

水文学における確率過程

北海道大学工学部教授 山 岡 勲

1 概 説

最近の水文学の研究では、水文統計の分野の論文、とくに在来の決定論的手法の他に確率論的手法による論文が新しい分野の創造を促しつつある。防災工学や水資源開発という大きな研究テーマに関して、水文量の推定、予測、及び調整に対する最善の工学的手法が不断に求められており、一般には十分な資料を欠くためにこれらの目的の達成が難しいのが実情である。一方において水文学的解析の従来の方法では満足すべき成果を必ずしも期待できなかったため、水文学の研究者は数学的統計学、確率理論及び情報理論における最近30~40年の著しい進展に著目して、この手法を応用する研究が最近誠に盛になった。その結果、確率水文学 (Stochastic hydrology) とよばれる専門分野が発生をみたのである。とくに米国、ソ連における成果が顕著であり、我国でもこの分野のすぐれた研究が発表されてきたので、ここに主としてKisiel (1969)¹⁾の解説論文によって、水文学における確率過程 (Stochastic process) について述べてみたい。

1.1 確率過程の定義^{2) 3) 4)}

古典的な物理系における如く、水文系でも、その時間的な変動状況は微分方程式や積分方程式などで決定される、と考えてその解析に努めて来たのがオーソドックスな在来の研究方法である。しかしながら現実の物理系、サーボ機構、情報の通信路などが、通常外部からの雑音や不規則衝撃を受けたり、入力、出力自体が確率的に変動するものであったりすると、時間とともに不規則に変動する系の状態を明確に記述する必要があるわけで、水文系も2章にのべるように正にこのように時間とともに確率的に変動する系と考えられる要素をもって置く。この系の状態、あるいはその運動量を表わす一つの手段として確率過程が用いられる。その定義は永井²⁾によれば、

ある任意の集合 T の各元 t に確率変数 $X(t)$ が対応していて、任意の自然数 n と T の任意の元 $t_1, t_2, \dots, t_n$ に対し n 次元確率変数 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ の分布

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \quad (1.1)$$

が定義されていて、このような分布の全体の族が次の2条件、(a)任意の自然数 n に対し $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ が $(1, 2, \dots, n)$ の任意の順列であるとき、

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}),$$

(b)任意の自然数 n に対し、 T の任意の元 $t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n$ について、 $m < n$ のとき

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_m}(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

を満足しているとき、確率変数の系 $\{X(t); t \in T\}$ を確率過程 (stochastic process) という。

逆に条件(a)、(b)を満足する族の分布があれば、それは T をパラメータ t の空間とする確率過程 $\{X(t), t \in T\}$ を一意に決定することがKolmogoroff (1933) の定理から知られている。確率過程 $\{X(t); t \in T\}$ を規程することはすべての自然数 n と T のあらゆる元 $t_1, t_2, \dots, t_n$ について分布 $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を規定することと同等である。パラメータ t は一般には時間で実数値、 $-\infty < t < \infty$ であると考えられる。このように確率過程 $X(t)$ 、 $-\infty < t < \infty$ で表わされる系の変動の状況が時間的に定常である場合、定常確率過程といわれる。

もっと分かり易く説明すれば、水文時系列の変動の中には、測定や観測法による変動因子の他に、一般に偶然に支配される因子が含まれている。従って現実を得られた時系列は一つの標本である。その

母集団にあたるものが確率過程 (stochastic process) $X(t)$, または確率系列 (stochastic sequence) X_k である (吉川)²⁾

また, 確率水文学は諸変数の確率性状の基礎になって, 水文学の問題をとくべき水文変数の統計学的特性の巧みな扱いとして定義される。確率変数は偶然性変数, すなわちその値が確率関数によって定められるところの変数として定義される。そして確率水文学は, その終極の目的は解析すなわちシミュレーションモデルを用いて水文系 (水資源系) のより効果的なまた経済的な設計を予測することであるという感覚で扱われるもので, その中には水文時系列の解析や降雨流出過程, 融雪流出過程の予測, 確率モデルの作製などが含まれる。

1.2 水文学的モデルの概説¹⁾

水文サイクルは大気と地球による水の循環と再配分の全過程を表わす。その過程は常に地球上の水と大気中の蒸気とがバランスする方へ動く。陸上では, そのバランスは次の簡単な質量保存の法則の簡単な表現によって表わされている。

$$P = R + E + \Delta S \quad (1.2)$$

ただし P は降水量, R は流出, E は蒸発, 及び ΔS は貯水量の変化である。各流域に対し (1.2) 式は流入量, 流出量及びその流域内での貯留の変化の間の質量バランスを表わす。その全サイクルは原因結果がすべての場合に皆一定方向というわけにはならないという意味では全く複雑なものである。すなわちフィードバック (2 方向因果) は蒸発の効能による水文サイクルに固有の特性である。

流域系におけるそのサイクルは図-1 のフローチャートにスケッチ的に図示される。流域系は降雨信号を平滑化された流量に変形する一つの暗箱 (black box) である。情報技術者の用語によると, 流域は降雨の振幅を平滑化して入力の高周波成分をフィルターで除去するといえる。とに角流域が人間によって荒されるにつれてまた複雑な変化が現われるわけだが, 我々の水文学における問題は入力の性質, 流域系の状態, 性質及び出力の性質をすべての条件下ではっきりさせることである。

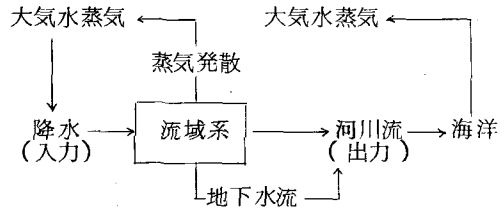


図-1 水文サイクル¹⁾

表1 は降雨, 流出及び流域変換系の可能な種々のモデルを示している。

表1 水文学的系の概念的分類 (Kisiel¹⁾ による)

I 入 力 (降雨)

A 因果関係 (causality) と偶然性 (chance) によるもの

1. 決定論的 (deterministic)
2. 準決定論的 (quasi-deterministic)
3. 確率論的 (probabilistic)

入力

流 域
変換系

出力

 - a. 推計的 (stochastic)
 - (1) 純正にランダムな系列 (pure-random sequence)
 - (a) 定常過程 (stationary process)
 - (b) 非定常過程 (non-stationary process)
 - (2) 純正にはランダムでない系列 (nonpure-random sequence)
 - (a) 定常過程
 - (b) 非定常過程
 - b. 非推計的 (nonstochastic)
 - (1) 頻度解析 (frequency analysis)
 - (2) 順序統計学 (order statistics)

- (3) 離散事象の確率 (probability of discrete events)
4. ハイブリッド, 決定論的と確率論的の組合せ, (例, stanford 流域モデルとその修正) (hybrid)
- B 時間的及び空間的分布によるもの
1. 均一
 2. 非均一
- II 変換系 (transformation system)
- A 因果関係と偶然性によるもの〔石原(藤)・高棹論文⁴⁾参照〕
- B 河域応答の線形性と時間不変性によるもの〔同上論文による〕
1. 線形時間不変型 (linear time invariant)
 2. 線形時間変化型 (linear time variant)
 3. 非線形時間不変型
 4. 非線形時間変化型
- C パラメータ形によるもの
1. 集中パラメータ形 (lumped-parametric form) (通常の線形微分方程式)
 2. 分布パラメータ形 (distributed-parameter) (偏微分方程式)
- D 系の開放状態によるもの (すべての流出は流域のより低い末端で現れる)
1. 開かれている: 流域の地中の地質によって決められる。
 2. 閉じられている
- E 地形学的情報による
- F エネルギー貯留による
1. 反応のある (貯水池への如きエネルギー貯留) (reactive)
 2. 反応のない (摩擦力による如きエネルギーの減殺) (non reactive)
- III 出力 (流出或は蒸発)
- A 入力の場合のように因果関係と偶然性によるもの

さて、水文学的現象のモデルを組み立てるためには3つの研究方法(アプローチ)があり、これを提携するとよい。先ず第1には、その研究者の専門知識とその現象の概念的表現を、帰納的か演繹的な理由づけの相互作用による純粋に合理的な考慮によって、適合する構成枠(決定論的なものも確率論的なものもある)の鑄型に入れることである。しかしその結果のモデルは余りに複雑で、数学的に取扱いかねるかもしれない。それで望ましいモデルはもっともと思われる決定論的モデル(たとえば線型微分方程式)か或は確率モデル(たとえばポアソン或はマルコフ過程)といった扱える形にしいて作られる。そして物理過程の実際のデータからそのモデルの必要なパラメータを決める。そのモデルはある程度まで現実に基づいているので、概して最も正確で、比較される立場でも適用できるし、パラメータの観測範囲をこえて外挿されるときも最も信頼できるし、その物理系の構造の内部まで洞察できるようにみえる。実際のデータからパラメータを決めるので有利なこの方法はモデルを改良することになる。しかし乍ら確率論的モデルに対しては、モデル構成やモデル判別の手法が全く同じというわけではない。

