

掃流砂れきの流送機構

京都大学防災研究所教授

工博士 屋 義 人

1 緒 言

流体運動に伴って固体粒子が流送される現象は、たとえば流砂、飛砂、飛雪あるいは漂砂などをはじめとして、管路による粉体または粒子群の輸送や泥の流送など理工学上の問題と密接に関連している。これら粒子群の流送現象は、通常大別してその流送の形態から、掃流と浮遊の2つに分けられ、それぞれ独自の手法によって、それらの機構の解析がなされてきた。また、最近ではこれらの現象を含むいわゆる混相流 (polyphase flow) の研究が重要視され、1969年の国際水理学会議の主要課題にもとりあげられたことは周知のとおりである。

これら2つの運動形態において、後者の浮遊現象は主として流れに伴う乱れによって粒子が拡散輸送されると考えるものであり、最近では液相と固相の2相流として、相互の作用を流体力学の基礎式から検討しようとする試みが強力に進められてきた¹⁾。これに対して、前者の掃流現象では、粒子の運動が床面近傍に限定され、床面との接触によるかなり特徴的な運動をするため、その解析が比較的困難であり、このことが水工学上の実際問題において、流砂法則の確立における1つの支障ともなっていると考えられる。

本小論では、以上2つの現象のうち前者の掃流現象について考察するつもりであるが、これまでこの方面の研究には、1つの方向が定まっていなかったようであるので、ここではとくに流れによる砂れきの運動機構について研究した種々の研究との関連において、著者らの成果を中心として述べてみたい。ただし、いずれにしても十分現象を理解することのできる理論体系に対しては、はなはだ道遠く、未解決の問題がきわめて多いので、ここで述べる1つの試論が今後この方面の研究に役立てば幸と思う次第である。

2 掃流砂れきの運動形態

水流による床面付近における砂れきの運動については、種々の見解が示されてきたが、詳細に写真撮影などによって観察した結果はきわめて少ない。一方、飛砂においては、砂粒の運動が特徴ある放物体の運動として Bagnold ら²⁾によって観察されて以来、いわゆる saltation としてよく知られているが、これに対して飛砂現象を浮遊として取扱った研究も少なくない³⁾。しかしながら、これら同じ流体の運動にともなう砂れきの運動であるにもかかわらず、水流の場合にはたとえば Kalinske⁴⁾ がいうようにいわゆる Saltation はほとんどみられず、むしろ滑動または転動 (sliding あるいは rolling) が主体であるとさえ考えられてきた。

1963年 Yalin⁵⁾ は水流による砂れきの運動に対して、飛砂の場合の理論的取扱いを適用し、Saltation としての運動を運動方程式に基づいて理論的に解析した。また、わが国においては、岸⁶⁾ が Yalin が省略してあった仮想質量力を導入して理論を修正するとともに、単体粒子の静止からの運動をストロボ装置を用いて写真撮影し、その運動を詳細に調べて理論結果と比較して、Saltation の機構を解明しようとした。しかしながら、砂れきの運動を詳細に観察した場合、前述したような2つの考え方のうち、いずれが現象に忠実であるかは明確でなく、また岸らの研究に引き継いで実施した著者ら⁷⁾⁸⁾の実験によれば、その観察の結果は必ずしも同意できないように思われる。したがって、こ

ここでは掃流砂れきの運動についての2つの基礎実験の結果を述べ、その形態を明らかにしたい。

2.1 固定床における単体粒子の運動⁷⁾

図-2.1は比重約1.50の球状粒子の静止からの運動をストロボ装置によって撮影したものを、数個ずつ重ねて画いたものである。この

図のうち、A点は粒子の静止位置を示したが、これから多くの砂れきが、最初ある距離だけ転動し、しかるのちいわゆる跳躍運動（Skippingあるいはjumping）に移行することがわかる。岸ら⁶⁾は流砂運動の基本は静止から直ちに跳躍に移行する運動の過程であって、前述したような転動過程の重要性を認めていないようであるが、これは

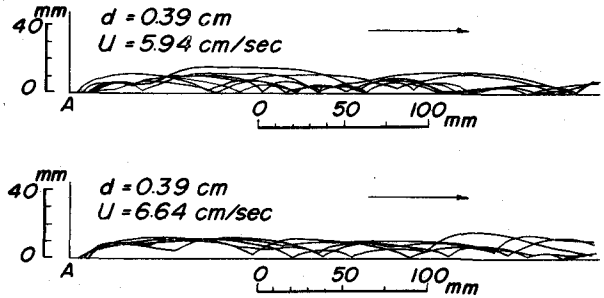


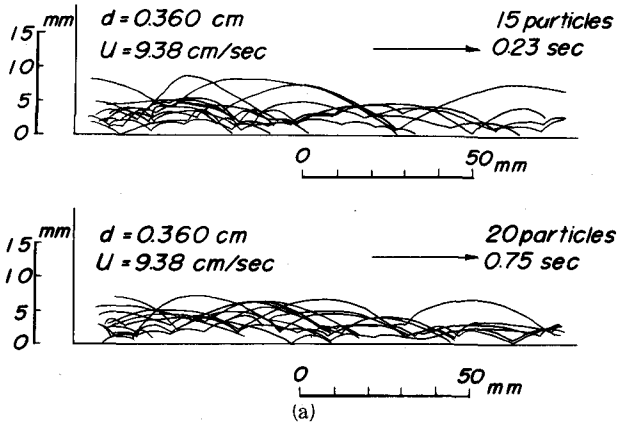
図-2.1 固定床における単体粒子のSaltationの軌跡

Saltationの理論においても述べるように、砂れきに作用する流体力に対する考え方とも関連する。そして、転動から跳躍に移行した砂れきは跳躍または転動をくり返ししながら流下していくが、その過程はKalinskeが述べたような滑動のみではなく、いわゆるSaltation運動として定義されるものに近いようである。

2.2 掃流砂れきの運動⁸⁾

図-2.2は掃流砂れきの運動を16 mm高速度カメラによって撮影し、それをフィルムモーションアナライザーによって、個々の砂れきの軌跡を解析したものである。図中d；砂れきの大きさ、 U_* ；

摩擦速度であり、記入してある数字は解析の時間と砂れきの数を示し、また図-2.2(b)に示した結果は砂れきの大きさが小さい場合のもので、アナライザーによる解析がきわめて困難であったので、図中に示した数の砂れきについてのみ、その軌跡を画いたものである。前述した単体粒子の運動との対応において考察すると、おのおの粒子の運動は両者ともよく類似しているが、固定床と移動床とでは砂れきの衝突特性



がかなり相違するようである。

著者ら⁸⁾

は、これらの解析を通じて掃流砂れきの運動

を詳細に観

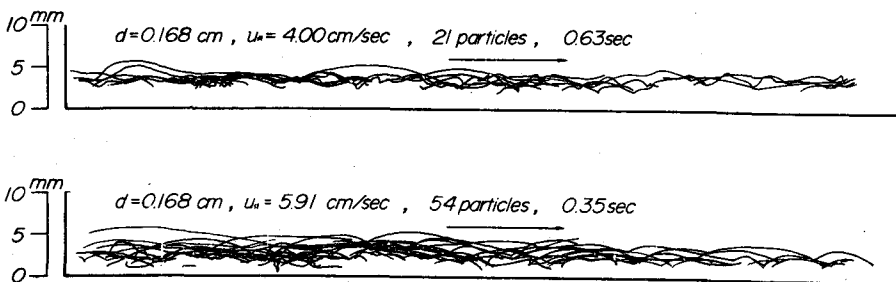


図-2.2 掃流砂れきのSaltationの軌跡 (b)

察した結果、砂れきの静止状態を含む図-2.3のような7つの基本的現象が存在し、それらが相互にそれぞれの現象に推移するものであることがわかった。図-2.3には、これら基本的現象の相互関係を示したが、これらの現象において、とくに注目すべきことは、それぞれの現象への移行の確率過程が存在することであって、図中ではそれらのうち、静止から移動を開始する場合の移行確率を移動機構の相違によって、 P_1 および P_2 とあらわしたが、このうち P_1 は5において後述する掃流砂れきの流送モデルにおけるいわゆる rest period に関係するものである。さらに、図中に示した跳躍は前述したような転動や滑動をも含まれるいわゆる広義の Saltation を意味するが、この場合この Saltation からさらに反発、停止あるいは新たな砂れきを飛び出させるなどのそれぞれの過程への移行確率をそれぞれ P'_1 , P'_2 および P'_3 としてあらわされるものとした。図-2.4はこれらの移行確率と掃流力との関係を示したものの1例であるが、フィルモーションアナライザーによる解析がきわめて複雑であるために、たとえば砂れきの静止をどのように定義するかなど、かなり不確定な問題もあって、実験の精度は十分とはいえないが、このような推移の過程とそれぞれへの配分が存在することがわかる。すなわち、図-2.5からも明らかのように、跳躍に移行した砂れき

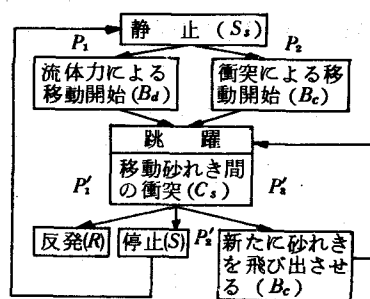


図-2.3 掃流砂れきの運動形態とそれらの移行経路

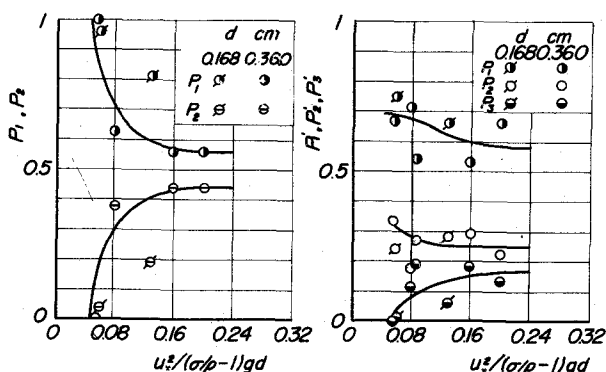


図-2.4 移行確率の掃流力による変化

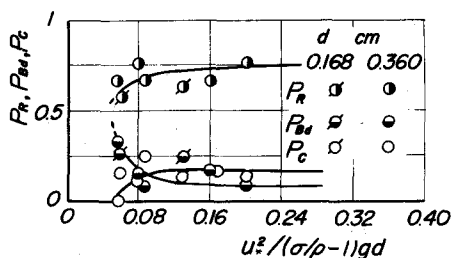


図-2.5 跳躍に移行する砂れきをとる運動形態の割合

移行した砂れきとその直前にどのような運動をとったかということとそれらの配分が掃流力に関係してあらわされる。図中の P_{B_d} , P_R および P_{B_c} は図-2.3に示した現象 B_d , R およびそれ以外の現象 B_c などをとった割合をそれぞれ示している。

以上、概説したように、掃流砂れきの運動機構において、とくに重要なのは、この現象が砂れきが移動するいわゆる凹凸の場におけるものであって、掃流砂れきと床面での静止砂れきとの交換作用に基づく推移過程であって、完全な平面上を砂れきが運動

する場合の力学過程と大きく相違するものであると考えられる。なお、以上述べた運動の形態は、古く Bagnold やあるいは河村⁹⁾らによって詳細に論じられた飛砂における砂粒の運動または最近大浦ら¹⁰⁾によって撮影されたいわゆる飛雪の運動とも密接に関連するものであると思われる。

3 砂れきの移動限界 (限界掃流力)

前述したように、掃流砂れきの運動形態のうち、静止から移動を開始する場合、一般に砂れきに作

用する流体力による移動開始と運動中の砂れきが床面の砂れきに衝突して移動開始する現象の2つが考えられるが、前者は通常いわれる限界掃流力として、その力学的条件が理論的にもまた実験的にも取扱われてきたことは周知のとおりである。¹¹⁾ しかしながら、後者の力学的条件についてはいまだ検討がなされていないが、近似的には4において述べる継続跳躍の条件とも関係するはずである。したがって、ここでは水流のみならず飛砂のように空気流による砂れきの移動限界に対しても、従来の限界掃流力の理論がどの程度適用できるかについて検討しておきたい。

