

空 気 混 入 流

東北大学工学部工博 坂 本 龍 雄

1 ま え が き

水の流れに空気が混入している場合、これを空気混入流という。空気混入流はいわゆる気液 2 相流に属する。

空気を混入した流れは白濁しており、自然界においてしばしば見受けられる現象である。いま土木工学的に重要な空気混入流の例を挙げると次のようになる。

- a 急こう配の開水路における乱流境界層や跳水による空気混入。
- b 自由落水または空中ジェットにおける空気混入。
- c 自由落水水を受ける池または水槽における空気混入。
- d 渦とくに流出渦に伴う空気混入。
- e 空気防波堤における空気混入。
- f 衛生工学における空気混入。

これらのうち、a から d までは自然に空気が吸い込まれる現象であって、はげしい水の運動によって水の中に大気圧より低い圧力、いわゆる負圧の部分が生じ、これが大気から空気を吸い込むことによって生ずるものである。大気に接する水面には表面張力のはたらきがあって、大気からの空気の侵入を妨げているのが普通であるから、水中に生ずる低圧の力がこの表面張力に打ち勝つに必要な十分の大きさを有する場合に空気の侵入が生ずるわけである。しかし水面における砕け波とか構造物などによって水面が攪乱される場合には水面が破られるので、容易に空気の侵入が生ずることになる。

これに反し e は人為的に水中に空気を封入するのであって、この場合、空気は大気圧以上の圧力を以て水を押しのけて混入しなければならない。

f は混入された空気に含まれる酸素を使用するのが目的であるから、空気を混入せしめる方法としては、負圧であっても正圧であってもよいわけである。

2 急勾配の開水路における空気混入

急勾配の開水路においては、底面または側壁から発生する乱流境界層が水面に達すると空気混入が始まる。この現象は 1936 年 Lane によって発表されて以来多くの人々の興味を呼び、理論的ならびに実験的研究が行なわれ、その結果空気混入が生ずるためには乱流境界層による乱れが水面に到達する必要があることが確められている。実際、ダムの余水吐における流れを観察すれば、越流流量は増加するにしたがい水面の白濁し始める位置が次第に下流に移って行くことがわかる。しかし乱流境界層の乱れが表面に達しても、乱れの強さが十分でなければ空気の混入は行なわれない。ダムの余水吐の模型実験では空気混入の現象は現われない。

急勾配水路における空気混入流は空気の混入により体積の増加を来し、水路の側壁高を増加しなければならないので、水力発電所余水路の設計上重要な問題である。

空気混入流の実験を最も大規模に行なっているのはアメリカのミネソタ大学である。ここでは 1939 年から実験が行なわれていたが 1950 年に幅 45 cm、深さ 30 cm、長さ 15 m の長方形断面の水路を作り、水平から 90°までの水路こう配がとれるようにしている。また空気混入量を測定するのに、従来のような混入流中の空気の体積をはかる方法に代って電気式の測定器を採用している。これは 2 本

の電極を水中に挿入し、両極間の電気抵抗が空気の混入により増加するという性質を利用して空気の混入量を測定するものである。

空気混入流における空気濃度 C は、水と空気の混合体に含まれる空気量を、両者の体積比で表わしたものである。空気量は水面に近づくにしたがって大きくなり、ついに空气中に水滴が浮遊する状態になる。その濃度分布は図-1のように底面における値 0 から割合急激に上昇し、中頃でゆるやかになり、水面附近で再び急上昇し 1.0 に漸近している。

空気混入流の水面は水滴をなしているから、水面の位置を確定することは困難である。そこで次のべるような3種類の水深が考えられる。

- (1) 混入している空気を水面から取り除いた場合の水面の高さを以て空気混入流の水深と考える。これを $\bar{d}$ とすれば

$$\bar{d} = \int_0^\infty (1 - C) dy$$

となり、 y は水路の底面から垂直に測った高さ、 C は空気の濃度で y の関数である。

- (2) 空気混入流の高さとして $C = 0.95$ の位置をとる。これを d_u で表わす。

- (3) 濃入空気の濃度が、下層部分の濃度から上層部分の濃度に移る位置を空気混入流の高さとみなし、これを d_T で表わす。

水深を d_u とした場合の平均濃度は

$$\bar{C} = \frac{1}{d_u} \int_0^{d_u} C dy$$

水深を d_T とした場合の平均濃度は

$$\bar{C}_T = \frac{1}{d_T} \int_0^{d_T} C dy$$

である。Straub らの実験によれば、 $\bar{d}$ は空気を混入しない流れの水深と同様、流量が増加すれば水深も増加し、水路こう配が大きくなれば水深は減少する。 d_u については水路こう配が大きくなるにともない、最初のうちは減少するがその後一転して増大するようになる。 d_T についてもこれと同様な傾向があり、水路こう配が増加するにしたがい、最初のうちは次第に減少するが、その後は却って増加し始める。従って d_u の値、 d_T の値ともに水路勾配のある広い範囲に対して、ほぼ一定値に保たれている。(図-2)

一方平均濃度 $\bar{C}$ は広い流量範囲内ではほぼ一定値を保っているが、水路こう配が大きくなると著しく増大する。 d_T に対応する $\bar{C}_T$ についても同様な傾向が見られる。

3 急勾配水路における空気混入流に関する Straub・Anderson の解析

空気混入流は上下2層に分かれており、上層は不規

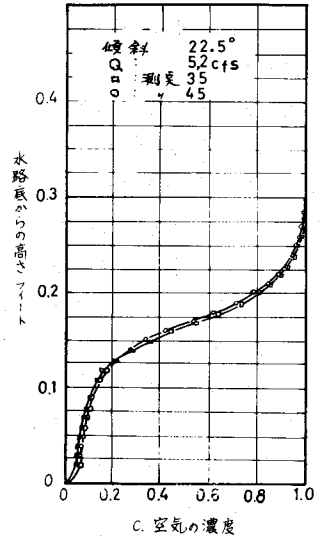


図-1 水路入口から35フィート、45フィート各点における空気濃度の分布(ストラウブとアンダーソンの実験による)

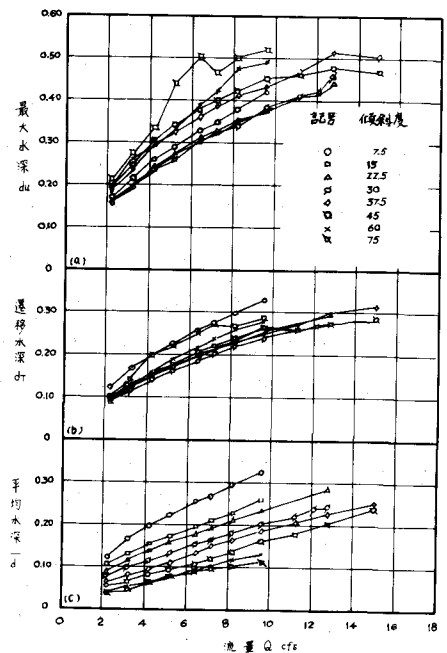


図-2 各水深の流量、水路こう配による変化(ストラウブとアンダーソンの実験による)

則な水面の突起や水塊、水滴からなっており、これらはある速度をもって空中に飛び出して行く。下層は乱れの輸送力によって水中に気泡が分散している。両者の間にはある厚さの遷移部分があり、その位置は上下にランダム変動をしている。

Straub らは上層において、流れに垂直方向の乱れ速度が、平均値を 0 とするガウス分布の半分に相当するものと仮定した。したがって水面近くの水塊や水滴は、この乱れ速度のために、水面を貫いて各乱れ速度の 2 乗に比例した距離だけ重力に逆らって飛び上ることになる。各粒子の飛び上り得る最大の高さもランダムに分布する。

もっとも流れ方向の流速が大きいため、水滴の飛ぶ道は流れ方向に長いものとなる。水滴が水面から飛び上る距離がガウス分布の片側で表わすことができるとすれば、距離 y' まで上る粒子の頻度 $f(y')$ は次のように表わされる。

$$f(y') = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{y'}{h}\right)^2} \dots\dots\dots (3.1)$$

h は水粒子が d_T から離れる距離の平均を表わしたものである。 y' 面を通過する水粒子は

$$P_{y'} = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} \int_{y'}^{\infty} e^{-\left(\frac{y'}{h}\right)^2} dy' \dots\dots\dots (3.2)$$

となる。 $y' = 0$ すなわち遷移面における空気濃度を C_T とすれば

$$\frac{1-C}{1-C_T} = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} \int_{y'}^{\infty} e^{-\left(\frac{y'}{h}\right)^2} dy' \dots\dots\dots (3.3)$$

となる。濃度こう配は

$$\frac{dc}{dy} = \frac{2(1-C_T)}{h\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{y'}{h}\right)^2} \dots\dots\dots (3.4)$$

となり $y' = 0$ のとき $\frac{dc}{dy}$ が最大値になり

$$\left(\frac{dc}{dy}\right)_{\max} = \frac{2(1-C_T)}{h\sqrt{\pi}} \dots\dots\dots (3.5)$$

