

河 川 蛇 行 論

中央大学教授 林 泰 造

1. ま え が き

河川蛇行は多くの専門分野から関心を寄せられてきた問題であり、これについての研究発表は前世紀の半ば過ぎから始まっている。この問題についての恐らく最初の研究はFargue (1869年)¹⁾の論文にみられる。その後、1930年代の前半頃までは、河川蛇行の研究は、主として各国のGeological Survey (特にアメリカおよびスウェーデンの) や地質学関係の出版物の中に表われている。その意味では、これははじめは地学、地質学、地球物理学の分野から関心を持たれた問題であり、後に土木工学方面からも関心が向けられるようになった問題であるといえよう。

河川蛇行については、1966年度の本研修会における井口教授の講義の中で、河相論的記述が詳細になされている²⁾ので、本講ではなるべく重複を避けて、主として蛇行の成因に関しての講述を行うこととする。

外国の文献では、以前は、S字形に発達した蛇行形状をmeanderといひ、発達初期のものをserpentineといって用語を区別していたようであるが、最近の文献の中にはそのような区別はなくなっており、一率にmeanderあるいはmeandering tendency という言葉が用語として使われている。一方、わが国においては、昔から一率に「蛇行」という言葉が用語として使われてきた。

河川蛇行の成因については古くから色々の学説が出されているが、水理学的に本格的な理論研究が現われるようになったのは1950年代に入ってからのことであると思われる。本講ではまずそれらの理論研究について述べ(第2節)、ついで、実験的研究について記述する(第3節)。

2. 蛇行の成因に関する水理学理論的考察

2.1 セイシュ(Seiche)説

(a) Wernerの研究³⁾

Werner (1951年)の研究は蛇行の成因に関する本格的な水理学理論研究として恐らく最初のものと思われる。彼は図-1のような直線水路に生ずべき水流の蛇行波長を計算した。いま、流水時と同一の水深をもつ静水上に生ずべき交互のセイシュを考え、図-1の点A, D, F, ……で水位が山となる瞬間には点C, E, ……での水位が谷になり、逆に点C, E, ……で水位が山になる瞬間には点A, D, F, ……での水位は谷になるということを繰返すものとすれば、河床が「平坦な」場合には、このセイシュの周期は明らかに

$$T = 2l/c \quad (1)$$

こゝに、 l は図示の斜距離で $l = \sqrt{B^2 + (L/2)^2}$ 、 c は長波の伝播速度で $c = \sqrt{gd}$ 、 d は静水面下の水深、 L は図示の距離、である。

このセイシュ(図-1のもの)に流れが加わると、このパターンが下流に一樣に流される。いま、この流速を v とすると、距離 L を流下する時間 T_1 、すなわち

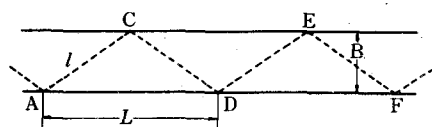


図-1. Wernerの仮定した波頂曲線

$$M = \rho B d L / 2 \quad (10)$$

であり、また、 K は復原定数で、 A 断面における水位の高まり巾を図示のように $\alpha_2 \Delta d$ とし、またこの水位の高まりの x 方向（河軸方向）への変化を $\sin$ 曲線的と仮定すれば、

$$K \cdot \Delta d = \text{復原力} = r \cdot \alpha_2 \Delta d \cdot \int_0^{\lambda/2} \Delta d \sin \frac{2\pi x}{L} dx = r \alpha_2 (\Delta d)^2 \lambda / \pi$$

よって、

$$K = r \alpha_2 \Delta d \cdot \frac{\lambda}{\pi} \quad (11)$$

(11) 式の Δd に(8)式を代入し、そのような K と(10)式の M とを(9)式に代入すると、

$$T = \left(\frac{2\pi^3}{\beta} \right)^{1/2} \left(\frac{B}{gF} \right)^{1/2} \quad (12)$$

ただし、 $\beta = \alpha_1 \alpha_2$ である。よって、砂洲の波長 L は

$$L = T \cdot V = \left(\frac{2\pi^3}{\beta} \right)^{1/2} \sqrt{Bd} F^{1/2} = \left(\frac{2\pi^3}{\beta} \right)^{1/2} \sqrt{A} F^{1/2} \quad (13)$$

あるいは、上式を比値の形で書けば、

$$\frac{L}{\sqrt{A}} = \left(\frac{2\pi^3}{\beta} \right)^{1/2} F^{1/2} \quad (14)$$

となる。この関係式を実験値と比較したものが図-3

で、Froude 数の広い範囲 ($F = 0.04 \sim 1.2$) に対し

で理論は実験とよく合っているといえる。ただし、

(14) 式中の β を含む定数 $(2\pi^3/\beta)^{1/2}$ の値は、

(14) 式が実験値に最適合するような数値として72という値にとってある。

(14)式をより通常の形として、流量 Q を含む形で書き直すと、

$$L = \left(\frac{2\pi^3}{\beta} \right)^{1/2} \left(\frac{Q}{\sqrt{gd}} \right)^{1/2} \quad (15)$$

となり、 $L \propto Q$ であることがみられる。

図-3における理論と実験のかなり明瞭な一致は、Anderson の理論のような考え方がかなり正しい方向にあるものであることを示しているように考えられる。しかし、蛇行の成因としては、はじめに水面に交互のセイシュが起きて、一点の水位が上り下りしているとい

ったようなことは考えにくいことで、その意味でAnderson の理論は問題を含んだ理論である。

2.2 螺旋流 (Helicoidal flow) 説

(a) 藤芳 (1949年) の研究⁹⁾

螺旋流が河川蛇行の成因であるという考え方はいくつか発表されているが、恐らく藤芳の研究はその最初のものであろう。彼は河川の増水期 ($\partial y / \partial t > 0$ の期間)

において流路断面に生ずる図示 (図-4) のような向きの二つの螺旋流の強さの大小関係の相対的变化によって蛇行が起ると考えた。すなわち、もし何等かの原因により左岸側の渦の強さの方が大きくなったとする (図-5) と、それにより主流は右方に“蛇行”する。しかし、水の慣性のため、この現象は行き過ぎて間も

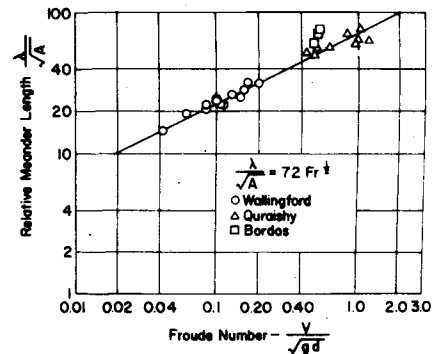


図-3 Anderson の理論と実験値との比較



図-4 藤芳の着目した増水期の渦

なくこの相対的大小関係は反転し、今度は主流は左方に“蛇行”する。この現象を繰り返えすことが蛇行の成因であると考えた。

いま、主流の流速を U 、これと直角方向の速度（横断面内副流の速度）を v とおくと、主流方向に作用する河床剪断力は $\tau = rRI$ であるから、これと直角の副流による河床剪断力は

$$\tau_T = rRI \cdot (v^2/U^2) \quad (16)$$

で表わされるものとする。ただし、 r は水の単位容積重量、

R は経深、 I はエネルギー勾配である。流心の変位を η で表わせば（図-5）、水路軸方向単位長さ当りの水の柱に河床面が及ぼす横方向の力（剪断力）は右方（ η の正の方向）に向けて

$$\begin{aligned} & [(B/2) - \eta] \cdot rRI \cdot (v^2/U^2) - [(B/2) + \eta] \cdot rRI \cdot (v^2/U^2) \\ & = -2\eta \cdot rRI \cdot (v^2/U^2) \end{aligned}$$

となるので、横方向の運動方程式は

$$\frac{r}{g} A \frac{d^2}{dt^2} (\mu_1 \eta) = -2rRI (v^2/U^2) \cdot \eta \quad (17)$$

となる。ただし、 A は流水の断面積、 $\mu_1 \eta$ は流心が η だけ変位するときの慣性中心の変位量である。

(17) 式中の η 以外の量をすべて近似的に定数と考えれば、(17) 式は $\sin$ 運動を表わし、その運動の周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu_1}{2g} \frac{A}{RI} \frac{U}{v}} \quad (18)$$

したがって、蛇行波長は

$$L = T \cdot U = \frac{2\pi U^2}{v} \sqrt{\frac{\mu_1}{2g} \frac{A}{RI}} \quad (19)$$

で表わされる。(19) 式を書直すと

$$\frac{L}{\sqrt{A}} = \frac{2\pi}{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt[4]{g}} \sqrt{\frac{\mu_1 C}{2}} F^{1/2} \quad (20)$$

ただし、 α_1 は Anderson の理論の時と同様の記号で $\alpha_1 = v/U$ （すなわち副流の強さ）であり、 C は Chezy の流速係数で $C = U/\sqrt{RI}$ 、 $F = U/\sqrt{gR}$ でこの場合の Froude 数である。いま近似的に C を定数と考えれば、(20) 式は

$$\frac{L}{\sqrt{A}} \propto F^{1/2} \quad (21)$$

となり、Anderson の式 (14) と一致する。

さらに、藤芳は経験式として

$$\frac{L}{\sqrt{A}} = m \quad (22)$$

の形で (19) 式を近似し、この m の値を

大河川に対して $m = 200 \sim 300$

中河川に対して $m = 150 \sim 200$

小河川に対して $m = 90 \sim 125$

と与えているが、これらの数値は図-3 の値に比べると非常に大きい（図-3 からスケール・アウトする）。図-3 の値はすべて実験室内での測定値であるので、実験値と実際河川における実測値とを図-3 の座標上にプロットし、種々比較検討してみることが今後必要であろう。

