

水理構造物に作用する流体力

岩 佐 義 朗

ま え が き

水理構造物に作用する流体力、あるいは逆のいい方として、流れに及ぼす水理構造物に関する問題は何か新しい課題ではない。しかし実際的には、ゲート、バルブその他の水理構造物にみられるように、構造物自体の複雑さと多様性のため、また流れとの相互関連のモデル化が不可能なため、十分な解明が行なわれえず、むしろその場かぎりの対策が講ぜられてきたといっても過言ではない。一方、この種の問題を流体力学の領域におけるものとして取り扱えば、物理現象そのものがきわめて単純化されたものとなるから、得られた解も単なる現象説明にとどまるのが通例である。

さらにまた、本来もっとも積極的にこの問題と取り組むべき水理学は、その興味の中心を主として運動学の方に向けていたから、流体力の水理構造物に及ぼす影響を知ろうとする努力に欠けていたことは事実であり、むしろ水力学の分野で研究が進められてきた。したがって、その研究の中心は、水力学と水理学との区別のない諸外国¹⁾²⁾³⁾に求められるのも当然のことであろう。

水理構造物は本来流量配分、流況改善などのような機能目的のために設置される。しかし一度、それが設置されれば、構造物の果すべき機能のより効果的な方策の追求、新しく提起された設計上の問題の解決などが望まれるし、それはまた流体力と水理構造物との関係に根ざすものが多い。しかも最近のように、各種の水工事業の巨大化にともなう水理構造物の大型化はこの種の問題の解決を要求する。

現在のところ、流体力の水理構造物に及ぼす影響をきわめて系統的に、かつ一元的に論ずることは不可能であろう。しかしながら、これらの両者の関係を水理学的にまたもっと実用的に示し、今後におけるこの研究課題の推進の一助になれば幸いと思う次第である。

1 力と運動に関する表現

水理学にあらわれる力 (force) や圧力 (pressure) は、その起源の相違によって、種々の表現によって示されている。静水圧、浮力、抗力、揚力、衝力 (impact force)、慣性力、重力 (重量)、粘性力、弾性力、線力 (line force)、…などである。いずれも力というものの概念が既知であるという前提のもとに立っている。

一体、流体力とは何であろうかという命題に立てば、それは Newton 力学の基礎概念や基本的法則にまで戻らなければならない。水理学は、図-1 に示すように、Newton の運動法則から誘導されるものに外ならないからである。ところが、Newton の運動第二法則は、たとえば質点についていえば、質量と加速度との積は外力に等しいことを数式として述べたものであるから、力とは物体に加速度を生ぜしめる作用であるというような定性的な定義にとどまらざるをえない。

注 1) Proceedings of the 6th General Meeting, IAHR, the Hague, Netherlands, Vol 3, 1955
2) Proceedings, 10th Congress of IAHR, London, U.K., Vol. 1963
3) Proceedings, 11th Congress of IAHR, Leningrad, USSR, Vol. 1965

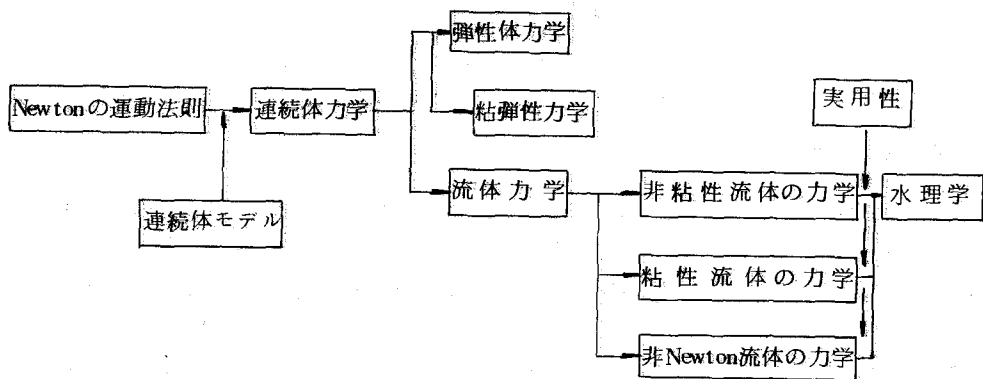


図-1.

しかし、それが、図-1の経路をたどって、流体力学の領域にまで移動すれば、われわれが取り扱い易い形の表現式となる。これが以下に述べる流体運動におけるNewtonの法則の表現である。

A 流体運動におけるNewtonの法則

- (1) システム解析法による表示 システム解析法⁴⁾とは問題の対象となるものに対して基礎原理を適用する方法であってLagrangeの方法に相当する。

Newtonの運動の第二法則：

$$\frac{d}{dt} \int \rho \cdot V dV = \Sigma F \quad (1)$$

角運動量保存の法則：

$$\frac{d}{dt} \int \rho (V \times r) dV = \Sigma (F \times r) \quad (2)$$

ここに、 t ：時間、 ρ ：流体密度、 V ：対象体の容積、 r ：位置ベクトル($=ix+jy+kz$)、 V ：速度ベクトル($=iu+jv+kw$)、 F ：すべての外力ベクトルである。⁴⁾

- (2) コントロール・ボリューム法による表示 コントロール・ボリューム法は流れの場にとったある容積内で基礎原理が満足されるような挙動を取り扱うEuler的解析法である。

Newtonの運動の第二法則：

$$\int \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) dV + \int V \cdot (\rho V \cdot dA) = \Sigma F \quad (3)$$

角運動量保存の法則：

$$\int \frac{\partial}{\partial t} (\rho V \times r) dV + \int (V \times r) (\rho V \cdot dA) = \Sigma (F \times r) \quad (4)$$

ここに dA ：コントロール・ボリュームを囲む表面のベクトル素分である。

* システム解析法とコントロール・ボリューム法との相互関係は、質量、運動量など連続体モデルとしての性質量をB、その単位質量当りのそれをbとすれば、

$$\frac{dB}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int b \rho V \cdot dA$$

注 4) Shames, I.H. : Mechanics of Fluids, McGraw-Hill, New York, 1962

B 流体力学における力の表現⁵⁾

流体に作用する力は表面力、物体力および表面張力とに分類される。すなわち、

- (1) **表面力** 対象体の表面に作用する力で、対象体の容積を $\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ とするとき、単位容積当りの表面力は

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta x \delta y \delta z} = & i \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ & + k \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

と表わされる。ここに、 p : 流体の状態によって決定される流体圧、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: 流体運動によって生ずる変形にともなう直応力成分、 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$: 同じくせん断応力成分である。

- (2) **物体力** 重力のように、対象体の質量や容積に比例する力である。重力の加速度ベクトルを g とすれば、単位容積当りの重力は ρg である。

- (3) **表面張力** 運動方程式には含まれず、境界条件に導入される。

Newton の運動の第三法則（作用・反作用の法則）によって、流体は逆に周囲に流体力を及ぼしている。

C 応力とひずみとの関係

流体の運動にともなう生ずるひずみと応力との関係が、Newton-Stokes の前提条件を満足するかないかによって、流体は Newton 流体と非 Newton 流体とに分けられるが、後者はさらに多くの種類のものがある。

- (1) **Newton 流体**

$$\begin{aligned} \sigma_x = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_z = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、流体は非圧縮性であり、 μ : 粘性係数である。

- (2) **非 Newton 流体** 上述のように、さらに多くのものに細分されるが、もっとも実用的なものは指数公式（Ostwald-de Waele モデル）であって、

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \quad (7)$$

と表わされる。

D 従来における解析の興味

これまでに、水理学というよりはむしろ流体力学的観点から、Newton の運動法則すなわち力と加速度との関係、流体運動の見方、ならびに対象流体の性質（たとえば非粘性流体、粘性 Newton 流体、粘性非 Newton 流体）について述べた。実際に水理解析上の問題として流体现象を取り扱うとき、問題の性質によって、これらの多様性のなかからえられる一組のものに対するモデル化

注 5) Shapiro, A.H.: Basic Equations of Fluid Flows, Handbook, of Fluid Dynamics, section 2, edited by V.L. Streeter, 1st edition, McGraw-Hill, New York, 1961.

