから、渦のスケールは孔のそれよりずっと大きく、また橋脚前面の下向流は局所洗掘に直接関与しない。*type* III の円板の位置が高くなるほど洗掘のスケールが大きくなり、円板径が小さいほどその洗掘に対する影響は減少する。境界層厚と同じスケールの円板を河床においたときは洗掘がおこらないことから、水平渦のスケールは境界層厚のスケールと同じとみなされる。*type* IV についても *type* III と同じ結果が得られ、橋脚高が境界層厚に近づくと、洗掘のスケールが *type* I のそれに近づく。*type* V では河床から少し浮かしただけでも洗掘はわずかしき起らず、このことから円柱前面に沿う下向流は直接洗掘に関係していないことがわかる。

以上の局所洗掘に関係する渦のスケールと境界層厚さとの関係にもとづいて、渦を制御することによって局所洗掘を軽減する方法を見出すことができる。

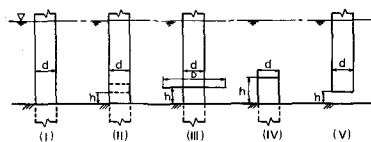


図 4・11 実験橋脚形状

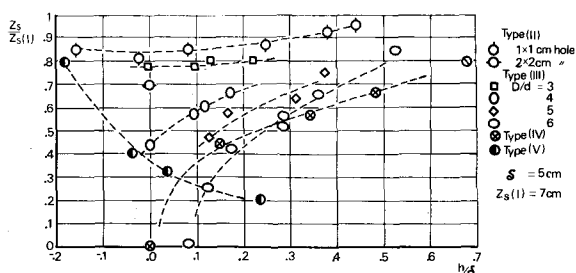


図 4・12 橋脚型式と最大洗掘深

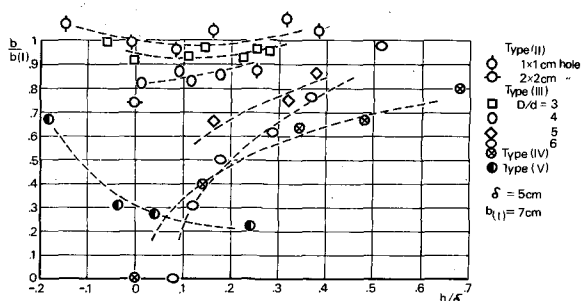


図 4・13 橋脚型式と最大洗掘幅

む す び

水理構造物周辺での開水路流れの複雑な運動を急変流として取り扱い、その平均流特性を解析するための局所流モデルの組立て方とその適用限界について論じた。しかしながら、水工学の分野で対象とされる構造物の形式や境界条件は多岐にわたり、ここで述べたモデルのいずれかが常に現象を適切に表現し、またその解が得られるものとは限らない。さらに、解析結果を実用設計上のいかなる目的に利用するかによって、より簡単なモデルで表現されることもあり、あるいはより厳密なモデルが要求されることもある。いずれにしても個々の問題については、水理現象に対する深い洞察力とその表現法ならびに解析法に対する十分な経験が必要とされ、さらに水理実験によってモデルの合理性を検証することも必要とされよう。

構造物周辺での局所洗掘については、主として円柱橋脚周辺における局所洗掘機構を掃流理論および馬蹄渦理論から考察した従来の研究を紹介したが、洗掘の進行過程によって流れの機構が異なることから、統一的に局所洗掘現象を説明することはむずかしい現状であり、今後の研究にまつべきものが少なくない。

さて、局所流では一般に顕著な速度こう配があらわれ、そのせん断作用によって急速に乱れが発達する。一方、はく離渦領域などの存在は流れの混合作用を助長し、乱れの拡散によるエネルギー逸散がおこる。このような局所流での乱れの特性、生成、逸散の機構ならびにエネルギー変換の過程は、減勢構造物や水叩き保護工の設計に関連した興味ある研究課題であるが、ここでは紙枚の関係からふれることができなかった。機会をみてこの問題について論じたいと思っている。