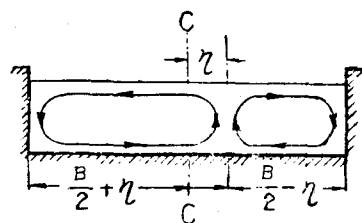


図-5 流心の変位

(b) Einstein 及び Shen (1964年) の研究⁹⁾

Einstein および Shen は直線水路における水流蛇行はつぎの二つの形式のものと分類できると考えた。

形式A Froude 数が1か1に近い時に起る対角線状の砂洲形状の一つの特殊の場合。この砂洲形成の主原因は表面波。

形式B 両側壁に作用する剪断力の不等によって生ずる蛇行で、形式Aでは見られないような交互の深掘れを生ずる (図-6)。

Einstein および Shen による形式Aに対する見解はほぼ正しいと思われるが、形式Bについての見解のうち、"形式Aでは見られないような交互の深掘れ……" は必ずしも正しいとはいえない。これについては後に木下博士の実験 (写真-4) を引用するときに述べる。

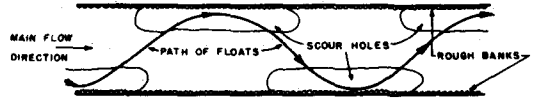


図-6 形式Bの水流蛇行

Einstein および Shen が取り扱ったのは、彼等のいう形式Bの場合である。この場合には、側壁の水理学的な粗さは河床のそれより大きく、また、側壁は垂直より左右に開いていることが必要であるとしている。

いま、何等かの原因で主流が右岸よりに変位すると、右岸側壁に作用する剪断力のために図示 (図-7) のような向きの渦が生ずる。そして渦糸は煙草の煙のようにその端が輪になって閉じているか、またはその端は境界面まで達していなければならないから、この場合の渦は図-7に示すように、下流側に延びて遂に水面に達するものと考えられる。このような渦は左岸側にも生じているが (図-8)、右岸側の循環の方が大きい ($\Gamma_1 > \Gamma_2$) と考えられる。この状態で暫く流下すると、この二つの循環の大小関係が逆になる。Einstein および Shen はこのことをつぎのような式にのせた。

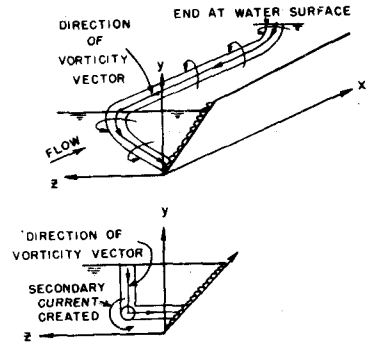


図-7 二次流

Γ を循環 (時計の針の回転方向を正とする) とし、 P を断面右半分における河床物質の堆積量とすると、循環の発生に關してはつぎのように考えられる。

$$d\Gamma/dx = A_1 \cdot P \quad (23)$$

ここに A_1 はある定数と考える。また、循環は河床物質を水路断面の他半分の方に移動させるから、つぎの関係式で与えられるような河床物質の移動が起るものと考えられる。

$$dP/dx = -A_2 \cdot \Gamma \quad (24)$$

ここに A_2 はもう一つの定数とする。よって、(23) および (24) の両式から Γ を消去すると次式をうる。

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = -AP$$

ただし、 $A = A_1 A_2$ である。

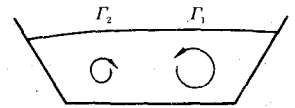


図-8 蛇行形成時の循環

以上が Einstein および Shen の理論であり示唆に富む研究ではあるが、上述のような定性的な段階に止まっている。この理論で特に注目される点は図-8に示された二つの循環の向きが藤芳の理論

における二つの渦の方向と逆であることで、この適否はこの理論の本質的な問題として今後の検討に待つべきものである。

(c) Shenおよび河村 (1968年) の研究⁷⁾

Einstein およびShen の研究は定常流に対してのものであったが、Shen および河村は形式Bの蛇行に対するさらに不定流、不等流の影響を検討した。その結果

$$\frac{\partial U}{\partial t} > 0 \quad \text{および} \quad \frac{\partial U}{\partial x} > 0 \quad (26)$$

の時に形式Bの蛇行が一層起きやすくなるとしている。

この研究は前述のEinstein およびShen の研究の延長に当るものであるから、さきに述べた疑問点が本研究についてもそのまゝ当てはまる。また、(26) 式の第1式は藤芳の理論におけるものと同じであるが、同第2式は藤芳のそれとは逆であるように思われる。さらに今後検討すべき本質的な問題点である。

2.3 流れの不安定説

(a) 足立 (1967年) の研究⁸⁾

直線水路における水流蛇行は移動河床の存在のゆえに起るが、足立は固定床の場合にも水流蛇行は、水流自身のもつ「不安定性」のゆえに、起りうると考えて計算を行った。

流水運動の基本式は、図-9の座標軸をとるとき、

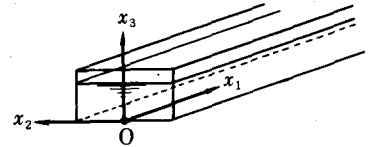


図-9 座標軸

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

および

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

いま、 x_3 方向の加速度は小さいのでこれを無視し、圧力分布として静水圧分布の式 $P = \rho g (h - x_3)$ をとる。ただし、 h は水深である。一般に u_1 、 u_2 は x_3 軸方向にも変化するので、水深に対する平均値をとると、

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{h} \int_0^h u_1 dx_3 = u_1 - u_1', \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{h} \int_0^h u_2 dx_3 = u_2 - u_2' \quad (28)$$

これを(27)式に代入し、簡単のため $\bar{u}_1$ 、 $\bar{u}_2$ を以後 u_1 、 u_2 と記せば、若干の計算の後次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) &= S - \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{1}{g h} \left(K_{11} \frac{\partial u_1^2}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial u_1 u_2}{\partial x_2} \right) \\ &+ \frac{1}{g h} \left(\epsilon_{11} \frac{\partial^2 u_1 h}{\partial x_1^2} + \epsilon_{12} \frac{\partial^2 u_1 h}{\partial x_2^2} - f_1 u_1^2 \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) &= -\frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{1}{gh} (K_{12} \frac{\partial u_1 u_2}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial u_2^2}{\partial x_2}) \\ &\quad + \frac{1}{gh} (\epsilon_{12} \frac{\partial^2 u_2 h}{\partial x_1^2} + \epsilon_{22} \frac{\partial^2 u_2 h}{\partial x_2^2} - f_2 u_2^2) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + h \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + h \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

(29) 式は3個の未知量 u_1 , u_2 , h に対する3個の式となっている。(29) 式で表わされる水流運動の安定性をみるために、つぎのようにおく。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_m [U(x_2) + \epsilon V_1(x_1, x_2, t)] \\ u_2 &= u_m \epsilon V_2(x_1, x_2, t) \\ h &= h_m [1 + \epsilon H(x_1, x_2, t)] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ただし、 u_m は水路軸線上の流速、 $U(x_2)$ は x_2 方向の流速分布を表わす与えられた関数 (図-10)、また、 V_1 , V_2 および H は与えられた攪乱、 ϵ は無次元のパラメーター、である。

$$X_1 = x_1/h_m, \quad X_2 = x_2/h_m, \quad T = u_m t/h_m \quad (31)$$

なる無次元化された座標をとり、 $U(x_2) \equiv 1$ と仮定すると、(30)、(31) の両式を (29) 式に代入することにより、次の関係式がえられる。

ϵ^0 のオーダーの項の等置から：

$$S - f_1/F^2 = 0 \quad (31)$$

ϵ^1 のオーダーの項の等置から：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial T} + \frac{\partial V_1}{\partial X_1} &= -F^2 \frac{\partial H}{\partial X_1} - K_{11} \frac{\partial}{\partial X_1} (2V_1 + H) - K_{12} \frac{\partial V_2}{\partial X_2} \\ &\quad + K_{11} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} (V_1 + H) + K_{12} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} (V_1 + H) - 2f_1 V_1 \\ \frac{\partial V_2}{\partial T} + \frac{\partial V_2}{\partial X_1} &= -F^2 \frac{\partial H}{\partial X_2} - K_{12} \frac{\partial V_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial H}{\partial X_1} + \frac{\partial V_1}{\partial X_1} + \frac{\partial V_2}{\partial X_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ただし、 $F^2 = u_m^2/gh_m$, $K_{11} = \epsilon_{11}/u_m h_m$, $K_{12} = \epsilon_{12}/u_m h_m$ である。

(32) 式から H と V_1 とを消去して V_2 のみの式とすると、

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_1} \right)^2 - \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_1} \right) + K_{11} \frac{\partial}{\partial X_1} \left\{ 2 \left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_1} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_1} \right) - \frac{1}{F^2} \frac{\partial}{\partial X_2^2} \right\} + K_{12} \frac{\partial}{\partial X_1} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_1} \right)^2 - \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + K_{11} K_{12} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \left\{ 2 \left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_1} \right) - \frac{\partial}{\partial X_1} \right\} + \left(K_{11} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + K_{12} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left\{ \frac{1}{F^2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_1} + K_{12} \frac{\partial}{\partial X_1} \right) - \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right\} + f_1 \left\{ 2 \left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_1} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_1} \right) - \frac{1}{F^2} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right\} + f_1 K_{12} \frac{\partial}{\partial X_1} \left\{ 2 \left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial}{\partial X_1} \right\} \right] V_2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

そこで、

$$V_2 \propto \exp \left\{ \sqrt{-1} (\alpha X_1 + \beta X_2 + \alpha c T) + \varphi T \right\} \quad (34)$$

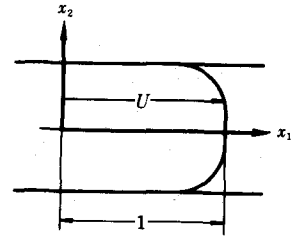


図-10 流速分布

と仮定する。ただし、

$$\alpha = 2\pi h_m / L_1, \quad \beta = 2\pi h_m / L_2$$

で、 L_1 は X_1 方向の波長、 L_2 は X_2 方向の波長で $L_2 = 2B$ 、 c は $c = \omega / u_m$ で ω は波速、また φ は実数とする。この(34)式を(33)式に代入し、 φ の満すべき式として

$$\varphi^3 + A\varphi^2 + B\varphi + C = 0$$

の形の式を得、この式の根としての φ の値の正負をもって、正弦波的な攪乱に対する流れの安定性を検討した。この結果、中立の安定を与える無次元波数 α はつぎのように求められる。

$$\alpha^2 = \frac{1}{1 + (K_{12}/K_{11})(\alpha/\beta)^2} \cdot \frac{(2c+3)(c+1+K_{12})F^2 - 2(\alpha/\beta)^2 \cdot f_1}{c(c+1+K_{12}) - (\alpha/\beta)^2 \cdot F^2} \cdot \frac{f_1}{K_{11}} \quad (35)$$