が行なわれ、解析が進められる。

いま、Newton の運動量法則において、力あるいは圧力分布を未知量にとるかあるいは流れの挙動という点に重点をおくかによって、解析の取扱いを力学的、運動学的に分類しよう。解析の表示にはコントロール・ボリューム法が慣用されるが、対象コントロール・ボリュームが dx, dy, dz といういわゆる流体素分であるか、あるいは管路や開水路の一次元水理解析法で使用される大流管 (bulk stream tube) であるかの相違も問題視される。さらに、流体が粘性流体 (乱流も含む) であるか否かによって研究課題もおおのずから変り、表-1 のように分類されよう。

もちろん、この分類は一般的なものではなく、単にここで示した要素によるものに過ぎない。

表-1

分類	力・流れ	流体の性質	解 析 法	例
1	運動学	非 粘 性	Eulerian	完全流体の運動学
2	"	"	一次元	損失を無視した管路流れ
3	"	粘 性	Eulerian	Navier-Stokes の方程式の解, 境界層, 乱流, 拡散...
4	"	"	一次元	管路, 開水路の流れ (流体輸送, 水面形)
5	力学	非 粘 性	Eulerian	完全流体力学 (Blasius)
6	"	"	一次元	流れの計測, 流体機械
7	"	粘 性	Eulerian	流体力 (表面抵抗, 形状抵抗)
8	"	"	一次元	管路, 開水路の流れ (運動量保存則応用)

7. は流体内にある物体に作用する流体力の取扱いを示すが、多くの場合この物体の運動の解析にまで進む。このようなときには、運動方程式系は Navier-Stokes の式と剛体の運動方程式とによって構成されるようになる。

また、水力弾性学 (hydroelasticity) という言葉があり、この分野の研究が近年盛んに行なわれるようになってきたことは、国際水理学会 (IAHR) の第10回 London 会議および第11回 Leningrad 会議において課題として採用された事実からも想像されよう。これは、流体力を受ける水理構造物の弾性変形に関するもので、流体内におかれた梁、円柱、平板、ゲート、バルブなどに対する流体力と振動の問題として解析されるのが通例である。

しかし、従来より水理学における解析の主たる興味は流体力よりもむしろ流れの様相を明らかにする運動学的取扱いに向いていたといえよう。管路における流量計算、管路網の解析、開水路における水面形追跡などいずれも一次元的運動が中心課題であり、流体輸送に関する水理構造物の剛度はむしろ無限大と考えられていた気配があった。たとえ、流体内におかれた物体などの周辺における局所的な現象も、それを力としての立場から理解しようとするのではなく、流れの挙動という運動学的解析によって取り扱われてきた。これは、水理学の中心が流体の移動に関する研究の方に向いており、移動、輸送を行なう管路、水路あるいはそれにともなう諸々の水理構造物は附随的、実際には水理学的対象からはずされていたといってもよい。

ところが、今日ではこれらの構造物は水理機能においてより高度の効率を発揮するように設計されるようになり、また水工事業の巨大化にもなつてこれら構造物の構造設計がきわめて重要な要素の一つと考えられるようになってきた。こうした時代の変遷による学術・技術の興味の変化が最近における水力弾性学などの問題に示されている。

しかしながら、流体力の問題は、すでに何度も述べたように、流体運動の現象と弾性体、剛体

などの現象との両者によって取り扱われるべきものである。したがって、その解析は一般に複雑で、系統立った方法も現在のところ確立されていない。ここでも、従来より取り扱われてきたこの種の問題を適当に整理し、説明するにとどまらざるをえないが、その理由はこれまでに述べた事柄より理解していただけると思う。

2 流体力の種類

これまでに述べた力は、流体運動におけるNewtonの法則の表現としての表面力（直応力，せん断応力），物体力（重力）および表面張力であった。われわれが、これらの力を水理学や流体力学の問題として取り扱うとき、力は別の表現で示される。

A 力学的分類

- (1) **静水圧と浮力** いうまでもなく、流体が静止状態にあるときの表面力（流体圧で(5)式参照）と物体力としての重力との釣り合い状態からえられる流体圧が静水圧といわれる。また、浮力は静水体内におかれた物体に作用する全静水圧の合力に外ならない。

静水圧は各種の水理構造物の設計計算における外力としてももっとも基本的なものであり、また浮力は流体内部におかれた浮体の安定計算に必要なものである。いわゆる水理構造物に作用する流体力としては問題視されるものではないが、これらの力の計算をどのような形状の水理構造物に対しても行ないうのような能力をもっていることが必要である。

- (2) **境界面に働く力** 管路や開水路の流れの解析のように、一次元水理解析法が用いられるとき、管路や開水路が一つの流管、あるいはコントロール・ボリュームであるとみなされる。コントロール・ボリュームの両端面に働く流体圧以外の力は作用，反作用の法則によって境界面に働く流体圧であって、直応力，せん断応力とから成り立っている。管路や開水路の流れの抵抗法則の誘導の基礎を形成するものである。

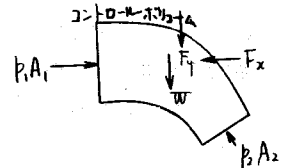


図-2 境界面に働く力（曲った管路）

- (3) **抗力と揚力** 流体内部におかれた物体は、周囲の流体との間で相対運動があれば、表面力を流体から受ける。この力が慣習的にいわれる流体力^{*}であるが、これは物体表面の直応力とそれにそうせん断応力とから成る。ただし、流体が非粘性であれば、せん断応力は作用しない。

この流体力を流れの方向とそれに直角な方向とに分けて取り扱うとき、前者は抗力（drag），また後者は揚力（lift）といわれる。図-3より、これらは

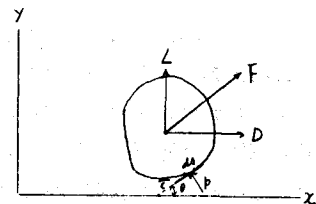


図-3 抗力と揚力

$$D = \int_S (\tau \cos \theta - p \sin \theta) dS,$$

$$L = \int_S (\tau \sin \theta + p \cos \theta) dS$$

(8)

* 静止流体における浮力は含まれない。

と定義される。実際には、これらの力の特性を示すために、抗力係数や揚力係数を用いる。

$$C_D = D / (\frac{1}{2} \rho v_0^2 A), \quad C_L = L / (\frac{1}{2} \rho v_0^2 A) \quad (9)$$

ここに、 ϕ ：物体の表面より外向きに立てた法線と流れのなす角、 S ：物体の全表面積、 v_0 ：相対速度、 A ：適当な代表面積であって、一般には流れに直角な物体面積がとられる。

せん断力による抵抗力は表面抵抗、また主として直応力によるものは形状抵抗といわれることがある。実在する流体内の物体に働く抗力はこれらの両者より構成されるが、揚力が問題となる物体では形状抵抗のみが卓越する。

(4) **衝撃力(impact)** 流体が固定した壁面に衝突するときに壁面に働く力をいう。単なる運動量変化はこの分類に属さない。板やペルトン水車に作用する流体力の計算にみられるように、運動量保存の法則によって解決されるべきものである。

(5) **乱れによる応力** 周知のように、乱流では乱れにともなう運動量フラックスによる Reynolds 応力が生ずる。したがって、これまでに述べた流体変形にともなう応力に Reynolds 応力が加えられなければならない。むしろ、粘性にともなう応力に比して Reynolds 応力が卓越するのが乱流であって、われわれの対象とする水理現象はすべてこの種のものである。

これまでに述べた応力に関する項には、すべて Reynolds 応力が含まれるものと解しなければならない。

B 原因別分類

(1) **慣性力** Newton の運動法則より、質量と加速度との積、 $\rho \alpha V (= \rho L^2 v^2)$ が慣性力である。ここに α は加速度ベクトル、 L は代表長である。