常数 C_T と h は d_T 付近における乱れの強さに関係している。

水深 d_T より下の層においては乱れ作用によって気泡が分散し、気泡に働く浮力と濃度こう配とが平衡を保っている。これを式で表わすと、

$$-CV_b + \epsilon_b \frac{dc}{dy} = 0 \dots\dots\dots (3.6)$$

となる。 C は水路底からの距離 y の位置における空気濃度、 V_b は気泡の上昇速度、 ϵ_b は気泡の輸送に関する拡散係数である。この値は y の関数であるが未だ明らかに示されていないので、運動量輸送に関する ϵ_m を以て代用することにする。

空気を混入していない開水路における剪断力は、水面における値 0 から水路底における最大値に至る間直線的に分布しており、流速の分布は対数曲線をなしているが ϵ_m の値は水面において 0、水路底において 0 となり、その中央で最大値を有する放物線をなしている。すなわち次のようになる。

$$\epsilon_b = \beta k \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(\frac{d_T - y}{d_T}\right) y \dots\dots\dots (3.7)$$

$\sqrt{\tau_0/\rho}$ は摩擦速度、 τ_0 は水路底における剪断応力、 ρ は水の密度、 β は比例常数で ϵ_b/ϵ_m 、 k はカルマン常数である。

空気混入流の場合、 $y = d_T$ の位置において剪断力が 0 とはならないで、空中を飛んで戻る水粒子による運動量の輸送があるから、空気を混入しない場合の式をそのまま用いることはできないが、その

影響を係数 β に含ませることにすればよい。そこで次式が得られる。

$$CV_b = \beta k \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(\frac{d_T - y}{d_T} \right) y \frac{dc}{dy} \dots\dots\dots (3.8)$$

V_b が y に無関係と仮定して上式を積分すれば

$$C = C_1 \left(\frac{y}{d_T - y} \right)^z \dots\dots\dots (3.9)$$

$$Z = \frac{V_b}{\beta k \sqrt{\tau_0 / \rho}} = \frac{V_b}{\beta k V_*}$$

となる。ここに C_1 は常数で $y = d_T / 2$ の位置における濃度を表す。

以上の解析によって得られた各式は、その中に含まれているパラメタに適当な値を与えればStraubらの実験データに極めてよく一致する。これらのパラメタは水路こう配や流量によって異なるが、これはこう配や流量の変化により水路内に発生する乱れの強さと規模が変化するからである。

乱れの強さは水路床の壁面剪断力 τ_0 に関係するから、摩擦速度 $V_{*b} = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ の関数である。境界面においても剪断力があるものと考えれば、実験値の全剪断力は路床面の剪断力だけではないが、ここでは境界面における剪断力を省略して考えれば、水路床面における摩擦速度を次のように表わすことができる。

$$V_* = \sqrt{g d_T \sin \alpha} \dots\dots\dots (3.10)$$

ここに d_T は水路床から上下両層の境界面までの高さ、 $\sin \alpha$ は水路のこう配である。

StraubとAndersonは水路内の乱れを $V_* / d_T^{2/3}$ で表わされるものと予想し、実験におけるこの値と混入空気平均濃度 $\bar{c}$ との関係をプロットし、これが1本の曲線で表わされることを見出した(図-3)。また $\bar{c}$ の代りに $\bar{c}_T$ をとれば、実験値は更によく1本の曲線にのることが明らかになった(図-4)。

$V_* / d_T^{2/3}$ は流量、水路こう配、床面の粗度の関数であるが、この実験の場合粗度を一定に保ったから、変数となるのは水路こう配 S と、単位幅当りの流量 q である。実験結果を整理し $\bar{c}$ と $S/q^{1/3}$ との関係をプロットしたのが図-5、 $\bar{c}_T$ と $S/q^{1/3}$ との関係をプロットしたのが図-6である。

つぎに、空気混入流は空気を混入しない流れよりも平均流速が大きくなる。

空気を混入していない流れにおける実験から

得られたデータを整理し、平均水深 d_m と $q / (\sin \alpha)^{1/3}$ との関係をプロットしたものが図-7である。図における直線は

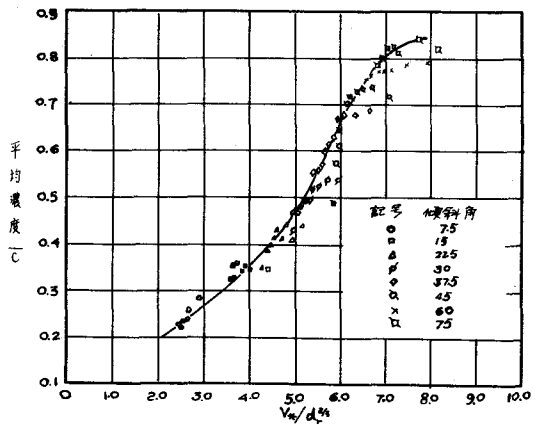


図-3 全流水断面平均濃度と $V_* / d_T^{2/3}$ (ストラウプとアンダーソンの実験による)

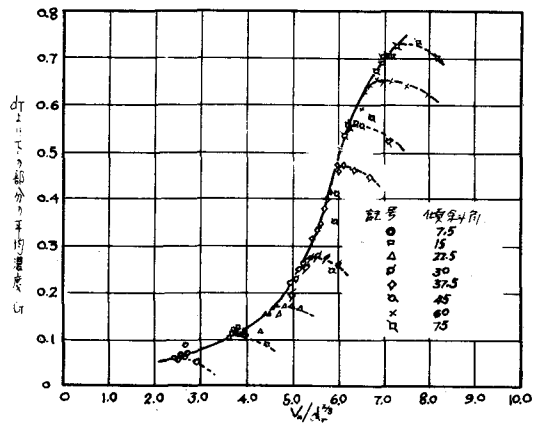


図-4 遷移水深より下の部分の平均濃度と $V_* / d_T^{2/3}$

$$q = 90.5 d_m^{\frac{1}{2}} (\sin \alpha)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (3.11)$$

を表わしている。従って平均速度は

$$V_m = 90.5 d_m^{\frac{1}{2}} (\sin \alpha)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (3.12)$$

となるが、これはシェーの平均流速公式であり、90.5はその係数である。

これと同じ形の式が空気混入流にも適用できるものと仮定すれば、水深 d_T で流れる場合の平均流速は

$$\bar{V} = C d_T^{\frac{1}{2}} (\sin \alpha)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (3.13)$$

となる。ここに C はシェーの係数である。

従って、流量は

$$q = C \bar{d} d_T^{\frac{1}{2}} (\sin \alpha)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (3.14)$$

で表わされるが $\bar{d} d_T^{\frac{1}{2}}$ と $q / (\sin \alpha)^{\frac{1}{2}}$ の関係を実験値から求めると図-8のようなプロットとなる。図-8における直線は空気を混入しない場合に相当するものであって、図-7から求められる。プロットされている点がこの直線の近傍に集まっていることから、(3.14) が成り立つものと考えられ、係数 C は空気を混入しない場合のシェーの係数を用いればよいことがわかる。

空気を混入しない流れの場合には、 $d_u = \bar{d} = d_T = d_m$ であるから d_u / d_m , $\bar{d} / d_m$, d_T / d_m の値はいずれも1であるが、混入空気の濃度が増加するにつれて、すなわち $\bar{C}$ が1に近づくにしたがって、 $\bar{d}$ は次第に小さくなり、 d_u と d_T とは次第に大きくなる。

混入空気の濃度が増加するにつれ $\bar{d}$ が減少することは、同一流量に対して流速 $\bar{V}$ が増加することを意味する。 $\bar{d}$ は水流の断面積だからである。

混入空気の平均濃度 $\bar{C}$ と $\bar{V} / V_m$ との関係は、図-9のようになり、空気を混入した流れの平均流速は、混入空気の平均濃度が50%以下では空気を混入しない場合とほぼ同じであるが、平均濃度が50%を越えると急激に増加する。

空気混入により平均流速が増大するという事実については、Hall によって詳しく報ぜられている³⁾。

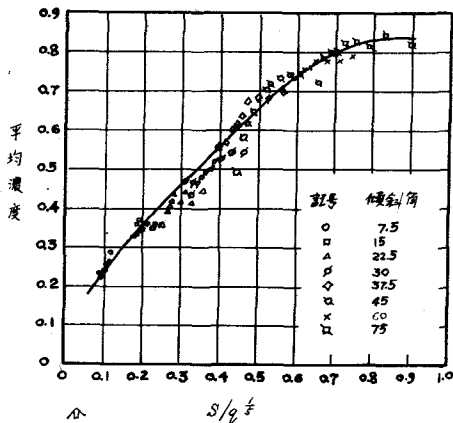


図-5 全流水断面の平均濃度と $S/q^{\frac{1}{2}}$ (ストラップとアンダソンの実験による)