こゝで(34)式について説明を補足するならば、この式によれば、側壁上($X_2 = \pm \frac{B}{2} / h_m$)では横方向流速 V_2 は

$$(V_2)_{\text{wall}} = i \exp(\varphi T) \cdot \exp[i(\alpha X_1 + \alpha c T)] \quad (35)$$

となって、恒等的には0とはならない。したがって、本研究は、側壁に(35)式で与えられるような強制横振動を与えたときの水流の“共振波長”を求めたものに当ると解釈することができよう。

2.4 水理量間に存する位相差説

(a) Hansenの研究⁹⁾

静水圧分布を仮定し、また、鉛直面内の速度変化を無視すると、水流の2つの運動方程式、連続方程式および河床物質の連続方程式はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right) &= I_o - \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial y}{\partial x_3} - \frac{\tau_o}{r y} \\ \frac{1}{g} \left(\frac{\partial U_3}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + U_3 \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) &= - \frac{\partial h}{\partial x_3} - \frac{\partial y}{\partial x_3} - \frac{U_3}{U_1} \frac{\tau_o}{r y} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (U_1 y) + \frac{\partial}{\partial x_3} (U_3 y) &= - \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial q_{s1}}{\partial x_1} + \frac{\partial q_{s2}}{\partial x_3} &= - (1-n) \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

と記される。ただし、 q_s は流砂量(容積レート)、 n は河床物質の空隙率である。上式中で、未知量は $U_1, U_3; h, y; \tau_o; q_{s1}, q_{s2}$ の7個で式は4個しかないから、あと3個の関係式が必要である。その3個の式として次式をとる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_o / r &= (U_1 / K y^{1/8} s^{3/8}) \\ f \frac{q_{s1}}{\sqrt{g(s-1)d^3}} &= \varphi \left(\frac{\tau_o}{r(s-1)d} \right) \\ q_{s3} &= \frac{U_3}{U_1} q_{s1} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

こゝに、 f は河床面の摩擦抵抗係数(friction factor)、 d は河床物質の平均粒径、 s は河床物質の比重、である。(37)の第1式は $\tau_o = r R I \div r y I$ の関係式に、Engelund-Hansenによるレジーム理論形式の流速公式 $U_1 = K y^{5/4} I^{3/8}$ を代入したものである。(37)式を(36)式に代入し、

$$h = h', \quad y = D + y', \quad U_1 = U + u_1', \quad U_3 = u_3' \quad (38)$$

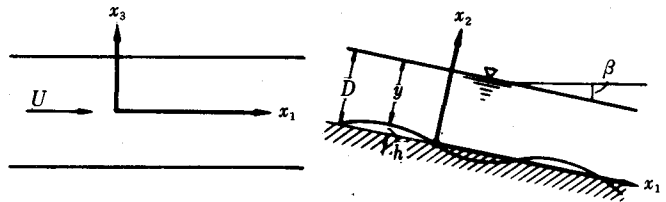


図-11 座標軸と記号

とにおいて、プライムのついた量 (攪乱量) を微小量と考えると、それらについて線形化された次の4個の式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial u_1'}{\partial t} + U \frac{\partial u_1'}{\partial x_1} \right) &= -\frac{\partial h'}{\partial x_1} - \frac{\partial y'}{\partial x_1} - \frac{2}{9} I_o \left(4 \frac{u_1'}{U} - 5 \frac{y'}{D} \right) \\ \frac{1}{g} \left(\frac{\partial u_3'}{\partial t} + U \frac{\partial u_3'}{\partial x_1} \right) &= -\frac{\partial h}{\partial x_3} - \frac{\partial y'}{\partial x_3} - I_o \frac{u_3'}{U} \\ D \frac{\partial u_1'}{\partial x_1} + U \frac{\partial y'}{\partial x_1} + D \frac{\partial u_3'}{\partial x_3} + \frac{\partial y'}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{g} [5 \varphi(\theta_o) + 4 \theta_o \varphi'(\theta_o)] \frac{D \partial u_1'}{U \partial x_1} + \frac{1}{18} (\varphi(\theta_o) - \theta_o \varphi'(\theta_o)) \frac{\partial y'}{\partial x_1} \\ + \frac{1}{2} \varphi(\theta_o) \frac{D \partial u_3'}{U \partial x_3} &= \frac{n-1}{\sqrt{(s-1)gd}} \frac{D I_o}{d} \frac{\partial h'}{F^2 \partial t} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

ただし、 θ_o は無次元定常掃流力で $\theta_o = D I_o / (s-1) d$ 、 F は Froude 数で $F = U / \sqrt{gD}$ 、 $f' = d f / d \theta$ である。河床面に

$$h' = h_o \exp [i k_1 (x_1 - c t) + i k_3 x_3] \quad (40)$$

なる攪乱を与えると、 y 、 U_1 、 U_3 にはその結果として次のような攪乱が生ずる筈である。

$$\left. \begin{aligned} y' &= y_o \exp [i k_1 (x_1 - c t) + i k_3 x_3 + i \varphi_1] \\ u_1' &= u_{1o} \exp [i k_1 (x_1 - c t) + i k_3 x_3 + i \varphi_2] \\ u_3' &= u_{3o} \exp [i k_1 (x_1 - c t) + i k_3 x_3 + i \varphi_3] \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

ただし、 $c = c_r + i c_i$ は複素波速、 $k_1 = 2\pi/L_1$ で L_1 は x_1 方向の波長、 $k_3 = 2\pi/L_3$ で $L_3 = 2B$ 、 B は水路巾、そして、 φ_1 、 φ_2 、 φ_3 は h' との間の "位相差" である。(40) および (41) を (39) の4本の式に代入すると、若干の書直しの後に次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \left(i + \frac{10}{9} \frac{I_o}{k_1 D} \right) X_1 + \left[i F^2 \left(1 - \frac{C}{U} \right) + \frac{8}{9} \frac{I_o}{k_1 D} \right] X_2 &= -i h_o / D \\ i X_1 + \left[i F^2 \left(1 - \frac{C}{U} \right) \frac{k_1}{k_3} + \frac{I_o}{k_3 D} \right] X_3 &= -i h_o / D \\ \left(1 - \frac{C}{U} \right) X_1 + X_2 + \frac{k_3}{k_1} X_3 &= 0 \\ [\varphi(\theta_o) - \theta_o \varphi'(\theta_o)] X_1 + 2 [5 \varphi(\theta_o) + 4 \theta_o \varphi'(\theta_o)] X_2 + 9 \varphi(\theta_o) \frac{k_3}{k_1} X_3 \\ &= -18 \frac{I_o}{F^2} \frac{h_o}{d} \frac{(1-n)c}{g(s-1)d} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ただし、

$$X_1 = y_o \exp (i \varphi_1) / D, \quad X_2 = u_{1o} \exp (i \varphi_2) / U,$$

$$X_3 = u_{3o} \exp (i \varphi_3) / U$$

である。(42) 式は4個の未知量 X_1 、 X_2 、 X_3 および c に対する4個の式であるから、これをとくことができる。

$c/U \ll 1$ と考えて、(42) の左辺中の c/U を1に比べて無視すると、(42) 式から c はつぎのうに求められる。

$$c = \begin{vmatrix} i + \frac{10}{9} I_o / k_1 D & i F^2 + \frac{8}{9} I_o / k_1 D & 0 & -i \frac{h_o}{D} \\ i & 0 & i F^2 \frac{k_1}{k_3} + \frac{I_o}{k_3 D} & -i \frac{h_o}{D} \\ 1 & 1 & \frac{k_3}{k_1} & 0 \\ \varphi(\theta_o) - \theta_o \varphi'(\theta_o) & 10 \varphi(\theta_o) + 8 \theta_o \varphi'(\theta_o) & 9 \varphi(\theta_o) \frac{k_3}{k_1} & 0 \end{vmatrix} \quad \Bigg/ \quad \begin{vmatrix} i + \frac{10}{9} I_o / k_1 D & i F^2 + \frac{8}{9} I_o / k_1 D & 0 & -i \frac{h_o}{D} \\ i & 0 & i F^2 \frac{k_1}{k_3} + \frac{I_o}{k_3 D} & -i \frac{h_o}{D} \\ 1 & 1 & \frac{k_3}{k_1} & 0 \\ \varphi(\theta_o) - \theta_o \varphi'(\theta_o) & 10 \varphi(\theta_o) + 8 \theta_o \varphi'(\theta_o) & 9 \varphi(\theta_o) \frac{k_3}{k_1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} i + \frac{10}{9} I_0 / k_1 D & i F^2 + \frac{8}{9} I_0 / k_1 D & 0 & 0 \\ i & 0 & i F^2 \frac{k_1}{k_3} + \frac{I_0}{k_3 D} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{k_3}{k_1} & 0 \\ \varphi(\theta_0) - \theta_0 \varphi'(\theta_0) & 10 \varphi(\theta_0) + 8 \theta_0 \varphi'(\theta_0) & 9 \varphi(\theta_0) \frac{k_3}{k_1} & 18 \frac{I_0}{F^2} \frac{h_0}{d} \frac{(1-n)}{\sqrt{g(s-1)d}} \end{vmatrix} \quad (43)$$

この行列式を展開して c の実数部 (c_r) と虚数部 (c_i) とに分け、 $k_1/k_3 = 2B/L_1 \ll 1$ の仮定の許に省略計算を行うと c_i はつぎのように求められる。

$$c_i = \frac{5}{81} \frac{\sqrt{g(s-1)d}}{1-n} \frac{d}{D} [\varphi(\theta_0) + 8 \theta_0 \varphi'(\theta_0)] \frac{1/k_1 D}{1 + (9 I_0 / 8 F^2) / (k_1 D)^2} \quad (44)$$