限界掃流力に関する理論的取扱いにおいては、これまで種々の方法が提案されてきたが、砂れきに作用する流体力に対する静的なつり合い条件から出発すれば、Shields¹²⁾ によってはじめて示されたように、その条件はつぎの関係によってあらわされる。

$$U_c^{*2} / (\sigma / \rho - 1) g d \tan \varphi = \Psi_0 (U_c^* d / \nu) \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

ここに、 U_c^* ; 限界摩擦速度、 σ / ρ ; 砂れきの比重、 g ; 重力の加速度、 φ ; 砂れきの静止摩擦角、 ν ; 流体の動粘性係数および Ψ_0 ; Reynolds数 $U_c^* d / \nu$ の関数である。(3.1)式の右辺には、実際の砂れきの場合、その形状の効果をあらわす無次元量などがさらに付加されるはずであるが、ここでは一様な球状砂れきからなる理想的な場合を対象とする。(3.1)式の関係を理論的に導こうとする試みは、栗原や岩垣ら¹¹⁾によってなされたが、とくに岩垣による関係は、つぎのようにあらわされた。すなわち、

$$U_c^{*2} / (\sigma / \rho - 1) g d \tan \varphi = 1 / \varepsilon \Psi (U_c^* d / \nu) \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

ここに、 Ψ ; $U_c^* d / \nu$ の関数として理論的に導かれたものであり、また ε ; シャヘイ係数といわれ、この理論における全体的な唯一の実験定数であって、物理的にはつぎのように説明されるものである。すなわち、この方法では床面上の1つの砂れきの移動限界を取扱っているが、実際には多数の砂れきが床面にあって、それらがお互にシャヘイし合っているので、砂れきの流れからうける流体抵抗は、実際には理論値よりかなり減少しているものと考えられる。このために、水流による砂れきの移動限界に関する実験値に一致するように、 ε の値を0.4と定めたのである。こうして定められた理論曲線は、Shieldsの実験曲線ともよい対応を示すこともよく知られているところである。

さて、ここでは以上述べた砂れきの移動限界に関する関係を飛砂の場合やさらに比重がかなり相違する粒子の移動限界に適用して、流体の運動による固体粒子の移動限界の統一化について、若干の考察を試みたい。図-3.1は飛砂における砂粒の移動限界に関する従来の実験結果と著者ら¹³⁾ が最近

種々の粒子を用いて測定した実験値を(3.1)式の関係によってあらわしたものである。ただし、砂れきの移動限界の定義に対しては、著者¹⁴⁾ がききに提案したところの床面の単位面積当りの砂れきのうちその何%が単位時間内に移動するかであらわした場合、水流による場合には $P_0 = 0.5 \% / \text{sec}$ であるのに対して、飛砂の場合には $P_0 = 0 \% / \text{sec}$ すなわち飛砂量が存在しない限界の摩擦速度とし

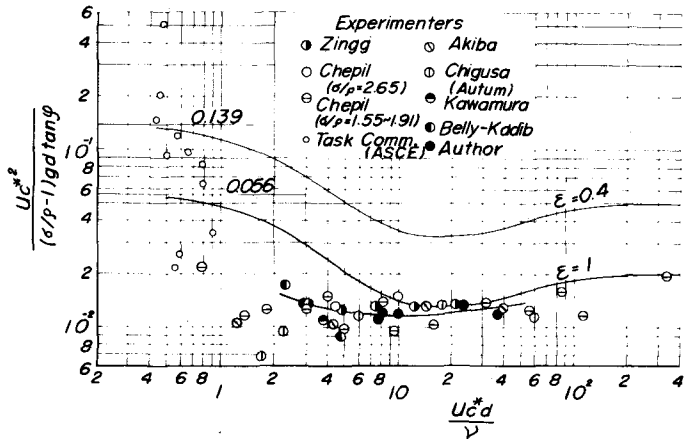


図-3.1 飛砂における砂れきの移動限界の無次元表示

て、従来の実験値が定義されていることが見出された。図中に示した著者らの実験値は $P_0 = 0\% / \text{sec}$ に対応した実験値を示す。この結果において、図中 $\epsilon = 0.4$ として示した曲線は水流の場合における岩垣の理論曲線を示し、また $\epsilon = 1$ とあらわしたものは、理論上もっとも移動しやすい砂れきを対象とした理論曲線であるが、これからつぎのことが見出される。すなわち、これら両者における大きな相違であって、これがなにに原因するかを究明することは、流砂・飛砂力学の根本とも考えられるし、また $U_c^* d / \nu$ の値が小さい範囲においては飛砂の場合無次元限界掃流力の値がかなり急激に大きくなっているのは、微細な砂粒の粘着性によるものといわれているが明らかではない。いま、これら両者における相違について考察するにあたって、 $U_c^* d / \nu$ の値の大きい範囲についてのみ考えることにして、Shields にならって次元解析的にその関係をあらわせば、一般的につぎようになる。

$$F_1 \{ U_c^{*2} / g d, U_c^* d / \nu, \sigma / \rho, \tan \varphi \} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

さらに、前述したように、流体力に対する砂れきの静的なつり合い条件を考えることにすれば、(3.3) 式はつぎのように変形される。

$$F_2 \{ U_c^{*2} / (\sigma / \rho - 1) g d \tan \varphi, U_c^* d / \nu, \sigma / \rho, \tan \varphi \} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

すなわち (3.1) および (3.4) 式からもわかるように、砂粒の移動限界の考察においては、式中の第1および第2の無次元量がとりあげられてきたわけであるが、もし砂粒の移動限界が流体力の変動に対して動的なつり合条件によって規定されと考えることにすると、第3の無次元量 σ / ρ も重要な要素となるであろう。いいかえると実験的な観察の結果によれば、砂粒はその移動限界において乱れによって微小な揺動をしているので、このような動的な挙動においては、一般に仮想質量力が重要となり、相対密度を1つの無次元量としてとりあげるべきことになる。これに対して、第4の無次元量は静的または動的なつり合条件に対しても第1の無次元量に付加されると考えられるので、この無次元量は独立にはあまり重要ではないであろう。

以上の考え方によって、 $U_c^* d / \nu$ の値を一定として、 $U_c^{*2} / (\sigma / \rho - 1) g d \tan \varphi$ と σ / ρ との関係を示すと、図-3.2 のようにあらわされる。ただし、 $\sigma / \rho \approx 2.65$ の場合は水流による場合の値であって、それ以外は飛砂における実験値より推定したものである。これから明らかなことは、 $U_c^* d / \nu$ を一定とすると、 $U_c^{*2} / (\sigma / \rho - 1) g d \tan \varphi$ の値は σ / ρ の増加にともなって、かなり急激に減少する。砂粒の移動限界の問題はこれまで飛砂の場合と流砂の場合とについて別々に検討されてきたために、この事実は見出されていなかったが、この実験結果によると、相対密度の影響はかなり大きいことがわかる。

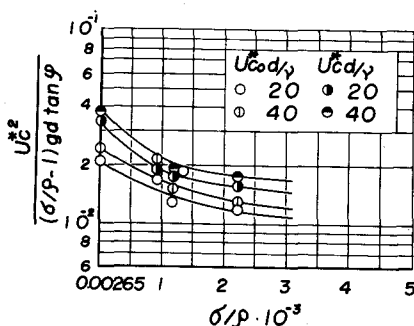


図-3.2 砂れきの移動限界に及ぼす相対密度の影響

以上述べたように、砂粒の移動限界には、相対密度がかなり大きな影響を及ぼすことがわかったが、これは観察の結果と関連させて考えると、砂粒の移動限界に対しては、流れの中での砂粒の微小な揺動の挙動を理論的に解析する必要があるものと考えられる。しかして、このような砂粒の動的な平衡条件から乱れの統計的特性との関係において移動限界を定義すべきであろうと考えられる。これに加えて、 $U_c^* d / \nu$ の小さい範囲においては、乱れの影響はさほど大きくないはずであるから、この範囲においては砂粒の動揺はむしろ起こらないものと考えられる。したがって、この範囲における水流の場合との相違は、移動限界の判定基準の相違と、粒子が微小になると粒子間に粘着性が発生するという点であるが、いずれにしても乾燥砂による詳細な実験を追加

すべきであろう。

4 砂れきの Saltation の理論

掃流砂れきの運動形態は、前述したように7つの基本的現象にわけられるので、砂れきの流送機構を解明するためには、これらのおおのの力学過程を究明し、それらの流砂力学系における相互関係を見出す必要があるが、いまだかような統一理論の試みは成功していないようである。したがって、ここでは単体粒子の Saltation の機構について述べる。

単体粒子の跳躍運動を取扱った研究としては、飛砂の場合を対象とした河村¹³⁾の理論があって、Bagnold による飛砂現象の特性を砂粒の Saltation に立脚して統一的に説明しようとしたすぐれた成果のあることは周知のとおりであり、また1964年Owen¹⁴⁾は同様に単体粒子の運動に基づいて Saltation layer 内の流速分布を求めて、fluxとしての流砂量を理論的に導くことを試みたが、これらはいずれも砂れきの初期速度を床面近傍の変動速度に対応させて摩擦速度と関係づけている。一方、水流による場合に対しては、前述したようにYalinや岸によってなされたが、これらはいずれも砂れきに作用する揚力を考慮し、初速度なしでとび出す運動として取扱ったものである。固定床における単体粒子の運動も、前述したように凹凸の場での運動であることに注意すべきであることから、ここではこの点に立脚して理論の展開を試みた著者^{16) 17) 18)}の考え方を述べることにしたい。

4.1 砂れきに作用する流体力

床面近傍における砂れきに作用する流体力としては、流れ方向の抗力とこれに垂直な揚力とが考えられるが、このうち揚力については、その測定がきわめて困難なために、抗力と同程度であるとするYalinや岸らの理論への適用にみられるものと、抗力に比べてかなり小さく約数分の1またはそれ以下であると考えられるものがある。この問題については、Chepil らが種々の観点から実験を行ってきたが、当初半球を用いて実験し、その後球を用いて測定がなされた。また、岩垣¹⁵⁾は限界掃流力に関する研究において、砂れきに作用する流体力を乱流理論を用いて計算したが、その結果によれば、揚力は抗力に比べてかなり小さいと考えられている。

いま、参考のためにChepilによる実験結果をChepilが採用した平均床面からの高さ Z と球の直径との比において、揚力と抗力との比を図示したものが図-4.1である。ただし、図中に示した k は粗度としてあたえた砂れきの大きさをあらわすが、この実験ではすべて $k \approx (1/2)d$ であり、またChepilが平均的な床面の高さとして採用したものは、粗面乱流の研究において砂れきの頂面より $0.25d$ とするこれまでの通常のものより若干低いように思われる。この結果によってわかるように、床面上における砂れきに作用する流体力の比は、 $z/d \approx 0.5$ 程度におけるものと考えられることから、約0.2程度以下であると推定される。Chepilはこの実験を通じて、揚力のみでは砂れきが床面より飛び出して Saltation をすることはできないと述べている。また、砂れきが静止から運動を開始した場合の観察と16mm撮影機による細な写真撮影の結果によると、すべての場合静止から直ちに上方に飛び出すものではなく、水平またはそれ以下のふみで飛び出すことを確かめ、前述したChepilの結論が妥当であるように考

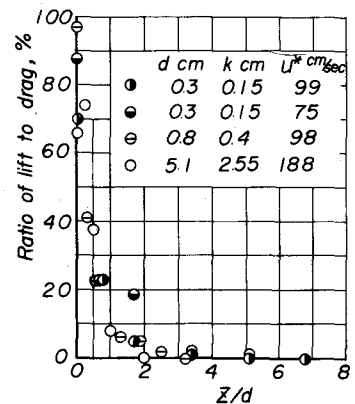


図-4.1 球に作用する揚力と抗力との比の床面からの高さによる変化 (Chepilによる)

