

波浪の統計的解析の応用

東京工業大学 日 野 幹 雄

I はじめに

現象を観察し解析する際、われわれの用いて来た常套手段は、局所局所の量的バランスを考えて微分方程式を立て、境界や初期の条件を考えながらそれを繋ぎ合わせて全体像を形成することであった。譬喩的に言うならば、微分方程式は万能であり、微分方程式にのらないものは、理論ではなかった。微分方程式こそ科学・工学の世界の帝王であった。あたかも、吾が理解せざること科学にあらずと言うが如くであった。何百万とも何千万とも数え切れぬ難かしい問題がスマートにエレガントに解決された。帝王の偉光はあまねく科学・工学の世界を眩しく輝した。しかし、帝王の偉力をもってしても解決しえない問題もある。私はこゝで帝王「微分方程式」の支配しない世界の一部分についてのべよう。

さて、不規則変動の中にかくされた規則性・周期性を Fourier 分析により求めようとする手法は、前世紀の終りごろ Arthur Schuster が太陽の黒点異変や地磁気変化の解析に試みたのが最初であると言われる。その後、G. I. Taylor が乱流拡散 (1921) や等方性乱流の理論 (1935~8) の分野でこうした統計理論を発展させた。ほぼ同じ頃、N. Wiener はスペクトルと相関関数の関係 (Wiener-Khinchine 公式) を導き、一般調和解ひいては情報理論の魁を作った。これらに先立って Einstein (1906) の Brown 運動の理論があるが、これが後に Wang, Uhlenbeck, van Laar らにより発展させられ、今日の不規則振動理論となった。

1. 相関関数とスペクトル

不規則変動を解析する際に用いられる最も基本的な方法は相関 (correlation) とスペクトルを求めることである。

定常確率過程に属する不規則変動量の平均値からの変動分を $f(t)$ で表わせば、自己相関関数は式 (1.1) のように定義される。

$$C(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)f(t+\tau) dt \quad (1.1)$$

不規則変動 $f(t)$ は種々の円振動数の波のデタラメな重ね合せから成っており、円振動数 ω の成分波からの寄与の割合をスペクトル (Power spectral density) と言い、 $S(\omega)$ で表す。すなわち、

$$\overline{f^2(t)} = C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (1.2)$$

ちょうどスリットからの光線をプリズムを通すと、各波長に応じた屈折角で曲り、光の色の帯 (スペクトル) がみられる。不規則変動のスペクトルも全くこれと同じ概念である。ただし、不規則変動に対しては分光器のような便利なものではなく電気的あるいは機械的共振計によるか、Tukey の方法や FFT のようなデジタル的方法により求める。

不規則波が多くの成分波のデタラメな重ね合せより成ることは、次のように考えれば良いであろう。ある区間での周期関数は同位相の $\sin n\pi t$ や $\cos n\pi t$ の重ね合せ Fourier 級数として表わされる。この各成分波の位相をデタラメにずらしてやれば、もはや周期関数ではない。このことについては、II の不規則波のシミュレーションの項でもう一度触れる。

さて、相関関数とスペクトルとは互に Fourier 変換の関係にある (Wiener-Khinchine の公式)。

$$\left. \begin{aligned} C(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

もし、スペクトルを周波数 $f (= \omega/2\pi)$ について表し、これを $P(f)$ と記せば、式 (1.3) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} C(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(f) e^{i2\pi f\tau} df = 2 \int_0^{\infty} P(f) \cos 2\pi f\tau df \\ P(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

式 (1.3) (1.4) より明らかなように

$$\frac{\overline{f^2}}{2} = \int_0^{\infty} P(f) df = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (1.5)$$

である。これは、式 (1.2) に示されるように f , ω に負の値も考えるからである。もし、スペクトルを

$$\overline{f^2} = \int_0^{\infty} E(f) df \quad (1.6)$$

となるように定義すれば、式 (1.4) のかわりに式 (1.5) を用いなければならない。

$$\left. \begin{aligned} C(\tau) &= \int_0^{\infty} E(f) \cos 2\pi f\tau df \\ E(f) &= 4 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

2. 相互相関とクロス・スペクトル, コヒーレンス

2つの異なる不規則変動 $f_i(t)$ と $f_o(t)$ との間にも相関を考えることができる。これを相互相関関数 $C_{io}(\tau)$ と言う。

$$C_{io}(\tau) = \overline{f_i(t)f_o(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_i(t)f_o(t+\tau) dt \quad (1.6)$$

相互相関は一般には $\tau = 0$ に関して τ の正と負の領域の値が対称ではない。そのため、 $C_{io}(\tau)$ の Fourier 変換であるクロス・スペクトル $P_{io}(f)$ は複素数となる。

$$\begin{aligned} P_{io}(f) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} C_{io}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} C_{io}(\tau) [\cos 2\pi f\tau - i \sin 2\pi f\tau] d\tau \\ &= C_o(f) - iQ(f) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\left. \begin{aligned} C_o(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{io}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau \\ Q(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{io}(\tau) \sin 2\pi f\tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

式 (1.7) のクロス・スペクトルの実数部をコスペクトル、虚数部をクオドラチャ・スペクトルと呼び、それらから作られる

$$r^2(f) = \frac{C_o^2(f) + Q^2(f)}{P_i(f)P_o(f)} \quad (1.9)$$

(こゝに、 $P_i(f) \cdot P_o(f)$ はそれぞれ $f_i(t)$ と $f_o(t)$ のスペクトル), $r^2(f)$ をコヒーレンス (Coherence) と呼ぶ。2つの不規則変動量の間に線型関係があれば、

$$r^2(f) = 1 \quad (1.10)$$

であり、また一般に $0 \leq r^2(f) \leq 1$ の範囲にある。

不規則変動量が時間 t と場合 (x, y, z) にかゝわる時は、時空相関とその Fourier 変換を考えれば良い。また、不規則変動量の3次以上のモーメントも取扱われる。

波浪の問題は、directional spectrum では前者が、波の非線型干渉では後者 (bispectrum) が

問題となるが紙数の都合上これらについては省略する。

3. スペクトルの計算法

スペクトルの最も普通の計算法は、式(1.3)(1.4)(1.5)および(1.7)(1.8)により、相関関数から求める方法である。しかし、この式をそのまま差分式化して計算しても大抵は思わしい結果が得られない。その上、相関関数の最大ラグをいくらにすれば良いのか、データの読み取り間隔とデータの全長の関係をいかに設定しなくてはならないかの問題がある。

こうした点について、通信理論の立場からスペクトルの正しい計算方法を研究したのがTukey（その後Blackmanも）であり、その方法は**Tukeyの方法**として知られている。

最近になってCooley & Tukey⁶⁾は、生データに直接複素フーリエ変換を行って計算時間を驚異的に短縮する方法——**FFT**（fast Fourier transform）——を発表して大きな反響を巻き起している。スペクトルの計算方法については、最近ほかにも書いたのでこゝでは省略する。

波浪の統計的解析の分野の論文は、最近きわめて多くなっており、こゝでそれらのすべてについて述べることはできない。読者は文献7)8)も参照されたい。

II 線型応答系の理論と不規則波のシミュレーション

1. 応答関数¹⁾²⁾

いまある機構Aがあり、これに時間 $t=0$ で単位強さの瞬時的信号 $u(t)$ （例えば、力・電流・降雨など）を与え、その機構からの応答が $h(t)$ であるとする。このとき、 $u(t)$ をunit impulse, $h(t)$ をresponse function（応答関数）と言う。

図-2.1にみられるように、入力信号が時間の関数 $f_i(t)$ であるときには、時刻 $t=\sigma$ で $f_i(\sigma)d\sigma$

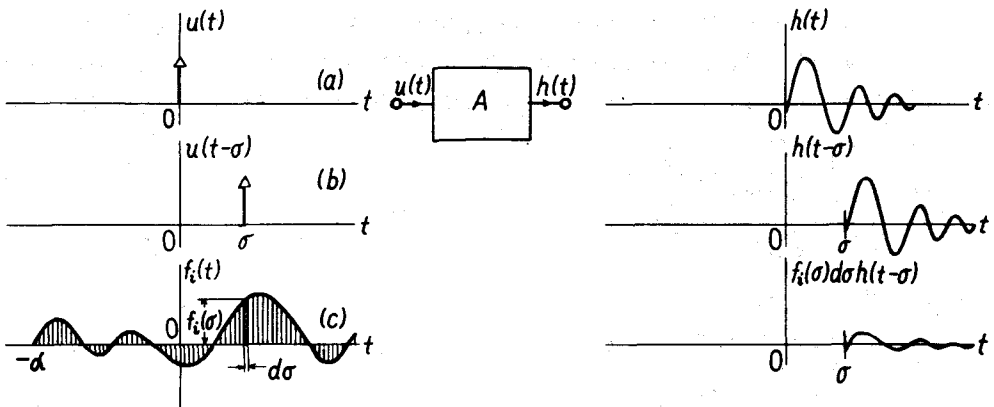


図-2.1 線型系におけるインパルス応答の重ね合せ

の入力信号があり、これに対してこの応答系には $t=\sigma$ より始まる $df_o(t)=f_i(\sigma)d\sigma h(t-\sigma)$ の応答があるとみなすことができる。したがって、次々に入ってくる入力信号に対する応答は、この重ね合せとして次のようになる。

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^t f_i(\sigma) h(t-\sigma) d\sigma \quad (2.1)$$

あるいは、 $\sigma > t$ に対しては $h(t-\sigma)=0$ であることを考えると、(2.1)は

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\sigma) h(t-\sigma) d\sigma \quad (2.1a)$$

と書ける。もし、 $\nu=t-\sigma$ と置けば、入力と出力の関係は次のようにも書ける。

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) f_i(t - \nu) d\nu \quad (2.2)$$

2. 不規則波に対する入出力の関係

入力が不規則信号である場合には、出力もまた不規則である。それゆえ、出力の自己相関関数を求めてみる。

$$C_{oo}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_o(t) f_o(t + \tau) dt \quad (2.3)$$

上式に(2.2)を代入すれば、

$$\begin{aligned} C_{oo}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) f_i(t - \nu) d\nu \right\} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) f_i(t + \tau - \mu) d\mu \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) d\mu \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_i(t - \nu) f_i(t + \tau - \mu) dt \end{aligned}$$

こゝに、上式の右辺の最後の積分が、入力の自己相関であることに注意すれば、結局次の式が得られる。

$$C_{oo}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) C_{ii}(\nu - \mu) d\mu \quad (2.4)$$

式(2.4)は不規則波に対する線型応答系の入出力の関係を表す最も基本的な関係式である。

式(2.4)と並んで良く用いられる関係式に入出力の相互相関 $C_{io}(\tau)$ の関係がある。これは、入出力の相互相関

$$C_{io}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_i(t) f_o(t + \tau) dt \quad (2.5)$$

の右辺に式(2.2)を代入して得られる次の関係である。

$$C_{io}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) C_{ii}(\tau - \nu) d\nu \quad (2.6)$$

式(2.6)で表わされる入出力の相関関数と応答関数の関係式は、式(2.4)の関係式より一層簡潔であり、しばしば応用される。

3. 周波数領域での入出力の関係

すでに、Iにおいて相関関数よりもそのFourier変換であるスペクトルの方が、不規則現象の中に含まれる種々の特性、情報を明確に表現すると述べた。前節で導いた線型応答系の入出力の関係式(2.4)(2.6)も、相関のまゝよりもそのFourier変換により周波数領域で表示する方が明解である。

式(2.4)のFourier変換は

$$\begin{aligned} S_{oo}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{oo}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) C_{ii}(\tau + \nu - \mu) d\mu \end{aligned} \quad (2.7)$$

こゝで、 $\sigma = \tau + \nu - \mu$ と置けば次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{oo}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\sigma + \mu - \nu)} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) C_{ii}(\sigma) d\mu \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) e^{i\omega\nu} d\nu \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) e^{-i\omega\mu} d\mu \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ii}(\sigma) e^{-i\omega\sigma} d\sigma \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

こゝで、式(2.7)の右辺の最後の〔 〕の項は入力スペクトル

$$S_{ii}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ii}(\sigma) e^{-i\omega\sigma} d\sigma \quad (2.9)$$

である。また、応答関数のFourier変換として、System function (または周波数応答関数)

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) e^{-i\omega\nu} d\nu \\ H^*(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) e^{i\omega\nu} d\nu \end{aligned} \quad (2.10)$$

を定義すれば、式(2.8)の関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{oo}(\omega) &= H(\omega) H^*(\omega) S_{ii}(\omega) \\ &= |H(\omega)|^2 S_{ii}(\omega) \end{aligned} \quad (2.11)$$

同様に、式 (2.6) の Fourier 変換から次の関係が導かれる。

$$S_{io}(\omega) = H(\omega) S_{ii}(\omega) \quad (2.12)$$

式 (2.11) は実関数で表わされている。しかし、式 (2.12) は一般に実数部と虚数部から成り立つ複素関数である。

4. 不規則波のシミュレーション³⁾⁴⁾

(a) 応答関数による方法³⁾

これまで述べて来たことの応用として、不規則波をシミュレートする方法をのべる。シミュレートしたい不規則波として Neumann スペクトルをもつものを考える。いま、真空管雑音とか、あるいはデジタル擬似乱数などの白色雑音を入力として利用する。この場合には、式 (2.11) において

$$S_{ii}(\omega) = C = \text{const.} \quad (2.13)$$

$$S_{oo}(\omega) = \frac{\pi C_o}{2} \frac{1}{\omega^6} \exp\left(-\frac{2g^2}{\omega^2 U^2}\right) \quad (2.14)$$

ところが、式 (2.14) に含まれる $\exp(-\omega^{-2})$ の項は取扱いが困難であるので、つぎの関数形で近似する

$$\exp(-\omega^{-2}) = \left(\frac{n}{1+n\omega^2}\right)^n \quad (2.15)$$

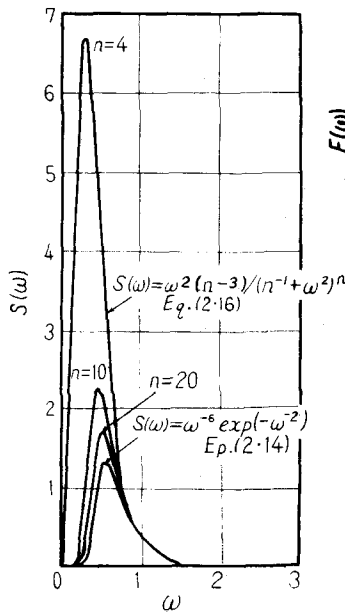
したがって、(2.14) は次のように書き直せる。

$$S_{oo}(\omega) = \frac{\pi}{2} C_o \frac{1}{\omega^6} \left\{ \frac{n \left(\frac{U}{\sqrt{2}g}\omega\right)^2}{1+n\left(\frac{U}{\sqrt{2}g}\omega\right)^2} \right\}^n \quad (n > 3) \quad (2.16)$$