ところで、(40) 式から明らかなように、 $c = c_r + i c_i$ の c_i が正だと攪乱の振巾は時間とともに増大する。したがって、河床面の安定条件は

$$c_i < 0 \quad (45)$$

で与えられるが、(44) 式から明らかなように、流砂量関数 φ を無次元掃流力 θ の単調増加関数と考える限り、つねに $c_i > 0$ 、したがって河床面はどのような波長の攪乱に対してもつねに不安定である。そこで、 c_i の値を最大にするような波長の河床変動が卓越するものと考えて、 c_i を極大ならしめる無次元化した波長 ($1/k_1 D$) を $dc_i/d(1/k_1 D) = 0$ の条件から求めると、

$$1/k_1 D = (9/8) (F^2 / I_0)$$

あるいは、 $k_1 D = 2\pi D/L_1$ 、および $F^2 / I_0 = 2/f$ を上式に代入すると、

$$f \frac{L_1}{D} = \frac{9}{8} 4\pi \approx 14 \quad (46)$$

をうる。この式、すなわち (46) 式が卓越波長 L_1 を与え、実際とよく合うと Hansen はいっている。

このように不安定性が出てきたことの原因に二つある。一つは (41) 式に導入された位相差である。そして、もう一つの原因は、既述の 2.3(a) の研究と同様、側壁にある種の強制横振動を与えた場合の解になっている点である。事実、(41) の第 3 式に $x_3 = \pm (L_3/4)$ を代入してみると、

$$\begin{aligned} (u_3')_{\text{wall}} &= \frac{1}{2} u_{\infty} e^{k_1 c_i t} \sin[k_1 (x_1 - c_r t) + \varphi_3] \\ &\quad + \frac{1}{2} u_{\infty} e^{k_1 c_i t} \cos[k_1 (x_1 - c_r t) + \varphi_3] \end{aligned}$$

となって、実数部は恒等的には 0 とはならない。

(b) Callander (1969 年) の研究¹⁰⁾

図-12 の座標軸をとるとき、流水の運動方程式、連続の式、および河床物質の連続の式はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -r \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau}{d} \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= -r \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{v \tau}{V d} \\ \frac{\partial}{\partial x} (u d) + \frac{\partial}{\partial y} (v d) + \frac{\partial d}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (h - d) + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{V} G \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

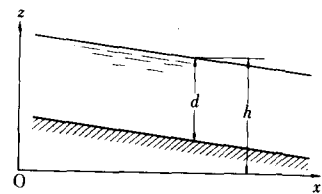


図-12 座標軸と記号

と記される。ただし、 G は単位水路巾当りの流砂量 (容積レート)、 V は合成速度である。

攪乱をうけない以前の流れに対しては、

$$u = U, \quad v = 0, \quad d = d_0, \quad \tau = \tau_0, \quad G = G_0, \quad h = h_0 - Sx, \quad \tau_0 = r d_0 S_0 \quad (48)$$

また、攪乱を与えた流れに対しては、

$$\left. \begin{aligned} u &= U + u', \quad v = v', \quad d = d_0 + d', \quad \tau = \tau_0 + \tau', \quad G = G_0 + G', \\ h &= h_0 - Sx + h' \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

こゝに、プライムを附した諸量が攪乱量である。(49)式を(47)式に代入して、攪乱量は小さいものとしてその2乗以上を無視すると、

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u'}{\partial t} + \rho U \frac{\partial u'}{\partial x} &= -r \frac{\partial h'}{\partial y} - \frac{\tau'}{d_o} + r S_o \frac{d'}{d_o} \\ \rho \frac{\partial v'}{\partial t} + \rho U \frac{\partial v'}{\partial x} &= -r \frac{\partial h'}{\partial y} - \frac{v' \tau_o}{U d_o} \\ d_o \frac{\partial u'}{\partial x} + U \frac{\partial d'}{\partial x} + d_o \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial d'}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial h'}{\partial t} - \frac{\partial d'}{\partial t} + \frac{\partial G'}{\partial x} + \frac{G_o}{U} \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

をうる。上式は6個の未知量 u' , v' , h' , d' , τ' , G' に対する4本の式であるから、あと2個の関係式が必要である。そこでその関係式として次式をとる。

$$\begin{aligned} \tau' &= m_1 u' \\ G' &= m_2 u' \end{aligned} \quad (51)$$

つぎに、水流に与える攪乱を Callander はつぎのように仮定した。

$$\left. \begin{aligned} u' &= AU \\ v' &= BU \\ d' &= D d_o \\ h' &= H d_o \end{aligned} \right\} \cdot \exp [i k S_o \cdot (x - c U t) / d_o] \quad (52)$$

こゝに、 A , B , D , H は y についての無次元の関数で複素数、 k は正弦波攪乱の波数、 $c = c_r + i c_i$ は無次元化された複素流速である。 A , B , D , H は y の関数で複素数と考えたから、こゝに y 方向への"位相差"が含まれている。(51)式を(50)式に代入し、その(50)式に(52)式を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \{ m_1 U / \tau_o + i k F_o^2 (1 - c) \} A - D + i k H &= 0 \\ \{ 1 + i k F_o^2 (1 - c) \} B &= - (d_o / S_o) H' \\ A + (1 - c) D &= i (1/k) (d_o / S_o) B' \\ (m_2 / d_o) A + c D - c H &= i (G_o / U d_o) (1/k) (d_o / S_o) B' \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

ただし、 $B' = dB/dy$, $H' = dH/dy$, $F_o = U/\sqrt{g d_o}$ である。

(53)の4個の式から3個の未知量 A , D , および H を消去すると、

$$B' + \lambda B = 0 \quad (54)$$

をうるが、こゝに λ は次式で与えられるような複素数である。

$$\lambda = \frac{k S_o^2}{d_o^2} \frac{\{ k F_o^2 (1 - c) - i \} \cdot A_1}{\left(\frac{G_o}{U d_o} - \frac{m_2}{d_o} \right) + \left\{ \frac{m_1 U}{\tau_o} + i k F_o^2 (1 - c) \right\} \left\{ \frac{G_o}{U d_o} (1 - c) - c \right\}} \quad (55)$$

ただし、

$$A_1 = \begin{vmatrix} \{ m_1 U / \tau_o + i k F_o^2 (1 - c) \} - 1 & i k \\ 1 & 1 - c \\ m_2 / d_o & c \end{vmatrix} - c$$

B に対する境界条件は

$$y = \pm b \quad \text{で} \quad B = 0$$

ただし、 b は水路の半巾である。よって、(54)式から、

$$\operatorname{Re} \lambda > 0, \quad \operatorname{Im} \lambda = 0$$

$$\text{また, } B = P \cos \sqrt{\lambda} y = P \cos n \frac{\pi}{2} \frac{y}{b} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

したがって,

$$\lambda = (n\pi/2b)^2$$

であるが, これを (55) 式に代入し, $(n\pi/S_0)(d_0/2b) = \nu$ とおけば,

$$\frac{\nu^2}{k} = \frac{\{kF_0^2(1-c) - i\} \cdot A_1}{\left(\frac{G_0}{Ud_0} - \frac{m_2}{d_0}\right) + \left\{\frac{m_1 U}{\tau_0} + i k F_0^2(1-c)\right\} \left\{\frac{G_0}{Ud_0}(1-c) - c\right\}} \quad (56)$$

そこで, 上式に $c = c_r + i c_i$ の関係を代入し, また, $kF_0^2 \ll 1$, $c_r \ll 1$, $m_2/d_0 \ll 1$, $G_0/Ud \ll 1$, $G_0/Ud - c_r \ll 1$ の関係を考慮し, かつ c_r , c_i についての 2 乗以上の項を無視すると,

(56) 式は c_r および c_i に関して線型化されて, 実数部間の関係式, および虚数部間の関係式としてそれぞれ次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11}c_r + a_{12}c_i &= b_1 \\ a_{21}c_r + a_{22}c_i &= b_2 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= -kF_0^2 \left(1 + \frac{m_1 U}{\tau_0}\right) + k(1 - F_0^2) + \frac{\nu^2}{k} \frac{m_1 U}{\tau_0} \\ a_{12} &= -k^2 F_0^2 (1 - F_0^2) - \left(1 + \frac{m_1 U}{\tau_0}\right) - \nu^2 F_0^2 \\ a_{21} &= -a_{12}, \quad a_{22} = a_{11} \\ b_1 &= k \frac{m_2}{d_0} + \frac{\nu^2}{k} \frac{G_0}{Ud_0} \left(1 + \frac{m_1 U}{\tau_0}\right) - \frac{\nu^2}{k} \frac{m_2}{d_0} \\ b_2 &= k^2 F_0^2 \frac{m_2}{d_0} + \nu^2 \frac{G_0}{Ud_0} F_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

そこで, (57) 式から, c_r および c_i は次のように求められる。

$$c_r = \frac{a_{11}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}^2 + a_{12}^2}, \quad c_i = \frac{a_{11}b_2 + a_{12}b_1}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \quad (59)$$

(52) 式からみられるように, このようにして求められた c_i が

$$c_i > 0 \quad (60)$$

のとき, 攪乱は時間 t とともに増大し, すなわち系は不安定となる。蛇行波長は (59) と (60) 式から計算される筈であるが, 関係するパラメーターが多いために, 見やすい式の形には書き直されていない。 k ($= 2\pi S_0/L$) に対する c_i の値の変化を (59) 式によって定性的に画くと図-13 のようになり, k のある一定値以下はすべて不安定領域となるようである。

この理論において不安定性がでたのは (52) 式の関数 A , B , D , H 間に存する y 方向の位相差に起因すると思われる。この意味で, この位相差は本理論において重要な意味をもつ。本理論では v が側壁上で $v=0$ の条件が満たされており, この点では本理論は Hansen の理論よりも改良されたものであると思われる。