えられた。

以上のように、床面近傍において砂れきに作用する揚力については、なお多くの問題があって、今後さらに詳細な検討を進める必要があるが、その理論的關係を求めることができない現在、凹凸の場での砂れきの運動を論ずることが、流砂力学の本質であると考えて、以下の考察においてはかような揚力は省略して理論を展開することにしたい。

4.2 転動機構と跳躍への移行条件

いま、静止している砂れきが移動を開始して、下流に流送されていく過程を考えると、静止から跳躍に移行するまでには、一般に転動過程が存在する。この転動過程に引き続いて跳躍と転動とがくり返され、ある砂れきは床面などの特性との関連においてやがて静止し、またある砂れきは継続的跳躍運動をくり返して流下するものと考えられる。したがって、ここでは、以上述べた順にしたがい、砂れきの転動、跳躍とくに継続跳躍および定常的な跳躍運動について、簡単な力学的モデルについて述べよう。

砂れき床面は、粒径程度の凹凸をもつ discrete な面であるので、ここでは砂れきと床面との接触点で、砂れきの回転のみでなく、すべりも生ずるものとして砂れきの運動を近似的に取扱えば、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} dU/dt &= -F(\pi/6)\rho d^3(\sigma/\rho + 1/2) + (3/4)C_D(u-U)^2/(\sigma/\rho + 1/2)d \\ (I + I_v)d\omega/dt &= F(d/2), \alpha U - (d/2)\omega = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.1)$$

ここに、 U ；砂れきの速度、 C_D ；抗力係数、 t ；時間、 u ；砂れき近傍の流速（ここでは摩擦速度を $\bar{u}$ として $u = A_t \bar{u}^*$ ）、 I ；砂れきの中心軸に関する慣性2次モーメント、 I_v ；仮想質量力に対応するもの、 ω ；砂れきの角速度、 F ；摩擦力、および α ；平均的に回転速度の $1/\alpha$ がすべりによる速度に変わるものと仮定した係数である。 $t = 0$ において $U = 0$ とした (4.1) 式の解は、

$$\begin{aligned} \tau &= \left\{ C_D/(\sigma/\rho + 1/2) \right\} (u^*/d) \text{ として} \\ U/u^* &= (3/4) \left\{ 1/(1 + 2\alpha/5) \right\} A_t^2 \tau \left[1 + (3/4) \left\{ 1/(1 + 2\alpha/5) \right\} A_t \tau \right]^{-1} \dots\dots\dots (4.2) \end{aligned}$$

したがって、平均的な動摩擦係数を $\bar{\mu}$ とすれば、転動条件はつぎのようになる。

$$\bar{\mu} \geq (3/10) \left\{ C_D/(1 + 2\alpha/5) \right\} (A_t - U/u^*)^2 \left\{ u^*/(\sigma/\rho - 1)gd \right\} \dots\dots\dots (4.3)$$

つぎに、運動が粒径程度の範囲に限られる場合には、床面は discrete な特性をもつために、砂れきには摩擦力は作用しないと考えるべきである。すなわち、このときは (4.1) 式において、 $F = 0$ となり、この解は、 $U/u^* = (3/4) \bar{u}^2 \tau / \left\{ 1 + (3/4) \bar{u} \tau \right\}$, $\bar{u} \equiv u/u^* \dots\dots\dots (4.4)$

以上の考察において、 $\alpha = 3$ とした (4.2) 式の関係は、転動に関する実験結果とよく一致することがわかった。つぎに、砂れきは静止から転動し始め、ある距離転動して速度を増すと、床面の砂れきと衝突して跳躍に移行すると考える。いま、その条件を砂れきの衝突時について角運動量およびエネルギー保存則を適用して求めると、つぎのようになる。

$$U_0^2/(\sigma/\rho - 1)gd \geq (5/\alpha^2)(d/d) \left[(\sigma/\rho) \left\{ 1 - (10/7)(d/d) \right\}^2 \right]^{-1} \dots\dots (4.5)$$

ここに、 U_0 ；高さ d の突起に衝突する直前の砂れきの速度である。(4.5) 式に (4.2) 式からえられる関係を代入すれば、跳躍に移行するまでの転動距離の平均値 ℓ_m は、近似的につぎのようにならわされる。

$$d^2 \left\{ 1/(1 + 2\alpha/5) \right\}^2 A_t^2 x / \left[1 + (3/4) \left\{ 1/(1 + 2\alpha/5) \right\} \sqrt{x} \right]^2 \geq$$

$$(4/9) \left[(d/d) / \{ 1 - (10/7) (d/d) \}^2 \right] (1/\tau^*) \dots\dots\dots (4.6)$$

ここに、 $x = \{ C_D / (\sigma/\rho + 1/2) \} (\ell_m/d)$, $\tau^* = u_*^2 (\sigma/\rho) / (\sigma/\rho - 1) g d$. 図-4.2は固定床における転動距離の実験値と(4.6)式の関係とを比較したものであるが、この結果から $d/d = 0.474$ と定められた。 τ^* の増加とともに ℓ_m/d は急速に減少するが、 $\ell_m/d \approx 1$ 以下になると、もはや砂れきの運動には摩擦力を考える必要がなく、(4.4)式が成立して跳躍に移行するものと考ええる。つぎに、転動距離の分布が discrete な床面の特性と転動距離に関係するものとし、衝突によって跳躍への試行がくり返されるとして、一様な試行過程を考え、移行確率の強度が一定であれば、5において述べる砂れきの流送過程の確率モデルと同様に、これは Poisson 過程として、

$$f_1(\xi) = \lambda_1 \exp(-\lambda_1 \xi), \quad \xi_m = \sigma_\xi = 1/\lambda_1, \quad \xi = \ell/d \dots\dots\dots (4.7)$$

であらわされ、またその強度が ℓ に比例するとすれば、Yule 過程として、

$$f_2(\xi) = A\xi \exp\{-(1/2)A\xi^2\}, \quad \xi_m = \sqrt{\pi/2A}, \quad \sigma_\xi = \sqrt{(4-\pi)/2A} \dots\dots\dots (4.8)$$

であらわされる。ここに、 ξ_m ; 平均値および σ_ξ ; 標準偏差、である。図-4.2には、(4.7)および(4.8)式の関係を示してあるが、これから Poisson 過程としてあらわされ、跳躍に移行するときの砂れきの初速度は一定に保たれると考えられよう。

4.3 初期跳躍 (First saltation) ¹⁶⁾

運動方程式は、近似的に次式であらわされる。

$$\left. \begin{aligned} dW/dt &= \mp (3/4) C_{D1} W^2 / (\sigma/\rho + 1/2) d - (\sigma/\rho - 1) g / (\sigma/\rho + 1/2) \\ dU/dt &= (3/4) C_{D2} (u - U)^2 / (\sigma/\rho + 1/2) d \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.9)$$

ここに、 C_{D1} および C_{D2} ; それぞれ鉛直および水平方向の抗力係数であるが、両者は等しいと仮定する。 $t = 0$ において $W = W_0$ および $U = U_0$ とした解は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{W} &= K \left\{ (\bar{W}_0/K) - \tan K\tau \right\} / \left\{ 1 + (\bar{W}_0/K) \tan K\tau \right\} \\ \bar{U} &= \bar{u} - (\bar{u} - \bar{U}_0) / \left\{ 1 + (\bar{u} - \bar{U}_0) \tau \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.10)$$

ここに、 $\bar{W} = W/u_*$, $\bar{U} = U/u_*$, $K^2 = (4/3) \{ (\sigma/\rho - 1) g d / u_*^2 C_D \}$ また、砂れきが落下する床面直前の速度 $\bar{W}_0$ および $\bar{U}_0$ は、 $\bar{W}_0 = -K (\bar{W}/K) / \{ 1 + (\bar{W}/K)^2 \} \approx \bar{W}_0$, $\bar{U} = \bar{u} - (\bar{u} - \bar{U}_0) / \{ 1 + 2(\bar{u} - \bar{U}_0) \bar{W}_0 / K^2 \} \dots\dots\dots (4.11)$

(4.11) 式をさらに積分して砂れきの跳躍高さ H_m および距離 L_m を求めれば、

$$H_m/d = (2/3) \left\{ (\sigma/\rho + 1/2) / C_D \right\} \log \left\{ 1 + (\bar{W}_0/K)^2 \right\} \approx (2/3) \left\{ (\sigma/\rho + 1/2) C_D \right\} (\bar{W}_0/K)^2 \dots\dots\dots (4.12)$$

$$L_m/d \approx (4/3) \left\{ (\sigma/\rho + 1/2) / C_D \right\} \left\{ 2\bar{u}\bar{W}_0/K^2 - \log | 2(\bar{u} - \bar{U}_0)\bar{W}_0/K^2 + 1 | \right\} \dots\dots\dots (4.13)$$

前述したように、転動から跳躍へ移行するときの砂れきの初速度は一定に保たれるので、 $\ell_m/d \geq 1$ の場合 (4.2) 式によって求め、また $\ell_m/d \leq 1$ の場合には (4.4) 式によって求め、(4.12)式に代入すると、

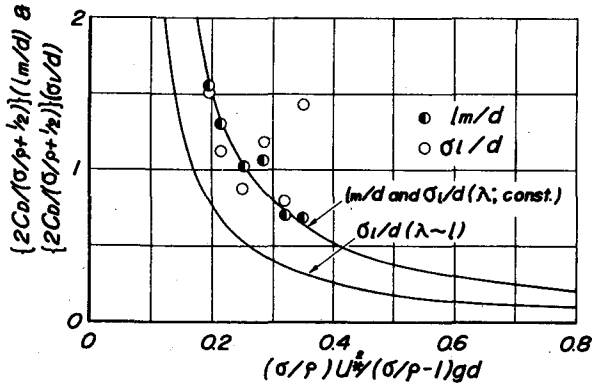


図-4.2 砂れきの転動距離の掃流力による変化

$$\left. \begin{aligned} H_m/d &\approx (5/2)(\beta/\alpha)^2 (\sigma/\rho + 1/2) \left[(A/d)/(\sigma/\rho) \left\{ 1 - (10/7)(A/d) \right\}^2 \right] \\ &; \ell_m/d \gtrsim 1 \\ H_m/d &\approx (1/2)\beta^2 A^2 (\sigma/\rho + 1/2) \left\{ 2N/(1+\sqrt{2N})^2 \right\} \left\{ u^2/(\sigma/\rho - 1)gd \right\} ; \ell_m/d \lesssim 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

ただし、 $N = (3/4) \{ C_D / (\sigma/\rho + 1/2) \}$ 、 $\bar{W}_0 = \beta \bar{U}_0$ これらの関係は著者らおよび岸らの実験とも一致する。

また、砂れきの跳躍高さの分布が衝突時の速度変動に起因すると仮定すれば、

$$f_3(\bar{U}_0) d\bar{U}_0 = f_1(\xi) d\xi, f_4(\bar{H}) d\bar{H} = f(\bar{U}_0) d\bar{U}_0 \quad (4.15)$$

であるから、 $\ell_m/d \gtrsim 1$ に対して、

$$f_4(\bar{H}) = (A_r/D) (d/\ell_m) \zeta \left\{ 1/(A_r - \sqrt{\zeta \bar{H}})^3 \right\} \exp \left\{ -(1/D) (d/\ell_m) (\zeta \bar{H}) / (A_r - \sqrt{\zeta \bar{H}})^2 \right\} \quad (4.16)$$

ここに、 $1/\zeta = (1/2)\beta^2 (\sigma/\rho + 1/2) \{ u^2/(\sigma/\rho - 1)gd \}$ 、 $D = (3/4) \{ 1/(1+2\alpha/5) \}$

これに対して、 $\ell_m/d \lesssim 1$ の場合には $\bar{u}$ に対して Gauss 分布を仮定すれば、後述する stationary saltation の場合と同様な分布式がえられる。これらのうち (4.16) 式については、すでに著者らの実験値と比較されたが、 $\ell_m/d \lesssim 1$ の場合については、実験の都合上まだ比較されていない。

4.4 砂れきの反発機構 17, 18)