第2番目のそしてモデル作りにもっと実際の研究方法は、物理過程の知識にもとづく選択の正当化などを考えないで、初めから一つの便利な数学モデルを探ることである。その最も粗雑な形には、観測値が仮定された決定論的モデルに最も適合するカーブとなるように、目でか統計的手法によって、観測データに実験式カーブを合せるアプローチを含む。その終極目的が現象の経験的記述であるときは、その研究方法は全く満足すべきものであり、判定を下すのに価値があろう。曲線適合の慣例的手法に加えて、多変数統計的手法は、その基盤になる仮定がおかされないなら、また予報方程式がデータの限界をこえて拡張されないなら有用である。

第3番目の最後の研究方法(いわゆる2次のアプローチ)には、水文時系列の数学モデルを作るのに重要な価値をもつ一般化された調和解析の概念が用いられる。観測値は直接に確率過程のスペクト

ル表現（分散スペクトル variance spectra），或はモーメント関数（コログラム correlogram）の有効な推定を行なうように扱われる。観測値を発生させている物理現象についてか、これらの現象をモデル化するのに必要な確率過程の理論についてか、いずれかの十分な知識を欠く場合には、2次モーメント関数のスペクトル解析は、現象中の変動の主な原因に関する研究に対して手がかりを与える。それによって我々は、単一時系列の中に或は多点時系列間に、長期傾向（トレンド）、周期性、及び持続性の連鎖を発見することができる。

1.3 水文時系列の性質¹⁾

過程とは時間の、面積の、容積の或は一つの線にそっての連続的な変化を示す現象である。空間における変化でも時間における変化でもそれが水文現象のもっている特性である限りは、水文過程と言うことができる。降雨と流出とは一つの流域内で時間的に空間的に変化することがよく知られており、浸透速度や浸透容量も同様に変化すること、浸食過程は流域を通じて同じではないこと、大気や流れの中のトレーサーや汚濁物の拡散分布は不均一であるのみならず時間によって変わることも、などなどがよく知られている。要するに水文過程は動的な系に生じ、数学的モデルをつくるときにそのように扱わねばならないわけで、時間によって変化する水文過程が水文学者にとって最も関心があるものである。そして時系列には連続的観測値による連続的時系列と、その或る一定時間毎の平均値の時系列のような離散的時系列がある。

次に水文事象は事象の大きさのランクによって解析されるし、また事象の生起の連続性によっても解析される。水文事象のランキングではそれらの生起順序は無視され、頻度解析として慣行的な方法の基礎をなす。これは河川の流量や降雨の大きさやその回数、平均値、与えられた流量や降雨量が将来超過されるかどうかなどの予測に用いられる。ランキングに対照的に生起の連続性の研究は、時系列の過去の事象が、同じ時系列か或は第2の時系列の現在と将来の事象の大きさに影響を与えるかもしれないということを仮定する。このように同一時系列の連続する値の間の可能な連合、依存度を無視しない。例えば、昨日の河川の流れは強く今日の流れに関連しているはずだし、与えられた地方における数日間連続している暴風雨パターンは、明らかに過去の事象に強く影響されている降雨流出パターンを生ずる。太陽は空気温度、水の温度、河川中の溶解酸素の濃度の日変化を生起させる。

時間と空間における時系列の等質性（homogeneity in time and space）ということの吟味も大事である。もし各事象が何時でも生起する同一の偶然性をもつならば、その時系列は時間について等質性であるという。しかし乍ら現実の時系列は中々等質性ではないわけで、長期傾向（trend）、周期性（periodicity）、持続性（persistence）及び大変動の事象（catastrophic event）（地震、地じりなど）を含み、図2に示されるような成分からなる。

等質性を欠くと $\{X(t); t \in T\}$ の標本は、同一母集団からは選ばれていないことになる。

水文時系列の空間的等質性は、同一の母集団からとられている場合のような2つ以上の時系列が、互にそうは違わない統計的パラメータをもっているとき、統計学的感覚でみとめられる。統計的水文学的等質性（流出と降雨）の評価にあたっては、空間的に独立した観測地点が用いられねばならない。

1.4 水文過程における決定論的過程と確率過程¹⁾

次に決定論的過程と確率過程について述べる。水文過程の中での

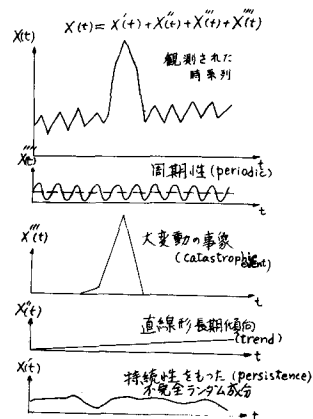


図-2 ある時系列の諸成分¹⁾

変動は、決定論的か確率論的かであろう。ある決定論的過程では、水文変数と時間の間に、洪水追跡 (flood routing) や IUH 単位図 (instantaneous unit hydrograph) の式中にある如く、確定した明確な関係が存在するものである。関数式はその有効な全時間域に対して過程を定義する。すなわち時間中の現象についての各連続的観測もその過程についての新しい情報を提供しないわけである。これは全くか一部かは別として、ランダム機構 (不規則波理論) によって発生する確率過程 (stochastic process) とは対照的である。確率過程は純粋にランダムか又は不完全にランダム (現象) であろう。なお変動 $x(t_i)$ が時間 i で抽出される確率法則は、時間に独立な場合も (確率法則は時間と共に変わらない) 或は時間に依存する場合もあろう。図 3 にこれらの過程の例を示す。

もし確率過程 $\{X(t); t \in T\}$ が全くランダムなら、時系列中の母集団 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ からの $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ の値は内部でそれら同志独立であり、かくてランダム系列を構成する。もしその過程が不完全なランダムなら $x_1, x_2, \dots, x_n$ の値は独立でなくそれらの間で関係がある。

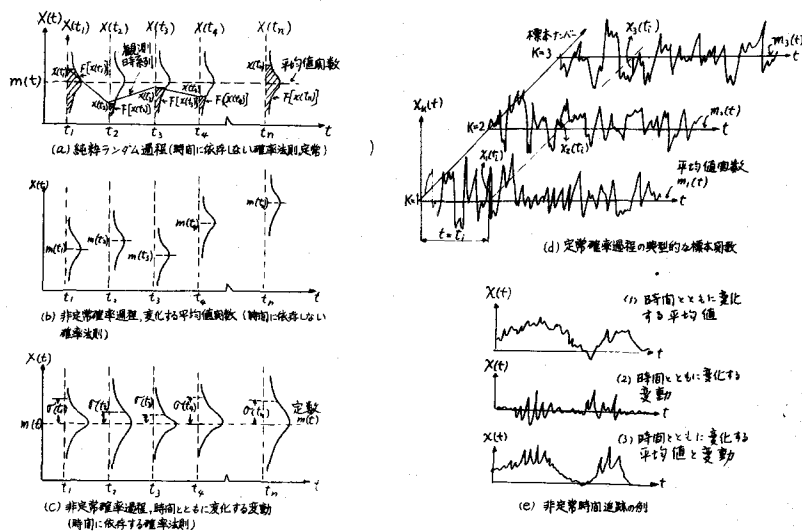


図 - 3 諸過程の例¹⁾

前述のとおり確率過程は確率法則のコントロールのもとで時間的に発展する。その結果は標本関数 (sample function) とよばれる時系列となる。(図 3(d))。決定論的関数と対照的に、確率過程のある時間における x の値は確実に予測されることはできない。1 例として、部分

$$S_i = 1 + 2 + 3 + \dots + t \tag{13}$$

はどの時間 t に対しても知られる、一方部分

$$S_n = x(t_1) + x(t_2) + \dots + x(t_n) \tag{14}$$

は、ある時間 t_n における確率論的表現によってのみ記述される、それは $X(t_i)$ が独立の等しく分布されているランダム変数であるからである。

S_n の値は $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ の値に確率的に依存する。(1.4) 式という単純な確率過程は過去の長い記録から貯水池の貯溜、収益関係の決定に用いられるし、またかなり長い期間に対する降雨量流出量の分布に対して有効である。