(2) **重力(重量)** 地球の重力に起因する物体力である。水理学では、流体圧と合せて高さの次元で示することが多く、これはピエゾ水頭といわれる。

また、力学的相似則において、慣性力と重力とで代表される力学系のシミュレーションは Froude の法則であることもよく知られた事実である。

(3) **粘性力** 流体の粘性にもとづく力で $\mu L v$ と表わされる。これは Reynolds の法則を形成するとともに、流体力の問題において重要な要素を構成するものである。

(4) **弾性力** 流体の圧縮性によるもので、流体の体積弾性係数を E とするとき、 EL^2 で表わされる。水撃作用ではこれが支配的であって、Mach (あるいは Cauchy) の法則を構成する。

(5) **表面張力** 境界条件として導入される表面張力は Weber の法則を作る。

(6) **キャビテーション** Bernoulli の定理からもわかるように、流速のきわめて大きいところでは流体圧は低下し、液体内に融けていた気体が気化し、空洞が生ずる。これがおし流され、つぶされるという水理過程が繰返される。このとき大きな流体圧が生じ、構造物に破損をきたすことがある。キャビテーションに関する無次元表示はキャビテーション数によって取り扱われる。

3 表現抵抗

境界面にそって働くせん断応力、すなわち表面抵抗が問題となるものは、管路や開水路の流れの平均流速公式、流速分布、流体内におかれた物体に働く表面抵抗による抗力などである。これらは Navier-Stokes の方程式あるいは乱流の Reynolds 方程式を解くことによってえられる。しかし実際には、Navier-Stokes の方程式が解かれる問題は少なく(表-2 参照)、まして Reynolds 応力

の入った乱流状態は解かれうるものではない。

ここに、境界層の取扱いが流体力学的、あるいは水理学的に重要となる。

表-2 Navier - Stokes の式の厳密解

流れの状態	数学モデル	課 題
定 常	線 型	(1) = 平行板間の poiseuille 流れ
		(2) = 平行板間の Couette 流れ
		(3) Hagen-poiseuille 流れ
		(4) 同心円筒内の層流
		(5) 任意断面閉管路の層流
	非 線 型	(1) 漸縮, 漸拡水路の層流 (2) 回転板上の流れ (3) 平板に衝突する流れ
非 定 常	線 型	(1) Stokes の第一問題
		(2) Stokes の第二問題

A 境界層方程式

(1) 境界層理論の仮定 物体表面にそう流れに剥離が生じないとき、境界層理論はつぎの仮定により構成される。

- 1) 境界層外の主流は非粘性で、ポテンシャル流れの数学的解析法が用いられる。
- 2) 境界層の厚さ δ は流れの方向の物体の基準長 L に比して小さい。
- 3) 境界層外の主流流速 U に関する Reynolds 数 UL/ν は大きく、少なくとも $(L/\delta)^2$ のオーダーである。
- 4) 物体表面にそう流速成分は U の大きさであって、連続方程式より、これと直角な方向の流速成分は $U\delta/L$ の大きさである。
- 5) 境界層内の流れが乱流であれば、Reynolds 応力のうち、せん断応力は $\rho U^2 \delta/L$ 、また直応力(圧力)は ρU^2 と $\rho U^2 \delta/L$ 間の大きさをもっている。

(2) 乱流境界層方程式 われわれの対象とする境界層内の流れはすべて乱流と考えられる。

(3)式を Newton 流体に適用し、乱流平均流に関する Reynolds方程式をえた後に、(1)で述べた仮定を適用すると、乱流境界層に関する基礎方程式がえられる。すなわち、二次元流れに対し

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} \quad (11)$$

$$-\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \quad (12)$$

である。ここに、 $\bar{}$ は平均流に対するもの、また $\prime$ はそれよりの変動を表わしている。

(3) 乱流境界層の運動量方程式 (10)~(12)式を境界層の厚さ δ に関して積分してえられる公式である。⁶⁾ すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta (U - \bar{u}) dy + \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta (U - \bar{u}) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \bar{u} (U - \bar{u}) dy$$

注 6) 岩佐義朗：水理学，朝倉土木工学講座3，1967

$$= \frac{\tau_0}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (\bar{u}^2 - \bar{v}^2) dy \quad (13)$$

ここに、 U ：境界層外の主流流速である。

また、

$$\delta_* = \frac{1}{U} \int_0^\delta (U - \bar{u}) dy, \quad \theta = \frac{1}{U^2} \int_0^\delta \bar{u} (U - \bar{u}) dy, \quad H = \frac{\delta^*}{\theta}, \quad \frac{2\tau_0}{\rho U^2} = C'_f$$

という変位厚，運動量厚，形状係数，摩擦抵抗係数を用いて，(13)式を変形すれば，つぎのようになる。

非定常乱流境界層：

$$\frac{1}{U^2} \frac{\partial}{\partial t} (HU\theta) + \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{H+2}{U} \theta \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{C'_f}{2} + \frac{1}{U^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (\bar{u}^2 - \bar{v}^2) dy \quad (14)$$

定常乱流境界層：

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{H+2}{U} \theta \frac{dU}{dx} = \frac{C'_f}{2} + \frac{1}{U^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (\bar{u}^2 - \bar{v}^2) dy \quad (15)$$

これらの式において，Reynolds 応力による項は考えられないことが多い。

B 乱流境界層の計算

(10)～(12)式という乱流境界層の方程式を与えられた種々の条件のもとで解いて，表面抵抗力を求めることは実際上不可能である。したがって，運動量方程式を用いた近似解法にたよるざるをえないが，この場合には境界層内の流速分布があらかじめ与えられていなければならない。ここでは，いくつかの例による表面抵抗力の計算を示そう。

(1) 圧力勾配のない流れの平板に働く表面抵抗力 これは乱流境界層の計算のなかで，もっとも単純な例であるが，タービン翼列，船体，航空機体などの表面抵抗力の考えの基本をなすものである。

この計算には，定常乱流境界層の運動量方程式(15)が用いられる。Reynolds 応力による附加項を無視すれば，摩擦抵抗係数 C_f の表示がわかれば，計算可能となる。ところが，これは Reynolds 数の関数であり，しかも流速分布形とも互に関連し合っているから，実際にはこれらを規定しなければならない。従来までの成果のうち，いくつかを列挙すれば，つぎのようである。

1) Prandtl-von Karman⁷⁾：滑かな管内の流れに関する Blasius の $\frac{1}{4}$ 乗法則を用いて，運動量方程式を解いたものである。すなわち，

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \frac{C'_f}{2} = \frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \theta = \frac{7}{72} \delta \quad (16)$$

より，表面抵抗による抗力係数 C_{Di} は，(9)式より

$$C_{Di} = D_i / \frac{\rho U^2}{2} \cdot b l = 0.074 \left(\frac{U l}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}} = 0.074 Re^{-\frac{1}{4}} \quad (17)$$

となる。ここに， l は平板の長さである。この値は Re が $5 \times 10^5 \sim 10^7$ の範囲内でよく合う

* 計算によれば，常数係数は 0.072 である。しかし，実験値との照合の結果，0.074 が用いられる。

注 7) Prandtl, L.: Erg AVA Gottingen, III, 1927.

8) Schlichting, H.: Grenzschicht theorie, Braun, Karlsruhe, 1951.