図-4.3のように、砂れきの衝突による反発を考えることにすれば、反発係数を e として、次式が成立すると仮定する。

$$\begin{aligned} -eV_1 \cos(\gamma - d) &= V_2 \cos(\pi - \beta - \gamma), V_1 \sin(\gamma - \alpha) = \\ V_2 \sin(\pi - \beta - \gamma) \end{aligned} \quad (4.17)$$

これから、 $\bar{W}_0$ と $\bar{W}_1$ および $\bar{U}_0$ と $\bar{U}$ との関係を求め、さらに、

$$\bar{U}_1 = \partial_1 \bar{W}_1, \bar{U}_0 = \partial_2 \bar{W}_0 \text{ および } b_1 = (1+e) \tan \gamma,$$

$b_2 = (1-e \tan \gamma) b_3 = (\tan^2 \gamma - e)$ を用いれば、つぎの関係がえられる。

$$\bar{U}_0 = e \bar{U}_1, \bar{W}_0 = e \left\{ b_1 \bar{U}_1 + b_2 \bar{W}_1 \right\} / \left\{ b_3 + b_1 (\bar{W}_1 / \bar{U}_1) \right\} \quad (4.18)$$

4.5 砂れきの successive saltation の機構 17, 18)

図-4.4は前述した関係を用いて、図中に示した条件のもとに、跳躍のくり返しを計算して、そのときの速度の変化を示した一例である。この結果において、おのおののまる印は Saltation の回数に

対応するが、これから初期条件をとわず4~5回の saltation によって各回の初速度が一定値になることがわかる。このような saltation をここでは stationary saltation ということにする。いま、 k 回目の saltation において、この stationary saltation に達したとすれば、つぎの関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_{0,k} &= P \bar{u}, \bar{W}_{0,k} = Q' \bar{u} \\ \bar{U}_{0,k+1} &= \bar{U}_{0,k}, \bar{W}_{0,k+1} = \bar{W}_{0,k} \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

したがって、これらの関係に (4.11) および (4.18) 式を代入し、 $\bar{U}_{1,k}$ 、 $\bar{W}_{1,k}$ および

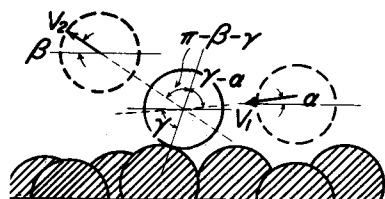


図-4.3 反発機構図

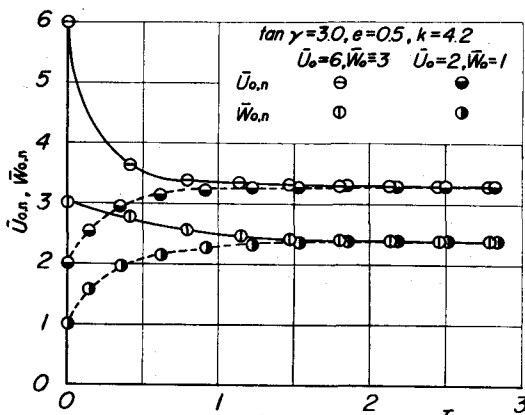


図-4.4 砂れきの継続跳躍の計算例

$\bar{U}_0, k+1, \bar{W}_0, k+1$ を $\bar{u}, P\bar{u}/K, Q'\bar{u}/K, e, b_1, b_2$ および b_3 などの関数としてあらわすことができ、これらの諸式から P', Q', e および $\tan \tau$ の関係を求めると次式がえられる。

$$P' = e \left\{ 1 - (1 - P') / \left\{ 1 + 2(1 - P') Q' (\bar{u}/K)^2 \right\} \right\}, \quad Q' = e \left\{ (b_1/e) P' - b_2 Q' / (b_3 - b_1 e (Q' / P')) \right\} \quad (4.20)$$

これから、一般に $Q' \leq P'$ であることに注意して P' および Q' について解き、若干変形すれば、

$$P' = \left\{ (1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e) / \left\{ \lambda (\bar{u}/K)^2 \right\}} \right\} / 2, \quad Q' = \lambda' P' \quad (4.21)$$

したがって、これらを (4.19) 式に代入すれば、stationary velocity $\bar{U}_s$ および $\bar{W}_s$ は、近似的に、

$$\bar{U}_s = \left\{ (1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e) / \left\{ \lambda (\bar{u}/K)^2 \right\}} \right\} \bar{u} / 2, \quad \bar{W}_s = \lambda \left\{ (1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e) / \left\{ \lambda (\bar{u}/K)^2 \right\}} \right\} \bar{u} / 2 \quad (4.22)$$

この結果から、stationary saltation をとる条件がえられる。たとえば、 $\bar{U}_s = \bar{W}_s = 0$ として、

$$u_*^2 / (\sigma/\rho - 1) g d = (2/3) (1/C_D) \left\{ (1-e) / e \lambda \bar{u}^2 \right\} \quad (4.23)$$

がえられるが、これは通常の限界掃流力とは当然相違する。

以上の考察からつぎのことがいえるであろう。

(i) 掃流力が (4.23) 式で与えられる値より大きい場合には、反発と跳躍をくり返して下流方向に移動していく砂れきは、一般に河床条件と掃流力で規定される一定の跳躍速度を有するようになり、その跳躍における初速度は、(4.22) 式であらわされる。

(ii) (4.22) 式において $K \rightarrow 0$ すなわち掃流力が無限大になったときには、 $\bar{U}_s$ は $e\bar{u}$ という値をとり、その場合には $\bar{W}_s$ は $\lambda e\bar{u}$ なる値をとる。このことは、掃流砂れきの saltation においては、砂れきがとる定常速度が $e\bar{u}$ および $\lambda e\bar{u}$ を越える値はとらないということを示している。

つぎに stationary saltation における跳躍特性を $\bar{W}_0/K \ll 1$ として近似した場合について述べるが、さらに一般的な場合に対しても可能である。(4.13) 式において $(\bar{u} - \bar{U}_0) \bar{W}_0/K^2 \ll 1$ とした式に (4.18) 式に代入すれば、砂れきの跳躍高さおよび跳躍の平均値 $\bar{H}_m$ および $\bar{L}_m$ は、それぞれ次式のようにあらわされる。

$$\bar{H}_m \doteq (1/6) (\sigma/\rho + 1/2) \lambda^2 \left\{ (1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e) / \left\{ \lambda (\bar{u}/K)^2 \right\}} \right\}^2 (\bar{u}/K)^2 \\ \bar{L}_m \doteq (2/3) (\sigma/\rho + 1/2) \lambda^2 \left\{ (1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e) / \left\{ \lambda (\bar{u}/K)^2 \right\}} \right\} (\bar{u}/K)^2 \quad (4.24)$$

したがって、これから $\lambda \doteq 4 (\bar{H}_m / \bar{L}_m)$

$$(4.25)$$

図-4.5 は単体砂れきが移動を開始してより、第4, 5および6回目の跳躍がほとんど stationary saltation になっていると考えて、上式と実験結果とを比較したものである。実験値はかなりばらついてはいるが、よく一致するといつてよく、この場合 e の値は実験結果から 0.89 と定められた。(4.22) 式の関係は単一砂れきの場合 $\lambda = 0.4$ として実験値によく適合する。

つぎに、定常跳躍における跳躍高さおよび距離の分布特性について考える。前述した stationary velocity は一般に砂れき間の衝突や速度の変動あ

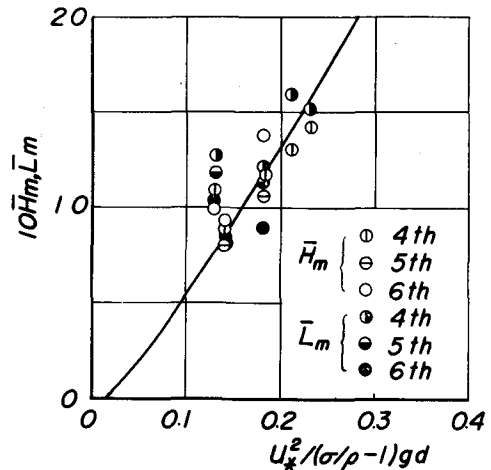


図-4.5 単体砂れきの stationary saltation における跳躍高さおよび距離の掃流力による変化

るいは衝突時の角度の分布などによって、あるばらつきを示す。いまこの速度の確率密度関数が次式であらわされるとする。

$$f_1(\bar{U}) = (1/\sqrt{2\pi})(1/\sigma_{\bar{U}}) \exp\{-(\bar{U}-\bar{U}_s)^2/2\sigma_{\bar{U}}^2\}, \sigma_{\bar{U}} = \epsilon \bar{U}_s, \bar{W} = \lambda \bar{U} \dots\dots\dots (4.26)$$

であるとすれば、跳躍高さの確率密度関数 $f_0(\bar{H})$ は、(4.12)式と(4.24)式とより、

$$f_0(\bar{H}) = (1/2\sqrt{2\pi})(1/\epsilon\sqrt{\bar{H}\bar{H}_m}) \exp\{-(\sqrt{\bar{H}}-\sqrt{\bar{H}_m})^2/2\epsilon^2\bar{H}_m\} \dots\dots\dots (4.27)$$

同様に、跳躍距離に対してはその密度関数 $f_1(\bar{L})$ は

$$f_1(\bar{L}) = (1/2\sqrt{2\pi})(1/\epsilon\sqrt{\bar{L}\bar{L}_m}) \exp\{-(\sqrt{\bar{L}}-\sqrt{\bar{L}_m})^2/2\epsilon^2\bar{L}_m\} \dots\dots\dots (4.28)$$

図-4.6および4.7は、それぞれ $f(\bar{H})$ および $f(\bar{L})$ に対する実験値と理論値との比較を示したもので、図中の曲線は $\bar{H}_m$ および $\bar{L}_m$ として便宜上実験値を用い、かつ $\epsilon = 0.2$ とした場合の(4.27)および(4.28)式の関係を示している。これらの図からわかるように、理論値と実験値とはともにその分布形が平均値よりも左側に片寄るという傾向を示し、両者は非常に一致を示しており、したがって(4.26)式の仮定は、物理的にも妥当なものであるといえよう。また、このことは、水流中を移動する砂れきの運動において、前述したような定常状態とでも呼ぶべき運動状態が存在することが、その跳躍高さおよび距離の分布特性を検討することからも確認できたということを示している。

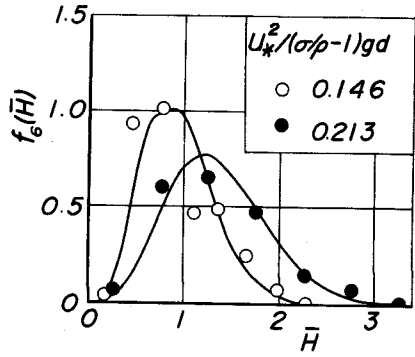


図-4.6 単体粒子の跳躍高さの分布特性

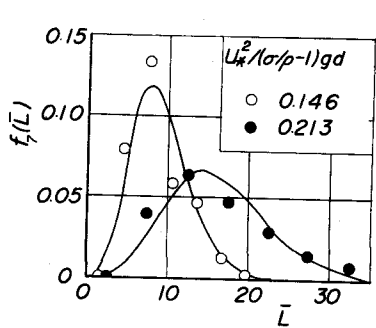


図-4.7 単体粒子の跳躍距離の分布特性

つぎに、(4.27)および(4.28)式における標準偏差の掃流力による変化について考える。これらの式によって、標準偏差 σH とし、分散 σH^2 を求めると、次式のようにあらわされる。

$$(\sigma_H / \bar{H}_m)^2 = (\sigma_L / \bar{L}_m)^2 = (1/2\sqrt{\pi}\epsilon) \int_0^\infty x^4 \exp\{-(1/2\epsilon^2)(x-1)^2\} dx - 1 \dots\dots\dots (4.29)$$