応用水文学において、動的応答すなわち数回に及ぶ確率関数 (降雨入力), $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ に対する流域の河川流量 $Y(t)$ の応答は興味深い。流域応答における入力の大きなピークの相互の効果を強めたり或は消し合ったりする確率は、多次元複合分布関数 (multidimensional joint distribution function) $F[x(t_1), \dots, x(t_n)]$ をもつところの入力 (降雨) ランダム変数 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 間の相関 (複合依存) の程度による。流域応答は同様にそれ自身の複合分布関

数 $F[y(t_1), \dots, y(t_n)]$ の諸項にて定義される。入力が出力の何れかに対する確率過程の一般的な記述は、(たとえば入力に対して)すべての整数, n に対して, T におけるすべての時間 $t_1, t_2, \dots, t_n$ に対する n 個のランダム変数 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ の多次元複合分布関数, $F[x(t_1), \dots, x(t_n)]$ という形で表わされるだろう。 $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ がお互い独立である定常純粋ランダム過程に対する複合分布関数は次式で示される。

$$\begin{aligned} F[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)] &= F[x(t_1)] F[x(t_2)] \cdots F[x(t_n)] \\ F[y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)] &= F[y(t_1)] F[y(t_2)] \cdots F[y(t_n)] \end{aligned} \quad (1.5)$$

実際には, n 次元分布の一般モデルを, たとえば, 多変数正規分布と称し, またその分布を定義するのに必要なパラメータを時間の関数としてきめられる。多変数正規分布に対しては, これらのパラメータは平均値関数 $m(t)$, 分散 (variance) $\sigma^2(t)$, 及び共分散核 (covariance kernel) $K(s, t)$ であり, これらはそれぞれ次の如く与えられる。

$$m(t) \equiv E[X(t)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dF[X(t)] \quad (1.6)$$

$$\sigma^2(t) = \text{var}[X(t)] \quad (1.7)$$

$$K(s, t) \equiv \text{cov}[X(s), X(t)] \equiv E[X(s)X(t)] - E[X(s)]E[X(t)] \quad (1.8)$$

ただし $E[X(t)]$ は $X(t)$ の期待値 (expected value) 或はすべての可能な標本関数の [図 3(d) に示されるように] アンサンブル上の平均であり, $\text{cov}[\]$ の記号は共分散 (covariance) を表わし, また $X(s)$ は初期の時間 s におけるその過程の値である。

しばしば, 確率過程で既知なのはただその平均値関数, 分散, 及び共分散核だけの場合がある。これらは完全に正規或は「ガウシアン」確率過程を規定するけれども, もっと高次のモーメント (積率) が他の過程には求められる。それにもかゝらず $m(t)$ と $K(s, t)$ は多くの過程に多くの情報を伝達する。標本関数が「共通な」形をもてば, 平均値関数はその形を決める。この特別な場合, 平均値関数は同一現象の決定論的モデルに等しいはずである。このような決定論的モデルと確率モデルの間の対応は, 同様な物理現象の確率モデルの組立てにおける一つの潜在的ガイドとなる。

(1.8) 式で $s = t$ ならば核 (kernel) はその過程の分散関数 (variance function) となる。

$$K(t, t) = E[X^2(t)] - E^2[X(t)] = \text{var}[X(t)] \quad (1.9)$$

従来の統計学の相関係数 (product-moment correlation coefficient) は, 相関核 (correlation kernel) であって, $+1$ から -1 の間を変化し, その定義は次の如く共分散核の項で表わされる。

$$\rho(s, t) = \frac{\text{cov}[X(s), X(t)]}{\{\text{var}[X(s)] \text{var}[X(t)]\}^{1/2}} = \frac{K(s, t)}{\{K(s, s)K(t, t)\}^{1/2}} \quad (1.10)$$

無次元の相関核 (correlation kernel) は時間 t におけるその過程の 1 つの値 x_t と時間 s における他の値 x_s の確率的依存度を表わす。もし $\rho(s, t)$ が 0 なら, そのときは確率過程 $\{X(t); t \geq 0\}$ はランダム変数 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ で構成されて, それらは内部的に時間に無関係 (独立) であり, またその系列は連結していないと言われる。このような過程が純粋ランダム系列といわれている。内部的には独立というのは, 外部的にはなお他の時系列と依存関係, 相互相関がありえるからである。たとえば, 流出量或は流出速度は降雨量やその速度に関係がある。外部的な相関は相互相関 (cross-correlation), 内部的な相関は自己相関 (autocorrelation) として検討することができる。

また分散のスペクトル解析による確率推計の研究方法をとれば, 水文量変動の主要な原因を示すことができ, 決定論的か確率的研究の何れにおいてもよりよい現象把握と予測が行なえる。

2. 確率過程の概念の級別¹⁾

確率過程 (stochastic processes) の3つの級は、水文学における最近の興味ある特有の過程を網羅している。すなわち、計算過程 (counting process)、過程の遷移形 (transition type of process)、及び1次または2次モーメント関数によって特徴づけられる過程 (processes characterized by first and second moment functions)、たとえば時系列モデルである。

計算過程は、特定の形の単純事象の生起数を計算する過程である。例は3ポアソン過程 (Poisson process)、再生過程、及び順待ちモデル (queueing model) などである。Stanford 流域モデルの確率アナログを式化するのに Bagley (1964) は、その土中の水分貯留 (順) が順待ち理論とマルコフチェーン (Markov chain) によってモデル化された河域への入力を模擬するために、日日の降雨量について修正したポアソン確率分布を使った。順待ち理論は先ず Moran (1959) によって貯水池群に應用された。また後に Langbein, Fiering, 及び Lloid によって拡張され、Chow は彼等の発見を解説している。

第2番目の級は一つの系のある状態 (state) からある状態への遷移 (過渡) の系列として、時間とともに発展する過程を含む。その過程は一つの状態から他の状態への遷移の確率によって、またその過去の経歴への依存の程度によって仕わけされる。もし、離散的時間パラメータ過程に対して、その過程の将来が過去と現在のものに独立であれば、そのときは古典的確率論が適用される。もし過程の将来が現在にのみ関係するなら、そのときは一次のマルコフ過程が存在する。もし過程の将来がいくつかの固まった有限数の過去の状態 (値) によるときは、多次マルコフ過程が存在する。水文学への応用には Pattison (1965) による降雨量の総合化、Weiss (1964) による雨の日と雨の降らない日の発生順序の確率の予測、Bagley (1964) の土の含水量の種々の状態の確率的仕訳、Chow や Ramaseshan (1965) による降雨記録の拡張、Thomas と Fiering (1962)、Yagil (1963) Beard (1965) 及び Fiering (1964) の論文の如き河川流量記録の研究などがある。

第3番目の過程の級は、実際の時系列の1次及び2次モーメント関数の経験的調査にもとづいている。時系列解析 (time series analysis) は標本から基礎となっている発生過程の諸性質の推定と再生を含む。研究手順は一つの母集団 (たとえば数字をつけられたボールでみたされた壺) から無作為標本を抽出すること、そしてその標本から母集団の性質を推定することと同様である。資料の時系列が長ければ長いだけ、そのパラメータの推定はよく、そして定常的と仮定できる。一つの観察された時系列

$$\{x(t); t=1, 2, \dots, N\}$$

が、ある発生過程 $\{X(t); t \geq 0\}$ からの単一の標本であると仮定しよう。後者は単にそれによって時系列が時間のすべての瞬間に対して形成される方式を示すだけであって、その確率的性質のために、その過程はある瞬間における系列の実際の値を予測することはできない。1変量定常時系列に対する単純発生過程の例は

$$X(t) = A \cos \omega_1 t + \xi(t) \quad (2.1)$$

$$X(t) = \xi(t) + \alpha \xi(t-1) \quad (2.2)$$

$$X(t) + \beta \times (t-1) = \xi(t) \quad (2.3)$$

$$X(t) = p(t) + q(t)\xi(t) \quad (2.4)$$

ただし、 $\xi(t)$ はランダム (雑音) で、独立 (無相関) 系列であって、また $p(t)$ と $q(t)$ は t における多項式である。(2.2) 式は α が過去の諸値についての重み係数 (weighting coefficient) であるところの1ステップ移動平均過程を表わす。(2.1) 式は A が振幅で ω_1 が基本的角周波数 (単位時間

あたりのラジアン)である線形の周期の過程を表わす。それは1年中の降雨或は流出の季節的変化、或は時間に関する蒸発過程を記述する基礎としての温度の季節変化などを表わすことができよう。

(2.3)式は単純自己回帰形過程(simple autoregressive process)(又一次のマルコフ過程或は単純持続といわれる)を表わして、その過程では現在値 $X(t)$ は以前の値 $X(t-1)$ によって決定される。(2.1)-(2.3)式のもっと複雑な形はそれぞれ

$$X(t) = \sum_{i=1}^m A_i \sin(\omega_i t + \theta_i) + \xi(t) \quad (2.5)$$

$$X(t) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \xi(t-i) \quad (2.6)$$

$$X(t) = \sum_{i=1}^m \beta_i X(t-i) + \xi(t) \quad (2.7)$$

$$X(t) + \sum_{i=1}^m \beta_i X(t-i) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \xi(t-i) \quad (2.8)$$