といわれている。

- 2) Prandtl-Schlichting⁸⁾: Re 数が 10^7 より大きくなると、流速分布形は Blasius の乗法則より対数分布則を用いた方がよい。Prandtl はこの条件に対する数値計算を行ない、Schlichting がその結果を経験式の形にまとめた。その後、実験値と比較して、経験式の係数をかえている。すなわち、

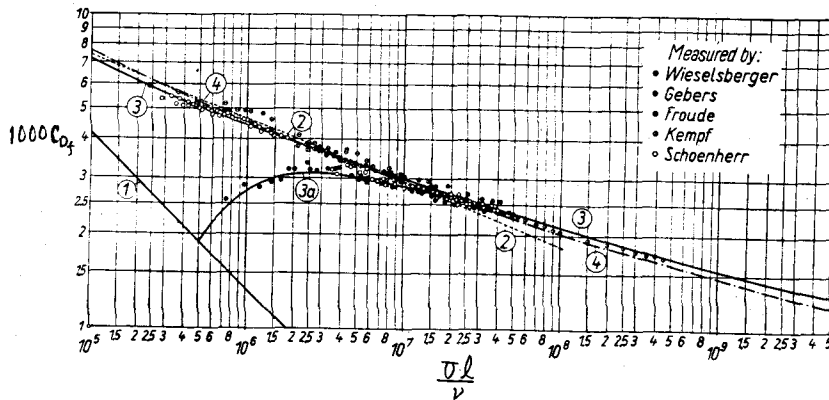
$$C_{Df} = \frac{0.455}{(\log Re)^{2.58}} \quad 10^6 < Re < 10^9 \quad (18)$$

である。

- 3) Schultz-Grunow⁹⁾: 平板に沿う流れの流速分布を調べてえたものである。

$$C_{Df} = \frac{0.427}{(\log Re - 0.407)^{2.64}} \quad (19)$$

これらの関係を図示したものが図-4 である。



- ①層流, ②Prandtl-von Karman, ③Prandtl-Schlichting,
④同じく層流をも考慮したもの, ⑤Schultz-Grunow

図-4 圧力勾配のない流れの滑面の抵抗法則

- 4) 粗い平板に沿う流れによる抗力係数は実用上きわめて重要である。Prandtl および Schlichting が Nikuradse の結果を用いて、砂による粗面の抗力係数を得ているが、これらは図-5 に示すようである。ここに、 k_s は砂粒の直径である。

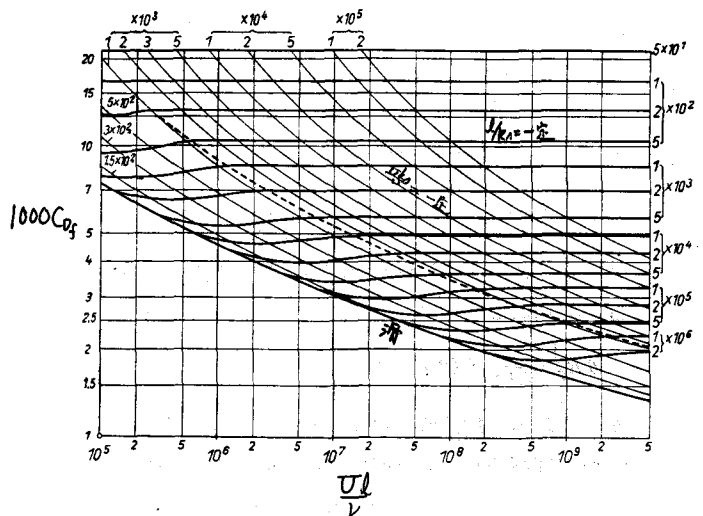


図-5 砂粒による粗面の抵抗法則

注 9) Schultz-Grunow, New Skin-Friction Drag Law, Lufs, 1940.

(2) 圧力勾配をもった流れの平板に働く表面抵抗力 実用問題ではさらに重要となるが、境界層の計算あるいは表面抵抗となると、近似計算によって満足せざるをえなくなる。こうした近似計算法は幾多のものがあつて、順次説明を加えるが、このような流れの特徴をまずつぎの形状係数によって示そう。

1) 形状係数：流体圧の勾配と流速分布とは互いに関連をもち、一般につぎの二種の形状係数によってその関連性が明らかにされる。

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (20)$$

$$\eta = 1 - \left(\frac{u(\theta)}{U} \right)^2 \quad (21)$$

ここに、 $u(\theta)$ は $y = \theta$ における流速である。

(20)式で与えられた形状係数は運動量方程式に用いられているが、その定義より明らかなように、境界層の形状を表わすのに適していることも実験的に知られた事実である。平板に沿う境界層では、この値はほぼ1.3であり、また1.8～2.6になると剥離がおこることが知られている。

(21)式による形状係数の表示は Gruschwitz によるものである。 $\eta < 0.46$ が負の圧力勾配に相当し、逆に $\eta > 0.46$ は正の圧力勾配である。また剥離は $\eta \approx 0.8$ でおこる。

これら両者の定量的な関係は、流速分布形があらかじめ与えられれば、決定される。たとえば、 $u/U = (y/\delta)^{1/2}$ という指数法則を用いると、

$$\eta = 1 - \left(\frac{H-1}{H(H+1)} \right)^{H-1} \quad (22)$$

である。

2) Buri¹⁰⁾：(20)式より類推される結果

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} \left(\frac{U\theta}{\nu} \right)^{1/2} = \frac{\tau_0}{\rho U^2} R\theta^{1/2} = \zeta \quad (23)$$

と

$$\Gamma = \frac{\theta}{U} R^{1/2} \frac{dU}{dx} \quad (24)$$

とを用いて、運動量方程式(19)を書き直すと、

$$\frac{d}{dx} (\theta R\theta^{1/2}) = \frac{5}{4} \left[\zeta - \Gamma \left(\frac{9}{5} + \frac{\delta^*}{\theta} \right) \right] = F(\Gamma) \quad (25)$$

となる。Buri は Nikuradse の実験より $F(\Gamma) = a - b\Gamma$ とおいた。 a 、 b が一定であれば、(25)式は積分され、

$$\theta R\theta^{1/2} = \frac{a}{U^{1/2}} \left(\int U^{1/2} dx + C \right) \quad (26)$$

がえられる。加速流では $a = 0.017$ 、 $b = 4.75$ 、また減速流では b は 5.15 になる。なお、流れが剥離を起すのは Γ が $-0.05 \sim -0.09$ であり、したがって、圧力勾配をもつ乱流境界層の剥離は $\Gamma = -0.07$ でおこるといえる。

注 10) Buri, A.: A Method of Calculation for the Turbulent Boundary Layer with Accelerated and Retarded Basic Flow, R.T.P. Translation No. 2073, BMAP.

3) Gruschwitz¹¹⁾: 実験的にえられた

$$\frac{dG}{dx} + 0.00894 \frac{G}{\theta} = 0.00461 \frac{q}{\theta} \quad (27)$$

ここに,

$$G = \frac{\rho U^2}{2} \left[1 - \frac{w(\theta)^2}{U^2} \right] = q \cdot \eta \quad (28)$$

と, q を用いて(27)式を書き直した

$$\frac{d\theta}{dx} + \left(1 + \frac{H}{2} \right) \frac{\theta}{q} \frac{dq}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U^2} \quad (29)$$

とを連立して解く方法である。すなわち, まず H と $\tau_0 / \rho U^2$ とを仮定して(29)式を解き, えられた θ を用いて(28)式より G をうる。(28)式より η を, また(28)式より H , (23)式より $\tau_0 / \rho U^2$ を求めて, 補正解とし, この操作を反覆する。(23)式より剝離点の近傍ではこの計算がよくないことが理解されよう。というのは剝離点では $\tau_0 = 0$ となるからである。

4) その他の方法: 種々のものがあるが, なかでも Tetervin-von Doenhoff 法, Tetervin-Lin 法が有名である。

4 形状抵抗

表面抵抗力と異って, 形状抵抗力は主として境界面あるいは物体の表面に直角に働く流体圧の合力として表わされる。全形状抵抗力そのものの評価あるいはそれによる損失の問題は管路や開水路における一次元流れでしばしばみられる。これらの問題は多くの参考書や公式集にみられるように, 損失係数の形で与えられている。

一方, 造波抵抗も圧力差によって生ずるものであるが, ここでは省略する。

A 非粘性流体の非回転運動下におかれた物体に働く力とモーメント

(1) Blasius の定理 非粘性流体の作用をうける物体には, せん断力は働かない。すなわち, 物体には直応力による形状抵抗力だけが作用する。非粘性・非回転運動の流体がそのなかにおかれた物体に作用する流体力を計算するには, いわゆる Lagally の定理^{*}によって行なうとよい。しかし, 定常二次元流れでは, 力およびモーメントは Blasius の定理によって進められるのであって, ここで説明しよう。

図-3より, この場合には τ は働かないから, 各座標軸方向の力を dD, dL (これは抗力および揚力に相当する) とすれば,

$$dL + i dD = p ds \cos \theta - i p ds \sin \theta = p ds e^{-i\theta} = p dz e^{i2\theta} \quad (30)$$

また, Bernoulli の定理より, w を複素ポテンシャルとして

$$p = -\frac{\rho}{2} q^2 = -\frac{\rho}{2} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 e^{i2\theta} \quad (31)$$

すなわち,

$$L + i D = -\frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz \quad \text{あるいは} \quad D - i L = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz \quad (32)$$

* ここでは省略する。

注 11) Gruschwitz, E.: Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Pruchaustieg, Ing-Archiv, Bd. II, Heft 3, Sept. 1931.