これから $\epsilon = 0.2$ と仮定した場合には、これら標準偏差と平均値との比は0.49程度となり、無次元掃流力に関係ないことになる。したがって、標準偏差は平均値に比例することがわかる。この事実を実験値との比較によって確かめると、若干のばらつきはあるが、これらの値は無次元掃流力に関係なく一定値となり、 $\epsilon = 0.2$ と仮定した理論値にはほぼ一致することがわかった。これらのことから、固定床における砂れきの運動が定常状態になった場合には、砂れきが跳躍の開始時においてとる初速度の分布は、Gauss分布に従い、その標準偏差は無次元掃流力にかかわらず、平均値の約0.2倍になると結論づけられよう。

5 砂れきの流送機構

掃流砂れきの流送機構は、一般にきわめて複雑であるので、その特性を究明する方法としては種々のものが考えられるが、ここでは前述した砂れきの saltation の機構を中心とした場合と砂れきの流

送過程を1つの確率過程と考えた場合とについて、それぞれ水理特性との関係を考察してみたい。ただし、このうち前者は実験結果の都合上河床形態からいえばいわゆる plane bed の場合に限定されるが、後者の場合は plane bed から ripple bed または dune bed に対しても、その流送機構を考察するつもりである。

5.1 掃流砂れきの流送過程

砂れきの流送機構は前述したようにかなり複雑であるが、これをよく観察すると、一般に休止している砂れきはある微小な動揺をしており、これが流体力または流送されてきた砂れきの衝突によって移動を始め、それが一定距離を移動したあとで休止する。この運動過程は不規則かつ継続的な運動のくり返しであって、ここではこの現象を確率論的な考え方を導入することによって、その特性を考察する。1937年 Einstein はすでにこの考え方に立脚して、砂れきの流送過程を究明し、有名な流砂量公式を導いた。その後 Crickmore および Lean や Hubbell および Sayre ら¹⁹⁾によって確率過程として取扱われ、さらに Sayre および Conover²⁰⁾によって ripple bed または dune bed の場合に対しても拡張された。以下これらの諸研究と確率過程としての流砂特性を調べた著者ら²¹⁾と Grigg²²⁾による研究に基づいて、砂れきの流送機構を考察することにした。

1) Plane bed における砂れきの流送の確率モデル^{19) 21)}

河床砂れきと同じ輸送特性をもつトレーサとしての砂れきが、時刻 $t = 0$ で原点 $x = 0$ から移動を開始するとしよう。この砂れきの移動は不規則かつ継続的な運動の反復現象であるとみなされるから、Einstein が提案した step の概念を導入することによって、その移動を確率過程で表示することができる。この 1 step は、砂れきが休止から移動を開始し、ふたたび休止するまでの過程である。砂れきの移動過程は距離に関して一様であること、将来の変化は過去の変化と独立であることの2つを仮定することにして、すなわち、このことは step をとる確率が区間の長さのみに依存し、この区間の位置および系の過去の履歴に独立であるということであって、これから砂れきの移動を数学的表現であらわすと、つぎようになる。このような考え方は、すでに 1937年 Einstein によってなされたもので、その後 Sayre および Hubbell らによって再検され、また著者らによっても若干の考察がなされてきたものである。以下、主として砂れきの流下方向のみの分散過程について考える。

1 個のトレーサとしての砂れきがある不規則な長さの増分 $(x, x+h)$ に存在する間に 1 回以上の step をとる確率を $\lambda_1 h + o(h)$ とし、またその間で step をとらない確率を $1 - \lambda_1 h - o(h)$ とする。ここに、 λ_1 はすべての着色砂れきに対して一定な単位長さ当りの移動確率を表わす確率定数であり、 $o(h)$ は h よりも小さいオーダーの量を示す。1 個の砂れきが区間 $(0, x+h)$ を流下するとき、step が n 回生起する確率 $p(n; x+h)$ に関する微分方程式は、つぎのように容易に導かれる。

$$dp(n; x)/dx = -\lambda_1 p(n; x) + \lambda_1 p(n-1; x) \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

$n = 0$ の場合には、

$$dp(0; x)/dx = -\lambda_1 p(0; x) \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

となり、初期条件 $p(0; 0) = 1$ および $p(n; 0) = 0$ を用いると、(5.1) および (5.2) 式の解は、

$$p(n; x) = e^{-\lambda_1 x} (\lambda_1 x)^n / n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

なるポアソン分布となる。また n step を終えた砂れきが距離 x に存在する確率は $1 - \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda_1 x} (\lambda_1 x)^i / i!$ となり、これは n 回の step を終了した砂れきの位置に対する分布関数をあらわすので、これに関する x の微分は確率密度関数となる。

$$f(x; n) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} (\lambda_1 x)^{n-1} / (n-1)! \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

ここに、 $f(x; n)$; トレーサとしての砂れきが n 回 ($n \geq 1$) の step を終えたときの位置に関する

る確率密度関数であり、 $\Gamma(n)$; ガンマ関数をあらわす。(5.4)式において $n=1$ とおけば、砂れきが1回のstepで移動する確率密度関数がえられる。すなわち、

$$f(x;1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \dots\dots\dots (5.5)$$

上式から明かなように、砂れきが1stepで移動する距離は指数分布にしたがう。このことは非常に興味深いことであって、砂れきの1stepの移動距離は場の偶然性に支配されるが、数多くの試行をくり返せば、(5.5)式に従うことを意味している。砂れきが n stepで流下する平均移動距離は(5.5)式を用いると、つぎのように求まる。

$$\int_0^\infty x f(x;n) dx = n/\lambda_1 \dots\dots\dots$$

したがって、Einsteinが定義した1stepの平均移動距離 $\bar{l}$ は $1/\lambda_1$ となる。

つぎに、時間に関する砂れきの移動を考えることにする。砂れきが休止し始めいわゆる rest periodを終了して、さらに移動を終えるまでの過程を時間に関するstepと定義すれば、距離に関する場合と同様にあらわすことができる。1個の砂れきが時間 $(0, t)$ において、 n stepとる確率は(5.3)式と類似の次式によってあらわされる。

$$p(n;t) = e^{-\lambda_2 t} (\lambda_2 t)^n / n! \dots\dots\dots (5.6)$$

ここに、 λ_2 は単位時間当りの移動確率で、すべての砂れきに対して一定である。さらに、(5.6)式から $n=0$ とおけば、砂れきが原点に残留する確率 $P(0;t)$ としては、次式がえられる。

$$P(0;t) = e^{-\lambda_2 t} \dots\dots\dots (5.7)$$

したがって、(5.4)式と同様に n 回のrest periodに対する確率密度関数 $f(t;n)$ は、つぎのようにあらわされる。

$$f(t;n) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} (\lambda_2 t)^{n-1} / \Gamma(n) \dots\dots\dots (5.8)$$

したがって、(5.8)式において $n=1$ とすれば、(5.5)式と同様に、

$$f(t;1) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \dots\dots\dots (5.9)$$

となる。

いま、時刻 $t=0$ で時間に関するstepを砂れきがとりはじめたとしよう。そうすれば、距離に関するstepを n 回とった砂れきは、時間に関するstepを n 回とることになり、時刻 t における n stepをとった砂れきの位置に関する確率密度関数は、次式のようにあらわされる。

$$f_t(x;n) = f(x;n) p(n;t) \dots\dots\dots (5.10)$$

ここに、 $f_t(x;n)$ は時刻 t において n stepをとった砂れきの確率密度関数をあらわす。したがって、すべてのstep数の確率密度関数の和を求めれば、砂れきの位置に対するつぎの確率密度関数がえられる。

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(x;n) p(n;t) \\ &= \lambda_1 e^{-(\lambda_1 x + \lambda_2 t)} (\lambda_2 t / \lambda_1 x)^{1/2} I_1(2\sqrt{\lambda_1 x \lambda_2 t}) \dots\dots\dots (5.11) \end{aligned}$$

上式において、 $I_1(2\sqrt{\lambda_1 x \lambda_2 t})$ は1次の変形ベッセル関数である。(5.9)式からトレーサーとしての砂れきの平均移動距離 $\bar{x}$ および分散 σ^2 は、それぞれつぎのようにあらわされる。

$$\bar{x} = \int_0^\infty x f_t(x) dx = (\lambda_2 / \lambda_1) t \dots\dots\dots (5.12)$$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x - \bar{x})^2 f_t(x) dx = 2\lambda_2 t / \lambda_1^2 - (\lambda_2 t)^2 e^{-\lambda_2 t} / \lambda_1^2 \div 2\lambda_2 t / \lambda_1^2 \dots\dots (5.13)$$

2) Ripple または dune bed における砂れきの流送の確率モデル²⁰⁾

以上述べた確率モデルは、砂れきの流下方向における分散の特性をあらわそうとしたものであるがこれに対して、床面に ripple または dune が形成されるような場合には、このような分散過程のほか、鉛直方向への分散も考える必要がある。Sayre および Conover らはこれら両方向の分散を考え

たいわゆる2次元の確率モデルをつぎのように提案している。いま、砂れきの流下方向と図-5.1に示すような床面の時間的変化によって生ずる鉛直方向の確率変数をそれぞれ X_i および Y_i とし、また $N(t)$ を時間 t 内において砂れきをとる step

の数とすれば、それら両者の和の分布関数は、

$$F_t(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p \left[\sum_{i=0}^N (X_i \leq x), \sum_{i=0}^N (Y_i \leq y), (N=n) \right] \dots \dots \dots (5.14)$$

したがって、これから確率密度関数 $f_t(x, y)$ は、(5.4)式を求めたときと同様に、(5.12)式の微分としてつぎのようにあらわされる。

$$f_t(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_t(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x; n) f(y) \int_0^t f(t'; n) \int_{t'-1}^{\infty} f(\tau/y) d\tau dt' \dots \dots \dots (5.15)$$

ここに、 $f(y)$ ；図-5.1に示したように、砂れきが堆積しているところの高さ y に対する確率密度関数であり、また $f(\tau/y)$ ；砂れきが y によってあたえられる rest period に対する密度関数であって、次式であらわされる。

$$f(t; 1) = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(t/y) f(y) dy \dots \dots \dots (5.16)$$

(5.15) および (5.16) 式を計算するためには、それぞれの確率密度関数を知る必要があるが、これらのうち $f(t; 1)$ は直接トレーサーなどによって測定できるが、 $f(t/y)$ は ripple または dune としてあらわされる床面の形態の測定結果から推定しなければならないであろう。また、そのほかの密度関係についても、1) で述べた結果と同様にあらわされるので、トレーサー法などによって、ripple または dune bed の場合の流送機構をこの観点から追求することができよう。

3) トレーサー法による流砂量の推定²¹⁾

つぎに、前述した確率モデルにしたがって、トレーサーを用いた流砂量の推定について考察しよう。トレーサーの平均移動速度は1) および 2) のいずれの場合に対しても (5.12) 式から λ_2/λ_1 となり、これは砂れきの平均移動速度をあらわすので、流砂量は砂れきの移動層内の砂れきの個数にその平均移動速度 λ_2/λ_1 と砂れき体積を乗じることによって求められ、次式のようにあらわされる。

$$q_B = k_1 d^3 \delta (\lambda_2 / \lambda_1) \dots \dots \dots (5.17)$$

ここに、 q_B ；単位時間単位幅当りの流砂量、 k_1 ；砂れきの形状によって決定される定数、および δ ；砂れきの移動層の厚さ、である。たとえば、plane bed でかつ平均的に、砂れきの移動層の厚さが砂れき一層程度であると仮定される場合には、(5.17)式はつぎのようにあらわされる。

$$q_B = k_1 d^3 (\lambda_2 / \lambda_1) (1/k_2 d^2) \dots \dots \dots (5.18)$$

ここに、 k_2 は k_1 と同様な定数である。これに対して、ripple または dune bed の場合には、前述した確率密度関数 $f(y)$ や床面の形態とも関連して、(5.17)式における砂れきの移動層の厚さ δ の推定が重要な問題となってくるわけである。