ただし ω_i はそのサイクルの角振動数であり、 θ_i は i 番目のサイクルの位相角であり、そして α_i は(2.6)式で規定される移動平均過程における重み係数(weighting factor)である。Matalas(1963)は(2.6)式のモデルを有効年間降水量を年間流出と相関させるために適用した。自己回帰過程(2.7)式の現在の値 $X(t)$ は系列の過去の値の一次結合と過去と結合のない独立雑音項 $\xi(t)$ から形成されている。この過程の係数 β_i は過去の値と現在の値の関係の強さの尺度である。系列相関係数に關係してこれらの β_i は過去と現在の値の間の時間間隔が大となるにつれ段々により小となる。(2.7)式によって発生される時系列は、変化する長さの振動すなわち変動(fluctuation)を表わす。その平均長さは β'_i による。(2.8)式は、線形の回帰モデルとよばれて、(2.6)式と(2.7)式からの項の混合である。スペクトルという研究手法は我々に単一変数定常時系列を作るために組合わされる異なる発生機構の間の区別を示してくれる。

単一変数の時系列の以前のモデルの中には、いかなるトレンド(trend)も含まれていない。トレンド(長期傾向)は時系列の増加が低減傾向を表わす。Lees Ferry地点におけるコロラド河の流量は低減傾向を示す例である。ある時系列におけるトレンドは、1日のサイクルの大気中の1点における乱流変動の強さに従って変化する平均的な変動として示されるかもしれない。もっと微妙な形のトレンドは、季節的変動の低減、或は現在の値が系列の過去の値に相関している度合の変化というように、1成分の重要度における変化である。次のものは非定常時系列の簡単な1例である。

$$Y(t) = m(t) + X(t) \quad (2.9)$$

このモデルは平均 $m(t)$ におけるトレンドとのみ関係のある時系列を発生する。 $X(t)$ は定常時系列であり、また $m(t)$ は線形関係式、多項式、或は広く分離した不連続性の系列であるかもしれない。Granger(1962)とBendal, Piersol(1966)はそれぞれ時系列における非定常性の研究に対するスペクトル手法を提案している。

2つ以上の時系列が関連しているときは、多変数時系列モデルが有効である。Hamon, Hannan(1963), Hannan(1963), Jones(1964)及びFiering(1964)はそれぞれ標本資料から最適の線形の予想方程式を得るための技法を提案している。

HamonとHannanは相互スペクトル法(cross-spectral methods)を使用し、回帰解析に対するデータを最適に用いるのみならず、また線形回帰モデルにおける仮定からのはずれに対して照査すべきデータの滲透試験(penetrating examination)を行なっている。簡単には、その方法は最大の重みを信号レベル $X(t)$ が雑音レベル $\xi(t)$ に比して最も高いところの角振動数に与える。これらのモデルはそれぞれ、一次回帰、重回帰及び時間遅れ回帰であり、次のように与えられる。

$$Y(t) = \alpha + \beta X(t) + \xi(t) \quad (210)$$

$$Y(t) = \alpha + \sum_{i=1}^m X(i, t) + \xi(t) \quad (211)$$

$$Y(t) = \sum_{K_2}^{K_1} \beta_i(i, t) + \xi(t) \quad (212)$$

もし一次二変数回帰モデル〔(210)式〕が有効なら、母集団回帰 β は2つの時系列の周波数領域代表のすべての周波数帯において同一であるべきである。更に(210)式には時間遅れ値は用いられていないので、 $Y(t)$ と $X(t)$ は正相(β 正)か反対相(β 負)の何れかにあるべきである。不規則成分 $\xi(t)$ は定常で $X(t)$ と独立であるべきである。(211)式は2つ以上の時系列に対する一般的なモデルである。たとえば、一つの河域における2つの観測地点における降水は、この方法で流出と関係づけられる。HamonとHannanは平均海水位、大気圧、及び風の応力の2つの成分、を関係づけることによってその方法を説明している。(212)式は X 変数群の過去の経歴の $Y(t)$ への効果を導入する。しかしながら、正(K_2)と負(K_1)の遅れの数の選択は不確定でその関連関係の事前の知識なしに任意である。さらに複雑な方法がJones(1964)によって提案されている。過去数年間の理論的発展は明らかに多変数解析のスペクトル解析との相互関係を示している。

3. 一般化された調和解析¹⁾

この理論は水文時系列の遅れ時間領域及び周波数領域での解析、時系列モデルの公式化、及びそれらの理論的相関とスペクトル関数の発展、水文測定系の周波数応答、単一又は多入力に対する線形系の特性、及び最適線形予測法(最適実現単位図)に関係するものである。この理論は時間或は日のオーダーについての短期間時系列の解析と総合(シンセシス)に、また月や年のオーダーの長期間時系列の研究に関係する。

また周期性、一時性、及びランダム性をもつ関数に対して用いられ、線形で時間とともに変化する系に対して研究されている。勿論この概念は河川の蛇行、砂堆波形の振幅の研究のような空間的分布に関しても有効である。これはデータ解析の道具として重要な用途をもち、データ記録のスペクトル解析は丁度光学的分光解析のプリズムの役を果し、パワー・スペクトルすなわち分散スペクトルが結果として得られる。この理論で解析されるのは振幅ではなくて(1.9)式の分散である。これは平均値関数のまわりの観測値のばらつき変動の平均強さを表わすとも言える。

3.1 周期的時系列

水文学における周期的振動には、現象によって半日、一日、半月、年間、2年間の各周期の考えられるものがある。海浜にそったり河口における潮汐の振動は半日の周期の例であり、気温、河川水温、蒸発散などは一日の周期の例であり、降水量の計には半月周期の変動があり、気温、降水量の総計、河川流の水量などには年間の周期のあることがよく知られている。2年周期は成層圏中のゾーン平均風速や温度で22月から30月の周期をもつという。

実測の或は理論上の時系列 $x(t)$ は次式によって、フーリエ級数に展開される。

$$x(t) = (a_{x0}/2) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{xn} \cos 2\pi n f_1 t + b_{xn} \sin 2\pi n f_1 t) \quad (31)$$

ただし、 $f_1 = 1/T_1$ は基本周波数で、基本同期 T_1 に逆比例し基本角周波数 ω_1 ($f_1 = \omega_1/2\pi$)に比例する。 n は調和関数のオーダーを表わす整数で、 a_{xn} と b_{xn} は調和係数、また $a_{x0}/2$ は $x(t)$ の平均値である。調和係数は、それぞれ次式で表される。

$$a_{xn} = (2/T_1) \int_0^{T_1} x(t) \cos 2\pi n f_1 t \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

$$b_{xn} = (2/T_1) \int_0^{T_1} x(t) \sin 2\pi n f_1 t \, dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

また、(3.1)式は次のように表わされる。

$$x(t) = (a_{x0}/2) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{xn} \cos(2\pi n f_1 t - \theta_{xn}) \quad (3.4)$$

ただし、 $c_{xn} = (a_{xn}^2 + b_{xn}^2)^{1/2}$ 、また θ_{xn} = 位相角 = $\tan^{-1}(-b_{xn}/a_{xn})$ 。(3.4)式は複雑な周期データが定常平均値成分($a_{x0}/2$)と c_{xn} (振幅)と θ_{xn} (位相)をもつ無限数の sin 曲線成分とから成ることを示す。Lee (1960) によって与えられたように複素指数関数の項で表わす時間領域での表現は一般化に便利である。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_x(n) \exp(j n \omega_1 t) \quad (3.5)$$

ただし、 $j = \sqrt{-1}$ 、 $F_x(n) = \frac{1}{2}(a_{xn} - j b_{xn})$ は周期関数 $x(t)$ の複素振幅スペクトルであり、また $x(t)$ のフーリエ変換は、

$$F_x(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) \exp(-j n \omega_1 t) dt \quad (3.6)$$

これは $x(t)$ の周波数領域での表現で離散的棒線スペクトルとなる。図式に $F_x(n)$ は a_n 、 b_n 及び θ_n の項として示すことができる。(図4)

$F_x(n)$ の共軛は単に (3.6) 式で $\exp(-j n \omega_1 t)$ を $\exp(j n \omega_1 t)$

と変えることによって得られる。

$$\bar{F}_x(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) \exp(j n \omega_1 t) dt \quad (3.7)$$