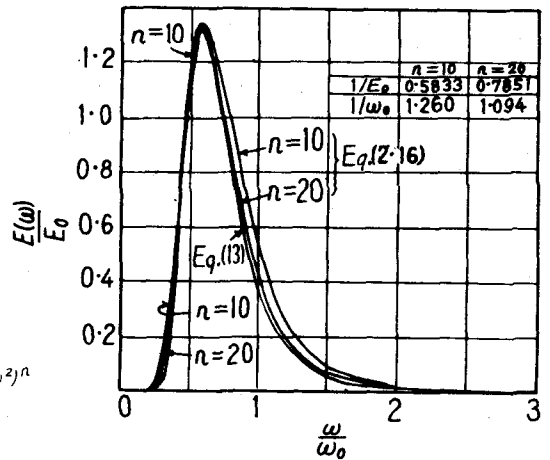
図-2.2 は式 (2.16) による式 (2.14) の近似度を示すもので、 n が大きくなるにつれて近似度が良くなること、ま

たスペクトルの極大値を合わせるように正規化すれば、小さな値の n でも両者はほとんど一致することがわかる。

一方、応答関数 $h(t)$ は物理的に $t < 0$ に対して $h(t) = 0$ の性質をもつ必要がある。したがって、その Fourier 変換である System function $H(\omega)$ は複素平面 ω 上の上半面にのみ零点と極を



(a)



(b)

図-2.2 Neumann スペクトルと近似式の比較

分布させている。そこで、式 (2.16) を次のように書き直してみる。

$$S_{oo}(\omega) = \frac{\pi}{2} C_o' \frac{(\omega^2)^{n-3}}{(\frac{1}{n} + \omega^2)^n} = \frac{\pi C_o'}{2} \frac{(i\omega)^{n-3}}{(\frac{1}{n} + i\omega)^n} - \frac{(-i\omega)^{n-3}}{(\frac{1}{n} - i\omega)^n} \quad (2.17)$$

あるいは,

$$\left. \begin{aligned} S_{oo}(\omega) &= S_{oo}^+(\omega) S^-(\omega) \\ S^+(\omega) &= \sqrt{\frac{\pi C_o'}{2}} \frac{(i\omega)^{n-3}}{(\frac{1}{n} + i\omega)^n} \\ S^-(\omega) &= \sqrt{\frac{\pi C_o'}{2}} \frac{(-i\omega)^{n-3}}{(\frac{1}{n} - i\omega)^n} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

とも書ける。こゝに、 $S^+ \cdot S^-$ はそれぞれ極を複素平面の上
半面および下半面 ($i/\sqrt{n}$ と $-i/\sqrt{n}$) にもつ因子である。

スペクトルをこのような S^+ と S^- の積の形に書くことをス
ベクトルの因数分解と呼んでいる。また、いまの場合には、
 $S^+(\omega)$ と $S^-(\omega)$ とは共役関係にある。

$$S^-(\omega) = \{ S^+(\omega) \}^* \quad (2.19)$$

したがって、式 (2.11) に式 (2.13), (2.18), (2.19) の関係を代入すれば、

$$S^+(\omega) \cdot \{ S^+(\omega) \}^* = C H(\omega) \cdot H^*(\omega) \quad (2.20)$$

を得る。したがって、system function あるいは周波数応答関数 $H(\omega)$ は
($H(\omega)$ の零点と極が複素平面の上半面にあることを考慮して)、次のように求まる。

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{\pi C_o'}{2 C}} \frac{(i\omega)^{n-3}}{(\frac{1}{n} + i\omega)^n} \quad (2.21)$$

それゆゑ、応答関数 $h(t)$ は $H(\omega)$ の Fourier 変換により求められる。

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} H(s) e^{st} ds \end{aligned} \quad (2.22)$$

この積分は、 $t \geq 0$ の場合には複素平面 ($s = u + iv$) の左半分
の半円に沿う積分路による周積分に等しく、領域内の residues の総
和により求められ、結果は次のようになる。

$$h(t) \left\{ \begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\pi C_o'}{2 C}} \left(\frac{n U^2}{2 g^2} \right)^3 \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n-3} t^{n-1} + \sum_{\nu=2}^{n-2} \frac{(n-3)(n-4) \cdots (n-\nu-1)}{(n-\nu)!(n-1)!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n-\nu-2} t^{n-\nu} \right\} \exp(-t/\sqrt{n}) \\ &\quad (t \geq 0) \\ &= 0 \quad (t < 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

図-2.5 は式 (2.23) の $h(t)$ を示す。

いま $r(t)$ を白色雑音とすれば、Neumann
波は

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau) r(t-\tau) d\tau \quad (2.24)$$

あるいは、

$$y(i \Delta t) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m \Delta t) r(i-m) \Delta t$$

によりシミュレートすることができる。

以上の理論の妥当性を検するため、電子計算機により乱数を発生させて数値実験を行った。図一

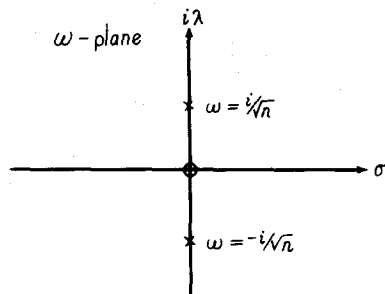


図-2.3 $\omega (= \sigma + i\lambda)$ 一平面
上の零点と極

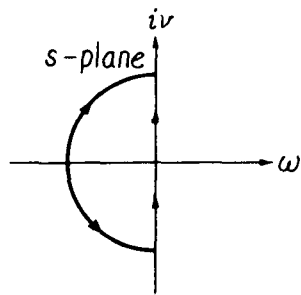


図-2.4 式 (2.22) の積分路

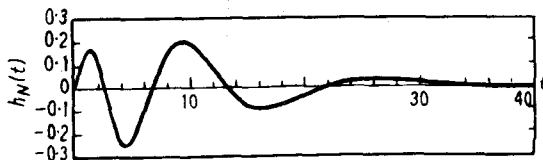


図-2.5 White noise より Neumann スペクトルをも
つ波浪を作るための応答関数

2.6 は、乱数とそれより作られる

Neumann 波を示す。また、図-2.7

はシミュレートされた不規則波の自己相関関数とスペクトルを示す。図-2.7 (b) にみられるように、シミュレーション波のスペクトルは正に Neumann スペクトル (式 (2.14)) と一致している。

(b) スペクトルによる直接法⁴⁾

不規則波は非常に多くの周期波がデタナな位相で重ね合ったものとみることができる。それは、ちょうど任意の周期関数を同位相の正弦波と余弦波 $\sin n\pi t$, $\cos n\pi t$ の級数 — Fourier 級数として表わされるという事を一般化した考え方とも言えよう。こうした見方からすれば、周期波はより直接的に次ようにして作ることができる。

$$y(t) = 2 \sum_{n=1}^N \sqrt{S(\hat{\omega}_n)} \Delta \omega_n \cos(\hat{k}_n x - \hat{\omega}_n t + \phi_n) \quad (2.26)$$

ここに、 $\hat{\omega}_n = (\omega_n + \omega_{n-1})/2$, $\Delta \omega_n$

$= \omega_n - \omega_{n-1}$,
 $(\hat{\omega}_n)^2 = \hat{k}_n^2$
 $g \tan h \hat{k}_n d$,
 $\phi_n (n=1, 2, \dots, N)$
 は区間 $(0, 2\pi)$ で一様分布をもつ互に独立な乱数列である。

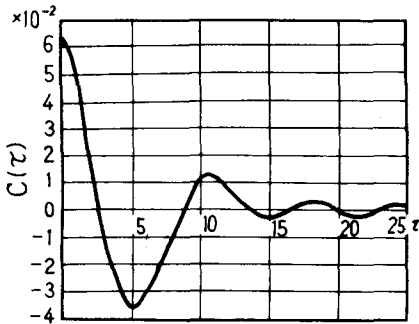


図-2.7(a) 擬似 Neumann Wave 自己相関関数 (図 2.6 の波形より計算したもの)

III 多入力線型応答系と船の動揺

図 3.1 に示されるような $x_1, x_2, \dots, x_n$ の n 個の入力があり、それぞれ線型応答系を通して一つの出力 $y(t)$

として測定される場合を考える。この関係を周波数域で表示すれば、

$$Y(f) = \sum_{i=1}^n Y_i(f) = \sum_{i=1}^n H_i(f) X_i(f)$$

これに対応して、出力の自己相関とスペクトルは

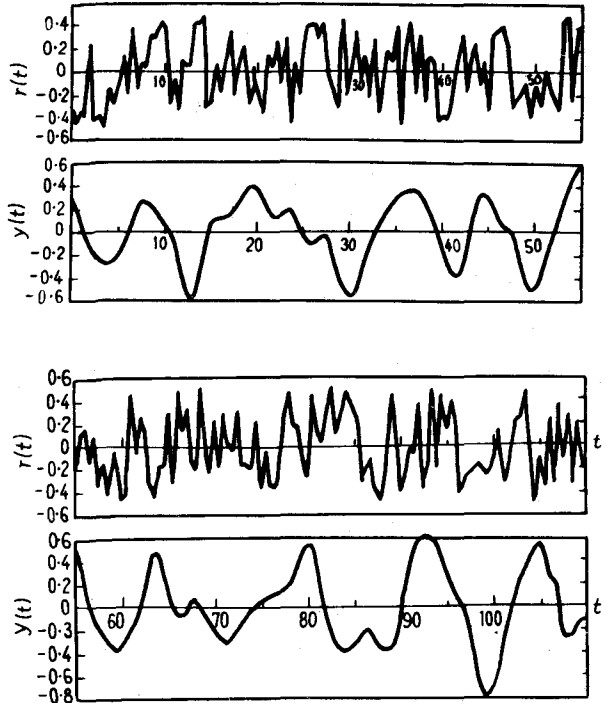


図-2.6 上段の乱数列から式 (2.24) (2.25) により合成された Neumann Wave (下段)

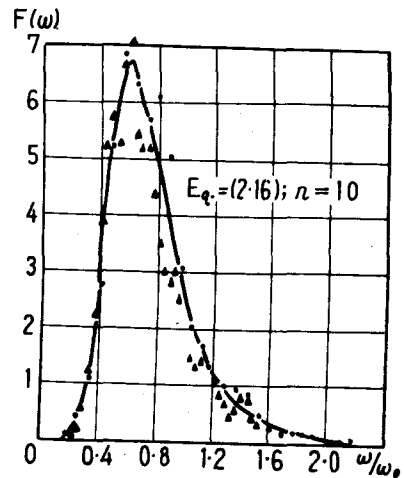


図-2.7(b) 擬似 Neumann Wave のスペクトル

$$(3.1)$$

$$C_{ij}(\tau) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^\infty h_i(\xi) h_j(\eta) C_{ij}(\xi - \eta + \tau) d\xi d\eta \quad (3.2)$$

$$S_y(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i^*(f) H_j(f) S_{ij}(f) \quad (3.3)$$

となり、入出力の相互相関とクロススペクトルは

$$C_{ij}(\tau) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty h_i(\xi) C_{ij}(\tau - \xi) d\xi \quad (3.4)$$

$$S_{ij}(f) = \sum_{j=1}^n H_j(f) S_{ij}(f) \quad (3.5)$$

となる。ここに、 $C_{ij} \cdot S_{ij}$ は $x_i(t)$ と $x_j(t)$ の相互相関およびクロス・スペクトルを表わす。

式(3.5)を行列の形に書き直すと次のようになる。

$$\mathbf{S}_{xy}(f) = \mathbf{S}_{xx}(f) \mathbf{H}(f) \quad (3.6)$$

あるいは、

$$\begin{bmatrix} S_{1y}(f) \\ S_{2y}(f) \\ \vdots \\ S_{ny}(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(f) & S_{12}(f) & \cdots & S_{1n}(f) \\ S_{21}(f) & S_{22}(f) & \cdots & S_{2n}(f) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1}(f) & S_{n2}(f) & \cdots & S_{nn}(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(f) \\ H_2(f) \\ \vdots \\ H_n(f) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

したがって、システム関数は次のように表せる。

$$\mathbf{H}(f) = \mathbf{S}_{xx}^{-1}(f) \mathbf{S}_{xy}(f) \quad (3.8)$$

多入力系についても coherency (Multi Coherency) が定義される。

$$r_{y;1,2,\dots,n}^2(f) = \frac{1}{S_{yy}(f)} [H_1(f), H_2(f), \dots, H_n(f)] [S_{xx}(f)] \quad (3.9)$$

多入力系では、一般に入力どうしの間の相関は零ではないから coherency を正しく定義するためには、他の入力の影響を差し引かなければならない。例えば、2 入力の場合について、 $x_2(t)$ の影響を最小二乗法で引いた後の $x_1(t)$ と $y(t)$ の間の coherency (partial coherency) は

$$r_{1y \cdot 2}^2(f) = \frac{|S_{1y \cdot 2}(f)|^2}{S_{11 \cdot 2}(f) S_{yy \cdot 2}(f)} \quad (3.10)$$

と定義される。そして、 $0 \leq r_{1y \cdot 2}^2(f) \leq 1$ である。ここに、

$$\left. \begin{aligned} S_{1y \cdot 2}(f) &= S_{1y}(f) \left[1 - \frac{S_{12}(f) S_{2y}(f)}{S_{22}(f) S_{11}(f)} \right] \\ S_{11 \cdot 2}(f) &= S_{11}(f) \left[1 - \frac{|S_{12}(f)|^2}{S_{11}(f) S_{22}(f)} \right] \\ S_{yy \cdot 2}(f) &= S_{yy}(f) \left[1 - \frac{|S_{2y}(f)|^2}{S_{22}(f) S_{yy}(f)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

山内は、船の動揺の解析を行い、考慮する入力が増すにつれて multi-coherency の値が1に近づくことを示した。

IV 線型予測理論による波浪予測

1. Wiener の予測理論¹⁾²⁾

線型系への入力と出力の関係は、式(2.1)のように表される。ところが、この関係からは時々刻々の入力信号 $f_i(t)$ を知ってもその時刻 $t = t$ での出力 $f_o(t)$ がわかるだけであって、(近い)将来 $t + \alpha$ の出力信号 $f_o(t + \alpha)$ はわからない。否、入力信号 $f_i(t)$ を受けた時刻での出力信号の予測すら十分できないこともあろう。それは、多くの場合に入力信号と同時に外部からの雑音をも受けるか