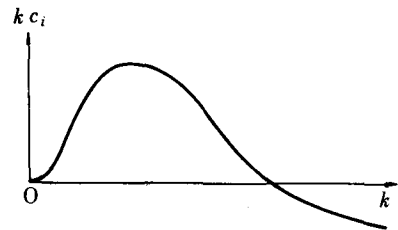


図-13 k に対する c_i の値の変化

2.5 流砂量の“非対称性”説

(a) 林 (1968年) の研究¹⁰⁾

林は3次元水流にポテンシャル理論を適用して、蛇行砂礫堆の発生条件を研究した。座標軸を図-14に示した

ようにとれば、水流に対する基本式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (61)$$

これに対する境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} y=0 \quad & \xi_t + U\xi_x = \phi_y \\ y=0 \quad & \phi_t + g\xi + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) \\ & = \text{const} \\ y=-d \quad & \eta_t + U\eta_x = \phi_y \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

ただし、 ξ は自由水面の縦距、 η は平均河床面からの河床面上り、 U は攪乱の影響をうけない流速、また、下付文字はそれによる偏微分記号を表わすものとする。いま、河床面に図-14に示したような攪乱を与えたとすると、河床面は

$$y = -d + \eta = -d + a(t) \sin k(x - U_b t) \cos lz \quad (63)$$

で表わされるが、これに相当して、水面は次式で表わされるものになると仮定する。

$$y = \xi = A(t) \sin k(x - U_b t) \cos lz \quad (64)$$

ただし、 $a(t)$ および $A(t)$ は、それぞれサンド・ウエーブおよび表面波の各振巾で時間の関数、 U_b はサンド・ウエーブの移動速度、 $k = 2\pi/L$ はサンド・ウエーブの波数、また、 l は横方向の波数で $l = \pi/B$ である。 η および ξ の振巾は波長に比べて非常に小さいと考えて、境界条件の非線型項を省略すると、それらの境界条件を満足する(61)式の解は、 $a_t \ll aUk$ および $U_b \ll U$ の仮定のもとで次式で与えられる。

$$\phi = Ux - \frac{Uk}{\beta} a \frac{\cosh \beta y + (F^2 k^2 d / \beta) \sinh \beta y}{\sinh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta) \cosh \beta d} \cos k(x - U_b t) \cos lz \quad (65)$$

ただし、 $\beta = \sqrt{k^2 + l^2}$ 、 $F = U/\sqrt{gd}$ である。つぎに、

流線の方程式

$$\frac{dx}{\partial \phi / \partial x} = \frac{dz}{\partial \phi / \partial z} = \frac{dy}{\partial \phi / \partial y}$$

により、平均河床面($y = -d$)における流線の形を求めてみるとつぎのようになる。

$$\frac{dz}{dx} = \frac{k l}{\beta} a \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)} \cos k(x - U_b t) \sin lz \quad (66)$$

任意の瞬間におけるこの流線と水底の形状とをあわせ示したものが図-15である。

以上は河床面に与えた攪乱(図-14)により、水流がどのような攪乱をうけるかについて検討したのであるが、この攪乱が時間とともに生長するものであるか減衰するものであるかについては未だこれだけの研究では判らない。それでそれを行ったものが以下のものである。

まず、河床面の変位と局所流砂量変化とを結ぶ関係式

は

$$\eta_t + T_x + T'_z = 0 \quad (67)$$

こゝに、 T は単位巾当りの流砂量(容積レート)の x 方向の成分、 T' は同じく z 方向の成分である。一般に流砂量 T を表わす式として従来用いられてきたものは、 $T(x, t) = f[u(x, t)]$ 、

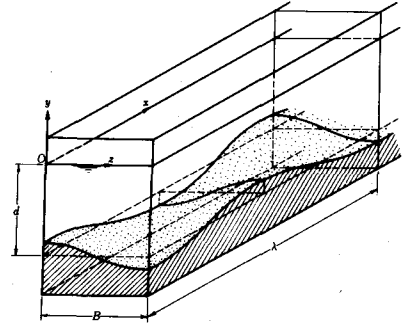


図-14 座標軸と河床面に与えた攪乱

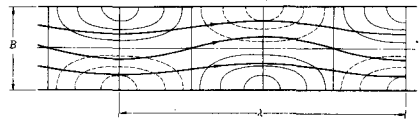


図-15 河床面上の流線

すなわち、 T を局所流速の関数として表わすもの、であるが、これではサンド・ウェーブの発生を説明することはできない。 T はその点の u のみの関数ではなくて、それにはさらにその点のサンド・ウェーブの形状 ($\partial \eta / \partial x$, $\partial^2 \eta / \partial x^2$, ...) も関係する筈である。例えば、図-16のA点とB点とを比較すると、両点における流砂量は、水流にポテンシャル運動を仮定する限り相等しいが、実際にはサンド・ウェーブの背面で剝離が起り、ためにB点の流砂量はA点のそれに比べて当然小さくなる。このようなことを考慮して、新に次の形式の式をとった。

$$G(s, s', t) = \left[1 + \alpha \frac{\partial \eta(s - \delta, s', t)}{\partial s} \right] \cdot f[u(s - \delta, s', t)] \quad (68)$$

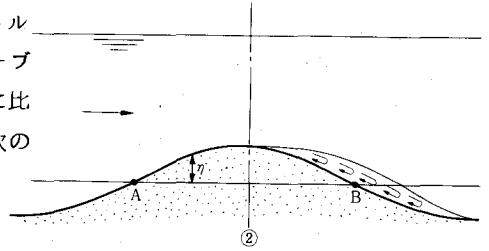


図-16 流線の剝離

ただし、 G は s 軸方向の流砂量 (容積レート, 単位 s' 巾当り),

s は河床面流線 (図-15) に沿ってとった曲線座標, s' はそれに直交する座標, α は無次元の定数, δ は局所的な掃流力とそれに応ずる掃流砂量との間に存すべきいくらかの遅れの距離である。関数 f として $f(u)$ (河床面流速)*, すなわち

$$f = m \cdot [u(s, s', -d, t)]^4 \quad (69)$$

をとる。これはDuBoysの式 $T = K\tau (\tau - \tau_c)$ において $\tau \propto u^2$, $\tau_c \ll \tau$ の場合に相当するものである。サンド・ウェーブの振幅 a が小さいとして、 a^2 以上の項を無視しながら、 G を x, z 方向の流砂量成分 T および T' に分解すると、

$$T = \bar{T} \left[1 + \alpha \frac{\partial \eta(x - \delta, -d, t)}{\partial x} + \frac{4}{U} \frac{\partial \phi_1(x - \delta, -d, t)}{\partial x} + \dots \right] \quad (70)$$

$$T' = \bar{T} dz/dx$$

ただし、 $\bar{T} = mU^4$, $\phi_1 = \phi - Ux$ である。そこで (70) 式を (67) 式に代入すると、

$$\frac{\partial \eta(x, z, t)}{\partial t} + \bar{T} \left[\alpha \frac{\partial^2 \eta(x - \delta, z, t)}{\partial x^2} + \frac{4}{U} \frac{\partial u(x - \delta, -d, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] = 0 \quad (71)$$

上式に (63) 式の η と (66) 式とを代入すると、 $a(t)$ についてのつぎの微分方程式がえられる。

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - k^2 \bar{T} \left[\alpha \cos k\delta - 4 \frac{k}{\beta} \sin k\delta \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)} \right] - k \cot k(x - U_b t) \left[U_b - \bar{T} k \left\{ \alpha \sin k\delta + 4 \frac{k}{\beta} \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)} \right\} \right] \left(\cos k\delta + \frac{l^2}{4k^2} \right) \} = 0$$

ところで、 $a(t)$ は t のみで関数であるから、上式左辺第3項 $\cot k(x - U_b t)$ の係数は0とならねばならない。また、 $k\delta \ll 1$ と仮定すると、上式から次式をうる。

$$a(t) = a(0) \exp \left[\frac{m g^2 \alpha}{c} k^2 d^2 F^4 \left\{ C - 2 \frac{k^2 d}{\beta} \cdot F^2 \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)} \right\} t \right] \quad (72)$$

および

$$U_b = 4m g^2 d k d F^4 \left[\frac{\alpha^2}{8c} k d F^2 + \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{(\beta/k) \tanh \beta d - F^2 k d} \right] \left[1 + \frac{l^2}{4k^2} \right] \quad (73)$$

ただし、 $C = \alpha / [\delta / (U^2 / 2g)]$ である。

(72) 式から、大かっこの中を正とするような範囲が不安定領域となる。すなわち、

$$\Gamma = C - 2 \frac{k^2 d}{\beta} F^2 \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)}$$

とおくと、 $\Gamma < 0$ および $\Gamma > 0$ がそれぞれ3次元の攪乱に対する河床面の安定領域および不安定領域を与える。安定限界は $\Gamma = 0$ と $\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta) = 0$ とで与えられる。これらを F^2 に対する表現式に書直すと、

$$F^2 = \left\{ \begin{array}{l} F_{2A}^2 \\ F_{1A}^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{4 (k^2 d / \beta) \tanh \beta d} [C + 2 \pm \sqrt{(C + 2)^2 - 8C \tanh \beta d}] \quad (74)$$

および $F^2 = F_{aA}^2 = \tanh \beta d / (k^2 d / \beta)$

となる。

図-17は木下の実験¹²⁾とこの理論の比較の一例を示すもので、この理論は木下の実験結果とはいかなる場合にもよく合っているように思われる。

この理論において、不安定性がでてきたのは(68)式で表現されるような局所流砂量の“非対称性”の機構によっている。

(68) 式中の遅れの距離 δ はこの場合、却って安定化の方向に作用している。この δ がないと、局所流砂量の“非対称性”の結果として、すべての場合が不安定となり、図-17の場合にも“平坦”の領域は消滅する。

2.6 確率統計論の説明

(a) von Schelling (1951年) の研究¹³⁾

von Schelling はA点 (これを座標の原点にとる) からB点 (図-18) まで一つの移動点がつぎのような動き方をする場合に画かれる径路について研究した。