いま同一の T_1 をもつ2つの周期的時系列、 $x(t)$ と $y(t)$ 、を考えると、

遅れ時間 (log time) $\tau = K \Delta t$ による、すなわち離散的時間間隔 K によって $y(t)$ を示せば、相互相関関数 (cross-correlation function)

$R_{xy}(\tau)$ は次式で与えられる。

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\bar{F}_x(n) F_y(n)] \exp(j n 2\pi f_1 \tau) \quad (3.8)$$

ただし、 $\bar{F}_x(n)$ は $F_x(n)$ の共軛、 $F_y(n)$ は $y(t)$ の複素振幅スペクトル。 $R_{xy}(\tau)$ のフーリエ変換はクロス・パワー・スペクトル関数 (cross-power spectrum function) $S_{xy}(f)$ で、

$$S_{xy}(n) = \bar{F}_x(n) F_y(n) = \frac{1}{T_1} \int_0^T R_{xy}(\tau) \exp(-j n 2\pi f_1 \tau) d\tau \quad (3.9)$$

$x(t)$ 及び $y(t)$ のフーリエ級数の合成における、もとの調和係数の項で表わされる相互相関関数

(cross-correlation function) は

$$R_{xy}(\tau) = \frac{a_{x0} a_{y0}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{xn} c_{yn} \cos(n 2\pi f_1 \tau + \theta_{yn} - \theta_{xn}) \quad (3.10)$$

ただし、 $c_{xn} = (a_{xn}^2 + b_{xn}^2)^{1/2}$ 、 $c_{yn} = (a_{yn}^2 + b_{yn}^2)^{1/2}$

同様に、クロス・スペクトル関数は

$$S_{xy}(n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{xn} c_{yn} [\cos(\theta_{yn} - \theta_{xn}) + j \sin(\theta_{yn} - \theta_{xn})] \quad (3.11)$$

もし $x(t)$ が $y(t)$ よりむしろ時間に関して強い相関をもつなら、(3.10)式と(3.11)式は添字 x と y

を変えてもよい。 $R_{xy}(\tau)$ と $R_{yx}(\tau)$ の間の関係及び $S_{xy}(n)$ と $S_{yx}(n)$ の間の関係は

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \quad (3.12)$$

$$S_{xy}(n) = \bar{S}_{yx}(n) \quad (3.13)$$

$x(t) = y(t)$ するときを考えると、自己相関関数 (auto correlation function) $R_{xx}(\tau)$ とパワー・スペクトル関数 (power spectrum function) $S_{xx}(n)$ がそれぞれ規定される。

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\bar{F}_x(n) F_x(n)] \exp(j n 2\pi f_1 \tau) \quad (3.14)$$

$$S_{xx}(n) = \bar{F}_x(n) F_x(n) = \frac{1}{T_1} \int_0^T R_{xx}(\tau) \exp(-j n 2\pi f_1 \tau) d\tau \quad (3.15)$$

これらの関数も調和係数の項で表わせば、

$$R_{xx}(\tau) = (a_{x0}^2/4) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{xn}^2 \cos n 2\pi f_1 \tau \quad (3.16)$$

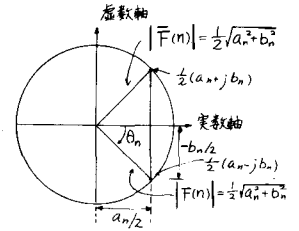


図-4 複素振幅スペクトル $F(n)$

$$S_{xx}(n) = c_{xn}^2/2 \quad (3.17)$$

(3.14)式から自己相関々数は偶関数である。

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau) \quad (3.18)$$

で $\tau=0$ で最大であることが明らかである。しかし相互相関々数 R_{xy} は概して偶関数でも奇関数でもない。また $\tau=0$ で最大値ではない。もし $\tau=0$ なら $R_{xx}(0)$ は $x(t)$ の自乗平均値すなわち

$E\{[x(t)]^2\}$ である。(1.8)式は次の如くなる。

$$K_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - m_x^2 \quad (3.19)$$

同様な方法で2つの周期的関数に対して、相互共分散核 (cross-covariance kernel) を次のとおり規定できる。

$$K_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - m_x m_y \quad (3.20)$$

もし $x(t)$ と $y(t)$ の値から m_x と m_y をそれぞれさしひいて $x(t)$ と $y(t)$ の値を規準化すると、変換された系列 $\dot{x}(t)$ と $\dot{y}(t)$ に対し $K_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau)$ となり、 $K_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau)$ となる。 $\tau=0$ のとき、共分散核 $K_{xx}(0) = \text{var}[\dot{x}(t)]$ 。変換された系列の分散は $\sum_{n=1}^{\infty} c_{xn}^2/2$ である。 $S_{xx}(n) = c_{xn}^2/2$ から、パワー・スペクトル関数は n 次調和によって説明される分散の部分を与える。

(1.10)式で $\{X(t); t \in T\}$ に対する相関核 (correlation kernel) $\rho(\tau)$ を次式のようにきめた。

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{K_{xx}(\tau)}{[K_{xx}(0)K_{xx}(0)]^{1/2}} = \frac{K_{xx}(\tau)}{\text{var}[x(t)]} \quad (3.21)$$

これはまた正規化された相互共分散関数 (normalized cross-covariance function) ともいわれる。基準化された値に対しては

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{\text{var}[\dot{x}(t)]} \quad (3.22)$$

で、自己相関係数 (autocorrelation coefficient) といわれる。 $\rho_{xx}(0) = 1$ である。2つの周期関数に対する相互相関係数 $\rho_{xy}(\tau)$ は

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{[K_{xx}(0)K_{yy}(0)]^{1/2}} = \frac{K_{xy}(\tau)}{\{\text{var}[x(t)] \text{var}[y(t)]\}^{1/2}} \quad (3.23)$$

基準化された観測値に対しては

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{[R_{xx}(0)R_{yy}(0)]^{1/2}} \quad (3.24)$$

すなわち、 m_x と m_y は規準化された系列 $\dot{x}(t)$ と $\dot{y}(t)$ に対しては0となる。

3.2 トランジエント時系列 (transient time series)

離散的周波数 (frequencies) の1系列上の周期的関数についてのフーリエ級数表現は、 T を無限大にすることによって、連続する周波数領域へ一般化される。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} n f_1 = n/T = df \quad (3.25)$$

それゆえ、トランジエント関数は無限の周期をもった一つの周期的関数と言える。その結果として変換関係式 (3.5), (3.6) 両式は

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_x(f) \exp(j 2 \pi f t) df \quad (3.26)$$

$$F_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j 2 \pi f t) dt \quad (3.27)$$

$F(t)$ は円周波数の連続関数であり、一般に複素数である。

(3.26), (3.27) 両式が有効であるためには、 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ と $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt$ が有限でなければいけない。

2つのトランジェント時系列(たとえば, 洪水波)に対して, 相互相関々数とクロス・エネルギー密度スペクトルは次のように与えられる。

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) \exp(j2\pi f\tau)df \quad (3.28)$$

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (3.29)$$

もし $x(t)=y(t)$ なら, (3.28), (3.29) 両式はそれぞれ単一時系列の自己相関々数とエネルギー密度スペクトルとなる。 $\tau=0$ のとき単一時系列に対し (3.28) 式はその系列に対する全エネルギーを表わす。

水文学研究者にとって関心のある短期間のトランジェント時系列には, 洪水波動, 大雨, 地表入力に対する地下水の応答などがある。長期間のトランジェント時系列には長期傾向(トレンド)がある。しかし, スペクトル解析によって比較してきめる以外, 明白なトレンドは低周期の振動或は偶然効果の一部であるともいえるので, この成分を見つけることはどの精度にでも難しいことである。

3.3 ランダム時系列(不規則波時系列)

図3(d)に示す如くランダム過程 $\{X(t); t \in T\}$ は, そのアンサンブルについて1つの特有の自己相関関数をもつ。

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \exp(j2\pi f\tau)df \quad (3.30)$$

そのフーリエ変換 $S_x(f)$ は両側パワー・スペクトル密度関数(two-sided power spectral density function)である。

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (3.31)$$

$R_x(\tau)=R_x(-\tau)$ ゆえ, (3.30) 式は実数値の偶関数であり, (3.30), (3.31) 式は余弦(cosine)変換式として次のようになる。

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \cos 2\pi f\tau df \quad (3.32)$$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau \quad (3.33)$$