(32)式によって、形状抵抗力による揚力と抗力が計算されるが、これは Blasius の第一定理といわれる。

一方、モーメントは

$$dM = -y dD + x dL = p ds (y \sin \theta + x \cos \theta) = \mathcal{R} [p z dz e^{-iz\theta}] \quad (33)$$

したがって、

$$M + iN = -\frac{\rho}{2} \oint z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz \quad (34)$$

となる。ここに、 N は何の物理的意義も持たない。これは Blasius の第二定理といわれる。

(2) **Blasius の定理の応用** この定理の応用として広く知られているものには、二次元円柱のまわりの循環をもつ流れの抗力計算ならびに Kutta-Joukowski の定理として知られている任意断面形状柱体のまわりの循環をもつ流れのそれである。

前者の複素ポテンシャルは

$$w = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{i\kappa}{2\pi} \log z \quad (35)$$

と表わされ、後者のそれは

$$w = U e^{i\alpha} z - \frac{i\kappa}{2\pi} \ln z - \frac{B}{z} + \dots \dots \dots \quad (36)$$

である。ここに、 U : 無限遠の流速、 α : 柱状体断面の中心軸と流れとのなす角、 κ : 循環の強さ、 a : 円柱の半径である。

(35)および(36)式を用いて Blasius の定理の計算を行なえば、このような流れによる物体に働く抗力、揚力、モーメントが計算される。その結果は、(33)式より

$$D = 0, \quad L = -\rho U \kappa, \quad M = 0 \quad (37)$$

また(36)式より

$$D = 0, \quad L = -\rho U \kappa e^{i\alpha}, \quad M = 0 \quad (38)$$

であり、揚力が作用することがわかる。これが Kutta-Joukowski の定理といわれるものである。

B 境界層の剥離による形状抵抗

境界面の形状が流線を発散させるようになっていると、境界層の発達も大きく、また境界層そのものの概念も異ってくる。この現象はいわゆる剥離であるが、その影響はつぎのように述べられる。

- 1) 流れの状態は渦の発生により、局所的にかわる。
- 2) 速度の不連続部は乱れの源であり、平均運動のエネルギーの消費につながる。
- 3) 剥離点は最低圧力点の近くにあり、それ

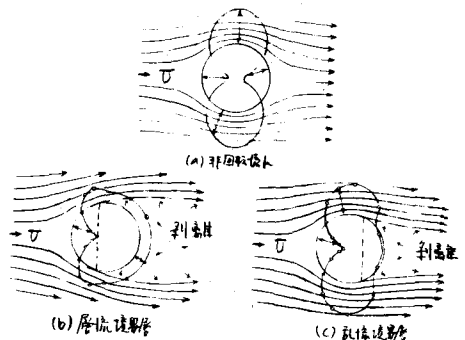


図 6

以後は流れ方向の圧力分布が大いに問題となる。

このようにして、物体の後方に後流が生じ、全体として形状抵抗力があらわれる。實際上、問題の性質によってこの抵抗力を大きくしたり、小さくしたりする必要がある。前者の例は阻柱 (baffle piers), パラシュートなどであり、後者は流線形状の物体を作ることである。なお、流線形の外に低速領域の吸込みなども有効であることはいうまでもない。

(1) 形状抵抗力 図-7に示すような流体内におかれた物体の抵抗力,あるいはその反作用としての流体力を取り扱おう。物体の周辺では,境界層の卓越する領域,実質的に非粘性,非回転流れとみなしうる領域および後流領域とがある。物体のごく周辺では複雑な流速分布がおこるが,担当大きい範囲に互ってコントロール・ボリュームをとると,流速分布は対称形であると考えられよう。このとき,運動量保存則より

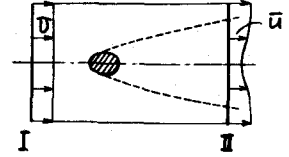


図-7 形状抵抗力計算のためのコントロール・ボリューム

$$\int_{II} \rho \bar{u}^2 dA - \int_I \rho U^2 dA + \int \rho \bar{u}_n \cdot \bar{u}_{nn} dS = \int_I \bar{p} dA - \int_{II} \bar{p} dA - F \quad (39)$$

ここに,乱れの変動によるみかけの流体圧は小さいとして省略している。

ところで,流体圧 $\bar{p}$ は I, II 断面で等しくなるとみなしえ,また $\bar{u}_n = U$ とおきうるから,上式は F について解き,

$$\begin{aligned} F &= \int_I \rho U^2 dA - \int \rho \bar{u}^2 dA - U \int_{II} \rho \bar{u}_n dS \\ &= \int_I \rho U^2 dA - \int_{II} \rho \bar{u}^2 dA - U \int_I \rho U dA + U \int_{II} \rho \bar{u} dA = \rho \int_{II} \bar{u} (U - \bar{u}) dA \\ &= C_D \frac{\rho U^2 a}{2} \end{aligned} \quad (40)$$

となる。したがって,形状抵抗係数 C_D は

$$C_D = \frac{2}{U^2 a} \int_{II} \bar{u} (U - \bar{u}) dA \quad (41)$$

ここに, a は物体の流れの方向に直角な面への射影面積である。この計算は,実際には,単に形状抵抗だけでなく,境界層内の表面抵抗も含んでいるはずである。しかし,形状抵抗が問題となるようなものでは,これが表面抵抗に比してきわめて大きいから,形状抵抗であるとしてよい。

もし $U - \bar{u}$ が小さければ,(41)式は簡単に

$$C_D = \frac{2}{U a} \int_{II} \bar{u}_1 dA, \quad u_1 = U - \bar{u} \quad (42)$$

となる。

いずれにせよ,形状抵抗力あるいはその係数を知るためには,速度差 ($U - \bar{u}$), u_1 の分布がわかっていなければならない。このため,Prandtlの運動量輸送理論を用いたり,エネルギー的解析法によって速度差を流下距離の関数として決めること²⁾などがある。

圧力項の影響を考えると,形状抵抗力の第二次近似が計算される。この方法には,Betz¹³⁾

主 12) Appel, D.W. and others: Advanced Mechanics of Fluids, Tokn Wileys, New York, 1959.

13) Betz, A: Ein verfahren zur direkten Ermittlung des Profilwiderstandes, ZFM, Band 16, Heft 42, 1925.