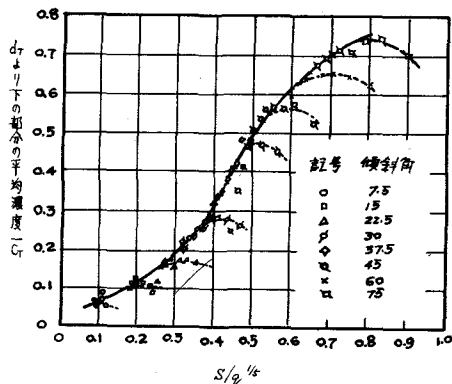


図-6 遷移水深より下の部分の平均濃度と $S/q^{\frac{1}{2}}$

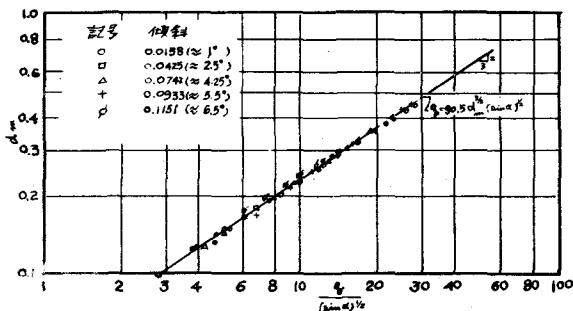


図-7 ミネソタ大学の実験水路における空気を混入しない流れの水深と流量 (ストラップとアンダソンの実験による)

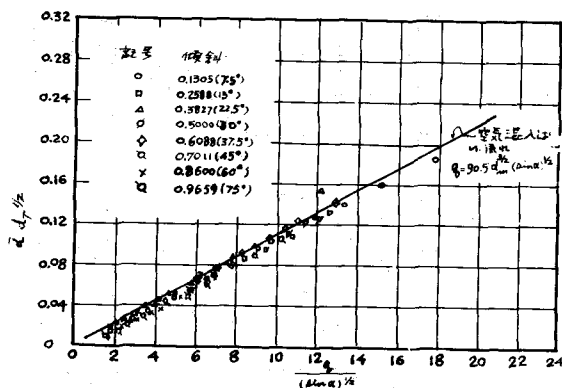


図-8 ミネソタ大学の実験水路における空気混入流の水深と流量

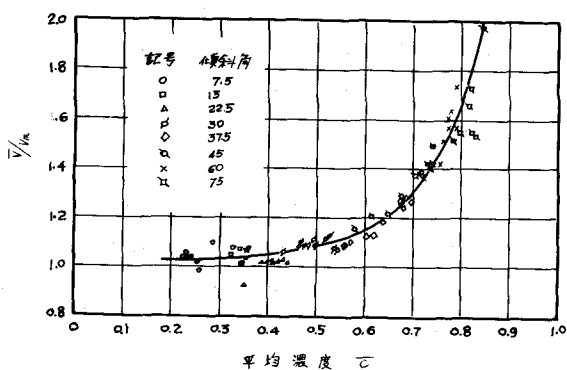


図-9 混入空気量と平均流速

4 急こう配水路における空気混入流に対する日野の解析

開水路における空気混入は、流れの中にある乱れによるものとされているが、乱れによる空気混入の機構について、日野は次のような解析を行なっている。

乱流は数多くの種々の周波数の渦から成り立っている。乱れの速度成分の時間的平均 $\overline{u^2}$ に対する周波数 f と $f+df$ の間の成分の貢献を $\overline{u^2} F(f) df$ として、 $F(f)$ を乱れのスペクトル曲線を表わすものとする。大きな渦は主にエネルギーを包蔵しており、これは流れの特有な要素に大きく支配される。すなわち低周波のところでは、 $F(f)$ はほぼ次の関数形で与えられる。

$$F(f) = \frac{4 \frac{L}{U}}{1 + (2\pi \frac{L}{U} f)^2} \dots \dots \dots (4.1)$$

ここに L は平均の渦径であり、それは相対水深 y/h の関数である。 U は流れの各点における時間平均流速、 $K = 2\pi f/U$ は波数である。渦の周波数が高くなるにつれてスペクトル関数は主流に付随する性質を失い Kolmogoroff の局所的等方性をもつようになる。

この局所的等方性の領域では、スペクトルは平均の速度とか、平均の渦径には関係なく、エネルギーの逸散率 ε と動粘性係数 ν に関係し、この2つの量から作られる長さを

$$\lambda_s = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \dots \dots \dots (4.2)$$

波数を

$$K_s = \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3} \right)^{1/4} \dots \dots \dots (4.3)$$

として表わせば、 λ_s は粘性によるエネルギー逸散に関係する長さであり、渦粒子の最小の大きさである。

$\lambda_s \ll \lambda < L$ なる λ の場合には、比較的大きい波長の成分の間のエネルギー変換を考えることになり、その機構は粘性にはほとんど無関係とみなすことができる。このような場合、スペクトルは

$$F(k) = C \varepsilon^{-2/3} k^{-5/3} \dots \dots \dots (4.4)$$

で表わされる。

いま λ_1 の径を持つ渦を考えれば、この渦の中には $\lambda_n \leq \lambda_1$ なる種々の径の渦が含まれており、この λ_n なる渦が全体に対する寄与は

$$\overline{U^2} \int_{\lambda_n}^{\infty} F\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\left(-\frac{1}{\lambda}\right)$$

したがって λ_n なる渦は、これを包蔵して運動する径 λ_1 の渦塊に対して、平均的には

$$\pm \sqrt{\bar{U}^2 \int_{\frac{1}{\lambda_n}}^{\infty} F\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

の速度で相対的に運動している。

そこで λ_1 なる自由表面に近い渦塊が、表面に向って運動したと考える。その渦塊全体が表面を飛び出するのに十分なエネルギーを持っていないとしても、その中に包蔵されている渦塊が、重力と表面張力の作用に打ち勝って空中に放出されることは起り得る。いま λ_n なる渦塊がたまたまそれ自身を飛び出させるに十分な運動エネルギーを持っていたとする。このとき可能平均運動エネルギーは

$$E = \rho \frac{4}{3} \pi \lambda_n^3 \frac{1}{2g} \bar{u}^2 \int_{\frac{1}{\lambda_n}}^{\infty} F\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\left(\frac{1}{\lambda}\right) \dots\dots\dots (4.5)$$

であり、重力に打勝って空気中に出るための仕事は

$$G = \alpha \rho \frac{4}{3} \pi \lambda_n^3 g H \dots\dots\dots (4.6)$$

表面張力に対してなす仕事は

$$S = \beta \cdot 4 \pi \lambda_n^2 T \dots\dots\dots (4.7)$$

である。従って、 $M = E - G - S$ で定義される関数 M が0または正であれば、水面に突起が生じたり、粒子が飛び出たりする。

遷移面より下の層は、水中に気泡が浮んでいる状態である。このとき半径 a の気泡にはたらく浮力 $(4/3)\pi a^3 \rho \cos \theta$ と気泡の浮上に対する抵抗力 $C_D \pi a^2 V_b^2 / 2$ とが釣り合っていないなければならない。

さて半径 a の気泡の中心が $U + u$ で動いていれば、中心から r だけ離れた位置における乱れの色度 $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)r$ であるから、その気泡に作用する変動の力は $\left[\rho a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]a^2$ であり、この力が気泡を分解しようとするが、一方表面張力 $2\pi a T$ は気泡の分解を妨げるので、両者の力が釣り合うまで気泡は小さくなる。

従って気泡の半径は次のように表わされる。

$$a^3 = \text{const} \cdot \frac{T}{\rho} \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2} \dots\dots\dots (4.8)$$

これに対し、次のようなオイラーの相関関数というものがある。

$$f(r) = \frac{u(0)u(r)}{u(0)^2} \dots\dots\dots (4.9)$$

ここに $u(0)$ 、 $u(r)$ はそれぞれ $r=0$ 、 $r=r$ における u の値である。

いま $u(0)$ の代りに u と書き、この式を $r=0$ のまわりに展界すれば

$$f(r) = 1 - \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \frac{r^2}{2!} + \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)^2 \frac{r^4}{4!} \dots\dots\dots (4.10)$$

となり、エネルギー逸散に関する小形の渦粒子の大きさ λ は次のように表わされる。

$$\frac{1}{\lambda^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1-f(r)}{r^2} = -\frac{1}{2u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 = -\frac{1}{2} f_0'' \dots\dots\dots (4.11)$$

いま気泡の大きさが小形の渦粒子の大きさより小さく $a < \lambda$ の場合には

$$a^3 = \text{const} T \frac{\lambda^2}{u^2} \dots\dots\dots (4.12)$$

となるが、乱流の間には一般に

$$\frac{\lambda^2 \sqrt{\bar{u}^2}}{\nu L} = \text{const} \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

という関係があり、遷移面付近における小形の渦を考える場合には、 L は d_T に $\sqrt{u^2}$ は V_* にそれぞれ比例するものと考えられるから

$$\frac{\lambda^2 V_*}{\nu d_T} = \text{const} \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

$$\text{したがって } a^3 = \text{const } T \frac{\nu d_T}{V_*} \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