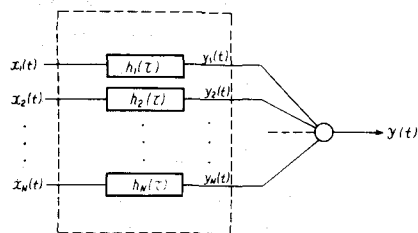


図-3.1 多入力線型系

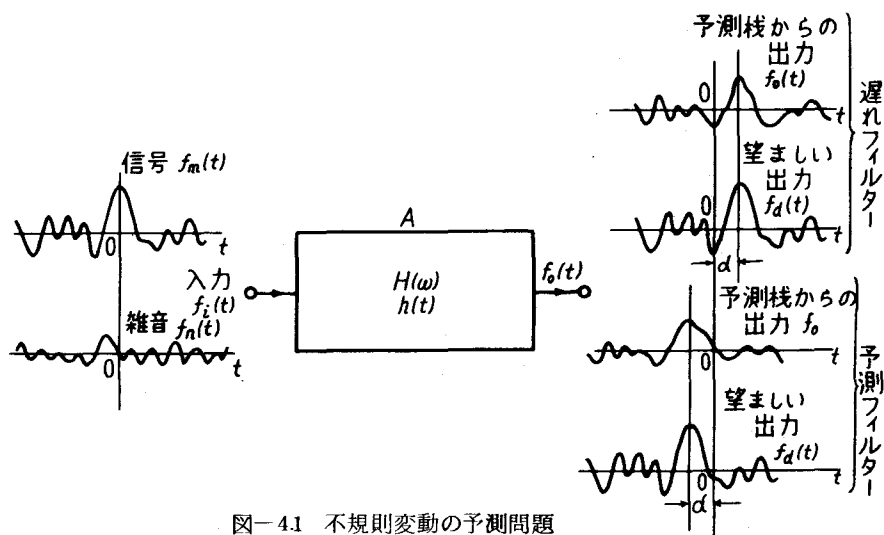


図-4.1 不規則変動の予測問題

らである。また、応答系が完全な線型系ではないときは、式(2.1)での値 $f_o(t)$ と実際の出力 $f_d(t)$ とは一致しない。

そこで入力(情報と雑音の和) $f_i(t) = f_m(t) + f_n(t)$ を知りつゝ、 $t + \alpha$ の時刻での本当の出力(予測の立場からすれば望ましい出力) $f_o(t + \alpha) = f_d(t)$ を予測する問題を考える。予測は必ずしも系の応答関数 $h(t)$ に等しくはない最適予測関数 $P_{opt}(t, \alpha)$ により、次のように求められる。

$$f_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{opt}(\tau, \alpha) f_i(t - \tau) d\tau \quad (4.1)$$

問題は予測された信号 $f_p(t)$ と実際に観測される出力信号 $f_d(t)$ との予測誤差 $\epsilon(t)$ を最小にする最適予測関数 $P_{opt}(t)$ を求めることである。繰り返し言うが、 $P_{opt}(t)$ は系の応答関数 $h(t)$ とは一般には一致しない。例えば、予測時間 α が零であっても、予測誤差を最小にする基準として $\epsilon(t)$ の2乗平均値を最小にする仕方が最も単純である。これを**Wiener-Kolmogoroff criterion**と言う。すなわち、

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} P_{opt}(\tau) f_i(t - \tau) d\tau - f_d(t) \right]^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{opt}(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} P_{opt}(\sigma) C_{ii}(\tau - \sigma) d\sigma - 2 \int_{-\infty}^{\infty} P_{opt}(\tau) d\tau C_{id}(0) \end{aligned} \quad (4.2)$$

を最小にすれば良い。こゝに、 $C_{ii}(\tau)$ と $C_{id}(\tau)$ はそれぞれ $f_i(t)$ の自己相関および f_i と f_d の相互相関である。上式で示される $\overline{\epsilon^2(t)}$ を最小にする必要十分条件は、変分原理から

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{opt}(\sigma) C_{ii}(\tau - \sigma) d\sigma = C_{id}(\tau) \quad (\tau \geq 0) \quad (4.3)$$

となる。式(4.3)は**Wiener-Hopfの積分方程式**と呼ばれ、 $\tau \geq 0$ の場合についてのみ(つまり将来の予測についてのみ)成立すれば良い点が重要であり、またこの条件が方程式の解法を困難にしている。もし、入力の観測時間が有限ならば、式(4.3)は次のようになる。

$$\int_0^T P_{opt}(\sigma) C_{ii}(\tau - \sigma) d\sigma = C_{id}(\tau) \quad (\tau \geq 0) \quad (4.4)$$

この方程式を解析的に解くには可成りの技巧を要する。そのため普通は式(4.4)を差分表示とし、

$$\sum_{i=0}^N P_{opt}(i \Delta t) C_{ii}(\tau - i \Delta t) \Delta t = C_{id}(\tau) \quad (\tau \geq 0) \quad (4.5)$$

(こゝに、 $N = T/\Delta t$)、この連立一次元方程式を解いて最適予測関数 $P_{opt}(t)$ を求める。

しかし、こうした数値的解では個々の場合について具体的解を求めるのは良くても、問題の一般性を見透すことは難しい。解析的解法としては、式(4.3)を周波数領域で解く Wiener の方法がある。これは、先に述べたスペクトルの因数分解法を利用するものである。結果のみを記すれば、次のようになる。

$$P_{opt}(\omega) = \frac{1}{2 S_{ii}^+(\omega)} \int_0^\infty e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{S_{id}(\lambda)}{S_{ii}^-(\lambda)} e^{i\lambda\tau} d\lambda \quad (4.6)$$

ここで、 P_{opt} は p_{opt} の Fourier 変換 (system function), S_{id} は相互スペクトル

$$P_{opt}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty p_{opt}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.7)$$

$$S_{id}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty C_{id}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.8)$$

また、 S_{ii}^+ と S_{ii}^- は入力信号のスペクトル $S_{ii}(\omega)$ の因数分解の factor (不規則波のシミュレーションの項を参照) である。

$$S_{ii}(\omega) = S_{ii}^+(\omega) S_{ii}^-(\omega) \quad (4.9)$$

式(4.6)により P_{opt} が求まれば、最適予測関数 p_{opt} はその逆 Fourier 変換により定まる。

$$p_{opt}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty P_{opt}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.10)$$

2. 波浪予測

時々刻々の水面変化 $\eta(t)$ を予測する問題を考える。例えば、次のような問題である。

① 湾口に水位計を設置してその水位変化 $\eta_1(t)$ を測定しつつ、これにより湾内のある点で水位変化 $\eta_2(t)$ を予測する。湾口の波はある時間後には湾内のその点に達するけれども、波速は各成分により異っているし、伝播中の変形があるので、 $\eta_1(t)$ を伝播時間遅らせただけでは $\eta_2(t)$ とはならない。伝播中の変形を波のある応答系による変化と考えれば、Wiener - Kormogoroff の予測問題となる。

② ある点での時々刻々の水位変化 $\eta_1(t)$ を観測しつつ、その点あるいはいくらか離れた点での時刻 $t + \alpha$ での水位 $\eta_1(t + \alpha)$ または $\eta_2(t + \alpha)$ を予測する問題。

③ 水圧式波高計で測定された波高記録は、高周波成分を正確に記録しえない。いわば歪んだ記録である。この水圧式波高計の記録 $\eta_p(t)$ より、正しい水位変化 $\eta(t)$ を復原する問題も一種の予測問題である。水圧式波高計により得られた波浪スペクトル $S_p(\omega)$ と真のスペクトル $S(\omega)$ との関係は、本解説のⅡ(式(2.11), (2.12))の問題であるが、統計情報理論によればなまの記録の復原も可能である。

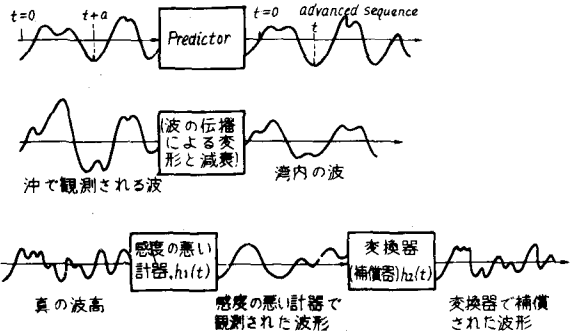
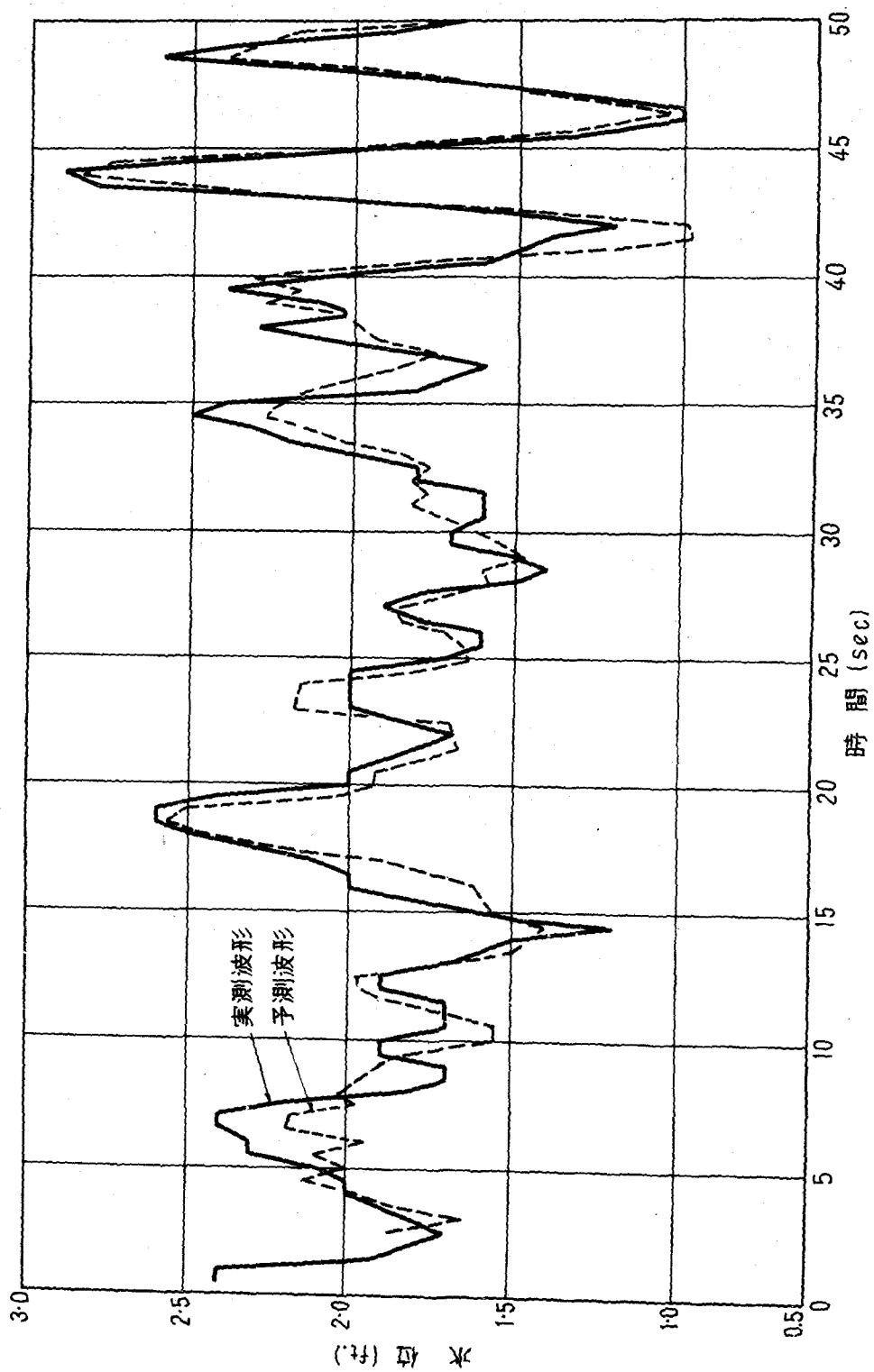


図-4.2 波浪の予測・変換フィルターの一例

a) 数値解による方法³⁾

Putz は数値的に Wiener - Hopf の方程式を解き $p_{opt}(\tau)$ を求める方法で①の問題、つまり沖側での波高観測から波高を予測する問題を次の3つの場合について取扱った。図-4.3に予測波形と実測波形の比較を示す。



図一43 (a) $28.5 f_t$ 離れた点での波から予測された波形と実波形との比較

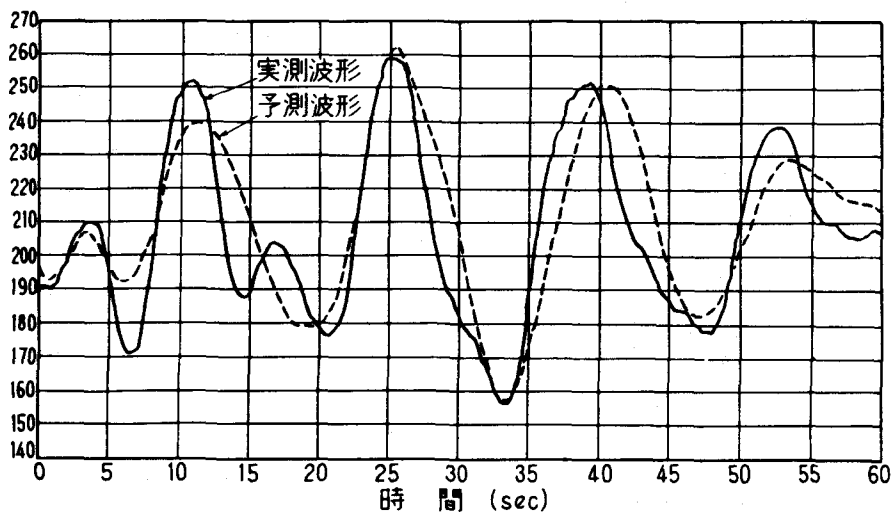
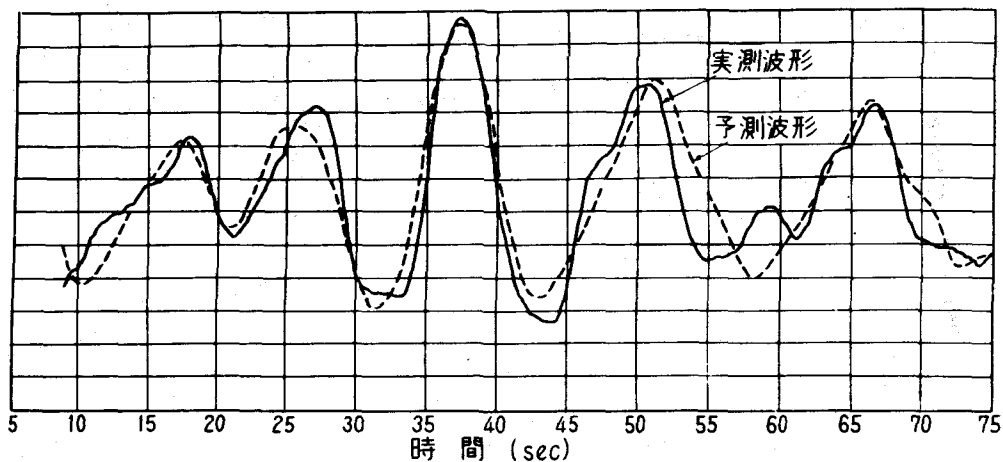


図-43(b) 204 ft 沖の波浪観測から予測された波形と実際の波の比較

	予測点と観測点の距離	観測間隔	予測時間
実験水路(略々周期波)	30.0 ft	0.1 sec	10.5 sec (= 10 T)
ocean wave	28.5 ft	0.5 sec	1 sec (= T/10)
ocean wave	205.0 ft	0.25 sec	4.75 sec (= T/3)