$\tau=0$ のとき, $R_x(0)$ は2乗平均値であり, 系列が規準化されると, 新系列は0平均となり $R_x(0)=\text{var}[\dot{x}(t)]$, 図5に示されるとおりスペクトル密度関数下の面積の $-\infty$ から ∞ まで全周波数域に亘ってのものを表わす。 $S_x(f)$ は単位円形周期に対する分散の単位をもち, 一方 $S_x(f)df$ は周波数帯 df における無限小の分散である。ランダム関数に対する正規化されたスペクトル密度関数は, 丁度周期関数に対するパワー・スペクトル関数が離散的確率マス関数に等しいように, 連続する確率密度関数に等しい。その全域に亘っての正規化されたスペクトル密度関数の積分値は, 確率分布関数の場合と同じく1でなければならない。

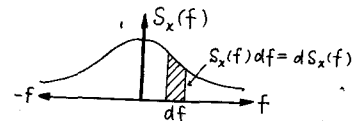


図-5 スペクトル密度関数の性質

負の周波数が存在することは数学的な技法で物理的な現実性はない。その結果として, 片側スペクトル密度関数 $G_x(f)=2S_x(f)$ となり, 一方 f は $0 \sim \infty$ でのみ変化し, またそうでなければ0であり, $G_x(f)$ は次の如くきめられる。

$$G_x(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} [(\Delta t) T]^{-1} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f) dt \quad (3.34)$$

(3.34) 式で, $G_x(f)$ の推定は周波数帯幅 Δf により, また抽出間隔 T によることが分る。 $G_x(t)$ を次

のように表わす人もいる。

$$G_x(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-j 2 \pi f \tau) d\tau = 4 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos 2 \pi f \tau d\tau \quad (3.35)$$

図6には、水文時系列の理論的研究において現在興味深い自己相関関数とスペクトル密度関数を集成してある。〔Bendat, Piersol (1966)〕¹⁾ 純正な決定論的過程も確率過程も共に理論的
自己相関々数とスペクトル密度関数をもって
いる。(a)と(b)の場合は決定論的過程の例である。Diracデルタ関数 $\delta(f)$ は(a)、(b)の場合に示される単位インパルスを表わす。その性質は次の如く定義される。

$$\left. \begin{aligned} f \neq 0 \text{ のときは } \delta(f) &= 0, \delta(0) = \infty \\ \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(f) df &= 1 \quad (\epsilon > 0 \text{ に対し}), \\ \delta(-f) &= \delta(f) \\ \int_{-\epsilon}^{\epsilon} G(f) \delta(f) df &= G(0) \quad [\text{すべての } G(f) \\ &\text{に対し}] \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

これを使用すると、例えば(c)の場合に有限パワー（分散）をもつ仮定の白色雑音 $G_x(f)$ をきめるときの如く、数学的解析に便利である。白色雑音（無相関のランダム変数）に対する自己相関々数は $R_x(\tau) = a \delta(\tau)$ 、で(3.36)式の定義によれば白色雑音は時間遅れ0で完全な相関があり、他では0で無相関であることが分る。(d)の場合は正弦波にランダム雑音が加わった場合で、この場合の自己相関々数とパワー・スペクトルは、sine波とランダム雑音のそれぞれの関数の単純な和である。(e)の場合は白色雑音の高周波成分をフィルターで除去する効果を示し、一方(f)、(g)、(h)の場合は水文量測定機器による出力の典型である。原の信号（たとえば降雨）の自然な低減と機器による平滑化は高周波成分を除去する傾向があり、一方有限の抽出時間間隔は発生過程のより遅い移動要素を除去してしまう傾向がある。残りの場合は発生過程の特性の章で論ぜられる。

自己相関々数の主要な応用は、ある時点における標本記録の値の、将来のある時点における同一記録の値に及ぼす効果を見つけることである。図5の(d)から、かなり大きな時間の変移においても決定論的正弦波は持続しており、一方白色雑音の効果は0なことが分る。一方においてパワー・スペクトル密度関数の主な応用は、その物理系の基本的特性に順次に関係しているデータの周波数構成を確立することである。例えば、 $h(t)$ が線型の時間によって不変の系（線型貯水池の如き）の単位インパルス（流域上に瞬時にたまった10mmの降雨量の如き）に対する単位インパルス応答関数を表わすとすれば、 $h(t)$ のフーリエ変換は次式のように与えられる。その系の周波数応答関数（system frequency response function） $H(f)$ である。

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j 2 \pi f t) dt \quad (3.37)$$

またその逆変換は

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(j 2 \pi f t) df \quad (3.38)$$

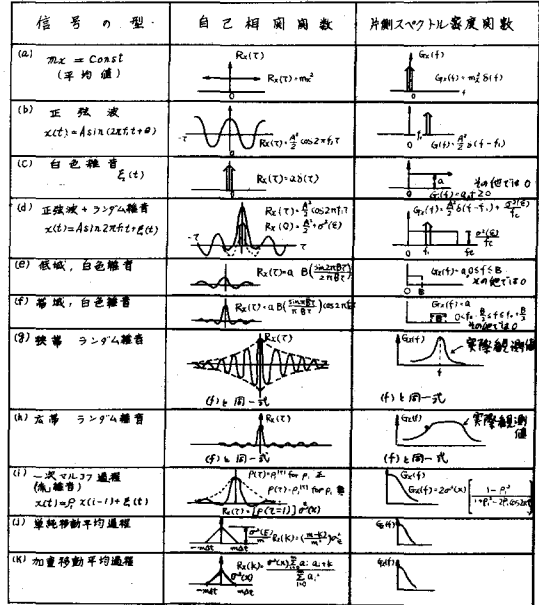


図-6 水文関係時系列の自己相関関数とスペクトル密度関数 (Bendat, Piersol (1966) による)¹⁾

$h(t)$ は単位図 (instantaneous unit hydrograph) IUHであり, すなわち持続期間のない単位降雨過剰に対する単位図である。

2 セットのランダムデータの相互相関々数 (cross-correlation function) $R_{xy}(\tau)$ は, 1 セットのデータの値が他のセットのデータの値に線型依存をすることを定義すれば, それは次式で与えられ,

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau) dt \quad (3.39)$$

また常に正か負であれ, 実数値関数である。その最大値は必ずしも $\tau=0$ におけるものではなく,

$R_{xx}(\tau)$ の如く偶関数ではない。

$R_{xy}(\tau)$ のフーリエ変換は, 物理的に実際にある片側クロス・パワー・スペクトル密度関数 $G_{xy}(f)$ である。

$$G_{xy}(f) = 2 S_{xy}(f), \quad 0 \leq f < \infty, \quad \text{他の場合は } 0 \quad (3.40)$$

$$G_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \exp(-j 2 \pi f \tau) d\tau \quad (3.41)$$

$$\text{それゆえ, } R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{xy}(f) \exp(j 2 \pi f \tau) df \quad (3.42)$$

クロス・パワー・スペクトルは2つの時系列の低周波成分の間の相関の程度の評価を行なう。

相互相関関数は偶関数ではないから, $G_{xy}(f)$ は概して次のような複素数である。

$$G_{xy}(f) = c_{xy}(f) - j Q_{xy}(f) \quad (3.43)$$

ただし, 実数部 $c_{xy}(f)$ はコスペクトル密度関数 (cospectral density function), また虚数部 $Q_{xy}(f)$ はクアドレーチャ・スペクトル密度関数 (quadrature spectral density function) と呼ばれる。

$c_{xy}(f)$ と $Q_{xy}(f)$ の項で表わすと, 相互相関関数は,

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} [c_{xy}(f) \cos 2 \pi f \tau + Q_{xy}(f) \sin 2 \pi f \tau] df \quad (3.44)$$

さらに, $R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$ と (3.43) 式から次式が得られる。

$$c_{xy}(f) = \int_0^{\infty} [R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)] \cos 2 \pi f \tau d\tau = c_{xy}(-f) \quad (3.45)$$

$$Q_{xy}(f) = \int_0^{\infty} [R_{xy}(\tau) - R_{yx}(\tau)] \sin 2 \pi f \tau d\tau = -Q_{xy}(-f) \quad (3.46)$$

それゆえ, $c_{xy}(f)$ は f について実数値の偶関数で, 一方 Q_{xy} は f の実数値の奇関数である。 $G_{xy}(f)$ と $G_{yx}(f)$ の項で

$$c_{xy}(f) = \frac{1}{2} [G_{xy}(f) + G_{yx}(f)] \quad (3.47)$$

$$Q_{xy}(f) = \frac{j}{2} [G_{xy}(f) - G_{yx}(f)]$$

むしろ重要な実数値の量, $r_{xy}^2(f)$, コヒーレンス関数 (coherence function) は次の如く定められる。

$$r_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_x(f)G_y(f)}, \quad 0 \leq r_{xy}^2(f) \leq 1 \quad (3.48)$$