となる。

混入されている気泡の大きさが、小形の渦よりも大きく、大形の渦よりは小さい $\lambda < a < L$ の場合には、いわゆるKolmogoroffの局部的等方性を仮定する。コルモゴロフは空間的に L に比べて小さく、また時間的には緩和時間 $L/\sqrt{\bar{u}^2}$ に比べて小さい範囲を考えると、レーノズル数 $L\sqrt{\bar{u}^2}/\nu$ が十分に大きいならば、変動の統計的性質は一樣で、等方で、しかも定常とみなし得るものと仮定している。

またコルモゴロフは局部的等方性の乱れに対して、相似の仮説を設けている。すなわち局部的等方性の乱れにおいては、乱れの統計的性質が ν と ϵ だけに関係するものと考えるのである。この2つの量によって作られる長さを $\lambda_s = \nu^{3/4}/\epsilon^{1/4}$ とする。

いま2点 P および Q の間の距離 r が、 L に比べて小さいものとする。そして両点における PQ 方向の速度変動を $u_d(P)$ 、 $u_d(Q)$ 其の差の2乗平均を B_{dd} で表わせば

$$\begin{aligned} B_{dd}(r) &= \overline{\{u_d(P) - u_d(Q)\}^2} \\ &= \overline{u_d^2(P)} - 2\overline{u_d(P)u_d(Q)} + \overline{u_d^2(Q)} \\ &= 2\{\overline{u_d^2} - \overline{u_d^2} f(r)\} = 2\bar{u}^2\{1-f(r)\} \quad \dots\dots\dots (4.16) \end{aligned}$$

となる。従って B_{dd} は速度の2乗の次元を持つ量であるが、 ϵ と ν よりなり速度の次元を持つものは $(\nu\epsilon)^{1/3}$ である。そこで B_{dd} は次の形を持っていなければならない。

$$B_{dd}(r) = (\nu\epsilon)^{1/3} \beta_{dd}\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad \dots\dots\dots (4.17)$$

r が L に比べては小さいが、 λ に比べては大きい場合には、比較的大きい波長の成分の間のエネルギー交換を考えることになり、その機構には粘性が無関係となり、乱れを規定するものは ϵ のみによるものと、コルモゴロフは仮定した。従って $B_{dd}(r)$ が ν を含まないためには、 $\nu^{1/3}(r/\lambda)^x$ が ν を含んではいけない。ここで、 $\lambda = \nu^{3/4}/\epsilon^{1/4}$ であるから、結局 $\nu^{1/3}\nu^{-2/3}$ が ν を含んではいけないことになり、 $x = 2/3$ となる。

故に、 $\beta_{dd}\left(\frac{r}{\lambda}\right) = C\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{2/3}$ とすることができ

$$B_{dd}(r) = C \cdot (\epsilon r)^{2/3} \quad \dots\dots\dots (4.18)$$

の関係が得られる。ここに C は絶対常数である。

そこで(4.16)から二重相関 $f(r)$ は

$$f(r) = 1 - \frac{C}{2\bar{u}^2} (\epsilon r)^{2/3}$$

となるが、一方

$$f(r) = 1 - \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \frac{r^2}{2!}$$

であるから

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 r^2 = C (\epsilon r)^{\frac{2}{3}}$$

であるが、前にのべたように気泡を分解しようとする力は $\left[\rho a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right] a^2$ であるから、これは $\rho a^2 (\epsilon a)^{\frac{2}{3}}$ である。この力が気泡の分解を妨げる表面張力 $2\pi a T$ と釣合う。

$$\text{従って } \rho a^2 (\epsilon a)^{\frac{2}{3}} = \text{const} \cdot a T$$

$$\text{故に } a^{\frac{5}{3}} = \text{const} \cdot \frac{T}{\rho} \epsilon^{-\frac{2}{3}}$$

となる。

また、 $\lambda_s = (\nu^3 / \epsilon)^{\frac{1}{4}}$ の関係を用いれば

$$a^{\frac{5}{3}} = \text{const} \cdot \frac{T}{\rho \nu^2} \lambda_s^{-\frac{4}{3}}$$

となるが、一方 $\frac{\lambda^2 \sqrt{u^2}}{\nu L} = \text{const}$ という関係があるから、遷移面付近の小形渦の大きさを λ とすれば、近似的に

$$\lambda^2 = \text{const} \frac{\nu d T}{V_*}$$

と考えることができる。ここに V は摩擦速度である。

$\lambda_s = \lambda$ とすれば

$$a^{\frac{5}{3}} = \text{const} \frac{T}{\nu^2} \frac{\nu d T}{V_*}$$

日野はこれらの解析方法を用いて Straub と Anderson の実験データを吟味している。

5 急勾配水路における空気混入量に関する最近の研究

急こう配開水路における空気混入流に関する研究は、1940年代1950年代にわたって盛んに行なわれたが、最近はあまり行なわれていないようである。

1961年米国土木学会の水理委員会は、開水路の空気混流入に関する報告書 (Progress Report) を発表した。この報告書においては、Straub と Anderson の実験データをもとにし、発電所の水路における現場実測のデータをまじえて、 $S/q^{\frac{1}{3}}$ に対する $\bar{C}$ の関係を示す図-10が発表されている。Sは水路のこう配 q は水路幅1フィート当りの流量 (立方フィート/秒) である。また図に示されている直線 $\bar{C} = 0.743 \text{Log}_{10} (S/q^{\frac{1}{3}}) + 0.876$ に対するデータの標準偏差は $\sigma = 0.061$ となっている。

このような急こう配水路における流量 q は、そ

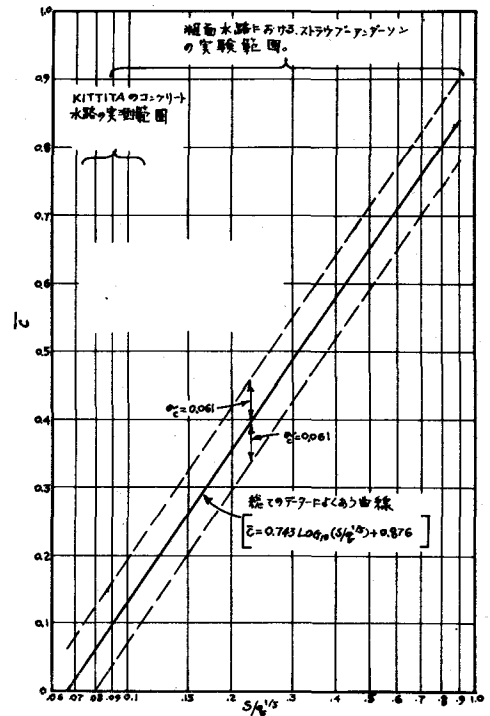


図-10 $\bar{C}$ と $S/q^{\frac{1}{3}}$ の関係

- C 全流水断面平均濃度
- q 幅1フィート当り流量 (立方フィート/秒)
- S $\sin \alpha$
- α 水路底が水平となす角
- σ 標準偏差

の大部分が下層であって、これは気泡を含んでいる。上層は水滴でその流量は僅か1%に過ぎないことが、N. Rajaratnamの実験により示されている。

最近、KillenとAndersonは、空気混入流の高速写真による観測の結果、空気混入流の上層部は多くの水滴が霧状になっているという状態ではなく、水と空気の境界面は連続した面をなしているが、ただ水面が非常に不規則な波をなしていることを発見している。水面におけるこのような激しい乱れは、水滴または水塊を空中に跳ねとばすが、その量は全流量に対して極く僅かである。また波は巻き波となって砕け、その際に空気を混入する。

Killenらはこのような流れを上下2層に分け、不規則な水面の波の砕けることによって持ち込まれた空気が気泡となって浮んでいる部分を下層とし、それより上の不規則な振幅と振動数を有する波の部分を上層とし、この部分も空気の混入が行なわれているものとみなした。

Killenらは小さな電極を任意の高さに固定し得るような装置を作り、電極が水中にあるときには水路底との間に回路が構成されて一定値の矩形電流が通じ、電極が空中または気泡中にあるときは電流が通じないようにして、高速水流の水面の位置と気泡の濃度を測定している。

この装置において、電流の通じない時間を空気混入の濃度とし、これを C_A で表わし、水中に含まれる気泡の濃度を C_w とすれば、

$$C_A = C_w q + 1 - q$$

の関係がある。ここに q は電極が水中に落ちる確率である。

6 自由落下水または水ジェットにおける空気混入

自由落下水は滝として自然に存在するが、アーチダムの余水吐として設計され、また砂防ダムの越水に用いられている。

滝の場合には落ち口付近が奔流となって激しい乱れがあるのが普通であるから一般に滝は落ち始めから空気を含み白くなっている。しかしダム为天端はコンクリートで滑らかに作られているので、これを越える流れも越流頂上では空気の混入がない透明な流れである。ダムを離れて自由落下に移ると直ちに下面から白濁を生じ次第に表面に及んで来る。

高いダムを越えて自由落下する流れがおのずから空気を混入する現象は、自由落下する流れの断面積を増大し、これを受ける河床の単位面積に及ぼす圧力を減ずることになるので好都合である。このように高速流に空気が混入すれば、空気混入流としては密度が小さくなり、単位面積当たりの速度エネルギーが減少する。フリップバケットからスキージャンプ式に放出する流れに大量の空気を混入するため、バケットには歯形をつけるのが普通であり、また2ヶ所のフリップバケットから放出した流れを空中で衝突せしめて空気の混入をはかる上椎葉ダムのような設計もある。ダムを貫いて設けられた放水管の出口にコーンバルブを用い、空中に噴出する高速流を分散する方法も用いられる。