*) T: 波の平均周期

(b) スペクトル因数分解法による解^{*)}

次に①の問題を例として、Wiener-Hopf方程式の解析解をスペクトルの因数分解法により求める。波浪のスペクトル(式(4.6)の $S_{ii}(\omega)$)を前と同様にNeumannのスペクトル(式(2.14)あるいは式(2.16))の場合を取扱う。Neumannスペクトルは多少修正して次のように表す(ただし、係数部分は省略)。

$$S_{ii}(\lambda) = S_{ii}^+(\lambda) S_{ii}^-(\lambda) = \frac{(\epsilon^2 + \lambda^2)^{n-3}}{(\frac{1}{n} + \lambda^2)^n} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} S_{ii}^+(\lambda) &= \frac{(\epsilon + i\lambda)^{n-3}}{(\frac{1}{\sqrt{n}} + i\lambda)^n} \\ S_{ii}^-(\lambda) &= \frac{(\epsilon - i\lambda)^{n-3}}{(\frac{1}{\sqrt{n}} - i\lambda)^n} \end{aligned} \quad (4.15)$$

こゝに、新しく導入した ϵ はきわめて小さい正の値であり、後に説明するように級数解の収束を良くするためである。

つぎに、式(4.6)の $S_{id}(\lambda)$ は今の場合の観測波 $f_i(t)$ と予測波 $f_d(t) = f_i(t + \alpha)$ (α : 予測時間)のクロススペクトルであるから、

$$S_{id}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) f_i(t + \alpha + \tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ii}(\tau + \alpha) e^{-i\lambda\tau} d\tau = e^{i\alpha\lambda} S_{ii}(\lambda) \quad (4.16)$$

式(4.6)に式(4.14~16)を代入すれば、

$$\begin{aligned} \psi(\tau + \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ii}^+(\lambda) e^{i(\tau + \alpha)\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ii}^+(s) e^{(\tau + \alpha)s} ds \\ &= \text{Res} \left\{ \frac{(\epsilon + s)^{n-3}}{(\frac{1}{\sqrt{n}} + s)^n} \cdot e^{(\tau + \alpha)s} \right\} \text{ left half-plane} \\ &= \text{Res} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \frac{K_\nu}{(\frac{1}{\sqrt{n}} + s)^{n-\nu+1}} \cdot e^{(\tau + \alpha)s} \right\} \text{ l.h.p.} = \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{K_\nu}{(n-\nu)!} (\tau + \alpha)^{n-\nu} \cdot e^{-(\tau + \alpha)/\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

こゝに、

$$K_\nu = \frac{1}{(\nu-1)!} \left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} (\epsilon + s)^{n-3} \right]_{s=-1/\sqrt{n}} = \frac{(n-3)(n-4)\cdots(n-\nu-1)}{(\nu-1)!} \left(\epsilon - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n-\nu-2}$$

式(4.6)の右辺のもう一つの積分を行えば、 $P_{opt}(\lambda)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} P_{opt}(\omega) &= \frac{(\frac{1}{\sqrt{n}} + i\omega)^n}{(\epsilon + i\omega)^{n-3}} \int_0^{\infty} \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{K_\nu}{(n-\nu)!} (\tau + \alpha)^{n-\nu} \exp \left\{ -\frac{\tau + \alpha}{\sqrt{n}} \right\} e^{-i\tau\omega} d\tau \\ &= \frac{e^{-\alpha/\sqrt{n}}}{(\epsilon + i\omega)^{n-3}} \sum_{\nu=1}^{n-2} \sum_{p=1}^{n-\nu-1} \frac{K_\nu \alpha^{p-1}}{(p-1)!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + i\omega \right)^{(\nu+p-2)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

波浪の予測器をアナログ回路で構成するときには、上式によれば良い。デジタル計算機で予測を行うには、上式(4.18)を逆Fourier変換すれば、最適予測関数 $P_{opt}(t)$ が得られる。この計算は前と同様にresidueを求める計算であるが、たゞ $p = n - \nu + 1$, $n - \nu$, $n - \nu - 1$ の場合は $(1 + i\omega)^{\nu+p-2}$ の次数が分母の $(\epsilon + i\omega)^{n-3}$ の次数より高くなるので注意を要する。この場合には、逆Fourier変換の計算には式(4.19)の關係を用いる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^n e^{i\omega t} d\omega = \delta^{(n)}(t) \quad (4.19)$$

($\delta(t)$: Dirac のデルタ関数, $\delta^{(n)}(t)$: $\delta(t)$ の n 次導関数)

結局、 $P_{opt}(t)$ はつぎのように求まる。

$$\begin{aligned} P_{opt}(t) &= c^{-\alpha/\sqrt{n}} \sum_{\nu=1}^{n-3} \sum_{p=1}^{n-\nu-2} \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\alpha^{p-1} K_\nu J_q}{(p-1)!(n-q-3)!} t^{n-q-3} c^{-t} + c^{-\alpha/\sqrt{n}} \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{\alpha^{(n-\nu)} K_\nu}{(n-\nu)!} \\ &\times \left\{ \sum_{r=1}^{n-3} \frac{(n-1)!}{(n-3-r)!r!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \epsilon \right)^r \cdot \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{\alpha^2} t^{r-1} + \sum_{r=2}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-2-r)!r!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \epsilon \right)^r \cdot \frac{(n-\nu)}{\alpha} t^{r-2} \right. \\ &+ \sum_{r=3}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \epsilon \right)^r t^{r-3} \left. \right\} e^{-\epsilon t} + e^{-\alpha/\sqrt{n}} \sum_{\nu=1}^{n-2} K_\nu \{ f(n, \nu, \epsilon, \alpha) \delta(t) + f_1(n, \nu, \epsilon, \alpha) \delta^{(1)}(t) + f_2(n, \nu, \epsilon, \alpha) \delta^{(2)}(t) \} \end{aligned} \quad (4.20)$$

ここに,

$$J_q = \frac{(\nu+p-2)(\nu+p-3)\cdots(\nu+p-q)}{(q-1)!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)^{\nu+p-q-1} \quad (4.21 a)$$

$$J_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)^{\nu+p-2}, \quad q \leq \nu+p-1 \quad (4.21 b)$$

$$f(n, \nu, \varepsilon, \alpha) = \left[\frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{\alpha^2} + \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)}{(n-3)} + \varepsilon \right\} \frac{(n-\nu)}{\alpha} + \left\{ \frac{(1-\varepsilon)^2}{(n-3)(n-2)2} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)\varepsilon}{n-2} + \varepsilon^2 \right\} \right] \times \frac{\alpha^{(n-\nu)}}{(n-\nu)!}$$

$$f_1(n, \nu, \varepsilon, \alpha) = \left[\frac{\alpha^{(n-\nu)}}{(n-\nu)!} + \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)}{(n-2)} + 2\varepsilon \right\} \frac{\alpha^{(n-\nu)}}{(n-\nu)!} \right]$$

$$f_2(n, \nu, \alpha) = \frac{\alpha^{(n-\nu)}}{(n-\nu)!} \quad (4.21 c)$$

また, $\delta(t)$ はDiracの δ -関数, $\delta^{(n)}(t)$ はその n 次の導関数で

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0) \cdot f(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0) \quad (4.21 d)$$

となる性質をもつ。

以上の理論による予測波形と実波形(ともにデジタル計算機による数値実験)とを比較したのが,

図-4.4である。この図では予測波形はそのまゝの時刻($t+\alpha$)に対して目盛ってあるので, 予測の実現性の比較のためには予測時間 α だけずらして重ねてみる必要がある。

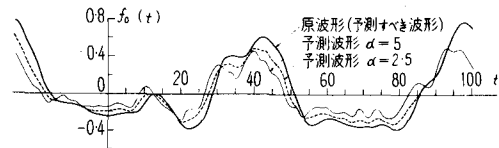


図-4.4 波浪予測の例(予測時間 α だけずらして比較する)

非常に面倒な式の展開をしたわけであるが, 十分それに見合う予測ができたと言って良いであろう。

Ritz の取扱った問題は, 波の伝播に伴う変形の推定であり, 波がかなり周期的であるので, 予測の範囲(波の観測点と予測点の間隔)を相当大きくすることが可能である。これに反し, 日野の取扱った問題は波の不規則性が強いことと pure prediction であることのために予測範囲(予測時間)はあまり大きくない。例えて言えば, 前者は子供が輪になってやるシグサの順送り遊びに, 後者はジャンケンで相手の手を予測することに例えられよう。

3. Wiener 予測の意味

前節にのべたWienerのスペクトル因数分解法による解析解は, ずい分と複雑な手数を踏んで最適予測関数 $p_{opt}(t)$ が求められた。実際問題として個々のケースの予測問題では, むしろWiener-Hopf方程式を数値的に解いて, $p_{opt}(t)$ を求める方が遙かに楽であるし, それで充分である。それどころかWiener流に解析解が具体的に求められた場合はむしろ少ないであろう。

それならば, わざわざスペクトル因数分解法による解を展開した意味はないのではないかという疑問が生じる。こゝで, その意義を説明しよう。つまり, Wienerの予測法の物理的意味は次のようである。

式(4.6)を次の2つの関数の積と考える。

$$P_{opt}(\omega) = P_1(\omega) \cdot P_2(\omega)$$

$$\text{こゝに, } P_1(\omega) = 1/S_{ii}^+(\omega) \quad (4.22)$$

$$P_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^\infty S_{ii}^+(\lambda) e^{i(\tau+\alpha)\lambda} d\lambda$$

すでにⅡにおいて述べたように, スペクトル $S_{ii}(\omega)$ をもつNeumann波は, 白色雑音を $H(\omega)S_{ii}^+(\omega)$ を system function とする応答系に入れて作りうるものである。したがって, $P_{opt}(\omega)$ による予測

関係を周波数域で、式 (2.12) の関係により

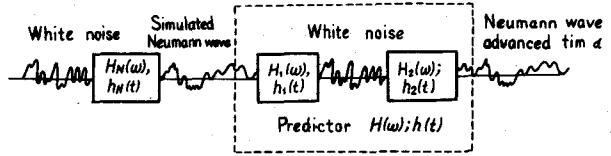
$$\begin{aligned} S_{ip}(\omega) &= P_{opt}(\omega) S_{ii}(\omega) \\ &= P_1(\omega) P_2(\omega) S_{ii}(\omega) \\ &= \left[\frac{1}{S_{ii}^+(\omega)} \cdot S_{ii}(\omega) \right] P_2(\omega) \end{aligned} \quad (4.23)$$

(こゝに、 $S_{ip}(\omega)$ は観測波と予測波のクロススペクトル) と表せば、この予測操作はつぎの過程であることが納得されよう。

② 観測波 $f_i(t)$ を仮想的白色化回路 ($P_1(\omega) = 1/S_{ii}^+(\omega)$) によりこの波 $f_i(t)$ を発生させたとみなされる白色雑音に還元してやる。

③ しかるのち、この白色雑音をもとにして $P_1(\omega)$ よりも α だけ早く観測波を発生させる回路 ($P_2(\omega)$) に通して予測波を発生させる。

このようになりに手の込んだ式 (4.6) の計算も、物理意味はきわめて明解であり合理的である。



図—4.5 Neumann スペクトルをもつ擬似波浪の予測フィルターの物理的意味

V 波浪統計量と雑音理論

不規則波のもつ統計的特徴をスペクトル関数という極めて簡潔な形に纏める方法について、すでに I で述べた。スペクトルは、いわば不規則波の濃縮液みたいなもので、この中にはその他に種々の情報が含まれている。つまり、スペクトルを利用して、もっと直接的で役立つ不規則波の性質を導くことができる。その理論の大部分が、Rice¹⁾ (1944, 1945) により "雑音理論" として纏められ、その後、Longuet-Higgins と Cartwright²⁾³⁾⁴⁾ が補足したものである。しかし、原論文はかなり難解である上に、通信問題に限られているので、本文では波浪の問題を念頭において書きさめることとする。

1. 中心極限定理と結合確率密度関数

この章の議論の基礎となっている確率論における中心極限定理 (center limit theorem) と呼ばれる定理は、つぎのようにのべられる。" N 個の独立な不規則ベクトル $r_1, r_2, \dots, r_N$ が同一の分布 (いかなる分布でも良い) にしたがひ、かつ、分散 σ^2 が有限ならば、そのベクトル和 $r_1 + r_2 + \dots + r_N$ は $N \rightarrow \infty$ のとき正規分布に近づく。"

また、 K 次元の不規則ベクトル r の分布が、正規分布である場合、確率密度関数は式 (5.1) で表わされる。

$$\frac{1}{(2\pi)^{K/2}} |M|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} x^T M^{-1} x \right] \quad (5.1)$$

こゝに、正方行列 M は r の成分 x_i の 2 次モーメントより構成される。

$$M = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1K} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{K1} & \mu_{K2} & \dots & \mu_{KK} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

こゝに、

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \overline{x_i x_j} \\ x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_K \end{pmatrix} \quad x^T = [x_1, x_2, \dots, x_K] \end{aligned} \quad (5.3)$$

したがって

$$x^T M^{-1} x = \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K \frac{M_{rs}}{|M|} x_r x_s \quad (5.4)$$

(M_{rs} : M の余因子)。

ところで、不規則変数 $f(t)$ は

$$f(t) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{S(f_n)}} \cos(2\pi f_n t - \varphi_n) \quad (5.5)$$

(ここで、 φ_n ($n=1, 2, \dots, N$) は独立な不規則位相角) と表され、

$$f(t) = x_1 + x_2 + \dots + x_N \quad (5.6)$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{S(f_n)}} \cos(2\pi f_n t - \varphi_n)$$

のように不規則ベクトルの和であるから、 $f(t)$ は正規分布をなす。

また、独立な K 個の確率変数の結合確率密度関数 (joint probability density function) は、これを K 次元ベクトルの和と考えれば、式 (5.1 ~ 4) の正規分布関数で表わされる。

2. ゼロ・クロッシング¹⁾

いま $\xi = f(t)$ を時間 t の確率変数とする。曲線 $f(t)$ が $t = t_1$ と $t = t_1 + dt$ の間に正の勾配をもって零軸を切る場合を考える。 dt を十分小さいものとすれば、この間の $f(t)$ は、直線と考えられ

$$f(t) = f(t_1) + f'(t_1)(t - t_1) \quad (5.7)$$

で表される。したがって、曲線が正勾配で $f=0$ と交わる点は

$$0 = f(t_1) + f'(t_1)(t - t_1)$$

より

$$t_1 < t (= t_1 - \xi/\eta) < t_1 + dt \quad (5.8)$$

である。こゝに $\eta = f'(t)$ 。したがって、式 (5.8) を書き直して ξ 、 η の範囲について次式を得る。

$$-\eta dt < \xi < 0 \quad (5.9)$$

一方、 η は式 (5.10) の範囲の値をとる。

$$0 < \eta < \infty \quad (5.10)$$

したがって、 $f(t) = \xi$ で $f'(t) = \eta$ である joint probability を $p(\xi, \eta)$ とすれば、 t_1 と $t_1 + dt$ の間で正勾配で零軸を曲線が切る確率 (Zero-up crossing) $N_{0+} dt$ は、つぎようになる。

$$N_{0+} dt = \int_0^\infty d\eta \int_{-\eta dt}^0 d\xi p(\xi, \eta) = dt \int_0^\infty \eta p(0, \eta) d\eta \quad (5.11)$$