4) 砂れきの流送機構の確率過程としての特性^{21) 22)}

ここでは、以上述べた確率モデルにしたがって、砂れきの流送過程を考察した若干の結果について述べる。

(a) 確率モデルの適合性

まず、plane bed に対してトレーサーとしての砂れきの rest period の確率分布を示したものの1

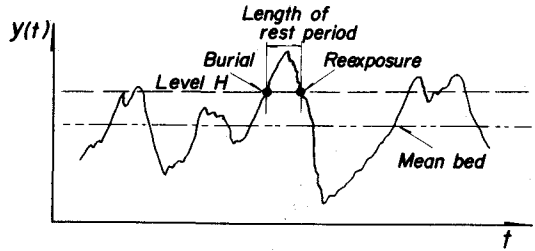


図-5.1 Rippe または dune bed における rest period の定義

例が図-5.2であり、また step lengthの分布を示したものが図-5.3である。これから明らかなように、それぞれ(5.7)および(5.5)式であらわされる関係ときわめてよく一致しており、確率モデルの適合性の1つを実証しているが、いいかえればこのような流送過程は十分一様な確率過程の場合であることをあらわしている。

さらに、図-5.4には(5.12)式であらわされるトレーサーとしての砂れきの平均移動距離 $\bar{x}$ と(5.13)式であらわされる分散 σ^2 の時間的変化を示したが、いずれもこの確率モデルの適合性を実証していることがわかる。

つぎに、図-5.5は Sayre および Hubbel によって行なわれた Loup River における現地のトレーサー実験の結果の一部であるが、これらの結果からトレーサーの分布のPeak値の時間的変化を示したものが図-5.6であり、図中には(5.11)式による理論曲線と比較のために正規分布を仮定した場合の関係も示してある。これから、前述した確率モデルが実河川の ripple または dune bed の場合に対しても、砂れきの流下方向への分散過程に対して適用されることがわかる。

(b) 確率定数の水理特性

砂れきの流送機構を確率モデルによってあらわす場合には、そのなかに含まれる確率定数と水理量との関係が重要になる。まず、図-5.7は砂れきの1 stepの平均移動距離 ℓ と粒径 d との比 ℓ/d ($=1/\lambda_1 d$)と掃流力との関係を示したものであるが掃流力は限界掃流力を差引いた流れの強度

$$\left[\frac{(1/\psi - 1/\psi_c) = (u_*^2 - U_*^2)}{(\sigma/\rho - 1)gd} \right]$$

との関係であらわし、図中には比較のため

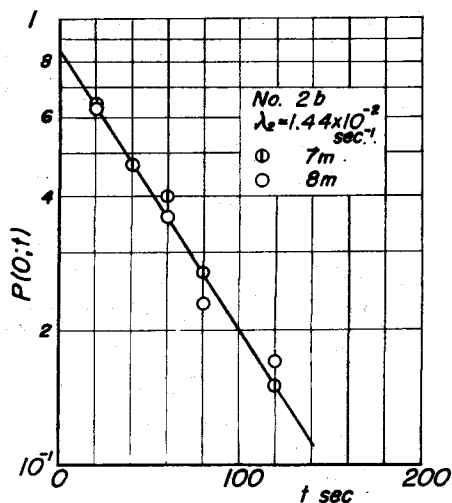


図-5.2 plane bedにおけるrest periodの確率

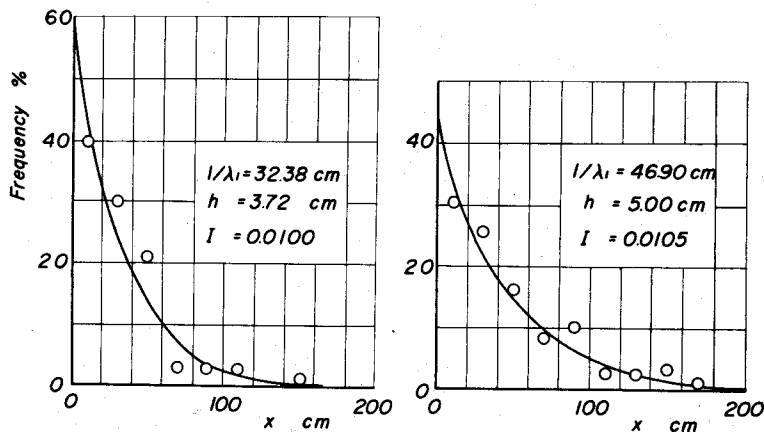


図-5.3 Plane bedにおけるstep lengthの分布

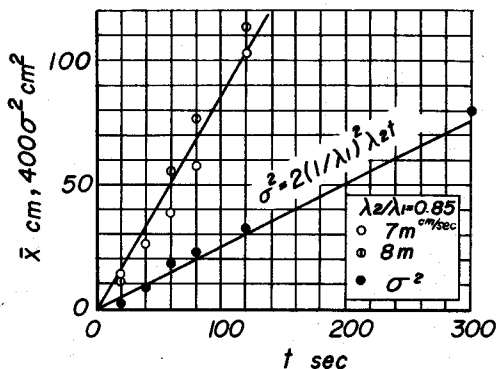


図-5.4 砂れきの平均移動距離 $\bar{x}$ と分散 σ^2 の時間的変化

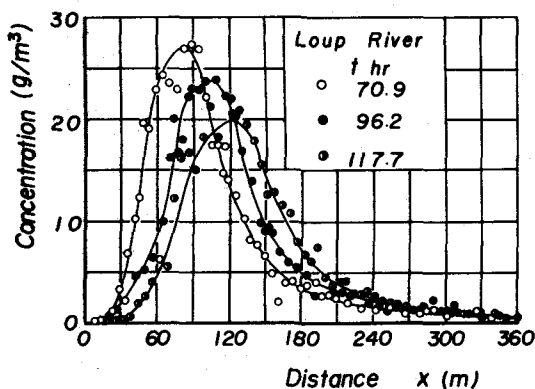


図-5.5 Loup Riverにおけるトレーサー実験の一例

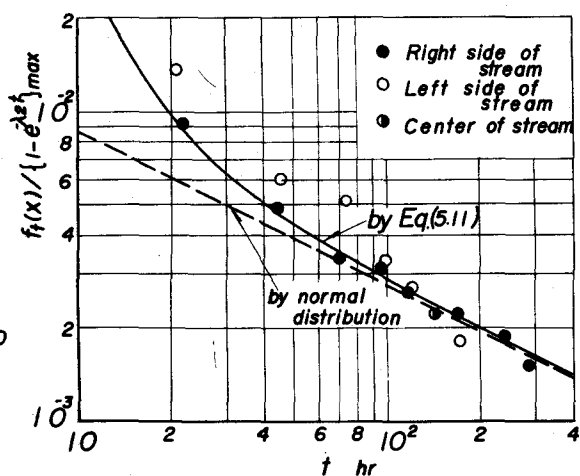


図-5.6 トレーサーの分布における無次元 peak 値の時間的変化 (Loup River の実験)

に砂れきの平均移動距離に関する Einstein の理論曲線と Grigg による ripple または dune bed の場合の実験値および Sayre らによる Loup River における実測値も示してお

いた。また、図-5.8 は plane bed および ripple または dune bed のそれぞれに対して、無次元移動確率の流れの強度による変化を示したものである。これらの結果から、砂れきの流送特性として、つぎのことがわかる。Plane bed に相当する Grigg や Sayre らの実験値を除いた結果によれば、1 step の平均移動距離は約 $80d \sim 300d$ の範囲であり、実験値は非常にばらついているが、 $(1/\psi - 1/\psi_c)$ の値が 0.07

の付近で最小値をとっているようにみうけられる。流れの強度が 0.07 よりも小さいところでは、流れの強度の減少とともに 1 step の平均移動距離は増大の傾向があり、それよりも大きいところでは、流れの強度

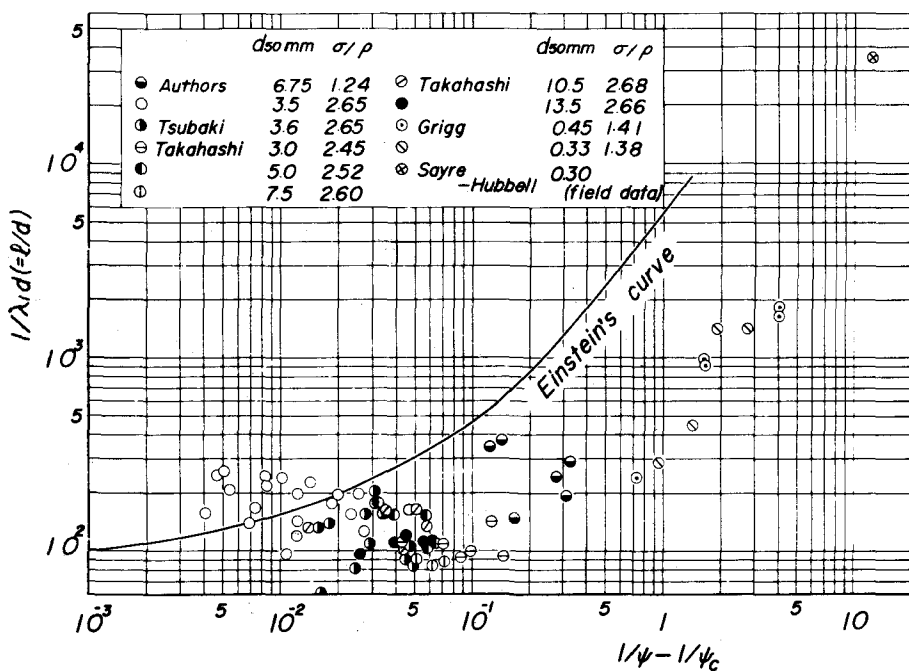
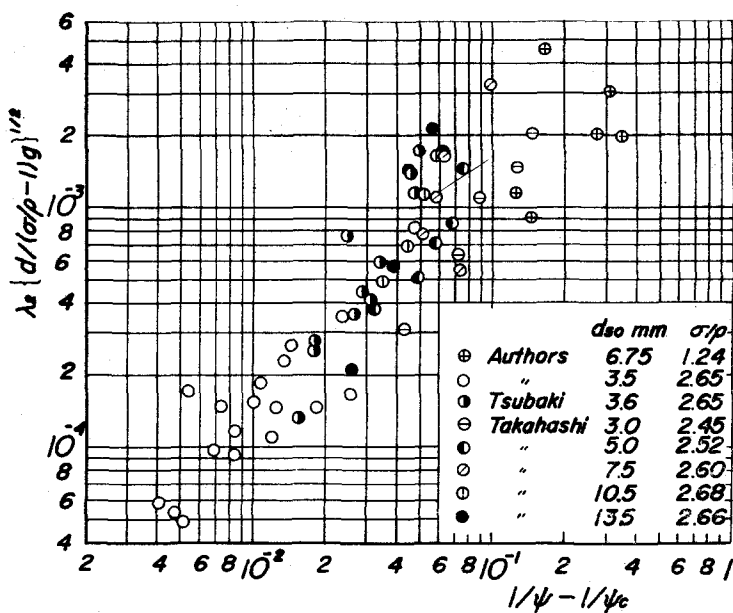
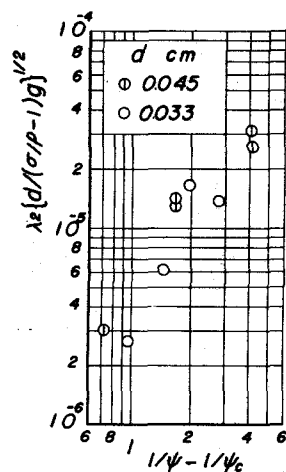


図-5.7 砂れきの無次元平均移動距離の流れの強度による変化



(a) Plane bed の場合



(b) Ripple - dune bed の場合 (Grigg の実験)

図-5.8 無次元移動確率の流れの強度による変化

の増加とともに1 stepの平均移動距離も若干増大している。さらに、流れの強度が大きくなって、rippleまたはdune bedになると、急激に平均移動距離が増加するようであるが、さらに多くの実験値を加えて検討すべきであろう。