水がジェットとなって空中を走る例としてはペルトン水車があるが、そのほか消防ポンプからの送水、ジェットによる岩盤掘削などがあるが、これらの場合、空気の混入はエネルギーの集中を妨げ、効率を減少する悪条件となる。

7 自由落下水に関する研究

円形断面をなして空中を飛ぶ細いジェットの不安定性とその破砕機構については、古くから研究が行なわれているが、ダムを越流して自由落下水となるような流量の大きい場合については、実験装置が大規模になるので余り研究が行なわれていない。田中は噴流の機構を適用してこの問題を解析し

コアが消失するまでの流下距離を越流水深の 20 倍ないし 30 倍としているが、実験的裏付けが十分でない。室田劉はコアの消失するまでの流下距離が越流水深に比例することを、実験的に確認している。

坂本は内径 20 cm の円形断面下向きノズルから、流速約 9 m/s で水を空中に噴出せしめ、落下高約 10 m を自由落下する間、閃光光源を用いてステレオカメラにより瞬間撮影を行なった。写真観測によれば、ノズルから出たばかりの落下水には、表面に小さな凹凸が無数に存在するが、流下するにつれてその小さな凹凸は消え、その代りに大きな瘤が現われてくる。前者が発達して後者になるのではなく、別に大きな乱れが生ずるようである。従って前者はノズル内の境界層において発生した小さな渦であり、後者は落下水の内部に存在する大きな渦であると考えられる。大きな瘤は上下に連結し、あたかも山脈のような形状を呈し、落下水の表面には数条の縦縞が見られる。

この落下水における空気混入を電氣的に測定した。エナメルで被覆絶縁した外径 4 mm の真鍮棒の先端を尖らし、長さ 1 mm 程真鍮面を露出した電極を落下水内に挿入し、水晶発振器による 10 キロサイクルの正弦波電圧を電極にかけ、落下水から銅製ノズルに至る回路を生ぜしめた。電流が水中にあるときには電流が通じ、水を離れて空気中にあるときには電流は通じない。このようにして流れる電流をパルスに直して、これを電子計数管によって読みとった。例えば 10,000 サイクルのパルスを 1 秒間送った場合、10,000 と記録されれば、電極は全く水中に没していたことを示し、零と記録されれば全く空中にあったことを示している。したがって記録された数を 10,000 で割れば、測定点における水の平均濃度が得られる。図-11はこのようにして得られた測定結果の一部である。

円形断面の下向きノズルから噴出する流れが、時間的に定常であり、場所的にも断面内で均一でかつ等方であるとする。ノズル出口断面の中心に原点をとり、下向きに x 軸、これと垂直に y 軸、 z 軸をとる。ノズルから噴出する流れの中の水粒子は x, y, z の方向に、それぞれ u, v, w なる乱れ速度を有するが、原点から噴出された水粒子が時間 t を経過したのち、一点 x, y, z における微小体積 $dx \, dy \, dz$ 内に含まれる確率を $\Psi(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz$ とすれば、関数 Ψ は三次元ガウス分布の確率密度であると考えられ

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{K^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-K^2(x^2 + y^2 + z^2) \right] \quad \dots\dots\dots (7.1)$$

で表わすことができる。ここに K は t の関数である。
 K を決定するために、 y についての分散を求めれば

$$\bar{y}^2 = \frac{\iiint_{-\infty}^{\infty} y^2 \Psi(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz} = \frac{1}{2K^2} \quad \dots\dots\dots (7.2)$$

となり (7.1) は次のようになる。

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi\bar{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\bar{y}^2} \right) \quad (7.3)$$

つぎに座標の原点から放出される水粒子の体積を、 $t = 0$ の瞬間において Q_0 とする。また時刻 t 、点 x, y, z における単位体積中に発見される水粒子の体積を $S_0(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ とす

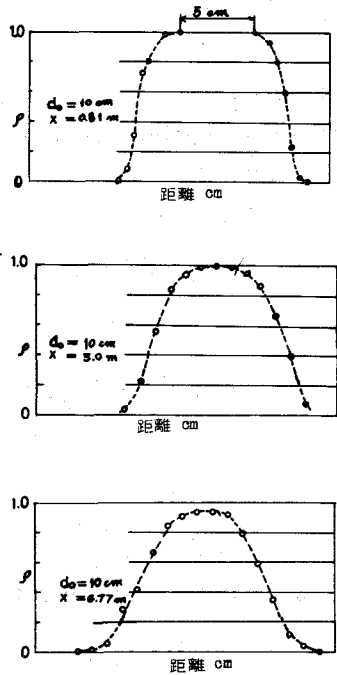


図-11 内径10 cmのノズルからの落下水における水の濃度

れば、次式が得られる。

$$\frac{S_0(x, y, z) dx dy dz}{Q_0} = \frac{dx dy dz}{(2\pi \bar{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\bar{y}^2} \right] \dots\dots\dots (7.4)$$

水の粒子が連続して噴出し、その x 軸方向の平均速度を U 、単位時間に吐き出された粒子の体積を Q とし、 t_0 と $t_0 + dt$ の間に吐き出された粒子による x, y, z 点の時刻 t における濃度を $S(x, y, z, t - t_0) dt$ とすれば

$$S(x, y, z, t - t_0) dt = \frac{Q dt}{(2\pi \bar{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{\left\{ x - U(t - t_0) \right\}^2 + y^2 + z^2}{2\bar{y}^2} \right] \dots\dots\dots (7.5)$$

このような拡散によって生じた粒子の分布範囲は、平均流速 U をもって動く3次元拡散の球状体が、無数に集まったものと考えることができる。平均速度が乱れの速度に比して非常に大きい場合には、平均流速方向の拡散を省略しても差支えない。この場合 t_0 と $t_0 + dt$ の間に吐き出された水粒子は t において、平均流速方向の $U(t - t_0)$ と $U(t - t_0) + U dt$ の両位置における平均流速方向に垂直な2つの断面にはさまれた円板の中に見出される。(7.5)によって示される3次元球状体を x について $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すれば、この円板内の平均濃度分布が得られる。

$$\frac{\bar{S}(y, z, t - t_0)}{Q} dy dz = \frac{dy dz}{2\pi \bar{y}^2} \exp \left(-\frac{y^2 + z^2}{2\bar{y}^2} \right) \dots\dots\dots (7.6)$$

以上は水の粒子が座標の原点から噴出する場合であるが、原点を中心として半径 a を有する円の断面積全体から一様に噴出する場合には、断面内の任意の1点 y_0, z_0 における単位面積当りの吹き出し流量 q による1点 x, y, z における時刻 t の単位面積当り流量を $\bar{S}$ とすれば

$$\begin{aligned} \bar{S}(x, y - y_0, z - z_0, t - t_0) \\ = \frac{q dy_0 dz_0}{2\pi \bar{y}^2} \exp \left\{ -\frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{2\bar{y}^2} \right\} \dots\dots\dots (7.7) \end{aligned}$$

となり、半径 a なる円の面積全体から噴出する場合の任意の点 x, y, z における濃度を C とすれば

$$C(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi \bar{y}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \exp \left\{ -\frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{2\bar{y}^2} \right\} r_0 dr_0 d\theta \dots\dots\dots (7.8)$$

となる。そこで、 $y_0 = r_0 \cos \theta, z_0 = r_0 \sin \theta, y = r \cos \varphi, z = r \sin \varphi$ とおけば

$$C = \frac{1}{2\pi \bar{y}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \exp \left[-\frac{1}{2\bar{y}^2} \{ r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \varphi) \} \right] r_0 dr_0 d\theta$$

となるが、 x 軸のまわりに座標軸を廻転し、 $\varphi = 0$ とすることができる。すなわち

$$C = \frac{1}{2\pi \bar{y}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \exp \left[-\frac{1}{2\bar{y}^2} (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta) \right] r_0 dr_0 d\theta \dots\dots\dots (7.9)$$

図-12は半径 a なる落下水の断面を表わすものとし、その中心を O 、点 y, z に相当する点を P 、点 y_0, z_0 に相当する点を Q とする。したがって $OQ = r_0, OP = r, LPOQ = \theta$ となるから、 $r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta$ は PQ の長さの2乗であることがわかる。すなわち Q 点において吹き出した水粒子が P 点において有する平均濃度は、 P 点において吹き出した同一量の水粒子が Q 点において占める平均濃度に等しいことになる。したがって半径 a なる落下水断面の全体から一様の強度で吹き

出す水の粒子がP点において有する平均濃度は、P点から同一強度で吹き出した水粒子が四方に拡散し、これが原点を中心とした半径aなる円形断面内各点における平均濃度の合計に等しい。