やJones¹⁴⁾の実験的方法がある。

(2) 種々の形の物体の形状抵抗係数

形状抵抗力は主として圧力によって構成され、物体形状

によってせん断力もそれに関係する。いずれにせよ、それは流れの

Reynolds 数によって示されるから、(40)式で与えられる形状抵抗係数 C_D も同様である。

図-8は各種の回転体に対する形状抵抗係数を図示したものである。この図には、表面抵抗力に基因する部分が比較的大きい流線形物体から、圧力差によって定まる抵抗力を示す円板までが含まれたものである。

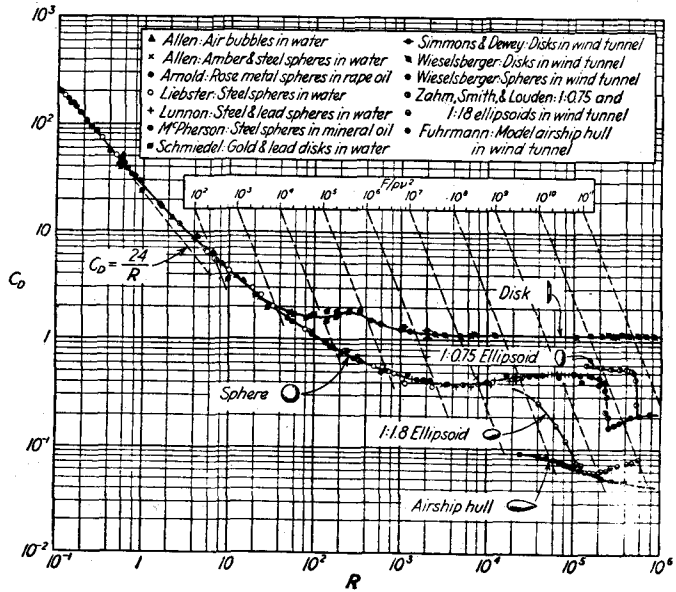


図-8 回転体に対する形状抵抗係数 (H. Rouse)

図-9は二次元形状の物体のそれを Reynolds 数との関連において示したものであり、ほぼ同様な傾向がみられる。

これらの形状抵抗あるいは形状抵抗係数の議論はある程度まで管路遷移部の流体力の問題にも適用されるものである。ベンチュリ管、オリフィス、管路急変部はいずれも回転流線形物体、円板、円筒状物体に相当するからである。しかし、ここでの議論は流体が無限に拡がっている場のものであるのに対し、管路は限られた流れの場であることに注意しなければならない。

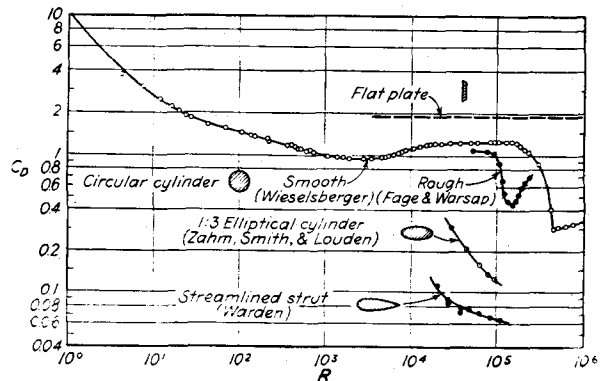


図-9 二次元物体の形状抵抗係数 (H. Rouse)

注 14) Tohnes, E.M.: The Measurement of Profile Drag by the Pitot Transverse Method, ARC RM 1588, 1936

(3) **Karman 渦列** 流体内におかれた物体よりかなり下流側で、Karmanの渦列といわれるお互いに反対方向に回転する二つの渦の列がみられる。その発生と安定性は純粋に流体力学的な問題であって、Karmanにより、 $h/l=0.281$ のとき安定な渦列がえられることが証明されている。このような渦列は逆に円柱に対してその単位長さ当たりにつき

$$D = \rho U^2 h \left[2.83 \frac{V}{U} - 1.12 \left(\frac{V}{U} \right)^2 \right]$$

の形状抵抗力を発生させる。ここに、 h ：二つの渦の幅、 U ：流速、 V ：渦列の速さである。一般に V/U ならびに h は実験によって決められる。

円柱により発生するKarmanの渦列の周波数はBlenkその他の研究者によって実験されたが、Roshko¹⁵⁾によればReynolds 数 VD/ν が60~5000に対して渦列は発生し、周波数に関する無次元数、すなわち Strouhal 数 $nd/V = S$ と 図-11 に示す関係があるとされている。ここに、 V は代表流速であって、 U とすればよい。

Reynolds 数の大きい領域では、 $S = 0.21$ である。したがって、円柱の直径が小さいと、速度も小さくなり、その結果として音として聴かれる領域の周波数がえられるようになる。

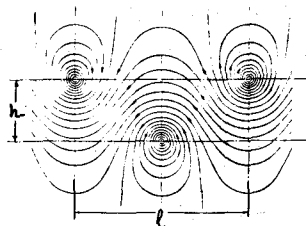


図-10 Karman の渦列

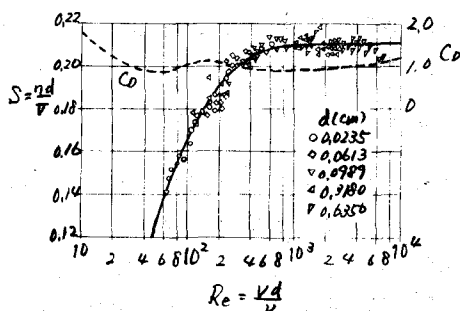


図-11 円柱をすぎるKarman 渦列の発生に関する Strouhal 数

5 水理構造物周辺の流体圧の分布の計算

われわれが対象とする各種の水理構造物周辺の流体圧の分布を知ることは、その積分としての全流体力の計算においてきわめて重要である。とくに、対象が単に流体運動の基本形としての円柱、平板、球でなく、オリフィス、せき、各種のゲート、橋脚などのような実際的なものであれば、なお一層重要となろう。

流体圧は表面力の一つであるから、その分布は(3)式を解くことによってえられる。しかし、(3)式は普通には Navier-Stokes の式に帰されるから、解くといってもその解はほとんどえられない。しかし、幸いにして、流体圧の分布を求める問題の多くはいわゆる局所的な挙動を対象とするものであって、この場合には流体運動によって生ずる流体素分の変形にもとづく力は無視される。すなわち、流れは非粘性と仮定されることになる。したがって、圧力分布は Euler の方程式を与えられた境界条件のもとで解くことによってえられる。こうした単純化された近似解は、漸変流における静水圧分布ならびに波形勾配の大きい波の非静水圧分布にみられよう。前者は流体運動における深さ方向の慣性項が無視されるという近似条件からえられるものであり、また後者はそれが無視されず、

注 15) Roshko, A.: On the Development of turbulent Wakes from Vortex Streets, NACA Rep 1191, 1954.

流線の曲りが導入されることからえられるものである。さらに、流れを囲む境界面の曲りによる流体に働く遠心力は流体圧分布に大きな影響を与えることはいうまでもない。ところが、非静水圧分布はいずれも流速分布の関数として示されるから、実際的な表示をうることは容易でない。

もし、非粘性の流れに非回転運動という仮定をさらに用いると、圧力分布の推定はきわめて容易になる。(3)式の運動量法則より非回転運動の流れに関するBernoulliの式

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \Omega + \frac{p}{\rho} = C \quad (43)$$

がえられ、また速度ポテンシャルと流れ関数に関する直交性の関係が応用されるからである。ここに、 ϕ ：速度ポテンシャル、 $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$ 、 Ω ：力のポテンシャルである。

実際の流体はこのような理想的な完全流体ではない。しかし、前述のように、流体圧が問題となる流れは局所流であり、このような状態では流体は非粘性で非回転運動するものとみなしても差し支えない。ここでは、こうした流体運動の解析に便利な流線を描く方法ならびにリラクゼーション法を示し、これらの方法により描いた流線から流体圧分布を推定することを説明しよう。

(1) 流線網による流体圧分布推定法 この原理は流線と等ポテンシャル線とのなす四角形において、流れ方向の速度 v は

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial s} = -\frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (44)$$