これは相関係数の2乗に等しくコヒーレンスの正規化された測定値を示す。もしある特定の周波数で $r_{xy}^2(f) = 0$ ならば, $x(t)$ と $y(t)$ はその周波数でインコヒーレントすなわち相関がないことになる。もし $x(t)$ と $y(t)$ が統計学的に独立ならば, そのときはすべての周波数において $r_{xy}^2(f) = 0$ である。すべての f に対して $r_{xy}^2(f) = 1$ のときは, $x(t)$ と $y(t)$ は全くコヒーレント, すなわち完全に相関がある。

4. 発生過程¹⁾

水文過程の物理性についてより明快な理解を探索することに加えて, 前述の諸概念が標本時系列

(或は空間系列)を作っている基礎の発生機構を求めるために使用される。しかし乍ら完全なことは系が複雑すぎるのでとてもできない。先ず初めの近似法として、考えられる体系は線型系、定常性のもので、また主要成分から独立であるランダム成分 $\xi(t)$ の加算を仮定する〔(2.1)~(2.5)式参照〕。これらのモデルで発生される時系列の項は、純粋なランダム系列よりもっと規則性を示す。事実、それらの一般的な外観は、ランダム成分 $\xi(t)$ によって果される役割からみても、乱された周期関数の系列のようである。(2.1)~(2.3)及び(2.5)~(2.7)式によって与えられる一変数モデルの特性がこの章では強調されよう。

もし $\{X(t); t \in T\}$ が線型サイクリック過程で発生されるなら、そのときはデータは規準化される(平均値効果は除かれる)という仮定のもとで、

$$E\{X(t)\} = E\{A \cos 2\pi f_1 t + \xi(t)\} = 0 \quad (41)$$

残る特性は

$$\text{var}\{A \cos 2\pi f_1 t + \xi(t)\} = (A^2/2) + \text{var}\{\xi(t)\} = R_x(0) \quad (42)$$

$$R_x(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} = (A^2/2) \cos 2\pi f_1 \tau \quad (43)$$

$$G_x(f) = \int_0^\infty (A^2/2) \cos 2\pi f_1 \tau \cos 2\pi f \tau d\tau = (A^2/2) + \text{var}\{\xi(t)\} \quad (44)$$

この過程の代表的なものは図6(d)にでている。1以上のサイクリック成分〔(2.5)式参照〕があれば、関係する特性は、

$$\text{var}\{X(t)\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m A_i^2 + \text{var}\{\xi(t)\} = R_x(0) \quad (45)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m A_i^2 \cos 2\pi f_i \tau \quad (46)$$

$$G_x(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m A_i^2 + \text{var}\{\xi(t)\} \quad (47)$$

線型サイクル・モデルは経済、人口及び商売の傾向などのような他の分野で興味をもたれている。日、週、或は月のオーダーにおける短期間予報がその目的である。モデルの母数(パラメータ)(振幅、円周波数、傾向係数)はその現象が時間的に進展するにつれて調整される。デジタル・コンピュータはルーチン・ベースでモデルのこのようないそがしい調整に役にたつ。水道分配管系における需用変動の最近のスペクトル解析において(Champaign-Urbana, Illinois, Philadelphia, Pennsylvania, 及びDenverの各市), 固有の予測値は人間の習慣を反映するこのような観測時系列にもとづくということを示唆している。このような系は、もし多時系列中にえられる情報によって最大使用量をきめるならば、もっと能率よく操作されるに違いない。

もし $\{X(t); t \in T\}$ が移動平均過程によって発生させられるなら、その特性は

$$E\{X(t)\} = E\{\xi(t)\} \sum_{i=0}^m \alpha_i \quad (48)$$

$$\text{var}\{X(t)\} = \text{var}\{\xi(t)\} \sum_{i=0}^m \alpha_i^2 \quad (49)$$

$$R_x(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} = \frac{\text{var}\{X(t)\} \sum_{i=0}^m \alpha_i \alpha_{i+K}}{\sum_{i=0}^m \alpha_i^2}, \quad K \leq m \quad (410)$$

$$\rho_x(K) = \frac{R_x(K)}{\text{var}\{X(t)\}} = \frac{\sum_{i=0}^m \alpha_i \alpha_{i+K}}{\sum_{i=0}^m \alpha_i^2} \quad (411)$$

$$G_x(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau = 2 \sum_{K=-\infty}^{\infty} R_x(K) \cos 2\pi f K = \text{var}\{X(t)\} \left[1 + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \rho_x(K) \cos 2\pi f K \right] \quad (412)$$

ただし K は最大 m まで、遅れ時間 $4t$ の数を表わす整数、 m は移動平均の程度を表わす整数、また $\tau = K \Delta t$ で時系列の連続の形と離散的な形を関連づける。ランダム成分 $\xi(t)$ の単純な対称移動平均に対して、 m は奇数の整数、重み α は $1/m$ にひとしく、 $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ 、 $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 < 1$ 。

自己相関々数

$$R_x(K) = \frac{m-K}{m^2} \text{var} \{ \xi(t) \} \quad (4.13)$$

また

$$G_x(f) = \sum_{K=-m}^m \left(\frac{m-K}{m^2} \right) \text{var} \{ \xi(t) \} \cos 2\pi f K = \frac{\text{var} \{ \xi(t) \}}{m} \left[1 + 2 \sum_{K=1}^m \left(\frac{m-K}{m} \right) \cos 2\pi f K \right] \quad (4.14)$$

これらの関数の双方とも図 6(j) に図示されている。 $f = \frac{1}{2}$ で片側スペクトル密度関数 $G_x(f)$ は最低値に達し、0 周波数で最大値となり、また $f = 0$ と $f = \frac{1}{2}$ の間で単調に低減することに注意のこと。

実用的見地からは、移動平均操作モデルの性質は、相関がもとのランダム時系列の中に自然のまたは人工的な操作によってつくられる程度を示している。

範囲 m の移動平均過程は、平均年間流出量 $X(t)$ と年間有効降水量 $\xi(t-i)$ の関連をつけるために用いることができる。後者は独立のランダム系列である。モデル中に与えられる移動平均係数 α_i は、 $(t-i)$ 番目の年間中に流出する有効年間降水量の分数として定義される。

線型自己回帰過程 (linear auto regressive process) は、移動平均過程を、より少ない係数しか含まれないように、有用に簡素化したものである。もし移動平均モデル (2.6) 式について循環するように操作すれば、線型自己回帰モデル [(2.7) 式] が有効な年間降水量が互に独立のランダム変数であるという仮定のもとに得られる。

その特性は Matalas (1966) によって集成されたように、

$$E \{ X(t) \} = E \{ \xi(t) \} \left(1 - \sum_{i=1}^m \beta_i \right)^{-1} \quad (4.15)$$

$$\text{var} \{ X(t) \} = \text{var} \{ \xi(t) \} \left[1 - \sum_{i=1}^m \beta_i \rho(i) \right]^{-1} \quad (4.16)$$

$$\rho_x(K) = \frac{R_x(K)}{\text{var} \{ X(t) \}} = \frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \rho(i - |K|)}{\left(1 - \sum_{i=1}^m \beta_i \rho(i) \right)}, \quad |K| = 0, 1, \dots \quad (4.17)$$

$$S_x(f) = \frac{S_\xi(f)}{|1 - \beta_1 \exp(-j2\pi f) - \beta_2 \exp(-j4\pi f) + \dots|^2} \quad (4.18)$$

$$S_x(f) = \text{var} \{ X(t) \} \frac{1}{\left(1 + \sum_{i=1}^m \beta_i^2 - 2 \sum_{i=1}^m \beta_i \cos i 2\pi f + 2 \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{i=s+1}^m \beta_s \beta_i \cos (s-i) 2\pi f \right)} \quad (4.19)$$

ただし、 $S_\xi(f) = \text{var} \{ \xi(t) \}$ はランダム成分に対する両側スペクトル密度関数である。正規化された自己相関関数 (4.17) 式は 0 の近くで変動するかもしれないが、図 6(i) の如く $|K| \rightarrow \infty$ につれ $\rho_x(K) \rightarrow 0$ となる。 $S_x(f)$ は 1 以上の最大と最小をもつだろうということも明らかである。 $m \leq 2$ なる特別の場合に対しては、Matalas (1966) が自己回帰過程の係数が $\beta_1 = p + q$ と表わされ、また $\beta_2 = -p q$ ただし $|p| < 1$ で $|q| < 1$ 、それゆえ $|\beta_1| < 2$ また $|\beta_2| < 1$ となるととき解を出している。 p と q が共に実数のときは、

$$\rho(|K|) = \frac{p(1-q^2)}{(p-2)(1+pq)} p^{|K|} + \frac{q(-p^2)}{(q-p)(1-pq)} q^{|K|}, \quad |K| = 0, 1, \dots \quad (4.20)$$

$$S_x(f) = \text{var} \{ X(t) \} \frac{(1-p^2)(1-q^2)(1-pq)}{(1+pq)(1+p^2-2p \cos 2\pi f)(1+q^2-2q \cos 2\pi f)} \quad (4.21)$$

p と q がともに正のとき、 $\rho(|K|)$ は単調に $\rho(0) = 1$ から $\rho(\infty) = 0$ まで低減する。もし p

と q が負ならば、 $\rho(|K|)$ は偶数 $|K|$ に対して正で奇数 $|K|$ に対して負であり、 $\rho(|K|)$ の絶対値は単調に $|\rho(|0|)| = 1$ から $|\rho(|\infty|)| = 0$ まで低減する。 p 又は q の何れかが負または共に負のときは、 $\rho(|K|)$ は $|K| \rightarrow \infty$ につれて $\rho(|2K|)$ と $\rho(|2K+1|)$ が単調に減少するように変化する。 $S_x(f)$ はただ1つの最小と1つ或は2つの最大をもつ。 p と q が互に複素数の共軛数のときも解かれている(略)。