図-12 において、P点から吹き出した水粒子は円形に拡散されていくから丁度P点を中心とした図示のような小さな円まで拡がった時を考えれば、この円が大きな円に含まれる部分だけが有効であって、この円をはずれる三日月の部分は無効である。逆に言えばこの部分からはP点に水が来ないことを意味する。したがってP点の濃度は1.0よりも小さくなり、空気が混入していることになる。そこで(7.9)を積分し、 $C \equiv 1.0$ となるようなrの大きさを求めれば、空気の混入しない部分すなわちコアの限界を求めることができる。

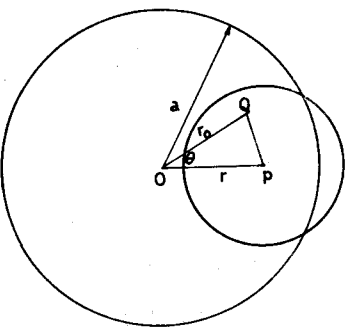


図-12 拡散説明図

(7.9)におけるCの値は $r = 0$ の時最大となるが $C = 1$ となるのはaが無量大であるか、 $\bar{y}^2 = 0$ の場合である。aが無量大でない場合には、コアの中でもCは1.0より小さい。そこで $C = 0.99$ をコアの外縁とみなすことにする。

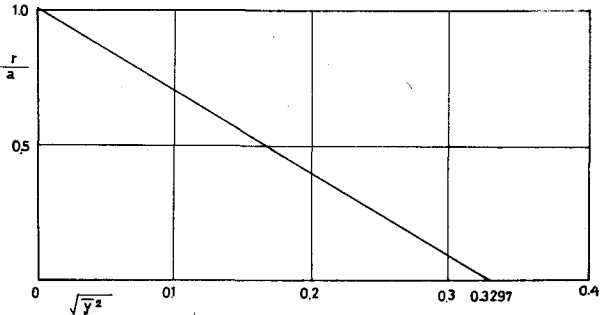


図-13 コアの長さ(円形断面)

$C = 0.99$ として(7.9)の計算を行ない、 r/a と $\sqrt{\bar{y}^2}/a$ の関係を求めれば図-13のような曲線となる。

以上は円形断面の落下水について解析を行なったものであるが厚さ2h、幅無限大の二次元ノズルから下向きに噴出する落下水についても同様な取扱いをすることができる。この場合は

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{y}^2}} \int_{-h}^h \exp\left\{-\frac{(y-y_0)^2}{2\bar{y}^2}\right\} dy_0 \dots\dots\dots (7.10)$$

となり、前と同様 $C = 0.99$ のときの y/h と $\sqrt{\bar{y}^2}/h$ の関係を求めれば、図-14のようになる。

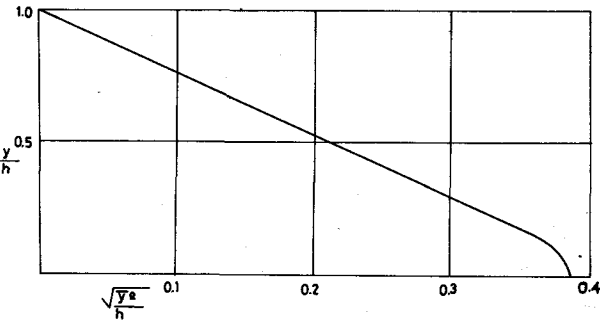


図-14 コアの長さ(長方形断面)

次に、 $\bar{y}^2$ の値を求めなければならない。いま座標の原点にあった水粒子が、時間tを経過したとき、点Pに来るものとすれば、

$$x = \int_0^t u(\alpha) d\alpha \quad y = \int_0^t v(\alpha) d\alpha \quad z = \int_0^t w(\alpha) d\alpha$$

である。乱れが一樣で、等方性且つ定常の場合には $\bar{x}^2 = \bar{y}^2 = \bar{z}^2$ である。

y方向の分散を求めれば

$$\bar{y}^2 = \left[\int_0^t v(\alpha) d\alpha \right]^2 = \int_0^t \int_0^t v(\alpha_1) v(\alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2$$

である。ここに α_1, α_2 に関する積分は0から t までの範囲で、この積分範囲は正方形をなしている。 α_2 の積分範囲を0から α_1 までとし、 α_1 の範囲を0から t までとすれば、積分範囲は前の正方形の半分となる。従って

$$\bar{y}^2 = 2 \int_0^t d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \overline{v(\alpha_1)v(\alpha_2)}$$

いま $\alpha_2 - \alpha = \alpha$ とおけば

$$\bar{y}^2 = 2 \int_0^t d\alpha_1 \int_{-\alpha_1}^0 d\alpha \overline{v(\alpha_1)v(\alpha_1 + \alpha)}$$

ラグランジュの相関係数は

$$R_L(\alpha) = \frac{\overline{v(\alpha_1)v(\alpha_1 + \alpha)}}{\bar{v}^2}$$

であるが、これは偶関数である。従って

$$\bar{y}^2 = 2\bar{v}^2 \int_0^t d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} R_L d\alpha$$

となり

$$\int_0^t d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} R_L d\alpha = \left| \alpha_1 \int_0^{\alpha_1} R_L d\alpha \right|_0^t - \int_0^t \alpha_1 R_L d\alpha_1 = t \int_0^t R_L d\alpha - \int_0^t \alpha R_L d\alpha$$

であるから $\bar{y}^2 = 2\bar{v}^2 \int_0^t (t - \alpha) R_L d\alpha$

となる。

いま $R_L = e^{-\frac{\alpha}{T_L}}$

とすれば $\bar{y}^2 = 2\bar{v}^2 T_L^2 \left(\frac{t}{T_L} + e^{-\frac{t}{T_L}} - 1 \right) \dots\dots\dots (7.11)$

ここに $T_L = \int_0^\infty R_L d\alpha$

であって、ラグランジュの乱れのスケールである。 T_L は近似的に $L/\sqrt{\bar{v}^2}$ に等しいと考えることができる。 L は渦の平均直径である。

(7.11)によれば、拡散の程度を表わす $\bar{y}^2$ という値は、ノズル出口における乱れの強さ $\bar{v}^2$ が大きい程、乱れの規模が大きい程、また時間が経過するに従って、大きくなることがわかる。

図-15は縦軸に落下水の落下時間をとった場合のコアの形状を示したものである。実線は計算値を示すものであって、内径20 cmノズルの場合 $\sqrt{\bar{v}^2} = 12$ cm/sec, $L = 2.5$ cm, 内径10 cmノズルの場合 $\sqrt{\bar{v}^2} = 6$ cm/sec, $L = 1.25$ cmとしているが、これらの値はノズル出口における乱れ速度の測定値その他を勘案して、妥当な数値であると判断した。図中の実験値は、図-11に示す濃度測定の結果から求めた値である。

ノズルの上流部管内に格子を挿入し、ノズル内の流れの渦径を小さくした場合、コアの長さは著しく減少した。格子は管内断面積を縦横に10等分したので、渦径が仮りに $1/\sqrt{10}$ になったものとし、20 cmノズルの場合 $L = 0.6$ cm, 10 cmノズルの場合 $L = 0.3$ cmとして計算したものが、図の破線である。

図-16は落下水の濃度分布を示したものであって、 a は $t = 0.175^s$, b は $t = 0.42^s$ における値である。実線は計算値、○印は内径20 cmノズルに対する実験値、×印は内径10 cmノズルに対する実験値である。

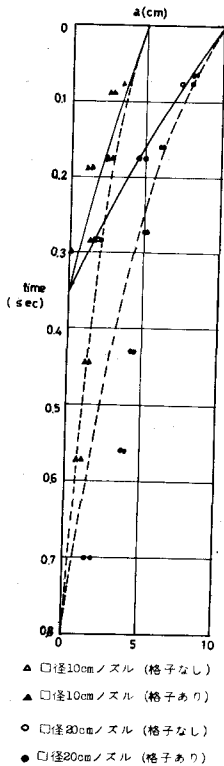


図-15 コアの縦断

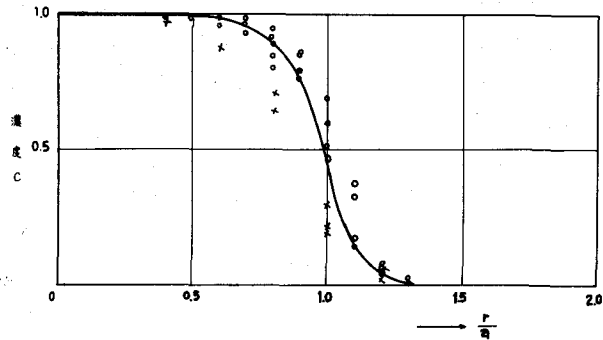


図-16 a 水の濃度分布

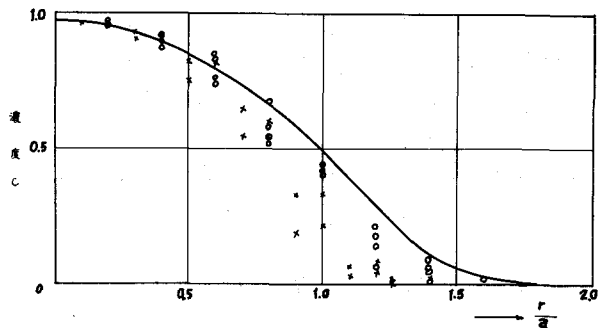


図-16 b 水の濃度分布

8 水ジェットに関する研究

J. Dodu は内径 17 mm から内径 44.1 mm までの 5 種類の円形断面ノズルから水平に水を噴出せしめ、ジェットに垂直の方向から撮影した瞬間写真により、ジェット表面の凹凸を測定した。実験の行なわれたジェットの流速は最高 38.40 m/s から最低 11.55 m/s に及んでいる。