と表わされることから、両者を等間隔に描けば、すべての四角形は正方形となり、対角線は等しく、そのなす角は直角であるというものである。

実際には、次の手順によって反復描き直す。

- 1) 所要精度によって、描く流線数を定める。所によりその数を増すこともある。流線を描くに当たっては、流速分布の明らかなところ、たとえば、流線が平行となるところや放射状となるところより初める。
- 2) 他の領域へと滑かな曲線で流線を延長する。この場合、流速と流線の曲率半径との積が一定（自由渦）であるから、曲率半径の小さいところでは流線間隔も小さくなる。
- 3) 等ポテンシャルを描く。境界面は一つの流線であり、流線と等ポテンシャル線とのなす網目は正方形である点に注意して、適宜流線を修正する。よどみ点では、流線間隔は無限大となるが、これは実際上不可能であって、正方形の代りに五角形が形成される。
- 4) せきよりの越流ナップのように、自由表面をもつ流れでは、その表面流速 v_s はBernoulliの式より

$$v_s = \sqrt{2g \{ H - (\Omega/g + p/\rho g)_s \}} = -\frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (45)$$

である。ここに、 $\{ \}$ は全水頭より自由表面までの鉛直距離である。流線網では、 $\delta \phi$ ($\partial \phi$ の階差) は一定であるから、上式より $v_s \cdot \delta s = C$ (一定) である。したがって、全水頭線より鉛直下向きに $v^2/2g (= (C/\delta s)^2/2g)$ を、水平に δs をとってプロットすれば、全水頭線より下向きで $v^2/2g$ の点に対する δs は水路の対応点の自由表面における等ポテンシャル線の間隔を表わすことになり、作図が簡単化される。

- 5) えられた流線網より、圧力分布の表示を行なうが、開水路流れに対しては $p/\rho g$ という形で、また管路の流れに対しては、ピエゾ水頭 $(\Omega/g + p/\rho g)$ 、あるいはそれらの無次元表示で表わすのが通例である。

6) 構造物に作用する全流体力は、えられた圧力分布を積分すればえられる。

以上の手順によってえられた水理構造物に作用する流体圧分布の例(いずれもH・Rouseの文献より引用)を示したのが図-12~17であって、流体運動をきわめて単純化したモデルによって取り扱っているにも拘らず、実際の現象を再現していることは、この方法の有用性を示すものである。

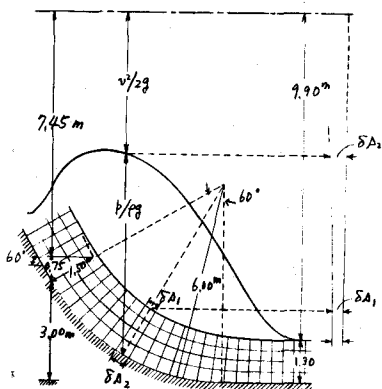


図-12 越流型余水吐下流における流れと圧力分布

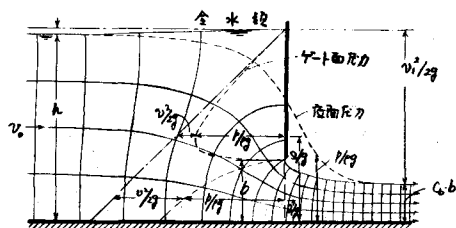


図-14 スルース・ゲート下の流れと圧力分布

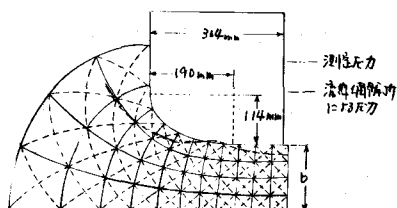


図-16 スルース・ゲート下端の円形リップの特性

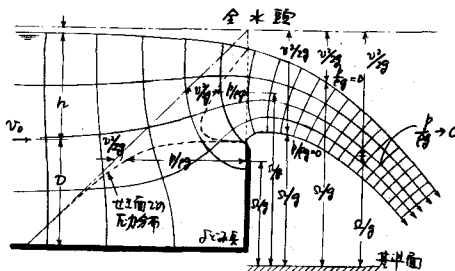


図-13 せきを越える流れと圧力分布

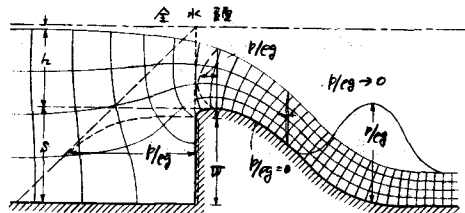


図-15 余水吐を越える流れと圧力分布

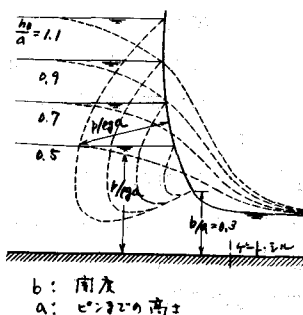


図-17 テンター・ゲートにおける圧力分布

(2) リラクゼーション法 この方法は、もともと、Laplaceの方程式を解くに当って用いられるものであるが、流れが二次元非回転であれば、速度ポテンシャルあるいは流れ関数はLaplaceの方程式を満足することから応用される。計算は全く機械的であるという利点をもっている。

図-18(a)において、短い辺長 a の正方形の網目の中央節点における流れ関数値 ψ_0 を周辺の ψ の値、すなわち、 $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ の平均値として表わすと、

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_0 = \frac{1}{a^2} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0) = 0$$

したがって、もし $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ が正しければ、

$$\psi_0 = \frac{1}{4} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4)$$

となる。この関係が満足されるように格子網節点の ψ の値を調整する。

なお、(b)図のように、境界面近くの流れでは(a)図の対称正方形がえられない。この場合、短い辺長を $\lambda_i a$ ($i=1, 2, 3, 4$) において同様な計算をすすめればよい。たとえば(b)図については

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(1+\lambda_1)} \left(\frac{\psi_1}{\lambda_1} + \psi_3 - \psi_0 \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \right) + \frac{1}{\frac{1}{2}(1+\lambda_2)} \left(\frac{\psi_2}{\lambda_2} + \psi_4 - \psi_0 \left(1 + \frac{1}{\lambda_2}\right) \right) = 0$$

もし、

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(1+\lambda_1)} = \frac{1}{\frac{1}{2}(1+\lambda_2)} = 1$$

となるように格子網を作ると、 ψ_0 は

$$\psi_0 = \frac{(\psi_1/\lambda_1) + (\psi_2/\lambda_2) + \psi_3 + \psi_4}{(1/\lambda_1) + (1/\lambda_2) + 2}$$

である。

実際の計算は以下の手順で行なえばよい。

- 1) 対象とする流れの場に、まず正方形の格子網を作る。これは流線網でない。ついで、各節点で ψ の値を推定し記入する。境界面に沿って ψ の値はあらかじめ与えられた値と一致していなければならない。この推定の良否が調整回数を左右する。

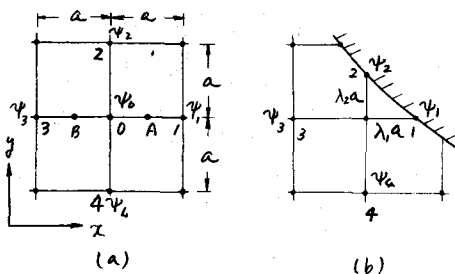


図-18 リラクゼーション法の説明図

- 2) 各節点で、その周辺における ψ の値から上述の式を用いて平均値を計算する。この操作が節点のリラクゼーションである。計算は通常流れの方向、または水平に行なう。
- 3) 各計算によって、調整値は周辺の値に影響を及ぼす。したがって、影響がなくなるまで、何度もこの操作を繰り返す必要がある。

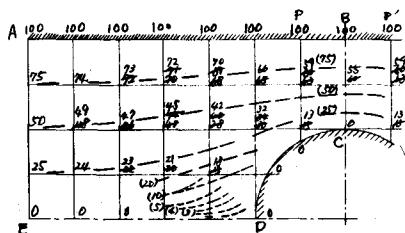
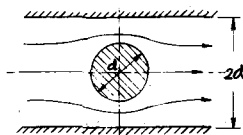