移動点は定速度で直線運動をするが、距離 Δs だけ進むと、角度 ϕ だけの向きを変える。この場合、どれだけの角度だけ振れるかは全く判らないが、角度 ϕ の大きさの生起の確率 f は Gauss分布をなすものとして、

$$f(\phi) = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \exp[-\phi^2/2\sigma^2] \quad (75)$$

とおく。こゝに、 σ は ϕ の標準偏差である。このような角度の振れを k 回行った後に $B(x_k, y_k)$ に到達するものとするば、 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ だけの角度の振れをとる確率は

$$P = f(\phi_1) \cdot f(\phi_2) \cdot \dots \cdot f(\phi_k) \quad (76)$$

となる。一方、当然、次の関係が成立っている。

$$\left. \begin{array}{l} \cos \phi_1 + \cos(\phi_1 + \phi_2) + \dots + \cos(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_k) = x_k \\ \sin \phi_1 + \sin(\phi_1 + \phi_2) + \dots + \sin(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_k) = y_k \end{array} \right\} \quad (77)$$

そこで、(77) 式を満すものの中で、(76) の P を最大ならしめる $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ の値を求める

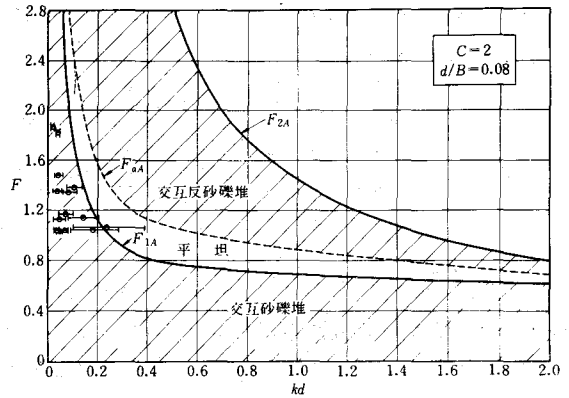


図-17 林の理論と実験値 (木下) との比較

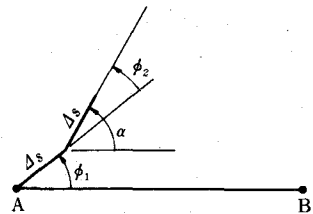


図-18

ことを考える。(76)式の P を最大ならしめるものは、(76)式の $\log$ を最大ならしめるものでもあるから、(76)の $\log$ をとってそれを Q と記すと、

$$Q = \sum_{s=1}^k \log f(\phi_s) = -k \log(\sigma\sqrt{2\pi}) - (1/2\sigma^2) \sum_{s=1}^k \phi_s^2$$

また、

$$\begin{aligned} \cos \phi_1 + \cos(\phi_1 + \phi_2) + \cdots + \cos(\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k) - x_k &\equiv F \\ \sin \phi_1 + \sin(\phi_1 + \phi_2) + \cdots + \sin(\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k) - y_k &\equiv G \end{aligned}$$

とおくと、(77)式を満し、径路の総延長を $k \Delta s$ とする角度の組 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ の中で P を最大ならしめるものは、

$$Z \equiv Q + \lambda F + \mu G \quad (78)$$

を最大ならしめるものである。ただし、 λ および μ はLagrangeの未定定数である。そこで、“最高頻度径路”は次の連立方程式で与えられる。

$$\partial Z / \partial \phi_1 = 0, \quad \partial Z / \partial \phi_2 = 0, \quad \dots, \quad \partial Z / \partial \phi_k = 0 \quad (79)$$

(79)式に(78)式を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} -\phi_1 / \sigma^2 - \lambda \sum_{u=1}^k \sin\left(\sum_{i=1}^u \phi_i\right) + \mu \sum_{u=1}^k \cos\left(\sum_{i=1}^u \phi_i\right) &= 0 \\ -\phi_2 / \sigma^2 - \lambda \sum_{u=2}^k \sin\left(\sum_{i=1}^u \phi_i\right) + \mu \sum_{u=2}^k \cos\left(\sum_{i=1}^u \phi_i\right) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ -\phi_k / \sigma^2 - \lambda \sum_{u=k}^k \sin\left(\sum_{i=1}^u \phi_i\right) + \mu \sum_{u=k}^k \cos\left(\sum_{i=1}^u \phi_i\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

つぎに、上の理論を連続性の理論に移行させることを考える。 $\alpha(s) \equiv \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_s$ とおくと、 $\alpha(s)$ は s 番目の点で曲線に引いた切線が基線 AB となす角度を表わし、また、 $d\alpha(s)/ds = \phi(s)$ 、よって、

$$1/\rho(s) \equiv d\alpha(s)/ds = \phi(s) \quad (81)$$

ただし、 $\rho(s)$ は s 番目の点における曲線の曲率半径である。これらの関係式を使用すると、(80)式では次の1本の式で書直される。

$$(1/\sigma^2) d\alpha/ds + \lambda \int_{u=s}^k \sin \alpha(u) du - \mu \int_{u=s}^k \cos \alpha(u) du = 0$$

そこで、上式を u で微分し、つぎに $2d\alpha/ds$ をかけて積分すると、

$$(1/\sigma^2)(d\alpha/ds)^2 + 2(\lambda \cos \alpha + \mu \sin \alpha) = 2C$$

あるいは、これをさらに書直して、

$$(1/\sigma^2)(d\alpha/ds)^2 + 2c \cos(\alpha - \omega) = 2C \quad (82)$$

をうる。角度の基線を適当に選べば $\omega = 0$ となるようにすることができるし、また c と C の単位を適当に選べば $c = 1$ となるようにすることができる。したがって、(82)式から、最高頻度径路は

$$1/\rho = d\alpha/ds = \sigma\sqrt{2(C - \cos \alpha)} \quad (83)$$

と求められる。

Von Schelling による以上のような研究は、河川の蛇行を対象としたものでは全くなかったが、次節に述べるようにLangbeinおよびLeopoldがこの研究に着目してこれを河川蛇行の問題に適用した。

(b) LangbeinおよびLeopold (1966年)の研究¹⁴⁾

2.5までは河川蛇行の成因を決定論的立場から取り扱ってきた。しかし、河川蛇行の原因となりう

るものは沢山あると考えると、それらの影響が複雑に重り合った現象が河川の蛇行であると考えられる。その結果、河川蛇行はあたかも確率統計学的現象——ランダムな現象——として取扱いうるものと考えて、LangbeinおよびLeopoldはさきのVon Schellingの理論を河川蛇行の問題に適用した。

すなわち、彼等は、河川がA点からB点に向けて流れるときに、もしAからBまでの曲線の総延長が与えられ、またA点を発する時の角度が与えられているときには、河川の蛇行径路はVon Schellingの式(83)で与えられるものと考えた。(83)式を書き直すと、

$$s = \frac{1}{\sigma} \int \frac{d\alpha}{\sqrt{2(\cos \omega - \cos \alpha)}} \quad (84)$$

ただし、この式における ω は曲線の最大偏角(基線ABとなす角度)である。図-19は曲線の総延長を同じくし、 ω の値のみを異にする3本の曲線に対比させたものである。

(84)式は楕円積分であるので、これを避け、この近似式として次式をとる。

$$\frac{d\alpha}{ds} = \sigma \sqrt{2(1 - \cos \omega) \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\omega} \right)^2 \right]}$$

これを積分すると

$$\alpha = \omega \sin(2\pi s/M) \quad (85)$$

となる。ここに M は $M = (2\pi/\sigma) \omega / \sqrt{2(1 - \cos \omega)}$ である。(85)式をみると、偏角 α が $\sin$ 変化をしているものであることを示している。

LangbeinおよびLeopoldは(85)式

の曲線を"sine-generated curve"と名付けた。図-20の上図は米国Wyoming州Popo Agie河の

蛇行形状、また同図下図は、上図の河道軸線距離 s に対して河道軸線各点の偏角をプロットとしたもの、図-20(a)は後に3.1において述べるTylerおよびFriedkinの実験における蛇行形状の一例と、それに対する距離・角度曲線である。いずれも偏角 α はよく $\sin$ 曲線上にのっており、従ってこれらの蛇行形状はほとんど正確にsine-generated曲線になっていることが見られるが、このことは一応注目されることがらである。

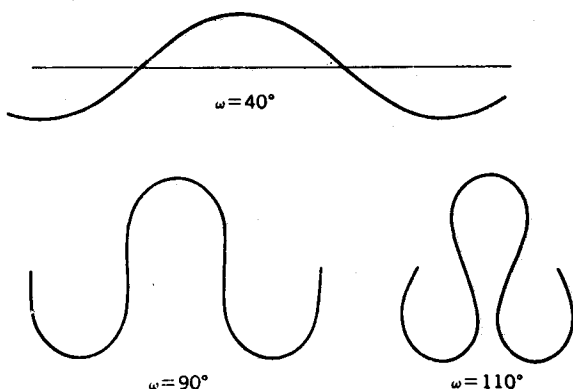


図-19 最高頻度曲線のうち $\omega = 40^\circ, 90^\circ$ および 110° のもの

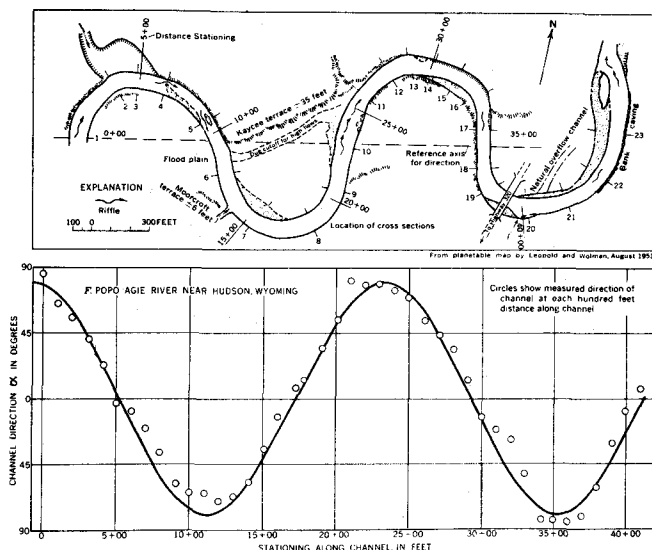


図-20 蛇行形状の一例

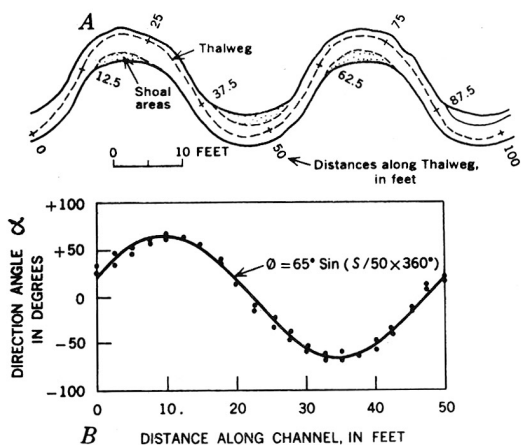


図-20(a) Tyler および Friedkin の実験における蛇行形状

(同写真一 (中))