さらに、図-5.8に示したように、砂れきの単位時間当りの移動確率は流れの強度の増加にともなって、きわめて敏感に増加しているが、1 stepの平均移動距離にはそうした傾向は見られない。これらのことから砂れきが1 stepを移動して停止する機構は、掃流力に支配されているというよりはむしろ河床を構成している砂れきによって決定される強さおよび大きさをもった乱れと砂れきの配列状態や河床の形態に依存しているように思われる。また、すでに椿ら¹¹⁾が指摘しているように、掃流力の増加にともなって流砂量が増加するのは1 stepの平均移動距離が増大するのではなく、主としてその単位時間当りの移動確率の増加に起因していると考えられる。したがって、掃流力の増加にともなって、砂れきのrest periodは減少すると考えられ、さらに掃流力が増加すると終局的には浮遊に移行するものと考えられる。

つぎに、rippleまたはdune bedにおける2,3の特性について、つけ加えておこう。まず、図-5.8から明らかなように、この場合にはrippleやduneのために、砂れきの移動確率はきわめて小さくなるのがわかる。また、図-5.9はdune bedにおける砂れきのstep lengthとdune lengthの分布特性を比

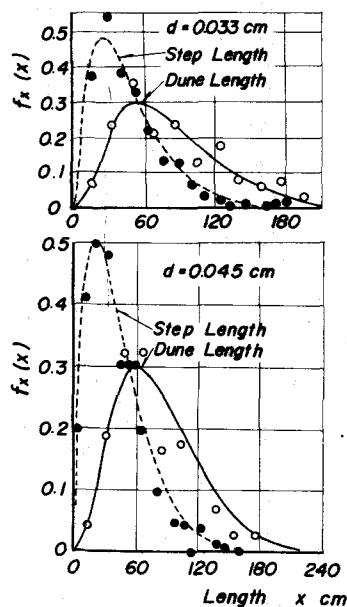


図-5.9 Dune bedにおけるstep lengthとdune lengthの分布(Griggによる)

較したものの1例であるが、図中に示した理論曲線から両者の対応がよくわかり、後者の方が若干大きくなるようである。また、図-5.10は河床の形態の測定結果から、図-5.1に示した平均河床として、河床変動の標準偏差を基準としたおのおのの高さについて(5.16)式における密度関数 $f(t/y)$ を求めたものの1例であるが、これからほぼ指数分布に近いことがわかる。図-5.11はこの場合の平均のrest periodと河床の標準偏差との関係を示したものであり、図中にはGriggが示した直線を引いておいたが、むしろ流れの強度に関係なく両者に1つの傾向があるようにみうけられる。したがって、以上のように、河床形態との対応から未知の密度関数が明らかになってくれば、(5.15)式で示される確率モデルによって、rippleまたはdune bedにおける砂れきの分散過程を究明することができよう。なお、(5.17)および(5.18)式による流砂量の推定については、かなり有効な方法として考えられるが、ここでは砂れきの運動機構に主体をおいたので省略したい。

5.2 掃流砂れきのsaltationの機構¹⁸⁾

ここでは、前述したsuccessive saltationに関する理論的解析の結果を砂れきが集団として移動する場合、すなわち、掃流砂れきのsaltationの場合に適用して、流砂現象について考察する。

1) 掃流砂れきの跳躍高さおよび距離の平均値と掃流力との関係

図-5.12は前述したように掃流砂れきのsaltationにおいて著者らの実験値から、近似的に求めた λ と掃流力との関係を示したものであり、これからわかるように、これは固定床における実験結

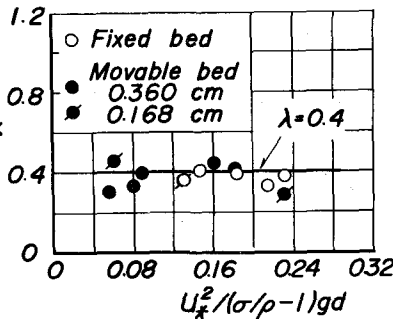


図-5.12 砂れきのSaltationにおける λ の掃流力による変化

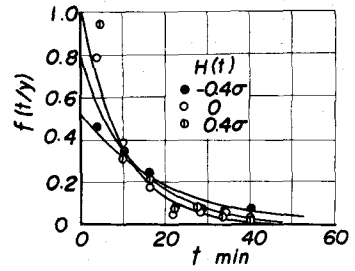


図-5.10

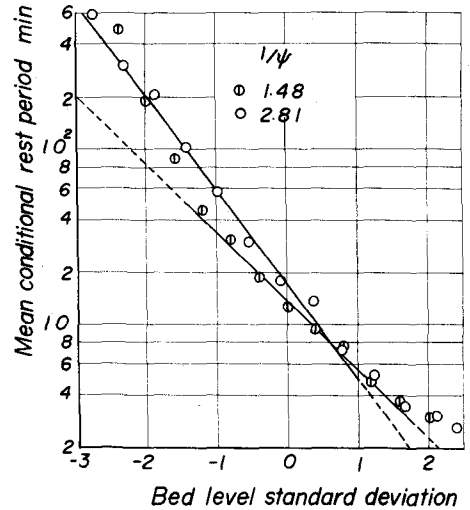


図-5.11

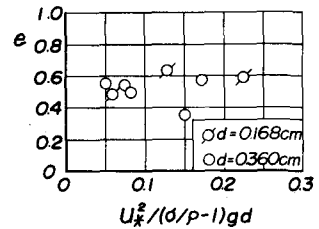


図-5.13 移動床における砂れきの反発係数の掃流力による変化

果と同様に無次元掃流力によって系統的な変化を示すことなく、0.4という値によく一致する。このことは、河床がほぼ均一な砂れきで構成されている場合には、固定床または移動床であるかを問わず砂れきの飛び出し角度が平均的に約 22° という一定値をとることをあらわしている。一方、著者らの実験結果によれば図-5.13のように、掃流砂れきのsaltationにおいて、跳躍する砂れきが床面の砂

れきと衝突する場合の反発係数は、無次元掃流力に無関係に $e \approx 0.55$ 程度の値となることがわかる。これら $\lambda = 0.4$ および $e = 0.55$ という値をそのまま (4.24) 式に代入して、移動床における掃流砂れきの跳躍高さおよび距離の平均値に関する実験値と比較したのが、図-5.14である。なお、図中の直線は、(4.14) 式であらわされる第1回目の跳躍高さに関する理論式において $\beta = 0.565$ としたものと、それを $\lambda = 0.4$ として跳躍距離にまで拡張した関係を参考のため示したものである。この場合、実験値としては、著者らの掃流砂れきの saltation に関する前述した7つの運動形態のうち、反発を主とするいわゆる現象Rおよび流体力の作用によって移動を開始するいわゆる現象Bから跳躍に移行した砂れきの跳躍高さおよび距離をとった。これから見出されるように、実験はほとんどこれらの理論値の間に存在し、掃流力の小さい場合は第1回目の跳躍に関する関係と比較的よく一致し、掃流力の大きな場合には、実験値の数が十分でなく断定的なことはいえないがこれら両式の中

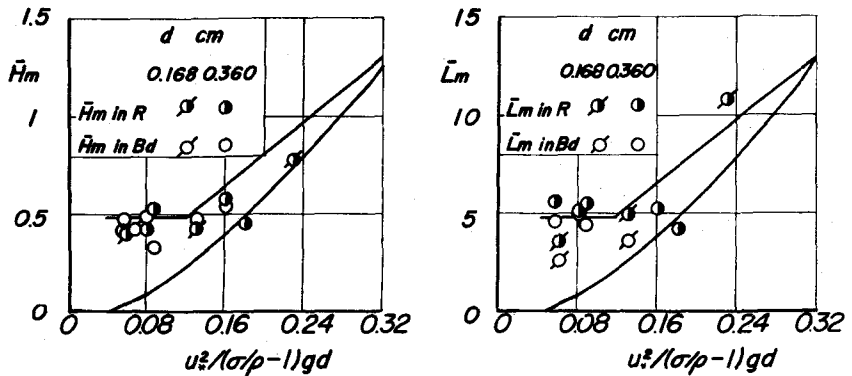


図-5.14 掃流砂れきの跳躍高さおよび距離の実験値と理論曲線との比較

間に図示される。これらの事実は単体砂れきの挙動と集団として移動する砂れきの運動との相違に関連するものと考えられ、掃流砂れきの運動機構の本質であるというべきであろう。すなわち、砂れきが集団として移動する場合には、前述したように、単体砂れきとしてとる反発、跳躍および流体力による移動開始の機構に加えて、砂れきが停止する機構や移動砂れき間の衝突機構および移動砂れきと河床の静止砂れきとの衝突機構をも考慮しなければならない。とくに、運動中の砂れきが停止する現象は、前述した解析を集団として移動する砂れきの運動に適用する際の限界を与えるものと思われる。すなわち、砂れきの跳躍速度が初期の速度に影響されない値をとるようになるのは反発と跳躍とを何回もくり返したのちであり、固定床における単体砂れきはほとんどの場合、このような状態で運動するのであるが、移動床においては、掃流力の小さいときには著者らの実験結果によれば床面に落下する砂れきの25%から30%は停止する。ここに砂れきが停止するということは、跳躍運動をする時間に比べて十分長時間停止する場合をいうが、いわゆる常識的に停止しているという概念よりかなりきびしく判断されている。したがって、前述した確率モデルにおいて示したstepの概念とは定量的には必ずしも一致しないが、これは停止という現象の判断に依存するものと考ええる。この実験結果によれば、移動床において運動する砂れきは、平均的に3回から4回の跳躍で停止してしまうことになり、反発しながら跳躍をくり返して移動する砂れきのうちでも、定常状態になっている砂れきの割合は、約30%程度と推定される。したがって、集団として移動する砂れきの跳躍に、前述した理論をそのまま適用できるのは、反発現象から跳躍に移行する砂れきのうちの一部分に対してであり、この第2回目および第3回目などの跳躍の一般的表示や砂れき間の衝突の効果に関する解析も行ない、それらの結果を総合したうえで議論が進められなければならないと考える。

2) 掃流砂れきの跳躍高さおよび距離の分布特性

図-5.15および5.16は集団として移動する砂れきの跳躍高さおよび距離に関する分布を示したもので、図中の曲線は前述した $f(\bar{H})$ および $f(\bar{L})$ において単体砂れきの場合と同様に $\varepsilon=0.2$ という値を採用し、かつ実験より求めた $\bar{H}_m$ および $\bar{L}_m$ を用いて計算したものである。この場合、粒径0.198 cmの場合で $u_*^2/(\sigma/\rho-1)gd \doteq 0.060$ なる条件においては、実験値として下記の2つの実験値を示し、それぞれに対応する理論曲線をそれぞれ実線と鎖線で示したが、その他の条件においては、Iの場合だけを示した。