図-19

- 4) ところにより、さらに細かい格子

網によって計算を進めた方がより高精度の解がえられる。

5) 調整された ψ の値を用いて、流線が描かれる。なお、この方法による解析例を図-19に示している。

6 運動量保存則、角運動量保存則による流体圧の計算

表面抵抗、形状抵抗、あるいは一般的にいて圧力分布の評価は、いわば構造物に及ぼす流体力の詳細な挙動であった。ところが、実用的な問題では、しばしば全体としての流体力を知るだけで十分ことがある。たとえば、パイプライン系における曲管の支持力、ロケット、ジェットの推力、水力機械におけるトルクなどである。これらの問題における流体力はいわゆる境界面に働く力であって、運動量保存則、角運動量保存則を対象流体を囲むコントロール・ボリュームに適用して計算される。

以下例によって説明を加えよう。

A 漸縮曲管の支持力

図-20に示すような漸縮曲管内全体をコントロール・ボリュームに選ぶ。管壁が流体に及ぼす力を R とすると、その反力 K が流体力であって、管を支持するに必要な力である。

(3)式において、流れは定常的であるから、左辺第1項は不要である。図の記号を参照して、

$$\int V(\rho V \cdot dA) = V_2(\rho v_2 A_2) - V_1(\rho v_1 A_1)$$

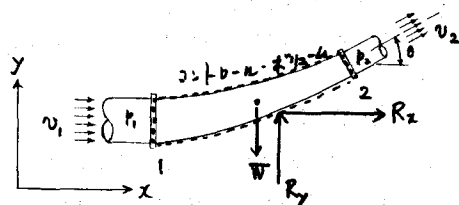


図-20 漸縮曲管

あるいは、スカラー量として表わせば、

$$\int v_x(\rho V \cdot dA) = (v_2 \cos \theta)(\rho v_2 A_2) - v_1(\rho v_1 A_1)$$

$$\int v_y(\rho V \cdot dA) = (v_2 \sin \theta)(\rho v_2 A_2)$$

一方、

$$\Sigma F = \text{物体力} + \text{表面力}$$

あるいは、 W を流体重量とすると、

$$F_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta + R_x$$

$$F_y = -p_2 A_2 \sin \theta - W + R_y$$

したがって、連続条件 $\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$ を考慮して

$$v_1 \rho A_1 (v_2 \cos \theta - v_1) = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta + R_x$$

$$v_1 \rho A_1 (v_2 \sin \theta) = -p_2 A_2 \sin \theta - W + R_y$$

R_x , R_y , につき、符号をかえると、

$$K_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta - \rho v_1 A_1 (v_2 \cos \theta - v_1)$$

$$K_y = p_2 A_2 \sin \theta - W - \rho v_1 A_1 (v_2 \sin \theta)$$

* 例題はいずれも文献4)より引用した。

として求められる。

B スプリンクラーのローターに及ぼすトルク

これは角運動量保存則(4)を応用する例である。図-21を参照して、流量 q の水をスプリンクラーによって噴出させるとき、ローターの受ける流体力によるトルクが計算される。斜線部をコントロール・ボリュームにとると、噴出流速 $v = q / 2A$ 、各ノズルより噴出する水の質量 $\rho q / 2$ 、アーム $r = l / 2$ 、噴出流速の横方向成分 $v \cos \alpha$ であるから、

$$V \times r = (v \cos \alpha) (l / 2)$$

$$\int \rho V \cdot dA = \rho q / 2$$

$$\Sigma (F \times r) = T_R$$

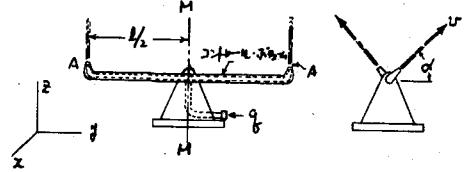


図-21 スプリンクラー

である。したがって、

$$T_k = -T_R = -\frac{v l \cos \alpha}{2} \cdot \frac{\rho q}{2} = -\frac{\rho l q^2}{4A} \cos \alpha$$

C その他

ペルトン水車に働く噴出水によるトルク、タービンに生ずる動力などは、いずれもこれまでに示した運動量保存則や角運動量保存則を適用して解かれるものである。

7 圧力測定

これまでは、流体が物体に及ぼす力について、詳細にあるいは巨視的に述べた。実際に、われわれが対象とする現象で、流体圧はいかに測定されるかについて若干説明を加えよう。

流体圧は、それが対象境界面の全圧力であろうが、いわゆる圧力の強さであろうが、実質的にはマンオメーターに昇る水柱や液柱の高さによって測定される。すなわち、圧力水頭という形で表現されるのが通例である。したがって、圧力測定上の問題点はマンオメーター、ピエゾメーターを中心とした圧力計が如何に正しく圧力を指示するかという点と指示値がどのような変換によって資料となりうるかである。

A ピエゾメーターの特徴

ピエゾメーターとマンオメーターの相違は明確でない。通例、前者はピエゾ水頭、すなわちある基準面より測定した水柱(位置水頭および圧力水頭の和)を測定するものであり、後者は単に圧力を水柱として示すものであるといわれる。ここでもその定義にしたがうとすれば、圧力測定の問題点はピエゾメーターの特徴ということになる。

ピエゾメーターへの取付口が正しくないと、圧力は正確に測定されない。すなわち、その形状は円筒型、境界壁面と直角で同じ高さでなければならない。深さは少なくとも直径の2倍以上であることが望ましい。取付口の大きさによる圧力測定への影響は明らかにされていないが、ドイフの研究¹⁶⁾によれば、直径 0.4 ~ 1.0 mm

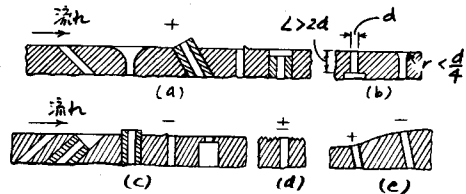


図-22 圧力指示に関するピエゾメーターの影響

注 16) Peters, H., Druckmessung, Handbuch der Experimental physik, Vol 4, Akademische Verlag, Leipzig, 1931.

のピエゾメーターに対して0.9%の負の誤差があるといわれている。

平均的な流体圧でなく、対象が圧力変動であれば、取付口よりピエゾメーター内の流体の挙動が明らかにされていないと、大きな誤差が生ずることがある。

B 圧 力 計

取付口より伝達された流体圧は何らかの圧力計によって圧力の指示を与える。一般に、これらはつぎの三通りのものがある。

- (1) **液柱計** 液柱式のものには、単一マノメーター、差圧計、ゼロ変位差圧計ならびに Wahlen ゲージなどがあり、それぞれよく知られている。
- (2) **機械式圧力計** 圧力の変動を機械的な伸び縮みという形でとらえる圧力計であって、ピストン型、チューブ型（ブルドン管）、隔膜型およびベローズ型がある。時間的な圧力変動をとらえるものとして、隔膜型のものが多く使用されている。
- (3) **ピエゾ電気式圧力計** 急激な圧力変動を測定するのには、この方式がよく、水晶、ロッシェル塩、チタン酸バリウムなどが用いられる。
- (4) **指示装置** 各種の圧力計によってえられた圧力を実際の資料として指示するには、きわめて多くの方法があり、それぞれの用途に応じた特徴をもっている。一般的には、機械的、空力的、水圧的、電気的方法によって行なわれるが、圧力変動の測定が可能なことから最近では電気的な変換器が多く、電気抵抗、電気容量、インダクタンスなどが利用される。

あ と が き

ここで述べた流体力とその取扱いは古典的な問題に終始した。残された問題のなかで重要なものには、仮想質量、キャビテーション、流体の乱れに基因する不規則な流体力などがある。とくに近年、乱れによる不規則流体力の問題が各方面、とくに学術的研究の面で大きく取り上げられるようになったが、その成果はいまだ定性的な領域をでないようである。これは、乱れそのもの、乱れの測定、乱れに係る諸水理量間の測定などが十分でないためである。もともと、この種の問題はある程度まで経験的事実を導入しなければ解かれえないから、理論の進歩のためにはより正しい計測が必要となるからである。

今後は、これらの研究課題が次第に学術的興味の中心となってくると思われる。しかし、その現実的な成果をうるためには、理論と実際との両面が常に平行して発展していくことが不可欠である。