Dodu はノズルから噴出するジェットの分散が主としてジェット内の乱れエネルギーによるものであるとし、ジェットの分散による半径の増大と、ジェットの進行距離との関係は

$$\frac{dr}{dx} = \frac{\sqrt{\bar{q}^2}}{U}$$

として、粘性による乱れの減衰を考慮して解析を行なっている。ここに $\bar{q}^2$ はジェット内の乱れの強さ U はジェットの進行方向の平均速度である。

粘性による減衰がなければ $\bar{q}^2$ は一定値を保ち、ジェットの半径はジェットの進行距離に比例して直線的に増大するが、実際には粘性による減衰があるため、ジェット半径の増大する割合が次第に減少することになる。しかしその影響は僅かであって、彼の実験値における飛行距離の最大値 $x/r_c = 65$ までの間のいずれの測定値も r/x の関係は直線をなしている。なお r_c はノズル出口付近におけるジェットの最小半径である。

9 自由落下水を受ける池または水槽における空気混入

自由落下水が池に突入する場合には多量の空気を混入する。自由落下水は落下するにしたがい、不規則に変形し、次第にその内部に空気を含んで分散する。落下水の内部に含まれた空気は上面の水からは押され、下面の水からは引かれて水とはほぼ同一速度で動かされるが、落下水に接する周囲の空気も剪断力によって動かされる。

自由落下水が池の水面を貫く際、落下水内の空気はやはり落下水の圧力または負圧によって、池の中に持ち込まれる。落下水の周りの空気は池の水面に対して圧力を及ぼし、その圧力が十分に大きければ水面を貫いて水中に侵入する¹⁰⁾。しかしそれも落下水の極く近くだけであって、その他の大部分は水面で反射されてしまう。このことは自然の滝の滝壺における水滴の動きによって、十分容易に観察できる。

落下水によって水中に持ち込まれた空気は、直ちに大きな浮力を受けるので、すみやかに水面から脱出する筈である。しかし実際には水中深くまで空気が混入する。その原因は池の中に突入した落下水の周辺に生ずる負圧なのである。

自由落下水の実験において、下向きの噴出用ノズルを下げ池の水面以下にし、いわゆる噴流の状態にすれば、ノズルが水面に近い場合、水面に渦が発生し空気を捲き込む。これは噴流の周辺に負圧の生ずることを示すものである。

噴流の拡散に関する Tollmien の解析によれば¹¹⁾、噴流の中心における圧力を P_m 、噴流の縁における圧力を P_r とすれば、

二次元噴流の場合

$$(P_m - P_r) / \rho = 0.248 (2C^2)^{\frac{2}{3}} U_m^2 (x)$$

三次元噴流の場合

$$(P_m - P_r) / \rho = -0.316 (C^2)^{\frac{2}{3}} U_m^2 (x)$$

である。ここに $U_m(x)$ は x の位置における噴流中心の速度を表す。

次に、噴流のまわりの静止している水の圧力を P_0 とすれば

二次元噴流の場合

$$P_m - P_0 = 0.124 (2C^2)^{\frac{2}{3}} \rho U_m^2$$

三次元噴流の場合

$$P_m - P_0 = -0.372 (C^2)^{\frac{2}{3}} \rho U_m^2$$

従って、二次元噴流の場合

$$P_r - P_0 = -0.124 (2C^2)^{\frac{2}{3}} \rho U_m^2$$

三次元噴流の場合

$$P_r - P_0 = -0.056 (C^2)^{\frac{2}{3}} \rho U_m^2$$

となり、噴流に縁においては負圧の生ずることがわかる。常数 C の値は、二次元噴流の場合、 $C = 0.0174$ 、三次元噴流の場合 $C = 0.0158$ である。

坂本、藤原は内幅 60 cm、高さ 130 cm の長方形断面で、側壁を透明ならしめた水槽に、幅 50 cm 厚さ 3 cm の長方形断面のノズルから、水を鉛直に落して二次元自由落下水を生ぜしめ、これを受ける水槽内で空気の混入量を測定した。

図-17 のように空気混入流中にピトー管を挿入し、その静圧孔をマンオメーターに接続して、水压を測定することにより空気混入流の密度を求め、混入空気量を算出しようとするものである。ピトー管の

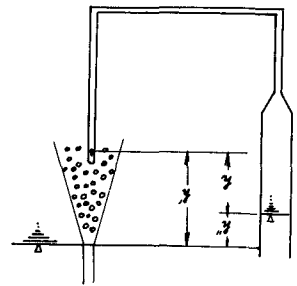


図-17 密度測定の方法

静圧孔の位置における水頭を h とすれば、
若し空気の混入がなければこの水頭は h' になる筈であるから、 $h - h = h''$ は混入空気量に相当するものである。従って水面から水深 h' 間における、空気混入流の平均密度を ρ' とすれば、 $\rho' = h / h'$ である。

図-18は測定による h と h' の関係、両者から求められた ρ' の値ならびに水深 h' の点における濃度 ρ を示している。 ρ の値は $\Delta h / \Delta h'$ によって求めたものである。

h' の小さいところでは、 $h' - h$ が非常に小さい。これは落下水の中心部が水槽に突入した直後、周辺より圧力が高く、含んでいた空気も排出されるためと思われる。

次に、自由落下水を受ける水槽内の流れについて運動量を考えて解析しよう(図-19)。そのために次のような仮定をする。

- (1) 鉛直下方に自由落下した水は、水槽の底にあたって左右等分に分流する。
- (2) 浮力による静水圧の変化を無視する。
- (3) 気泡の密度は極めて小さいから無視する。
- (4) 排水の流速 v は小さいから考慮しない。

図-19において、自由落下水の左側の水槽内について考え、水槽底で二分された流れによる左向き運動量は

$$M_u = \rho u_0 \frac{d}{2} u_0 = \frac{w}{g} \frac{d}{2} u_0^2 = \frac{d u_0^2}{2g}$$

気泡を除いて水だけ集めた水位を h とすれば、左向きに作用する水は

$$F_h = \frac{1}{2} h^2$$

これに対し、壁面から右向きに働く反力は

$$F_H = H_0^2 / 2$$

であるから、次式が求められる。

$$\frac{1}{2} H_0^2 = \frac{d u_0^2}{2g} + \frac{1}{2} h^2$$

実験においては、 $Q = 40 \text{ L/s}$ 、 $H = 0.11 \text{ m}$ のとき、 $u_0 = 3.78 \text{ m/s}$ 、 $H_0 = 1.040 \text{ m}$ 、 $d = 0.021 \text{ m}$ であった。従って上式から $h = 1.026 \text{ m}$ となる。これに対し h' の測定値は 1.090 m で