I；跳躍に移る際の形式を区別せず、すべての跳躍を実験値としてとりあげたもの

II；跳躍に移る際の形式としては反発すなわち現象Rのみを対象とし、Iのうちから反発によって跳躍したものだけをとりあげたもの

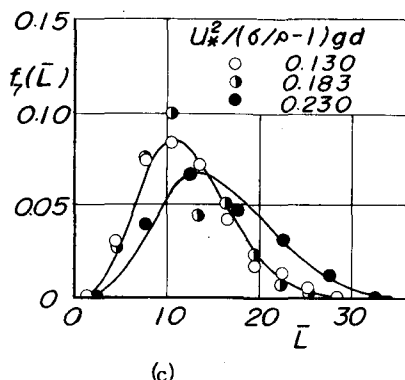
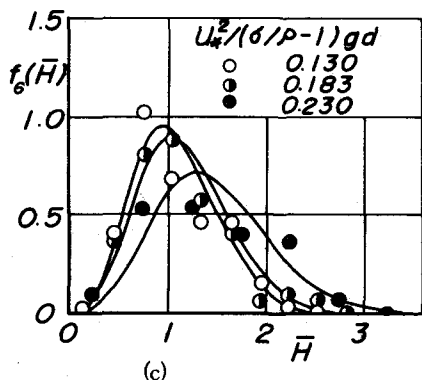
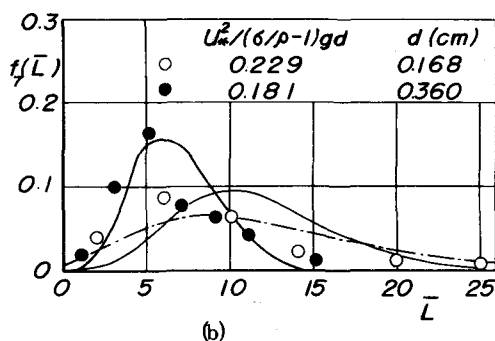
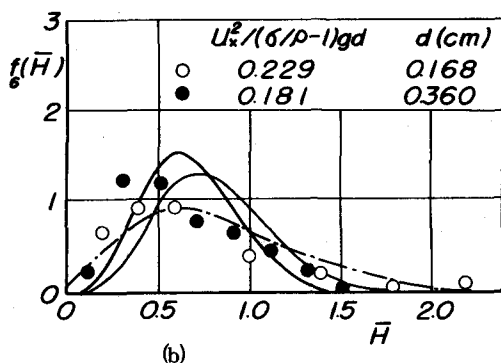
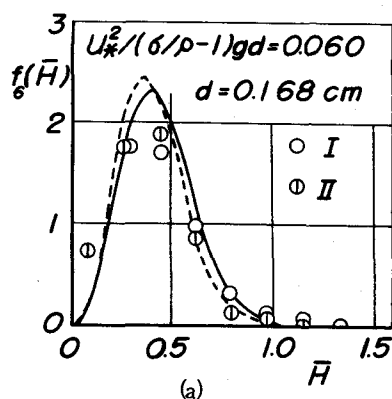
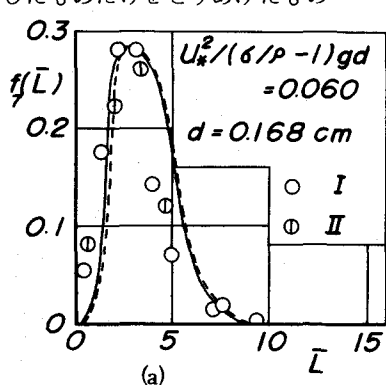


図-5.15 掃流砂れきの跳躍高さの分布特性

図-5.16 掃流砂れきの跳躍距離の分布特性

これらの図からわかるように、理論曲線は実験値との適合において、単体砂れきの場合ほどよい一致を示さない。この理由としては、つぎの3つが考えられる。

(i) 前述したように掃流砂れきの運動においては、跳躍している砂れきのすべてが反発現象を経たからの跳躍を行なっているのではない。

(ii) 反発現象を経て跳躍を行なっている砂れきのなかでも、掃流力が小さくしたがって停止する可能性が大きな流れの場においては、定常な状態で反発と跳躍とをくり返している砂れきの数は少ない。

(iii) (4.27) および (4.28) 式において砂れきの運動に及ぼす乱れの効果や床面の凹凸による速度の散乱および減少効果を代表している ϵ の値が、単体砂れきの場合と異なる。

前述した図-2.4によれば、現象Rをとる割合 P_R の値は0.6から0.8程度であることがわかるが、この結果と前述した考察とを総合すれば、掃流力の小さい範囲での砂れきの運動においては、反発と跳躍とを交互にくり返しながらか定常な状態で運動している砂れきの占める割合は約30%である。したがって、その跳躍高さおよび距離の分布形を検討するためには、静止から第1回目の跳躍を経て第2、第3の跳躍を行なっている砂れきの運動機構を分布特性まで含めて解析し、その時点において個々の機構の分布特性を結びつける考察がなされなければならない。また、掃流力の大きな場合には、反発によって飛び出した反発砂れきの飛び出し速度は、ほぼGauss分布に従っており、その標準偏差は0.3から0.4程度の値である。こうした条件のもとでは、砂れきの跳躍機構は前述した理論ではほぼ近似できると考えられ、実験値と(4.27)および(4.28)式との適合性は、移動床における ϵ の値を実験値と対応させて定めることによって検討できると思われる。すなわち、この ϵ は流水の乱れや河床の凹凸の効果を受け、移動床と固定床ではかなり異なることが予想されるが、ここでは床面の凹凸の効果を取りあげて説明してみたい。一般に、砂れきの反発機構に及ぼす床面の凹凸の効果は、 $\tan \gamma$ によって代表されると考えられるので、 $\lambda = 0.4$ および固定床における $\epsilon = 0.89$ と移動床における $\epsilon = 0.55$ という値を用いて、移動床と固定床の $\tan \gamma$ の値を比較してみると図-5.17に示されるようになる。図中の曲線は、(4.20)式に基づいて計算した λ 、

ϵ および $\tan \gamma$ の関係をあらわす。この図から、移動床における $\tan \gamma$ の値が固定床のそれよりもはるかに小さいことが見出される。すなわち、移動床における $\lambda = 0.4$ に対応する $\tan \gamma$ の値は約6であり、その場合の γ は約80°であるのに反して、固定床の $\lambda = 0.4$ に対応する $\tan \gamma$ の値は約26であって、そのときの γ は約87°である。反発機構の考察から、 γ の値が90°に近いほど、床面の凹凸が砂れきの大きさに比べて小さいはずであるから、移動床においては床面の凹凸の効果が固定床よりも大きく、したがって、移動床における砂れきの跳躍高さおよび距離の分布に前述した理論を適用する際

には、掃流力の大きな場合においても、(4.27)および(4.28)式中の ϵ の値を0.2よりも若干大きくとる必要があるといえよう。以上の考察に基づいて、粒径0.168 cmの場合でかつ掃流力がかなり大きいと考えられる $u_*^2 / (\sigma / \rho - 1) g d = 0.229$ なる条件において、 $\epsilon = 0.3$ として(4.27)および(4.28)式を計算し、それらの値を一点き線で図-5.15および5.16に示した。これらからわかるように、 $\epsilon = 0.3$ とした場合の理論曲線は実験値と比較的よい一致を示し、移動床においても掃流力の大きな場合には、前述した stationary saltation に関する理論がかなり適用できることがわかる。

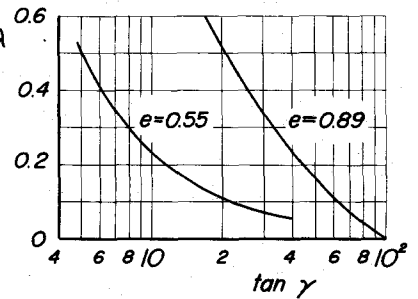


図-5.17 固定床および移動床における λ と $\tan \gamma$ の関係

6 結 語

以上、掃流砂れきの流送機構について、主として著者らの研究成果を参考にして、その取扱いに対する考え方と若干の流送特性について述べた。この流送の現象がきわめて複雑であるために、ここでは砂れきの運動を中心とした力学過程としての取扱いと砂れきの運動を確率過程として取扱っていく2つの方法について述べたが、著者のこの種の理論展開が十分進展しておらず、これら2つの方法の融合とそれから生ずる流砂の統一理論の確立には、はなはだ道遠しの感じである。前述した取扱いの主流は、流砂現象の究明にあたって、完全な平面上を砂れきが運動する場合の力学モデルでは説明することのできないいわゆる凹凸の場の砂れきの運動機構についての力学を追求することが流砂力学の本質であると考えたものである。最近床面近傍における乱流の研究が進展してきたが、これとあいまって、床面付近で砂れきのうける流体力もやがて解明されるであろうし、また砂れきの Saltationのみを考えても Saltation layer の流速分布や流砂法則を確立する試みもある程度可能であると考えられる。今後この方面の研究をさらに進めていくつもりであるが、ここで述べた著者の考え方が砂れきの流送現象に興味をもっておられる方がたにとってなんらかの参考になれば望外の喜びである。なお、本小論で述べた考え方や方法論は、この流送現象の解明への1つの試みであって、著者の独りよがりな点も少なくないと思われるので、この点は適切なご教示をいただいて修正していきたいと考えている。

最後に、本小論をまとめるにあたって、図面の整理に熱心に協力していただいた海岸災害部門の芝野照夫技官に謝意を表するとともに、流砂力学に関する研究に協力された諸氏に謝意を表明したい。

参 考 文 献

- 1) たとえば、S. L. Soo ; Fluid Dynamics of Multiphase Systems, Blaisdell Pub. Com., 1967.
- 2) Bagnold ; The Physics of Blown Sand and Desert Dunes, Mathuen & Co., 1954.
- 3) Ishihara T. and Y. Iwagaki ; On the Effect of Sand Storm in Controlling the Mouth of the Kiku River, Bulletin of the Disaster Prevention Reserch Institute, Kyoto Univ., No. 2, 1952, pp. 1 - 32.
- 4) Kalinske, A. A. ; Movement of Sediment as Bed Load in Rivers, Trans. A. G. U., Vol. 28, No. 4, 1947, pp. 615 - 620.
- 5) Yalin, M. S. ; An Expression for Bed - load Transportation, Proc. A. S. C. E., Vol. 89, HY3, 1963, pp. 221 - 250.
- 6) 岸力・福田捷二；河床粒子の saltation の機構と流砂量，土木技術資料，土木学会北海道支部，第 23 号，昭 41，pp. 113 - 120.
- 7) 土屋義人・角野稔；水流による砂粒の運動機構に関する実験，京都大学防災研究所年報，第 10 号 B，昭 41，pp. 97 - 107.
- 8) 矢野勝正・土屋義人・青山俊樹；掃流砂れきの saltation に関する実験，京都大学防災研究所年報，第 12 号 B，昭 44，pp. 491 - 502.
- 9) 河村竜馬；飛砂の研究，東京大学理工学研究所報告，第 5 巻，昭 26，pp. 95 - 112.
- 10) 大浦浩文・小林大二・小林俊一；低い地ふぶきにおける飛雪の運動，低温科学，物理篇，第 25 集，昭 42，pp. 89 - 97.
- 11) 岩垣雄一；限界掃流力に関する流体力学的研究，土木学会論文集，第 41 号，昭 31，pp. 1-21.

- 12) Rouse, H. ;Engineering Hydraulics, John Wiley & Sons, 1950, p. 789.
- 13) 土屋義人・河田恵昭；飛砂における砂粒の運動機構(1)―砂粒の移動限界に関する実験, 京都大学防災研究所年報, 第13号B, 昭45, pp. 217 - 232.
- 14) Owen, P.R. ; Saltation of Uniform Grains in Air. Jour. Fluid Mech., Vol. 20, Part 2, 1964, pp. 225 - 242.
- 15) Chepil, W.S. ; The Use of Spheres to Measure Lift and Drag on Wind - Eroded Soil Grains, Soil Sci. of Am. Proc., Vol. 25, 1969, pp. 343 - 345.
- 16) 土屋義人・渡戸健介・青山俊樹；水流による砂れきの saltation の機構(1), 京都大学防災研究所年報, 第12号B, 昭44, pp. 475 - 490.
- 17) Tsuchiya, Y. ; Mechanics of the Successive Saltation of a Sand Particle on a Granular Bed in a Turbulent Stream, Bulletin of the Disaster Prevention Reserch Institute, Kyoto Univ., Vol. 19, Part 1, No. 152, 1969, pp. 31 - 44.
- 18) 土屋義人・青山俊樹；水流による砂れき saltation の機構(2) - Successive Saltation の理論について -, 京都大学防災研究所年報, 第13号B, 昭45, pp. 199 - 216.
- 19) Sayre, W.W. and D.W. Hubbell. ; Transport and Dispersion of Labeled Bed Material, North Loup River, Nebraska, Open File Report, Geological Survey, Water Resources Division, 1963, pp. 1 - 112.
- 20) Sayre, W.W. and W. J. Conover. ; General Two - dimensional Stochastic Model for the Transport and Dispersion of Bed - Material Sediment Particles, Proc. 12 th Cong. I.A.H.R., Vol. 2, pp. 88 - 95.
- 21) Yano, K., Y. Tsuchiya and M. Michiue ; Studies on the Sand Transport in Streams with Tracers, Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto Univ., Vol. 18, Part 3, No. 141, 1969, pp. 1 - 16.
- 22) Grigg, N.S. ; Motion of Single Particles in Sand Channels, Open File Report, Geological Survey, Water Resourees Division, 1969, pp. 1 - 142.