

乱 流 拡 散

長崎大学教授 栗 原 道 徳

1 まえおき

水工学が対象とする流れの現象には、殆ど常に乱れの運動が付き纏っている。元来乱れの現象は複雑怪奇なので問題の実際的な解決に当っては、その本質を探るよりはむしろ現象論的でよいから具体的で適切な方法を知ることの方が要求されているかも知れない。然しながら、乱れに関する今日の知識は、未だ不十分であつて、直ちにこの要求に応ずることは容易でない。吾々自身、機会ある毎に、水工学に於ける乱れの現象を忠実に観察し、その機構を探つて、問題解決のために必要である妥当な方法を追求して行かねばならないものと思う。

このような意味で、今回は、乱れ運動のもつ最も顕著な特性である乱流拡散の問題を取り上げて多くの研究者が乱流現象をどのように観察し、どのような考え方や方法によつて、その機構を探つてゆくかを、G. K. Batchelorの研究を通じて紹介したいと思う。

初めに、乱れ特に等分性一様な乱れに関する概念、理論およびその結果の概要を予め説明しておく方が望ましいが、話しの筋道を紛らわしくして仕舞う危険があるので、これを省略し、直ちに本論に入ることとする(東京工大・日野幹雄教授, 1967年夏期研修会講演集参照)。

1.1 乱流拡散の問題点

扱つて、乱れの運動の最も顕著な特性は、最初に1つの群をなしている流体粒子を拡散さして行く作用である。最もよく知られている例は、Reynoldsの円管内の流れの乱れの発生に関する実験である。管口から放出された色素は、初めは奇麗な一条の線となつて下流に向うが、或点に達すると、これは急に動揺を始め、こゝに於て流れは急に乱れることを示すが、同時に色素は管内に一面に散乱され、稀められて流れ去つてゆく。河川に汚水が放出される場合、煙突から煙が放出される場合などでは、流れは、始めから乱れていて、拡散は最初から顕著である。

(a) 平均流れの影響 これ等の例に於て、乱れの運動それ自身も強力な拡散能力をもっているが、その他に流れそのものの特性、即ち拡散方向に於ける平均速度の変化(前断流)があると、この変化が大きな役割を演じている。剪断流が協力すると乱れの効果は一そう著しくなるのである。實際、よく見るように、上空に於ける飛行雲の拡散は、上記の2の例に較べて余り著しいものではない。更に剪断流が強くて、それが乱流発生機構になつている場合には問題は—一そう複雑なものになる。吾々は、以下特に断りのない場合には、平均流速は一樣であるか、そうでなくても其が直接に乱流そのものに影響を与える程ではないものとする。

(b) 分子拡散の影響 Reynoldsの実験に際して、管口からの染色糸は美しい一つの糸をなしているが、實際は極く僅かではあるが、太くなつてゆく。これは流体内の分子拡散によるものである。普通には、この分子拡散は多くの乱流理論では無視されているが、乱流拡散と共に作用するときは、影響は必ずしも小

さいものではない。実際、乱流拡散によって、流体の実質部分の容積は、絶えず偏平に引き伸ばされ、厚みは著しく減少してゆく、そのために拡散物質の密度勾配は増加するため、分子拡散は活発になる。この重要性は考えている物理的特性（例えば温度）の拡散係数の粘性係数に対する比に関係する。従って、これを無視することの出来ない場合もあり得るのである。

(c) 流体粒子の運動の経歴の影響 分子拡散は、理論的にもう1つの大きな問題を投げかけている。それは、乱流拡散は、論理的に分子拡散の類似現象と考えられることである。このような観点から、便宜的に乱流拡散係数を仮定して、実際問題をとくのに利用されている。然し、このような方法は、乱流拡散現象の本質を正しく理解する上には役に立っていない。

分子拡散の場合には、拡散の割合と分子運動の物理的 量との関係が明かに知られているのに反して、乱流拡散では、乱れの運動を特長づける常数と拡散能力との関係に就いて何も知られていない。

このような相違の生ずる主な理由は、次の点にある；気体分子の運動に際しては、分子の過去の経歴は、2～3回の分子間の衝突によって殆ど消滅して仕舞い、その分子の統計的状态は、常に気体の平均的な状態に即応していると考えられる様になる（この様な平均化の行なわれるに必要な時空間の拡りは、連続体として流体の運動を考える場合には全く無視される程小さい）。

乱流拡散の場合には、粒子の経歴がなかなか消滅しないために、特定の流体粒子の運動を **Lagrange** 流に追跡しなければならない。

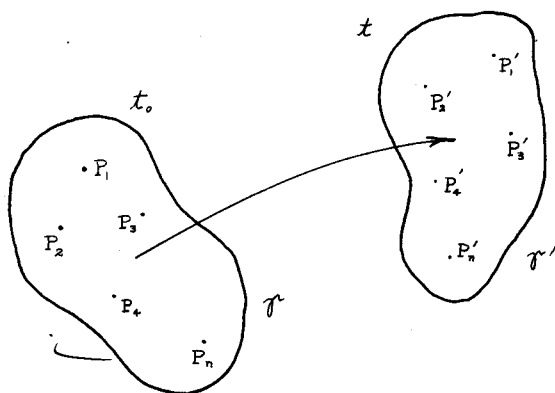
例えば、渦動粘性のような乱流伝達係数を用うるならば、平均状態に就いての **Euler** 流の基礎方程式によって、与えられた境界条件のもとに問題を解くことが出来る。従って **Lagrang** の記述は全く必要ないのだが、実は、この伝達係数を知る上に、吾々は粒子群の経歴を考えねばならないのである。このことが分子伝達現象に較べて、非常な困難を惹き起すのである。