ことを明らかにした。蛇行形状は再現性に富んでおり、同一の条件で違う時期に行なったもので全く同一の蛇行形状を形成した (同写真一 (右))。

写真-2 は蛇行水路の砂堆の状況を示したもので、凹岸部の河岸が浸蝕されて下流に運ばれ、その大部分はすぐ下流側の凸岸部に寄洲として堆積する。しかしそこで堆積しえなかったもの (その量は僅かであるが) は、さらにもう一つ下流

側の凸岸部に堆積をする。洗掘された物質が流れを横切って対岸側に達するということは殆どない。とにかく、このようにして、蛇行には水当りによる河岸の浸蝕が第一に必要な条件であり、蛇行を形成させる凸岸部への堆積物の供給源はそのすぐ上流の凹岸部である。横断面の水位は、水当りのため凹岸部の方が高い。

3. 蛇行の成因に関する実験的考察

蛇行の成因に関する実験は数多く行われているが、こゝでは特にその中の代表的なものと思われる Tyler および Friedkin の実験と木下の実験について述べることにする。この二つの実験はこの種実験の中では画期的なものであったと思われる。

3.1 Tyler および Friedkin (1945年) の研究¹⁵⁾

Tyler および Friedkin は実験室で河道蛇行についての広汎な実験を行った。彼等はまず、直線水路の上流部に曲がりをつづけて (写真-1 (左))、これから規則正しい河道蛇行が形成される

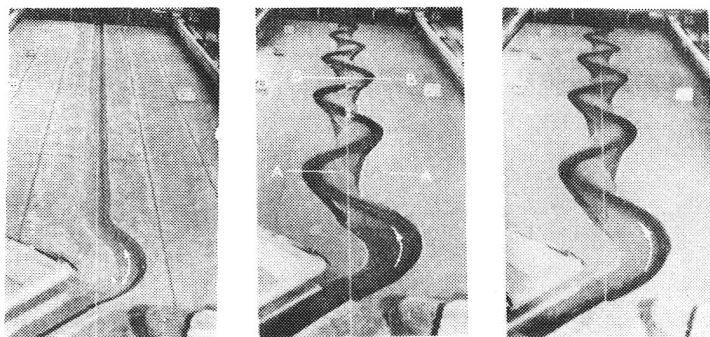


写真-1 河道蛇行の形成

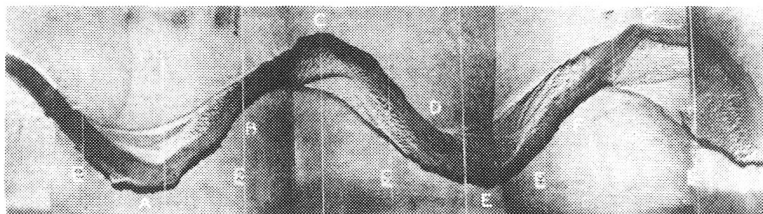


写真-2 蛇行部における洗掘と堆積

流心線の河床勾配に注目すると、写真-2 に対しては図-21 のようになっており、凹岸部で最も深く、凹岸部と対岸の凹岸部とを結ぶ対角線の中点附近が浅瀬となって最も浅くなっている。

蛇行の成因についての Tyler および Friedkin の考え方は、以上の観察から形成されている。

図-22 は低水時、平水時および高水時における主流の方向、砂の移動部分、および堆積部分を比較して示したもので、
 “低水時に形成された蛇行形状は高水時には直線化される”
 と説明しているが、後述の木下の実験においては、木下はこの現象を、“高水時に河床に交互の砂

堆が形成され（図-23）、この結果として低水時に河道蛇行を生ずる”と全く逆の解釈をしていることは誠に興味深い。

河道を自由に蛇行させると、時間の経過とともに“蛇行振巾”は増大してゆくが、やがて一定値に落ち着いてゆく（図-24）。これは、蛇行の結果流路延長がのび、平均河床勾配が減少して、蛇行の主原因たる洗掘力が減少するからであるとして説明されている。

Tyler および Friedkin は河岸の構成物質が一樣でない場合の研究も行っている。写真-3（左）は構成物質が一樣な場合であり、綺麗には V 様な蛇行形状を形成しているが、（右）は一樣でない場合であり、形状は部分的にはかなり変っているが、大局的には（左）との類似点も残っている。

Tyler および Friedkin の実験結果が信頼性に富むものと考えられる理由の一つは、その規模の大きさもさることながら、使用した河床ならびに河岸物質の選択にある。この選択が適当でないと、実験室内の“小河川”においては、その水深が小さいために河床物質は大して動かないにも関わらず、河岸は次第に外法が崩されて断面は浅く、河巾が拡ってゆき、まもなく網流のような状態になってしま

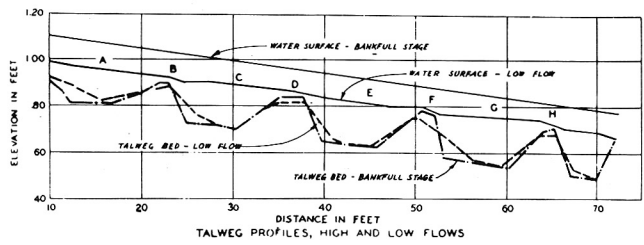


図-21 写真-2 の流心線河床勾配

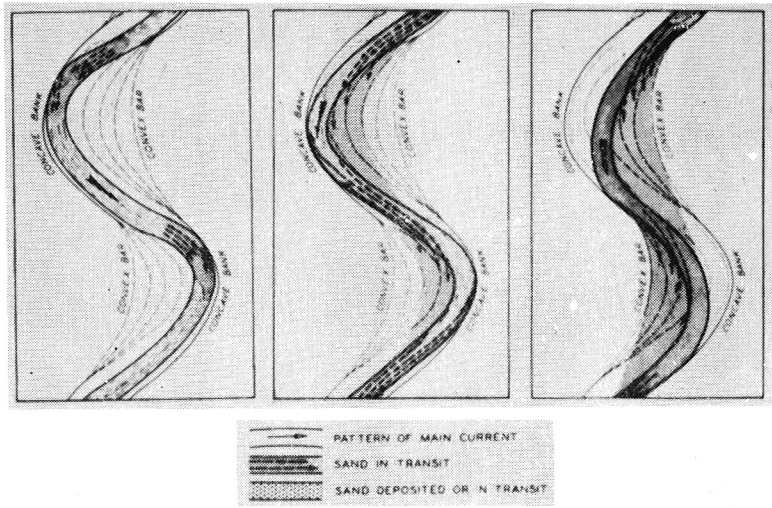


図-22 河状 (左) 低水時, (中) 平水時, (右) 高水時

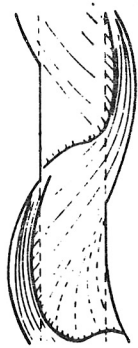


図-23 交互の砂礫堆 (木下の見方)

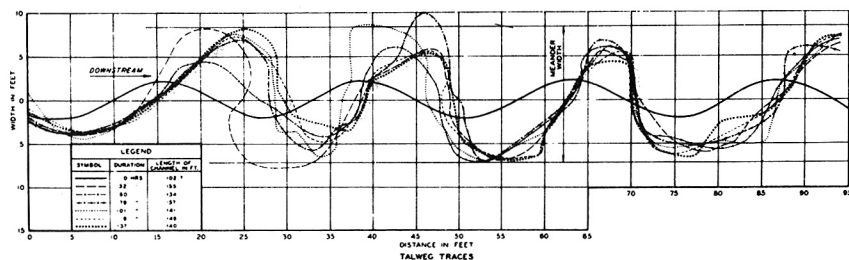


図-24 主流線の時間的変遷

行を行ったのである。

3.2 木下（1957年および1962年）の研究^{12), 10)}

(a) 直線水路における水流蛇行

河川の蛇行といえば河岸の交互の浸蝕を意味するものと考えられていたように思われるが、木下は河川の蛇行は河床の洗掘のみによっても起るとして、このことを実験的に明らかにした。写真-4は直線水路に形成された交互の洗掘と堆積の河床形状で、この上の水流は蛇行している。木下はこの河床形態において、深いところから浅いところまでにわたる図-25の太線で限られた一単位の形全部を「砂礫堆」と呼んだ。

直線水路に平坦に砂を敷きつめ、浅い水深でも十分に砂が動かされる程度の勾配を与えると、河床面上にははじめ交錯縞ができ、それは間もなく段となり、砂礫堆の形状を呈しはじめ、そして