こゝで、 dt は充分小さく、それゆえ ξ はほとんど零に等しいとしている。

全く同様に、 $f(t)$ の負の勾配で t_1 と $t_1 + dt$ の間に零をとる確率 (Zero-down crossing) $N_{0-} dt$ は、式 (5.12) で表わされる。

$$N_{0-} dt = -dt \int_0^\infty \eta p(0, \eta) d\eta \quad (5.12)$$

式 (5.11) と式 (5.12) の関係を加え合わせると、確率変数が単位時間あたりに零をとる平均回数 N_0 はつぎようになる。

$$N_0 = \int_0^\infty \eta |p(0, \eta)| d\eta \quad (5.13)$$

さて、joint probability $p(\xi, \eta)$ は、式 (5.1) ~ (5.6) を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \mu_{11} &= \overline{\xi^2} = C(0) = \int_0^\infty S(f) df \\ \mu_{22} &= \overline{\eta^2} = [d^2 C(\tau)/d\tau^2]_{\tau=0} = -\int_0^\infty 4\pi^2 f S(f) df \\ \mu_{12} &= \overline{\xi\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

$$p(\xi, \eta) = \frac{[-C_0 C_0'']^{-1/2}}{2\pi} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2C_0} + \frac{\eta^2}{2C_0''}\right] \quad (5.15)$$

となる。これを式 (5.13) に代入すれば、単位時間あたりのゼロ・クロッシング数は

$$N_0 = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{C_0''(0)}{C_0(0)}\right]^{1/2} = 2 \left\{ \frac{\int_0^\infty f^2 S(f) df}{\int_0^\infty S(f) df} \right\}^{1/2} \quad (5.16)$$

このような議論を一般化すれば、波面の高さが y のレベルを切る単位時間あたりの平均回数 N は

$$N = \frac{N_0}{2} \exp\{-y^2/2C_0\} \quad (5.17)$$

となる。

3. 波峰高分布、極大値分布および波峯数¹⁾

前と同様の考え方により、波の峯 ($\xi = f(t)$ の極大値) の確率分布を求めることができる。確率関数 $f(t)$ が矩形領域 $(t, t+dt; \xi, \xi+d\xi)$ で一つの極大値をもつとすれば、そこでは $f''(t)$ は負で $(-\infty, 0)$ の間の任意の値をとれるが、 $f'(t)$ は $\eta = f'(t) = 0$ を中にして $-(f')' dt = |f''| dt$ 幅の値しかとりえない (図-5.2)。したがって、 $\xi = f(t)$, $\eta = f'(t)$, $\zeta = f''(t)$ の joint probability を $p_1(\xi, \eta, \zeta)$ で表せば、 dt が十分小さいとして $\eta = f'(t) \approx 0$ を考慮して、 $f(t)$ がこの矩形領域で一つの極大値をとる確率は

$$-dt d\xi \int_{-\infty}^0 p_1(\xi, 0, \zeta) \zeta d\zeta$$

となる。したがって、 ξ に極大がある確率は

$$p(\xi) = \int p_1(\xi, 0, \zeta) |\zeta| d\zeta \quad (5.18)$$

であり、また極大値の平均度数 N_p は、式 (5.18) を ξ について $(-\infty, \infty)$ で積分して

$$N_p = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 p_1(\xi, 0, \zeta) |\zeta| d\zeta d\xi \quad (5.19)$$

となる。

ところで、joint probability density function $p_1(\xi, \eta, \zeta)$ は 1. により

$$p_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |M|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2|M|} (M_{11}\xi^2 + M_{22}\eta^2 + M_{33}\zeta^2 + 2M_{12}\xi\eta + 2M_{13}\xi\zeta + 2M_{23}\eta\zeta)\right] \quad (5.20)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} |M| &= \rho^2(\rho^2\nu^2 - \rho^4), & M_{11} &= \rho^2\nu^2 \\ M_{22} &= \rho^2\nu^2 - \rho^4 \\ M_{13} &= \rho^4 \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

また、 $\rho^2 \cdot \rho^2 \cdot \nu^2$ は ξ, η, ζ の 2 次モーメントで $\xi(t)$ のスペクトルを $S(f)$ とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= \int_0^\infty S(f) df \\ \rho^2 &= (2\pi)^2 \int_0^\infty f^2 S(f) df \\ \nu^2 &= (2\pi)^4 \int_0^\infty f^4 S(f) df \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

となる。

これらの関係式を式 (5.18) (5.19) に代入すれば、極大値 (波峯) の分布確率 $p(\xi)$ と極大値の平均度数 N_p について、次の式をうる。

$$p(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} V_2} \cdot \frac{1}{\sigma} \left[\varepsilon \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\varepsilon^2\sigma^2}\right) + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \frac{\xi}{\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) \int_{-\frac{1-\varepsilon^2}{\sigma\varepsilon}}^{\infty} \xi \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right] \quad (5.23)$$

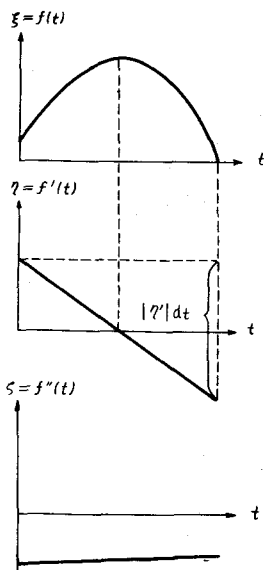


図-5.2

$$\text{ここに, } \epsilon^2 = (\sigma^2 \nu^2 - \rho^4) / \sigma^2 \nu^2 \quad (5.24)$$

$$N_p = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\nu}{\rho} \quad (5.25)$$

ちなみに, ゼロクロッシング N_0 と波峯の平均度数 N_p の比は, したがって, つぎのようである。

$$N_0 / N_p = (1 - \epsilon^2)^{1/2} \quad (5.25a)$$

ϵ の意味 : 式 (5.24) より

$$\epsilon^2 = 1 - \rho^4 / \sigma^2 \nu^2$$

一方,

$$A = \sigma^2 \nu^2 - \rho^4 = (2\pi)^4 \int_0^\infty \int_0^\infty S(f_1) S(f_2) (f_2^4 - f_1^2 f_2^2) df_1 df_2$$

あるいは, f_1 と f_2 を入れ換えて

$$A = \sigma^2 \nu^2 - \rho^4 = (2\pi)^4 \int_0^\infty \int_0^\infty S(f_2) S(f_1) (f_1^4 - f_1^2 f_2^2) df_1 df_2$$

これらを加え合わせて,

$$2A = 2(\sigma^2 \nu^2 - \rho^4) = \int_0^\infty \int_0^\infty S(f_1) S(f_2) (f_1^2 - f_2^2)^2 df_1 df_2 \geq 0 \quad (5.26)$$

したがって,

$$0 < \epsilon < 1 \quad (5.27)$$

波のエネルギーがある周波数のところに集中しておれば, $\epsilon \rightarrow 0$ であり, 式 (5.23) から波高分布は Rayleigh 分布となる。

$$p_1(y) = \begin{cases} y \exp(-\frac{1}{2} y^2) & (y \geq 0) \\ 0 & (y \leq 0) \end{cases} \quad (5.27)$$

波長の長い波に波高の小さい波長の短い波がのっている場合は, 他の極限 ($\epsilon \rightarrow 1$) の場合で, 波高分布は Gauss 分布となる。

$$p_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} y^2) \quad (5.28)$$

図-5.3 は ϵ をパラメーターとして波峯 (極大値) の確率分布を示したものである。

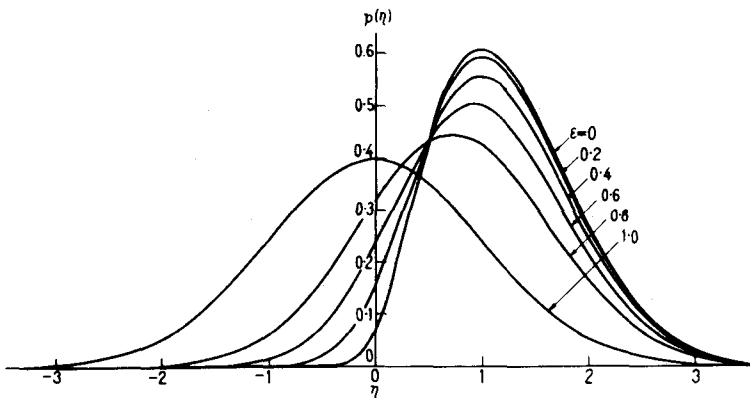


図-5.3 スペクトル幅(ϵ)と波峯高の確率分布

4. 最高波高および有義波高²⁾³⁾⁴⁾

これまでの議論をさらにすゝめて, 設計上最も必要と思われる最高波高の期待値を求めよう。

波峯高* が ξ を超過しない確率は、1 から波峯が ξ を超過する確率を差し引いたもので

$$1 - q(\xi) = 1 - \int_{\xi}^{\infty} p(\xi) d\xi \quad (5.29)$$

である。T 時間の観測を考えれば、波峯数は平均的に $T N_p$ 個ある。このすべての波峯が ξ を越えない確率は $[1 - q(\xi)]^{T N_p}$ である。したがって、波峯高の最大値 (= 最高波峯高) が ξ である確率 $M(\xi)$ は

$$M(\xi) = \frac{d}{d\xi} [1 - q(\xi)]^{T N_p} \quad (5.30a)$$

または、

$$M(\xi) = T N_p [1 - q(\xi)]^{T N_p - 1} \cdot p(\xi) \quad (5.30b)$$

である。

結局、T 時間の観測での最高波峯高 (ξ_{max}) の期待値は、次式で与えられる。

$$E(\xi_{max}) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi M(\xi) d\xi \quad (5.31)$$

上式の右辺の $(-\infty, 0)$ の積分は無視できることと、 $q(\xi) = (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \exp(-\frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\sigma^2}) + O(\xi^{-2} \exp(-\frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\sigma^2}))$ と近似しうることから、

$$E(\xi_{max}) = \int_0^{\infty} \{1 - [1 - (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \exp(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2})]\}^{T N_p} d\xi \\ = \sigma \int_0^{\infty} \{1 - [1 - (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \exp(-\frac{x^2}{2})]\}^{T N_p} dx \quad (5.32)$$

となる。また、 $T N_p (1 - \varepsilon^2)^{1/2}$ が大きければ漸近展開から、

$$E(\xi_{max}) \div \sigma (2\theta)^{1/2} \{1 + \frac{1}{2} A_1 \theta^{-1} - \frac{1}{8} A_2 \theta^{-2} + \frac{1}{16} A_3 \theta^{-3} - \dots\} \quad (5.33)$$

となる。こゝに、

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \ln \{T N_p (1 - \varepsilon^2)^{1/2}\} = \ln \{T N_0\} \\ A_1 &= r = 0.5772 \dots\dots \\ A_2 &= r^2 + \frac{\pi}{6} = 1.9781 \dots\dots \\ A_3 &= r^2 + \frac{1}{2} r \pi^2 + 2 S_3 = 5.4449 \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

有義波高および $1/n$ 最大波高：工学や応用の面からは最高波高よりは、**有義波高** (significant wave, $1/3$ 最大波高) や **$1/n$ 最大波高** ($1/n$ th highest wave) が用いられる。

significant wave = The average height and period of the one-third highest waves.

したがって、数式的には $1/n$ 最大波峯高 $\xi_{1/n}$ は次の関係を満す波高 ξ' の平均値であると定義される。

$$q(\xi') = \int_{\xi'}^{\infty} p(\xi) d\xi = 1/n \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち、} \xi_{1/n} &= \int_{\xi'}^{\infty} p(\xi) \xi d\xi / \int_{\xi'}^{\infty} p(\xi) d\xi \\ &= n \int_{\xi'}^{\infty} p(\xi) \xi d\xi \end{aligned} \quad (5.36)$$

平均波峯高 $\bar{\xi}$ は $n=1$ に対応し

$$\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) \xi d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \sigma \quad (5.37)$$

図-5.4 は、パラメーター ε と $\xi_{1/n}/\sigma$ との関係をいくつかの n に関して画いたものである。

波高分布が Rayleigh 分布に近ければ ($\varepsilon \ll 1$)、上にのべた $\xi_{1/n}$ は、普通に言う波高 (crest - to - trough wave heights) の $1/2$ に等しいとみなすことができる。

以上の諸式から波面の r.m.s (σ)、波の全エネルギー ($E = 2\sigma$)、平均波峯高 ($\bar{\xi}$)、 $1/n$ 最大波峯高 ($\xi_{1/n}$)、最大波峯高 (ξ_{max}) の関係をまとめると次のようである。

$$2\bar{\xi}_p = \sqrt{2\pi} (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \sigma = (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \sqrt{\pi E} \quad (5.37a)$$

$$2\bar{\xi}_{1/n} = 2 \{ \sqrt{\ln n} + n \int_{\sqrt{\ln n}}^{\infty} \frac{\exp(-\frac{1}{2} x^2)}{\sqrt{\ln n}} dx \} \sigma = 2 \{ \sqrt{\ln n} + \frac{n\sqrt{\pi}}{2} \{1 - \operatorname{erfc} \sqrt{\ln n}\} \} \sigma \quad (5.37b)$$

*) 普通の場合、波高は crest to trough を言うが、こゝでは特に断らないかぎり平均水位より波峯までの高さを考える。

(ただし, $\varepsilon \approx 0$)

$$2\bar{\varepsilon}_{max} = 2\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{\ln(TN_p(1-\varepsilon^2)^{1/2}) + \frac{r}{2}}} \sigma \quad (5.37c)$$

(ただし, $TN_p(1-\varepsilon^2)^{1/2}$

が十分大きい場合)

$$\sigma^2 = \int_0^\infty S(f) df = E/2$$

5. 観測時間および計器感度

(あるいは読取間隔)の影響

5) 6)

不規則変動を観測するとき、われわれは普通無限に続くタイム・シリーズの一部だけ (T sec) を取出している。また、計器は十分高い周波数の変動まで追従できるとは限らないから、こゝ

でもある短時間の平均を記録していることになる。ある場合には、アナログ記録をある間隔で読み取ってデジタル処理をする場合もある。この結果、記録されるのは真のスペクトル $S(f)$ を歪ませたものとなっている。

記録時間を T (sec), 瞬間値の評価時間を s (sec) とすれば、変形されたスペクトル $S_{T,s}(f)$ は

$$S_{T,s}(f) = S(f) \left(1 - \frac{\sin^2 \pi T f}{(\pi T f)^2} \right) \frac{\sin^2 \pi s f}{(\pi s f)^2} \quad (5.38)$$

である。スペクトルの歪フィルター $G(T, s)$

$$G(T, s) = \left(1 - \frac{\sin^2 \pi T f}{(\pi T f)^2} \right) \frac{\sin^2 \pi s f}{(\pi s f)^2} \quad (5.39)$$

を, $T = 100 s$ の場合と, $T \rightarrow \infty$ の場合について図示すれば、図-5.5 a) b) のようになる。

このことは、またつぎのように考えても良い。不規則変動の記録を T (sec) で打ち切ることは、周期 $1/T$ オーダー以下の変動を切り捨てることであり、計器が s (sec) 間の平均値を示すことは、計器が $1/s$ より高い周波数の変動を切り捨てることである。 $G(T, s)$ は $(1/2T \sim 1/2s)$ の矩形の band pass filter で近似して良い。