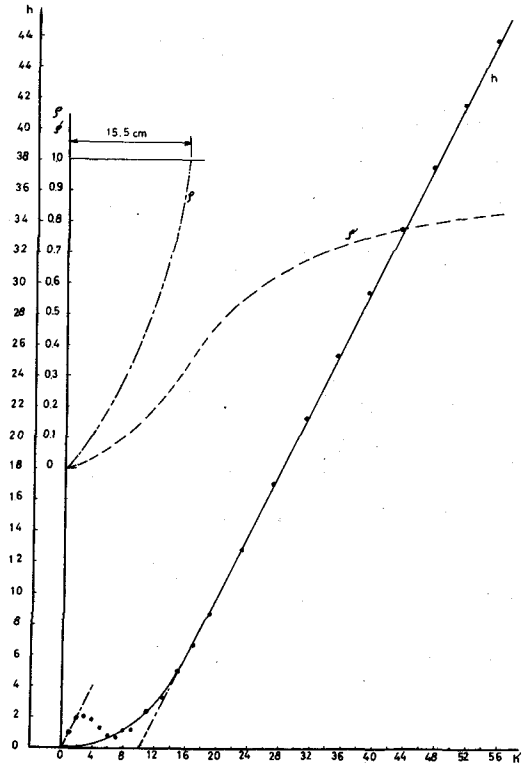


図-18 a 空気混入量 流量40 L/s 自由落下高0.11 m

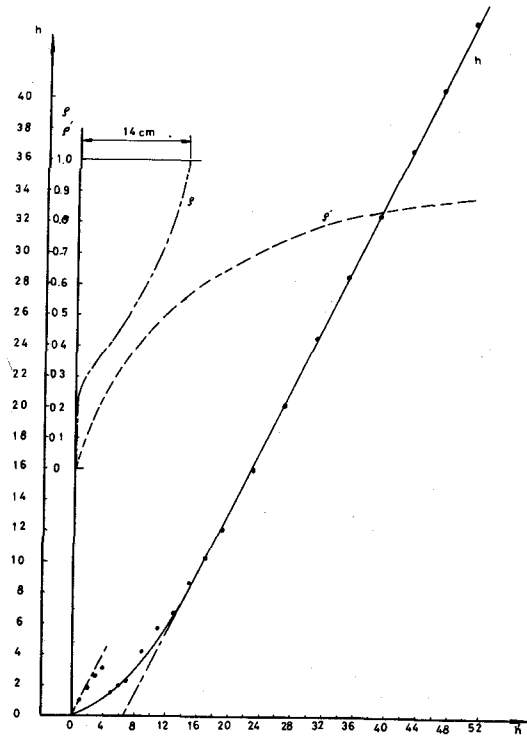


図-18 b 空気混入量 流量40 L/s 自由落下高0.42 m

あった。従って、 $h'' = h' - h = 0.064 \text{ m}$ となるが、 h'' の実測値は 0.070 m であった。同様の計算により、 $Q = 40 \text{ l/s}$ 、 $H = 0.11 \text{ m}$ のとき、計算値 $h_c'' = 0.058 \text{ cm}$ 、実験値 $h_m'' = 0.060 \text{ cm}$ 、 $Q = 40 \text{ l/s}$ 、 $H = 0.42 \text{ m}$ のとき $h_c'' = 0.085 \text{ m}$ 、 $h_m'' = 0.092 \text{ m}$ であった。

静水中の噴流の場合、その中心線上の速度は次のように表わされる。

$$\frac{u_{\max}}{u_0} = \frac{K_1}{\sqrt{x/d_0}} \quad \text{二次元噴流の場合}$$

$$\frac{u_{\max}}{u_0} = \frac{K_2}{x/d_0} \quad \text{三次元噴流の場合}$$

$u_{\max}$ は噴流中心の速度、 u_0 は噴流始点の速度、 x は噴流始点からの距離、 d_0 は始点における噴流の直径または厚さである。

坂本、藤原の行った実験結果を図-20に示す。自由落下高が大きくなれば中心線上の速度の低減率は大きくなり、また同一落下高ならば、流量の少ない方が速度低減率は大きい。

図には Albertson の式および安芸の実験結果をあわせて示してある。

図に示されている実験データは、いずれも $x/d_0 = 5$ 程度までコアの存在することになっている。しかし自由落下水は一般に不規則な形をしており、連続な流れをなす中心部の厚さは僅かであって、しかも流れの中心部が絶えず移動している。このような流れが池中に突入した場合、コアとし現われる筈はない。

一方自由落下水が池中に突入する場合には、その部分の落下水の外縁に負圧が生じ、このため空気が侵入して、池の中に入った筈の落下水が、実はしばらくの間空中にあって、なお速度を増すという状態にある。これが外見上はコアが残っているかのように見えるのである。

やがて、空中にある状態を過ぎ、今度は気泡に包まれるようになる。この状態では、落下水の運動量の拡散は一部気泡を媒介として行なわれるが、こ

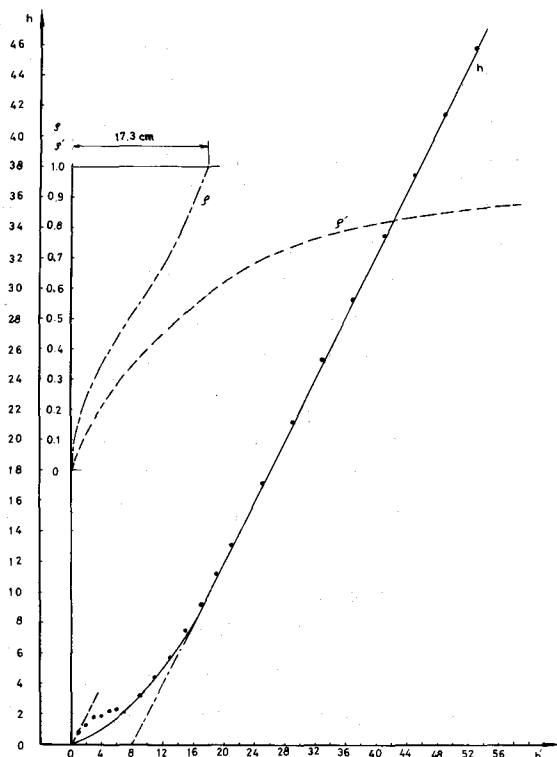


図-18 c 空気混入量 流量 45 l/s 、自由落下高 0.11 m

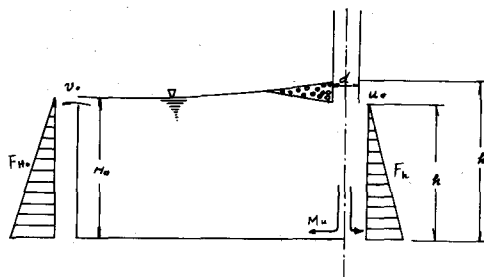


図-19 水槽内の水に加わる外力

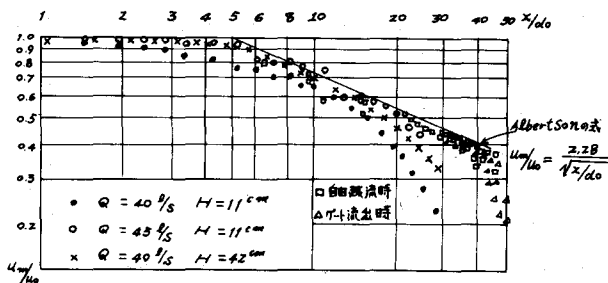


図-20 噴流の中心線にそう速度低減

の場合空気の密度が非常に小さいので運動量の伝達は殆んどない。従って全体として拡散は少し悪くなるものと考えられる。図における坂本、藤原の実験では $x/d_0 = 20$ 付近、安芸の実験では $x/d_0 = 50$ 付近で、中心線上の流速が急に減少している。これはそれまで拡散を抑えていた気泡がなくなったため、本来の拡散が現われたものと考えられる。

田伏は内径 5 mm, 10mm などの細いノズルから鉛直下向きに水を落し、自由落下高最大 17.4 cm で円形水槽に受け、水槽壁面および底面の圧力を測定している¹⁰⁾。またノズルの先を水槽水面に潜らし、噴流とした場合の実験も行ない、自由落下との比較を行なっている。それによると、水槽の底面に及ぼす圧力は、落下水の場合の方が噴流の場合よりも大きくなった。その理由として、落下水が水槽水面に突入した後、落下水の周囲にある空気層が摩擦抵抗を減少し、自由落下高が大きくなったように作用するからであると説明している。この空気層は間もなく破砕するが、この気泡による抵抗力は液体による抵抗力よりも小さいとのべている。

参 考 文 献

1. L.G. Straub and A.G. Anderson ; " Experiments on Self -Aerated Flow in Open Channels," Proc. ASCE , HY7, 1958.
2. " Aerated Flow, in Open Channels," Progress Report, Task Committel on Air Entrainment in Open Channels, Committee on Hydromechanics, Proc. ASCE, HY3, 1961.
3. L.S. Hall ; "Entrainment of Air in Flowing Water, Open Channel Flow at High Velocities," Trans. ASCE Vol108, 1943.
4. 日野幹雄 ; " 急勾配水路の空気混入に関する乱流の統計理論的考察, " 土木学会第 16 回年次学術講演会講演概要, 1961.
5. 日野幹雄 ; " 空気混入流の開始条件に関するスペクトル理論的考察 ", 第 7 回水理講演会講演集, 1962.
6. J.M. Killen and A.S. Anderson, ; " A Study of the Air -Water Interface in Air -Entrained Flow in Open Channels " Proc. 13 th Congress IAHR B36 1969.
7. 坂本, 丸岡, 磯部 ; " アーチダム越流の自由落下ナップの分散について, " 電力中研技術研究所報告 № 65068, 1965.
8. J. Dodu ; Contribution a letude de la dispersion des jets liquides a grande Vitesse, " Publication Scientifiqueset Techniques du ministere de l'Air, № 407, 1964.
9. 坂本, 藤原 ; " 静水面上に自由落下する流れの拡散 ", 土木学会東北支部技術研究発表会講演概要 1970.
10. A.T. Sheriden ; " Surface Entrainment of Air by a Water Jet, " nature, Vol. 200, № 5025, 1966.
11. W. Tollmien, Berechnimg Turbulents Ausbreitungsvorgange, Z. I. M. M. 1926.
12. Albertson, Dai, Jansen, Rouse ; "Diffusion of Submerged Jets, " Traus, A S C E Vol. 115, № 2409, 1950

13. 安芸周一；“自由落下水脈の水クッション効果に関する研究”，電力中研技術研究所研究報告，No. 69009. 1969.
14. 田伏敬三；“Air Entrainment and Pressure Distribution in a Circular Tank by Plunging Liquid Jet”，Proc. 13 th Congress I A H R B. 9, 1969.