図-25 砂礫堆

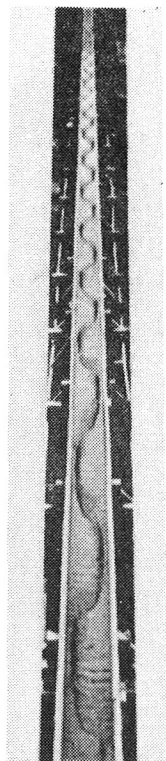


写真-4 交互の砂礫堆

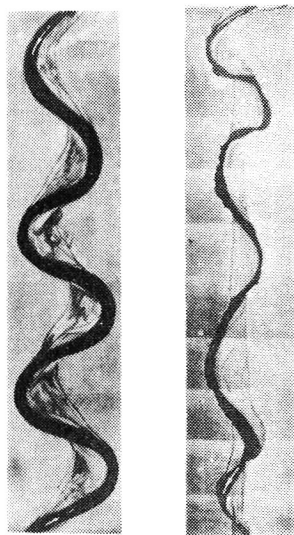


写真-3

やがてウロコ状砂礫堆となる（写真-5）。水路巾がある程度狭いときには八の字状砂礫堆となる（写真-6）。水路巾が安定巾と同じ程度かあるいはそれより狭い場合に写真-4のような砂礫堆が現われる。写真-4を「単列蛇行」と考えれば、八の字状砂礫堆は「単列蛇行砂礫堆」を二列背中合せにつけたものともみなせるので、これを木下は「二列蛇行」と考え、また同様にして、ウロコ状蛇行を「複列蛇行」と考えた。

これら一連の写真（写真4～6）は、この場合の水流の Froude 数が1前後で、水面には斜交した射流の波が主と

して側壁から発しており、したがって、その影響が底面に表われたのだと考えることもできよう。この意味では、この実験は Einstein および Shen の形式Aの実験であったことに止るのではないかと



写真-5 ウロコ状砂礫堆

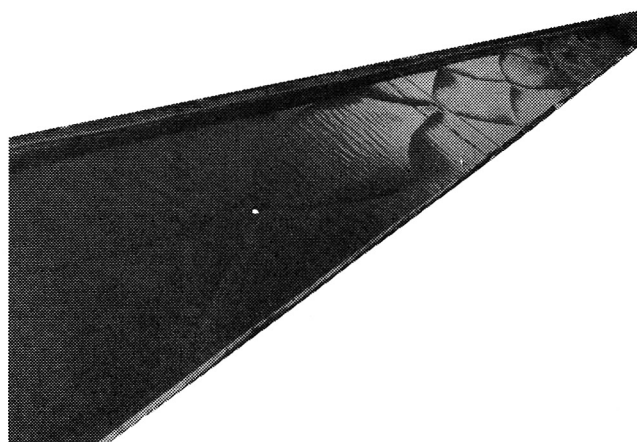


写真-6 八の字状砂礫堆

発達し、それが同じ経過をたどって水流蛇行をもつ砂礫堆に発達することを確めた。したがって、蛇行水流発生最初の現われである斜めの交錯縞は流れの常・射流を問わず発生するわけであり、また、発達した後の砂礫堆の機構上にも、流れの常・射流の相違による特別な相違点を見出すことができないようである。この見解は先に出されていた Einstein および Shen の見解とは相反するもので、このような実験事実の根本的な相異の原因の検討は今後の蛇行研究上の一つの重要なことがらであろう。

(b) 曲線河道における水流蛇行

固定床固定壁の彎曲水路では、底面流線は螺旋流によって底面流線は凹岸側から水路を斜めに横切って凸岸側（対岸側）に寄っていく。しかし、移動床で同じ実験を行うと、はじめのうちは流線は固定床の場合と同じであるが、やがて洗掘がすすみ砂礫堆が形成されるようになると、凹岸から供給された砂粒は、もはや対岸側に向うのではなく、つぎの砂礫堆の前縁に向けて拵がってゆく。つまり、凸岸の寄洲は同じ岸の上流側の凹岸から供給されたものである。この観察は Tyler および Friedkin のそれと同じである。

(c) 河道蛇行の発生

河道蛇行は、直線河道においても既に存在する水流蛇行がその原因となって発生すると木下は考えた。これを検証する目的で、木下はつぎのような自由蛇行の実験を行った。

単列蛇行を生じうるような巾の小さい初期直線水路を設けてこれに通水すると、まず写真-7 のような砂礫堆が形成される。水流はこの時既に蛇行している。そしてこの砂礫堆の段落が高まり、さらに発達する中に蛇行水流の各偏岸個所で欠けこみがはじまる（写真-8）。こうして蛇行河道が発生する。

直線水路の起点に曲りを与えると、一層綺麗な蛇行が得られるが、このことは Tyler および Friedkin の実験におけると同じである。写真-9 はそのような実験結果の一例であるが、砂礫堆の形状、その前縁の位置、主流線の当り方や砂の流線などがよみとられ、真に美事な写真であるといふべきである。

以上のような実験を数多く重ねた末に得られた結論として、木下は自然河道の蛇行の発達を図一

も思われる。しかし、木下は比重の比較的小さな石炭粒子を用いて、Froude 数が1よりかなり小さい場合の実験を行ったが、そのときにも同様に斜め交錯縞が



写真-7

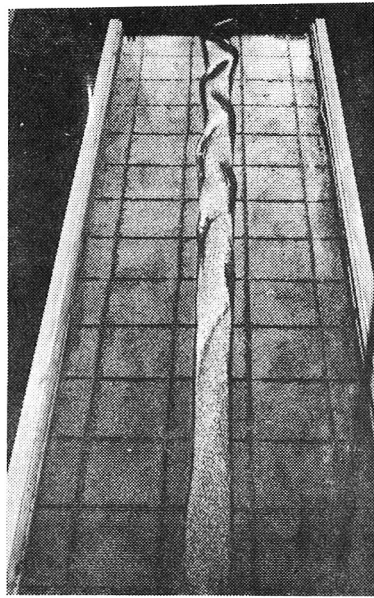


写真-8 岸浸蝕のはじまり

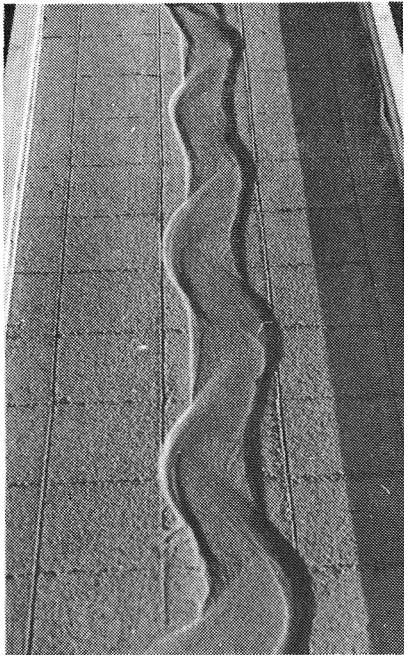


写真-9 直線水路の起点に曲りを与えた場合

27 のように考えたのである。

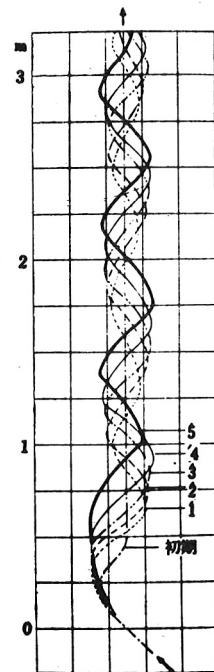


図-26 写真-9 の水流
流心線の変遷

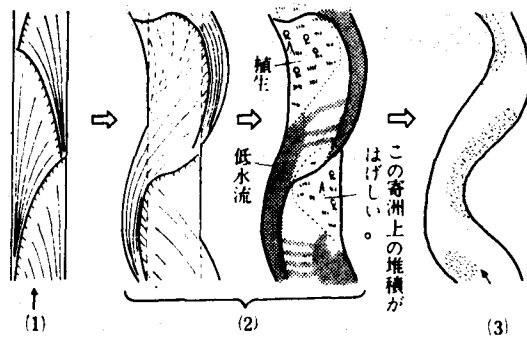


図-27 自然河道の蛇行の発達

引用文献

- 1) M. Fargue : Etude sur la correlation entre la configuration du lit et la profondeur d'eau dans les rivières à fond mobile, Ann. Ponts et Chaussées, 1868.
- 3) P. W. Werner : On the origin of river meanders, Trans. Amer. Geophy. Union, Vol. 32, Nr. 6, 1961, pp. 898 - 902.
- 4) A. G. Anderson : On the development of stream meanders, Proc. IAHR, 1967, Vol. No. 1, pp. 370 - 378.
- 5) 藤芳義男 : 河川の蛇行と災害 (佐々木書店), 1949, pp. 1 - 250.
- 6) H. A. Einstein and H. W. Shen : A Study on meandering in straight alluvial channels, Journ. Geophysical Research, Vol. 69, 1964, pp. 5239 - 5247.
- 7) H. W. Shen and S. Komura : Meandering tendencies in straight alluvial channels, Journ. Hyd. Div., Proc. ASCE, 1968, pp. 997 - 1016.
- 8) S. Adachi : A theory of stability of streams, Proc. IAHR, Vol. No. 1, 1967, pp. 338 - 344.
- 9) E. Hansen : On the formation of meanders as a stability problem, Basic Research Progress Rep. 13, Hyd. Lab., Technical Univ. of Denmark, 1967, pp. 9 - 13.
- 10) R. A. Callander : Instability and river channels, Journ. Fluid Mech., Vol. 36, 1969, pp. 465 - 480.
- 11) 林 泰造 : 河川蛇行性の理論, 土木学会年次学術講演会講演集Ⅱ - 138, 1968, pp. 381 - 384.
または,
林 泰造 : 河川蛇行の成因についての研究, 土木学会論文報告集, 第180号, 1970, pp. 51 - 60.
- 12) 木下良作 : 石狩川河道変遷調査および同参考編, 科学技術庁資源局資料第36号, 1961
- 13) H. von Schelling : Most frequent particle paths in a plane, Trans. AGU, Vol. 32, 1951, pp. 222 - 226.
- 14) W. B. Langbein and L. B. Leopold : River meanders - Theory of minimum variance, Geophy. Survey Professional Paper 442 - H, 1966, pp. H1 - H15.

- 15) M. C. Tyler and J. F. Friedkin : A laboratory study of the meandering of alluvial rivers, US Waterways Exp. Station, 1945, pp. 1-40.
- 16) 木下良作 : 河床における砂礫堆の形成について, 土木学会論文集, 第42号, 1957, pp. 1-21.