6. 理論と実測との比較

以上に述べて来た理論を実測値と比較しよう。それに先立て、理論の導入と展開の中で行われた仮定を今一度反省しておこう。

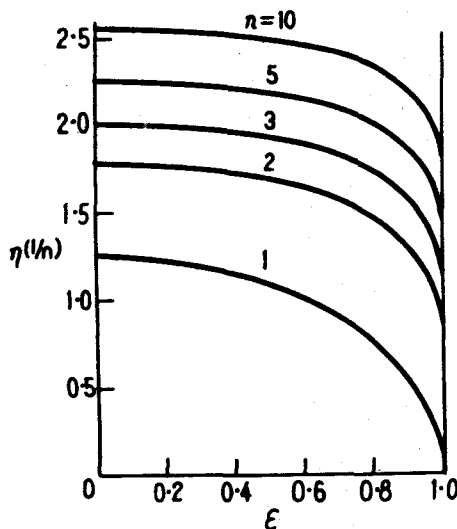


図-5.4 $1/n$ 最大波峰高 ($\eta_{1/n} = \varepsilon_{1/n}/\sigma$) と ε の関係

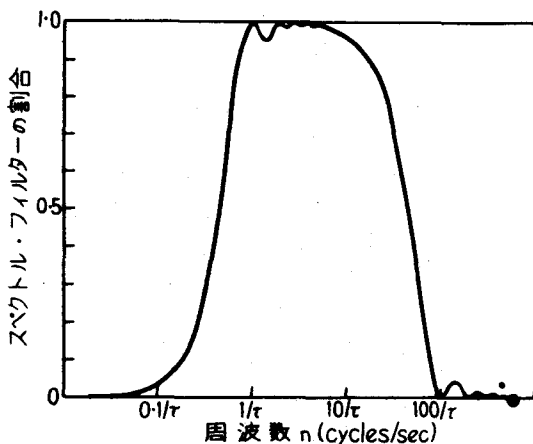


図-5.5 a) サンプルング効果 ($T = 100 S$)

① まず波面の水位変動 $\xi = f(t)$ は Gauss 分布であるとしたことである。しかし、これは波面変動が多くの周波数成分からなることと、確率論の“中心極限定理”からの帰結である。

② つぎに、理論の最後の方でのべた最高波高 ξ_{max} および $1/n$ 最大波高 $\xi_{1/n}$ の理論は、そのまゝではわれわれの普通使っている波高 (H_{max} , $H_{1/n}$) (つまり crest to trough wave height) の 2 倍とは言えないが、波高の分布が Rayleigh 分布ならば (波のスペクトル幅が狭く $\epsilon \ll 1$ ならば),

$$\xi_{max} = H_{max}/2 \quad (0 \leq \epsilon \ll 1)$$

$$\xi_{1/n} = H_{1/n}/2 \quad (0 \leq \epsilon \ll 1)$$

である。

a) 波面変動の確率分布

水位変化 $\xi = f(t)$ の超過確率

$$P_1(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} p_1(\xi) d\xi \quad (5.40)$$

をプロットしたのが、図-5.6 である。もし、 $p(\xi)$ が Gauss 分布ならば、図中の点は実線と一致するはずであるが、これよりいく分ずれて Gram-Charlier 級数 (5.41) で表されている。

$$p_1(\xi) = \frac{1}{\sigma} \left[\phi\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) - \frac{r_1}{\sigma} \phi''\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) + \frac{r_2}{24} \phi^{(iv)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) + \frac{r_1}{72} \phi^{(vi)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) \right] \quad (5.41)$$

ここに、 $\phi(\xi/\sigma)$ は Gauss 分布関数、 $\phi'' \cdot \phi^{(iv)} \cdot \phi^{(vi)}$ はその微分、 $r_1 = \bar{\xi}^3 / (\bar{\xi}^2)^{3/2}$ (skewness), $r_2 = \bar{\xi}^4 / (\bar{\xi}^2)^2 - 3$ (kurtosis) である。

波の水位は、波高が高くなるにつれて、波の非線型性のために波峯は鋭く、波の谷は浅く広くなるから、 ξ の分布が Gauss 分布からずれるであろうことは当然予想されたことである。

b) 波高分布

スペクトル幅が狭ければ $\epsilon \rightarrow 0$ となり、波峰高分布 $p(\xi_p)$ は Rayleigh 分布に近く、そして、波高 (crest to trough wave height) H は ξ_p の 2 倍として良い。

$$p(H) = 2 \frac{H}{\sigma_H^2} \exp \left\{ - (H/\sigma_H)^2 \right\}$$

$$P(H) = \int_H^{\infty} p(H) dH = 1 - \exp \left\{ - (H/\sigma_H)^2 \right\} \quad (5.42)$$

図-5.7⁷⁾ や図-5.8⁸⁾ に示されるように、波高が小さい所を除いて Rayleigh 分布で近似できそうである。もっとも、波のスペクトルは狭い帯域スペクトルではなく、 ϵ の値も (0, 1) のかなりの範囲にちらばっている。

c) ゼロ・クロッシングおよび単位時間あたりの波峯数

ゼロ・クロッシング N_0 と単位時間あたりの波峯数 N_p は波のスペクトルから式 (5.16)・(5.25) より計算される。計器感度の影響を考慮して $\int S(f) df$ 等の積分の上限をある周波数 f で打切った場合の N_0 , N_p の値と打ち切り周波数 f の関係を図-5.9⁹⁾ に示す。また、スペクトルの広がり幅を表すパラメーター ϵ と N_0 , N_p とは、式 (5.25 a) より

$$N_0/N_p = (1 - \epsilon^2)^{1/2}$$

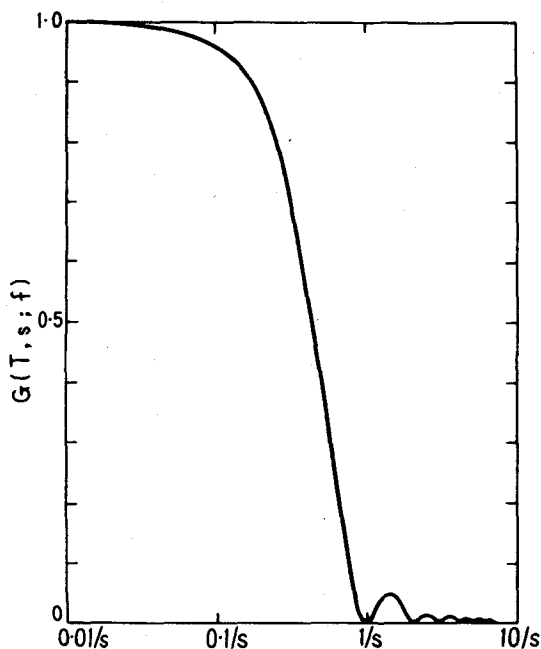


図-5.5 b) サンプルング効果 ($T \rightarrow \infty$)

あるいは,

$$\epsilon^2 = 1 - (N_o/N_p)^2 \quad (543)$$

である。図-5.9 にみられるように、 ϵ^2 ははゞ 0.6 位で、波峯高の分布は Rayleigh 分布 ($\epsilon^2 = 0$) と Gauss 分布 ($\epsilon^2 = 1$) の中間である。

d) 平均波高・ $1/n$ 最大波高・

最高波高

波峯高についてのこれらの関係は、式 (5.37 a, b, c) にまとめられている。波高分布が Rayleigh 分布 ($\epsilon = 0$) に近ければ、これらの式の関係を $2\bar{\xi} = H$ と置換えることができる。先にのべたように波高分布は Rayleigh 分布と Gauss 分布 ($\epsilon = 1$) の中位であるから、この置き換えは無理のように思われる。ところが、現実の波では $2\bar{\xi}$ を H と置き換えた式 (5.37 a, b, c) の関係が非常に良く成立することが認められている。

図-5.10 は $\bar{H}$ と波のエネルギーの平方根 πE との比と Rayleigh 分布からのズレ度 $\sqrt{1 - \epsilon^2}$

の関係を示すものである。 ϵ^2 は 0 よりかなり 1 に寄っているにもかかわらず $2\bar{\xi}$ を $\bar{H}$ で置換えた式 (5.37 a) の関係が成り立っている。

式 (5.37 b) より、 $1/3$ および $1/10$ 最大波高と平均波高・波のエネルギーの関係が次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} H_{1/3} &= 1.598 \bar{H} = 2 \sqrt{2} \sqrt{E} \\ H_{1/10} &= 2.032 \bar{H} = 3.60 \sqrt{E} \end{aligned} \right\} \quad (544)$$

図-5.11 は、これらの関係と実測結果を比較したものであるが、同じく良く理論と実測が一致していると言える。¹⁰⁾

最後に図-5.12 は最高波高と r.m.s 波高の比が観測波の波数 (つまり観測時間に比例する) の増加とともに大きくなる理論 (式 (5.33) あるいは式 (5.37 c)) と実測結果の比較を示している。

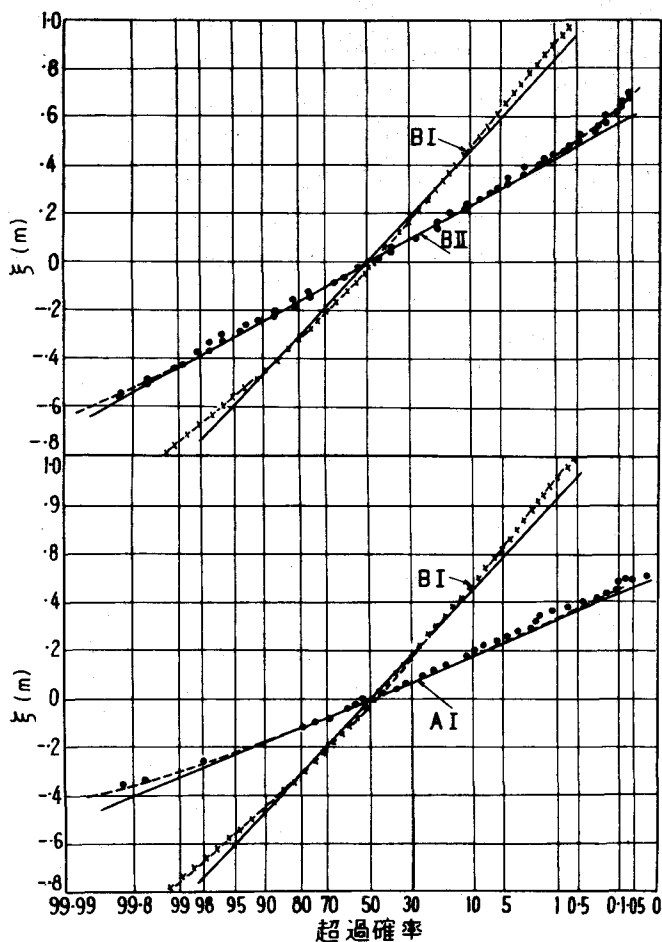


図-5.5 波の水位の確率分布

VI 不規則波の波力スペクトル (非線型問題)

確率問題における非線型問題には、いくつかの解法がある (I の参考文献 9) を参照)。ここでは、まず特性関数法による不規則波力のスペクトルについて述べる。

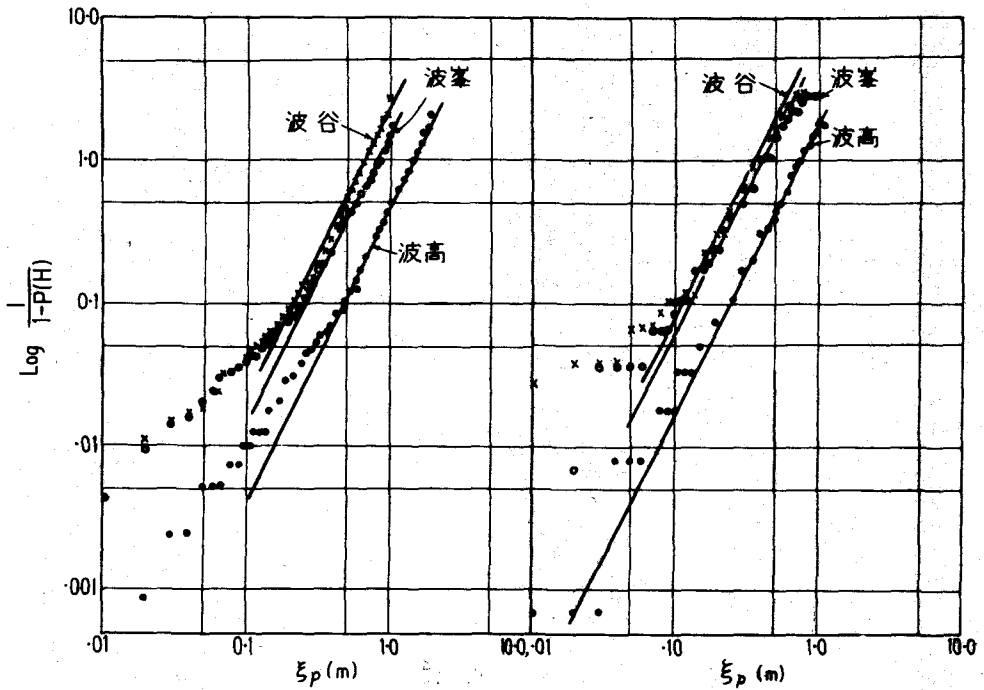


図-5.7 波高の確率分布, Rayleigh 分布との比較

1. 特性関数

確率変数 $X(t)$ の分布に関する特性関数 $f(u)$ は, $\exp(iuX)$ の平均値で u の関数である。

$$f(u) = \text{average} \exp(iuX) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \exp(iuX(t)) dt \quad (6.1)$$

$X(t)$ が Gauss 分布であるとき, 特性関数は

$$\text{average} \exp(iuX) = \exp\left\{-\bar{X}^2 u^2 / 2\right\} \quad (6.2)$$

一般に k 次元の不規則ベクトル $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ の分布の特性関数は, 各成分 x_i が Gauss 分布のとき, 次のようになる。

$$\begin{aligned} g(z_1, z_2, \dots, z_k) &= \text{average} \exp\{iz_1 x_1 + iz_2 x_2 + \dots + iz_k x_k\} \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k \mu_{rs} z_r z_s\right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

ここに, μ_{rs} は 2 次モーメント

$$\mu_{rs} = \overline{x_r x_s} \quad (6.4)$$

である。

さて, $X(t)$ の非線型関数 $Y(X)$ に Laplace 変換をほどこせば,

$$f(iu) = \int_c Y(X) e^{-iuX} dX \quad (6.5)$$

であり, この逆変換により, $Y(X(t))$ は

$$Y(X(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_c f(iu) e^{iXu} du \quad (6.6)$$