次に $q = 0$ 従って $\beta_1 = p$ で $\beta_2 = 0$ の場合を考えると、(4.20)、(4.21)式は簡単になって、

$$\rho(|K|) = p^{|K|} = \beta_1^{|K|} = \rho^{|K|} \quad (K=1) = \rho_1^{|K|}, \quad |K| = 0, 1, \dots \quad (4.22)$$

$$S_x(f) = \text{var}\{X(t)\} \frac{(1 - \rho_1^2)}{(1 + \rho_1^2 - 2\rho_1 \cos 2\pi f)} \quad (4.23)$$

なお、これは一次のマルコフ過程 (first-order Markov process) (いわゆる持続性モデル) に対する特有の表現である。 ρ_1 が正のとき、 $\rho(|K|)$ は $\rho(0)=1$ から $\rho(|\infty|)=0$ まで単調に低減し、また $S_x(f)$ は同様に $f=0$ で最大から $|f| = \frac{1}{2}$ で最小になるまで低減する。もし ρ_1 が負ならば、 $\rho(|K|)$ はそれが偶数の $|K|$ に対して正、奇数の $|K|$ に対して負なので、0 の近くで振動する。絶対値 $\rho(|K|)$ は $|K| \rightarrow \infty$ になるにつれて単調に降下する。 $S_n(f)$ は $f=0$ で最小となり、 $|f| \rightarrow \frac{1}{2}$ になるにつれて単調に増加する。図6(i)は図式に正の ρ_1 に対して $G_x(f) = 2S_x(f)$ であることをえがいている。

図7に一次マルコフ過程の正規化された分散スペクトルが系列相関係数の変化度合によって図示されている。系列相関が低減するに従い、スペクトルは扁平化し白色雑音の典型であるスペクトルに近づく。各々の曲線の下面積は、すべての周波数帯における分散寄与の合計がこの時系列の合計分散に等しいという事実を示して、ひとしくなければならない。低周波成分の分散寄与は赤色雑音スペクトルに対して最も強い傾向がある。図8はマルコフスペクトルのMaryland州のWoodstock市の日降水量のパワー・スペクトルへの適合を示す。マルコフ・スペクトルは直線プロットを得るために特別な縦軸系にプロットされることがある。一次マルコフ過程からの水文資料の時系列発生の研究もJulian (1961)⁵⁾ の研究を始めよく行なわれている。

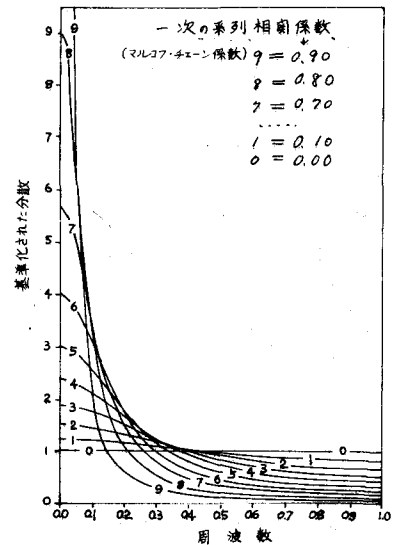


図-7 一次マルコフ過程に対する
基準化分散スペクトル
〔Mitchell (1963)〕¹⁾

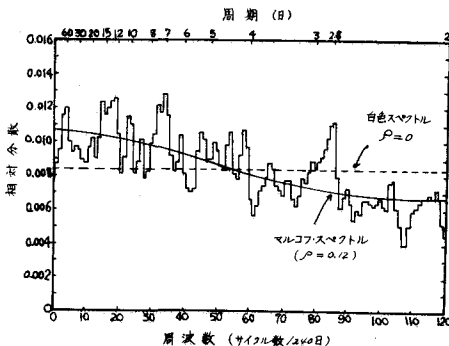


図-8 Woodstock, Maryland における日
降水量のパワー・スペクトル。標本長
 $N = 4,383$ 日〔Mitchell (1964)から〕¹⁾

5. 結 語

以上 Kisiel (1969)¹⁾ の最近の水文学データの時系列解析に関する解説論文に従って、確率過程に関する基礎的な部分を紹介してきた。水文学における我々の関心をもっている種々の分野の解析が、在来の決定論的な過程に新しい確率的な過程が加味されて始めて、一層の進展がみられるということを理解し、またその進歩した解析方法の基礎的な部分の知識を整理するこ

とができたと思う。

水文学におけるサイクルの種々の地球物理的過程間の相関の解明が進めば、将来の水文学研究者はすべての問題解決に使える、もっと現実的なパラメトリックで確率的なモデルを総合化することができよう。これから研究を勢力的に進めなければならない分野は、非線形と非定常成分の性質の研究であり、その結果の、自然界の特有な複雑さを合理的に統合する取扱いの可能なモデルの公式化という研究であろう。しかし、多くの水文学の問題は、定常確率的入力線型の時間に関して不変な（或は時間に関して変わる）系に入って、定常確率的出力を得る仮定に基く解析及び総合によく従うものと考えられる。従って現在までの進んだ研究の成果である、パラメトリック（母数推定の）或は確率論的モデルは、この水文系の一般概念の1つの特別な場合であって、このようなモデルは多くの応用において引続いて有用であると考ええる。

また水文系における複雑な相互関係は、現地における観測資料蒐集計画の周到な設計によってより効果的な解明がえられるが、スペクトル解析はデータ解析の手段として、これらの計画の組織と完成の条件となる。水文学研究者が本稿でも何度かその基本式にふれた数値スペクトル解析の利を得れば、とくに時間、日、月など短期間内の水文変動に関する時系列の解析に一層の成果をあげることが期待できよう。

なお最近の土木学会誌に掲載された、文献3)の他、確率、統計(B)(日野幹雄)、不規則な現象の解析(伊藤学、伯野元彦)、Oct., 1969 - Mar., 1970、は土木技術者にとって大変理解し易く内容も充実した解説書であり、初めて確率過程について学ばれる方は是非併読されることを御奨めする。

おわりに、Kisiel 論文¹⁾の米国などにおける多彩なコレログラムやスペクトル解析の実例、ソ連におけるKartvelishvili(1967)⁶⁾の確率過程としての自然河川流出の研究、とくに毎年のある月の流量の分布関数に関する研究、また我国の日野博士⁷⁾を始め諸先生の研究、北海道大学では岸教授また筆者らの最近の研究例についてもふれたかったが、紙数の関係もあり果せなかった。なお岩崎教授には、本テーマについて御配慮を得たことに謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) C.C. Kisiel : Time Series Analysis of Hydrologic Data, Advances in Hydro science (Volume 5-1969) Edited by V. T. Chow, Academic Press, 1969
- 2) 北川敏男編(永井武昭): 確率過程論, 共立出版社, 1966
- 3) 吉川和広: 土木計画のための確率・統計その2, 土木学会誌, 第54巻11号, 1969
- 4) T. Ishihara and T. Takasao : A Study of Runoff Pattern and Its Characteristics, Disaster Prevent. Rec. Inst. Kyoto Univ. Bull. 19, 1-23, 1964
- 5) V. T. Chow ed.: Handbook of Applied Hydrology, 8-93, 1964
- 6) N.A. Kartvelishvili : Theory of stochastic Process in Hydrology and River Runoff Regulation, (Leningrad, 1967), Translated and Edited by D. Louvish, Israel Progress for Scientific Translations, Jerusalem, 1969
- 7) 日野幹雄: 情報理論の水文学の一手法, 第12回水理講演会講演集, 土木学会水理委員会編, 1968
日野幹雄: 情報理論の水文学の一手法(II), 非線型流出系への適用, 第13回水理講演会講演集, 土木学会水理委員会編, 1969