と表わされる。

2. 非線型不規則変数の自己相関

$X(t)$ を入力とする非線型不規則変数 $Y(t)$ の自己相関関数 $\phi_{YY}(\tau)$ は, 式 (6.6) の表示式を使って

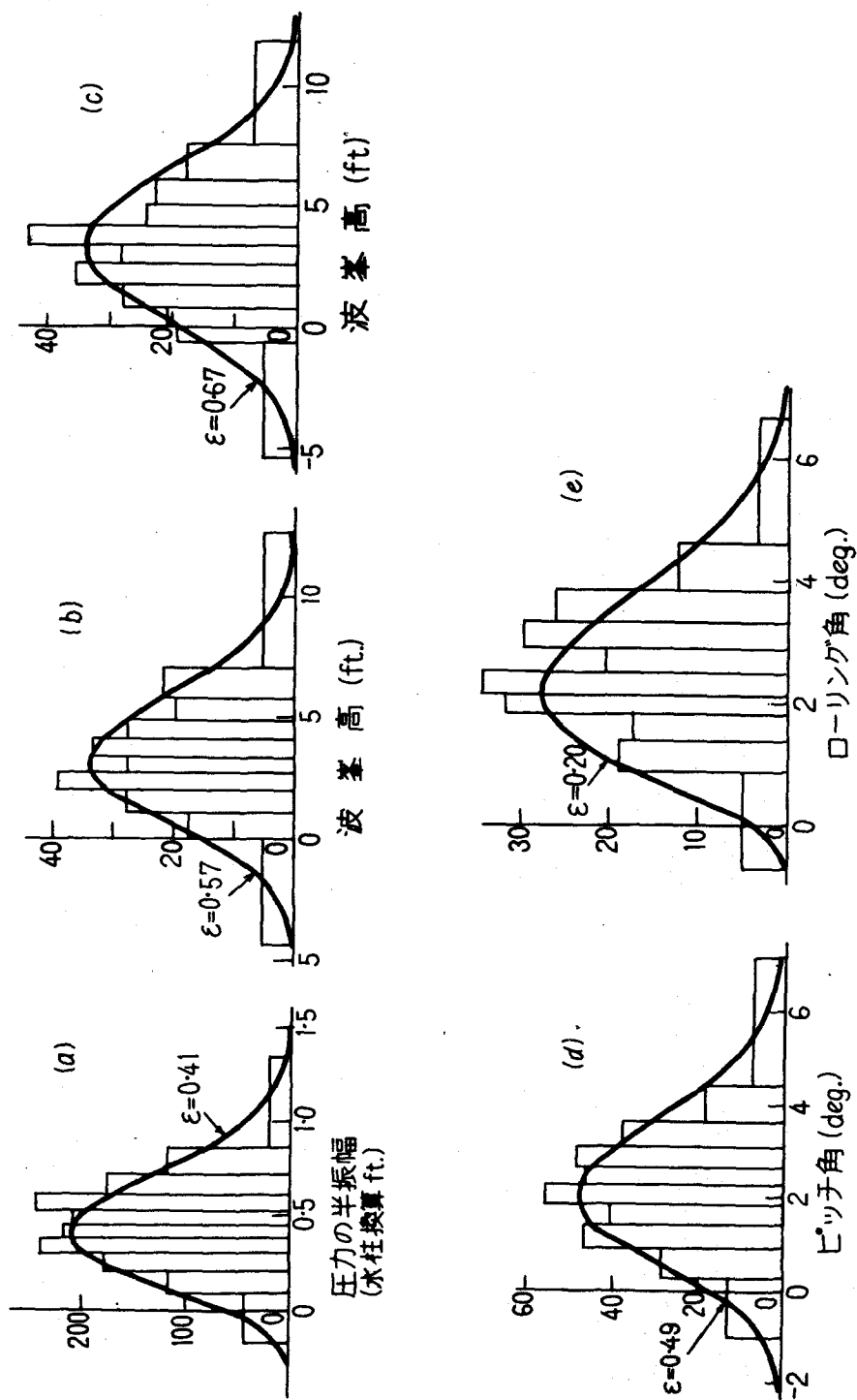


図-5.8 (a) 波 峯 高 の 確 率 分 布

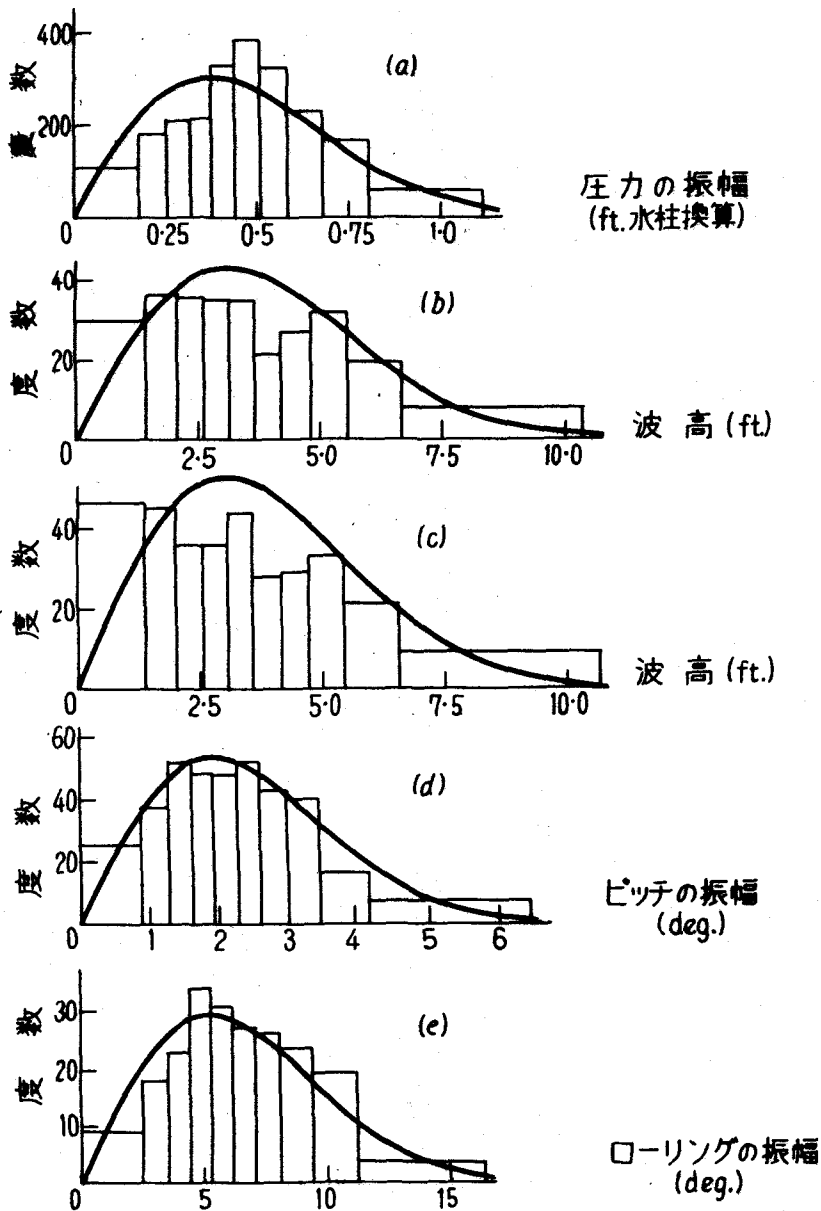


図-5.8 (b) 全振幅の確率分布

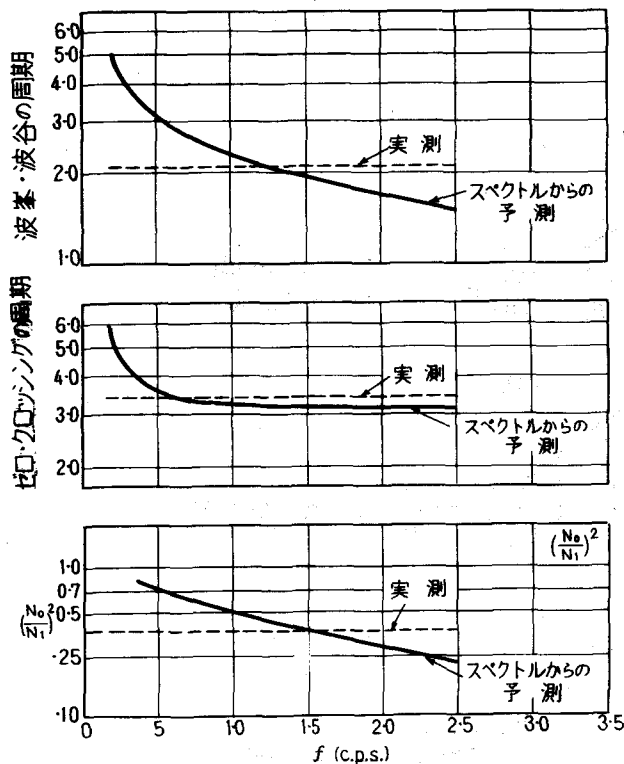


図-5.9 ゼロ・クロッシングと周期の理論と実測との比較；横軸はスペクトルの cut off frequency

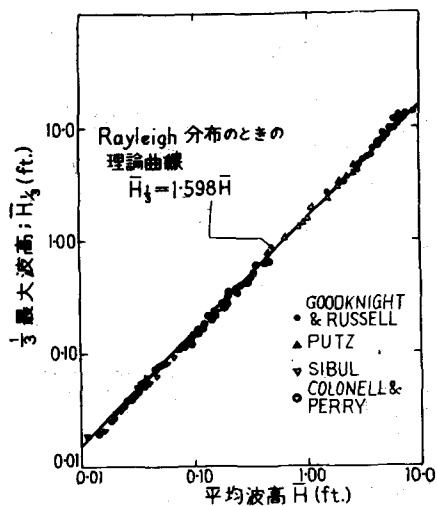


図-5.11 (a) $1/3$ 最大波高と平均波高

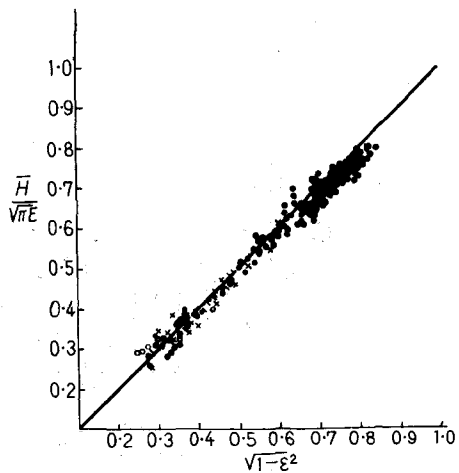


図-5.10 スペクトル幅による平均波高の変化

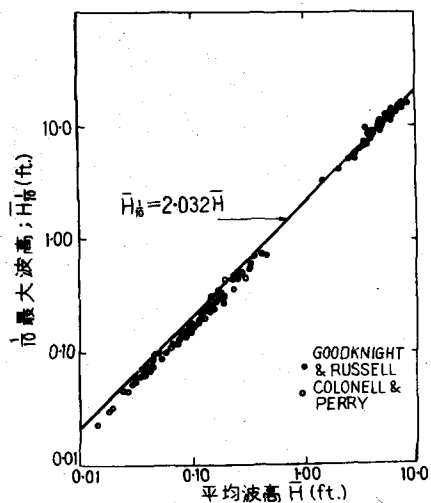


図-5.11 (b) $1/10$ 最大波高と平均波高

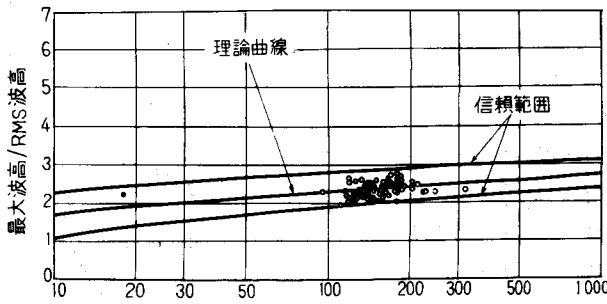


図-5.12 最高波高と観測波数の関係

$$\begin{aligned}\varphi_{YY}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y(t) \\ Y(t+\tau) dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 T} \\ \int_0^T dt \int_c f(iu) \exp(iuX(t)) \\ du \times \int_c f(iv) \exp(ivX \\ (t+\tau)) dv\end{aligned}$$

ここで、式(6.6)による $Y(t)$ および $Y(t+\tau)$ の積分変数が u の v と異なる記号でなければならないことに注意されたい。上式の積分の順序を変更

し、特性関数 $g(u, v, \tau)$ を用いれば $\varphi(\tau)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^T f(iu) du \int_c f(iv) dv \times \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_c^T \exp[iuX(t) + ivX(t+\tau)] dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_c f(iu) du \int_c f(iv) g(u, v, \tau) dv\end{aligned} \quad (6.7)$$

ここで、特性関数 $g(u, v, \tau)$ は式(6.3)により

$$\begin{aligned}g(u, v, \tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \exp[iuX(t) + ivX(t+\tau)] dt \\ &= \text{average} \exp[iuX(t) + ivX(t+\tau)] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2} \overline{X(t)X(t+\tau)} uv\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2} \varphi_{XX}(\tau) uv\right]\end{aligned} \quad (6.8)$$

となる。したがって、非線型系からの出力 $Y(X(t))$ の自己相関関数 $\varphi_{YY}(\tau)$ は、入力 $X(t)$ の自己相関関数 $\varphi_{XX}(\tau)$ により

$$\varphi_{YY}(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_c f(iu) du \int_c f(iv) \exp\left[-\frac{1}{2} \varphi_{XX}(\tau) uv\right] dv \quad (6.9)$$

となる。

上式を実際に計算するには、 u, v についてそれぞれ積分を行えるように $\exp[-\varphi_{XX}(\tau) uv]$ をTaylor展開し

$$\exp[-\varphi_{XX}(\tau) uv] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\varphi_{XX}(\tau) uv)^k \quad (6.10)$$

とする。したがって、式(6.9)は次のようになる。

$$\varphi_{YY}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_k)^2}{k!} \{ \varphi_{XX}(\tau) \}^k \quad (6.11)$$

ここで、

$$\alpha_k = \frac{(i)^k}{2\pi} \int_c f(iu) u^k dv \quad (6.12)$$

式(6.9)において関数 $f(iu)$ や積分路 c は(非線型)関数 $Y(X)$ により決定される。特性関数法による確率現象の非線型問題の解法の例として不規則波の波力の相関とスペクトルの問題を以下にのべよう。

3. 不規則波の波力の自己相関とスペクトル³⁾⁴⁾

波浪運動における水粒子の速度を $V(t) = V_0(t) + V_N(t)$ (V_0 は一様流速、 $V_N(t)$ は不規則成分)、加速度を $A(t)$ 、柱体の径を D 、抗力係数を C_D 、慣性力係数を C_M とすれば、柱体の単位長さあたりの波力は次のように表わされる。

$$F(t) = \frac{\rho}{2} C_D D V(t) |V(t)| + \rho C_M \frac{\pi D^2}{4} A(t) \quad (6.13)$$

したがって、波力は一つの非線型問題である。いま、 $C = \rho C_D D / 2$ 、 $K = \rho C_M \pi D^2 / 4$ と置き、波力を波の粒子速度 V に関する非線型項 $F_V(t)$ と加速度に関する線型項 $F_A(t)$ の和と表す。

$$F(t) = F_V(t) + F_A(t) \quad (6.14)$$

$$\left. \begin{aligned} F_V(t) &= C V(t) |V(t)| \\ F_A(t) &= K A(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

$F_V(t)$ を次の2つの関数の和と考える (図-6.1)。

$$\left. \begin{aligned} F_V(V(t)) &= F_{V+}(V(t)) + F_{V-}(V(t)) \\ \text{こゝに } F_{V+}(V) &\begin{cases} = C V^n & (V \geq 0) \\ = 0 & (V < 0) \end{cases} \\ F_{V-}(V) &\begin{cases} = 0 & (V > 0) \\ = -C(-V)^n & (V \leq 0) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

式 (6.5) により, F_{V+} と F_{V-} の unilateral Laplace 変換を求める。

$$\begin{aligned} f_+(iu) &= \int_0^\infty F_{V+}(V) e^{-i u V} dV = C \int_0^\infty V^n e^{-i u V} dV \\ &= C \Gamma(n+1) / (iu)^{n+1} \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} f_-(iu) &= \int_{-\infty}^0 F_{V-}(V) e^{-i u V} dV = -f_+(-iu) \\ &= -C \Gamma(n+1) / (-iu)^{n+1} \end{aligned} \quad (6.18)$$

同様に, 加速度項 $K A(t)$ の Laplace 変換は

$$\left. \begin{aligned} a_+(iu) &= \int_0^\infty K A(t) e^{-i u A} dA = K / (iu)^2 \\ a_-(iu) &= \int_{-\infty}^0 K A(t) e^{-i u A} dA = -K / (iu)^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

となる。これらの式の逆変換により, 非線型波力 (6.13) を積分表示することができ, $V|V|$ という V に関する非線型項が直接あらわれなくなる。

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi} \left[\oint_{C_+} \{ C \Gamma(3) (iu)^{-3} e^{i u V(t)} + K (iu)^{-2} e^{i u A(t)} \} du \right. \\ &\quad \left. + \oint_{C_-} \{ -C \Gamma(3) (-iu)^{-3} e^{i u V(t)} - K (iu)^{-2} e^{i u A(t)} \} du \right] \end{aligned} \quad (6.20)$$

こゝに, 積分路 C_+ , C_- は図-6.2 のようにとる。

式 (6.20) は多少形が複雑になっているが, 式 (6.6) と同形であり, 式 (6.20) から波力 $F(t)$ の自己相関 $\varphi_{FF}(\tau)$ を求めると, 式 (6.9) あるいは (6.11) (6.12) に相当するものが得られる。ただし, 式 (6.20) は $e^{i u V}$ と $e^{i u A}$ の項があるので, 波力の自己相関を計算すれば $\overline{VA}$ が現れ, その他計算も相当複雑になる。(これについては, 参考文献3) 4) を参照されたい。)

結局, 波力の自己相関関数として, 次式を得る。

$$\varphi_{FF}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{k!} \{ \varphi_{VV}(\tau) \}^k - K^2 \frac{d}{d\tau} \{ \varphi_{VV}(\tau) \} \quad (6.21)$$

こゝに,

$$\begin{aligned} \alpha_k &= C \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_V^{(2-k)} \exp(-V_o^2 / 4 \sigma_V^2) \\ &\quad \times \left[D_{k-3} \left(-\frac{V_o}{\sigma_V} \right) + (-1)^{k+1} D_{k-3} \left(\frac{V_o}{\sigma_V} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.22)$$

$D_\lambda(z)$ は Weber 関数, $\sigma_V = \sqrt{V_N^2}$ 。

式 (6.22) の最初の2項を取り出せば,

$$\varphi_{FF}(\tau) \approx \frac{8}{\pi} C^2 \bar{V}^2 \cdot \varphi_{VV}(\tau) - K^2 \varphi_V''(\tau) \quad (6.23)$$

となる。

波力のスペクトルは, 式 (6.22) の Fourier 変換から

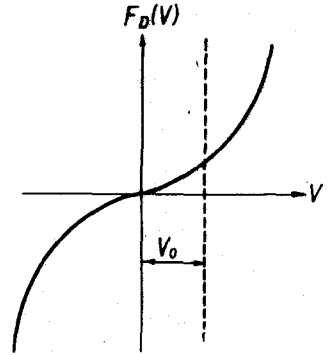


図-6.1 Non-linear filter of waveforce

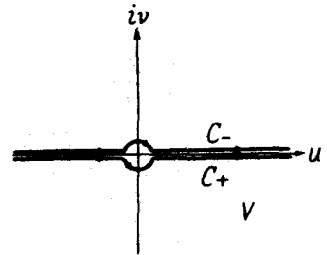


図-6.2 Pass of integration

$$S_{FF}(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{k!} S_{VV}^{(k)}(f) + 4\pi^2 K^2 f^2 S_{VV}(f) \quad (6.24)$$

となる。ただし、

$$S_{VV}^{(k)}(f) = 2 \int_0^{\infty} (\varphi_{VV}(\tau))^k \cos 2\pi f \tau d\tau \quad (6.25)$$

もし、式(6.24)の最初の2項を取り出せば、波力スペクトルは次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{FF}(f) &\approx \left\{ \frac{8C^2 V^2}{\pi} + 4\pi^2 K^2 \cdot f^2 \right\} S_{VV}(f) \\ &= \left\{ \frac{8C^2 V^2}{\pi} + 4\pi^2 K^2 \cdot f^2 \right\} \left[\frac{(2\pi f)^2 \cos h^2 \chi z}{\sin h^2 \chi d} \right] S_{\eta\eta}(f) \end{aligned} \quad (6.26)$$

こゝに、 $S_{\eta\eta}(f)$ は波のスペクトル、 d は水深、 χ は波数である。

$$(2\pi f)^2 = g \chi \tanh \chi d \quad (6.27)$$

式(6.26)に明らかなように、波力スペクトル S_{FF} と波のスペクトル $S_{\eta\eta}$ は、高周波数域でその差異が大きくなる。この点はWiegelら⁵⁾の実測とも一致している。

波力スペクトルについては、波と流れの共存する場合に波力が著しく増大することが日野⁶⁾により指摘されている。また、Borgman⁷⁾は本解説とは別の方法で理論を展開している。

なお、式(6.23)(6.25)のように厳密解を

最初の2項で打ち切った近似式は、式

(6.13)の線型近似式からの解であること、

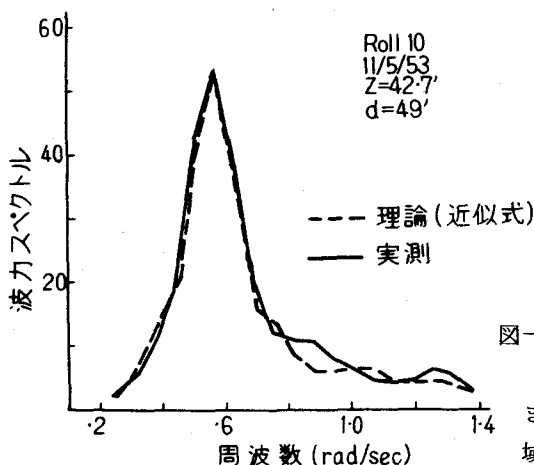


図-6.4 波力スペクトルの理論と実測との比較

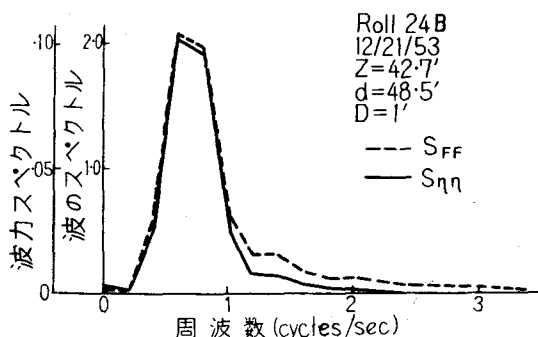


図-6.3 (a) 波のスペクトルと波力スペクトルの比較

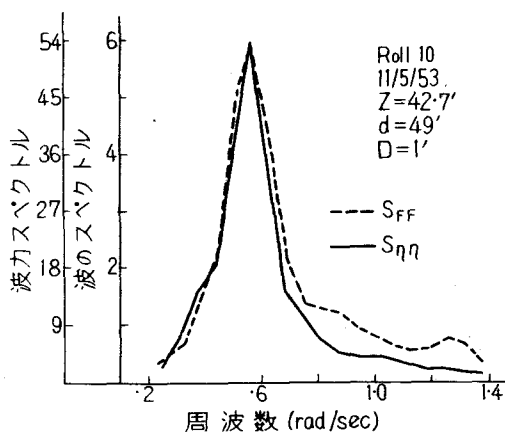


図-6.3 (b) 波のスペクトルと波力スペクトルの比較

また、波力スペクトルと波のスペクトルの高周波数域での差異は、波力式(6.13)の非線型性のためではなく、加速度項によるものであることに注意されたい。

波浪の統計的解析における非線型問題としては、波浪のエネルギー・スペクトルの非線型干渉とバ

イスベクトルの問題に触れなければならない。その他にも波浪の統計的解析については多くの研究成果が発表されている。しかし、もう予定のページ数を越えてしまった。これらについてはⅠの参考文献8)を参照されたい。

参 考 文 献

Ⅰ はじめに

- 1) Blackman, R. B. & Tukey, J. W. (1958) : The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communication Engineering, Dover Publications, Inc.,
- 2) 赤池弘次 : 不規則振動のスペクトル解析, 統計数理研究所
- 3) Bendat, J. S. and Piersol, A. G. (1966) : Measurement and Analysis of Random Data, John Wiley & Sons, Inc.,
- 4) 磯部孝 (編) (1968) : 相関函数およびスペクトル — その測定と応用, 東京大学出版会
- 5) 石原・本間 (編) : 応用水理学 (下) 丸善 (刊行予定)
- 6) Cooley, J. W. & Tukey, J. W. (1965) : An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, Mathematics of Computation, Vol. 19, 297-301
- 7) 浜田徳一 (1965) : 波浪スペクトル論とその応用, 1965年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会
- 8) 小森修蔵 (1969) : スペクトル解析の海岸工学への応用, 土木学会誌, 54巻, 5号, 65-74
- 9) 日野幹雄 (1970) : 土木技術者のための新数学講座4, 確率・統計(B), 土木学会誌 55巻, 1号, 63-70
- 10) National Academy of Sciences (U.S.A.) (1963) : Ocean Wave Spectra, Prentice-Hall
- 11) Rosenblatt, M. (ed.) (1963) : Time Series Analysis, John Wiley & Sons.

Ⅱ 線型応答系の理論と不規則波のシミュレーション

- 1) Lee, Y. E. (1960) : Statistical Theory of Communication, John Wiley and Sons, Inc.,
- 2) Middleton, D. (1960) : An Introduction to Statistical Communication Theory, McGraw-Hill.
- 3) 日野幹雄 (1967) : 波浪の予測フィルター・変換フィルター, 第14回海岸工学講演会講演集
- 4) Borgman, L. E. (1969) : Ocean wave simulation for engineering design, J. Waterways & Harbors, ASCE, vol. 95, No. WW4, 557

Ⅲ 多入力線型応答系と船の動揺

- 1) Bendat, J. S. & Piersol, A. G. (1966) : Measurement and Analysis of Random Data, John Wiley & Sons, Inc.
- 2) 山内保文 (1968) : 海洋波浪中における船舶の応答, 第18回応用力学連合会講演会論文抄録集

IV 線型予測理論による波浪予測

- 1) Wiener, N. (1949) : Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, John Wiley and Sons, Inc.
- 2) Lee, Y. E. (1960) : Statistical Theory of Communication, John Wiley and Sons, Inc.
- 3) Putz, R. R. (1953) : Predictability of wave transformation ; Linear least square prediction, Tech. Rep. Ser. 29, Issue 54, Institute of Eng. Res., Univ. of California, Berkley, Cal.
- 4) 日野幹雄 (1967) : 波浪の予測フィルター・変換フィルター, 第14回海岸工学講演会講演集

V 波浪統計量と雑音理論

- 1) Rice, S. O. (1944, 1945) : The mathematical analysis of random noise, Bell System Tech. J. vol. 23, 282, vol. 24, 46
- 2) Longuet-Higgins, M. S. (1952) : On the statistical distribution of the heights of sea waves, J. Marine Res. vol. 9, 245
- 3) Cartwright, D. E. & Longuet-Higgins, M. S. (1956) : The statistical distribution of the maxima of a random function, Proc. Roy. Soc. A, vol. 237, 212.
- 4) Cartwright, D. E. (1958) : On estimating the mean energy of sea waves from the highest waves in a record, Proc. Roy. Soc. A, vol. 247, 22.
- 5) Smith, F. B. (1960) : The effect of sampling and averaging on the spectrum of turbulence, Quart. J. Roy. Met. Soc., vol. 88, no. 376, 177.
- 6) 日野幹雄 (1965) : 瞬間最大値と評価時間の関係 とくに突風率について, 土木学会論文集, No. 117, 23.
- 7) Collins, J. I. (1967) : Wave statistics from Hurricane Dora, J. Waterway & Harbors Div., ASCE, vol. 93, no. WW2, 59
- 8) Longuet-Higgins, M. S. (1963) : The effect of nonlinearities on statistical distributions in the theory of sea waves, J. Fluid Mech., vol. 17, part 3.
- 9) 岩田憲幸・稲田亘・田中孝紀・渡部勲 (1970) : 波浪スペクトル幅と統計量(I), 国立防災科学技術センター研究報告 No. 4, 23 - 43.
- 10) Goodknight, R. C. & Russell, T. L. (1963) : Investigation of the statistics of wave heights, J. Waterways and Harbors Div., ASCE, vol. 89, no. WW2, 29 - 54.
- 11) Colonnell, J. M. & Perry, B. (1968) : Laboratory simulation of sea waves, J. Waterways and Harbors Div., ASCE, vol. 94, No. WW2, 159 - 174.

VI 不規則波の波力スペクトル (非線型問題)

- 1) Rice, S. O. (1945) : Mathematical Analysis on Random Noise, Bell System Tech. J., vol. 24.
- 2) Davenport, W. B. & Root, W. L. (1958) : Random Signals and Noise, McGraw-Hill.

- 3) 日野幹雄 (1968a) : 柱体に働く不規則波の波力 — (1), 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 4, 35 - 44.
- 4) 日野幹雄 (1968b) : パイルに働く波力スペクトルの理論 — 流れと波の共存する場合, 第15回海岸工学講演会講演集, 103 - 108.
- 5) Wiegel, R. L., Beebe, K. E. & Moon, J. (1957) : Ocean wave forces on circular cylindrical piles, J. Hydraulic Div., Proc. ASCE, vol. 83, no. HY2.
- 6) Borgman, L. E. (1967) : Random hydrodynamic forces on objects, Annals of Mathematical Statistics, 37 - 51.
- 7) Borgman, L. E. (1967) : Spectral analysis of ocean wave forces on piling, J. Waterways and Harbors Div., Proc. ASCE, vol. 93, no. WW2, 129 - 156.
- 8) Bretschneider, C. L. (1967) : Probability distribution of wave force, J. Waterways and Harbors Div., Proc. ASCE, vol. 93, no. WW2, 5 - 26.