1.2 統計的取扱いについて

乱れの現象を統計的に取り扱う場合には、吾々は、統計的集合として、全く同一の巨視的条件のもとに幾回となく繰り返えて得られる無数の乱れの現象の実現の集合を用うる。従って、確率は、この様な集合に関するものであり、当然平均値もそうである。

拡散現象を統計的に言い表わすと次の様になる；時刻 t_0 に於て、1つの閉曲面、或は沢山の曲面で囲まれた流体が何等の方法で、他の残りの流体と区別されたとする。この **marked fluid** が散乱してゆくのである。こゝで分子拡散を無視するならば、乱流拡散の問題は、時刻 t に、空間に於ける n ヶの位置に、同時に、**marked fluid** が見出される確率を決定することにある（第1図）。

実際問題として、吾々は、徒らに数を増さないで、意味のある成可く少ないパラメーターで拡散の統計的性質を表わす方が望ましい。例えば、任意の1の位置に **marked fluid** が見出される確率（**marked fluid** の平均分布）、或は **marked fluid** の重心の周りの平均的な分散等がそうである。これ等は、夫々上述の $n=1$ 或は 2 の確率函数に関係している。



第1図 時刻 t_0 に、marked fluid は閉曲面 γ を占めていたとする。時刻 t に於て、これは移動して閉曲面 γ' に到つたとする。そのとき、空間に随意に指定された点 $P'_1, P'_2, P'_3, \dots, P'_n$ が同時に γ' 内に含まれることがあるであろう。その確率を知ることが拡散の問題である。

2 One-particle analysis

2.1 Dispersion

乱流拡散に於て、最も簡単で、而も最も重要な統計的量は、marked fluid の刻々の平均密度の空間的分布である。分子拡散を無視することにして、 t_0 に於てmarked fluid の位置が確実に知られていたと仮定する。その時、時刻 t 、任意の点 $\vec{x}$ に於けるmarked fluid の平均密度は、そこにmarked fluid が見出される確率 $P(\vec{x}, t)$ に等しい。

$P(\vec{x}, t)$ は次の様な函数である：総ての時刻 t に対し

$$\int P(\vec{x}, t) d\vec{x} = V,$$

こゝに、 V はmarked fluid の容積（非圧縮性なので、常に一定である）である、 $P(\vec{x}, t_0)$ は点 x がmarked fluid 内にあるか否かに従つて1か零である。

扱て、時刻 t に於てmarked fluid が点 $\vec{x}$ に見出される確率 $P(\vec{x}, t)$ は、時刻 t_0 に於けるmarked fluid の要素が、 $t_0 \rightarrow t$ の際に、点 $\vec{x}$ に移ってくる確率の和に等しい。従つて、 $Q(\vec{x}, t / \vec{x}', t_0)$ を時刻 t_0 に点 x' にあつた流体粒子（流体実質の微小容積）が、時刻 t には $\vec{x} - \vec{x}'$ だけ移動している確率密度函数とすると、次の関係式が成立つ：

$$P(\vec{x}, t) = \int P(\vec{x}', t_0) Q(\vec{x}, t / \vec{x}', t_0) d\vec{x}' \quad (21)$$

こゝに積分は全空間について行なわれる。特に、 $P(\vec{x}', t_0)$ が位置 x_0 にある小容積 V 内で 1 であり、その他では零であるならば、(21) は、次の如く簡単になる；

$$P(\vec{x}, t) = V Q(\vec{x}, t / \vec{x}_0, t_0) \quad (22)$$

流体粒子の最初の位置 $\vec{x}$ によって $Q(\vec{x}, t / \vec{x}', t_0)$ がいかに変るかを考慮することは、ほとんど不可能である。しかし、幸いに、吾々の関心をもつような場合には、乱れは、少なくとも 1 つの方向に沿って均一なことが多い。

乱れが均一である方向への $\vec{x}$ の成分を x とするならば、1 つの粒子が $t-t_0$ の間に行なう移動 $x-x' = X$ に就いてみると、 $Q(X+x, t / x', t_0)$ は、初めの位置 x' に無関係であつて、 $Q(X, t / t_0)$ の型となる。乱流に関する確率密度函数は、ほぼ Gauss 型をもっていると考えられるので、 $Q(X, t / t_0)$ の性質は時刻 t に於ける分散 $\overline{X^2}$ によつて、ほぼ知ることができる。：

$$\overline{X^2} = \int X^2 Q(X, t / t_0) dX \quad (23)$$

他方、流体粒子の速度の x 成分を $u(t)$ とすると

$$\frac{d\overline{X^2}}{dt} = 2 \overline{X(t)u(t)} = 2 \int_0^t \overline{u(t')u(t)} dt' \quad (24)$$

こゝで、流体粒子の速度 $u(t)$ もまた定常偶然函数であると仮定する。従つて、 $u(t)$ (必然的に $X(t)$ も) の平均値が零となるように、座標軸を選ぶならば、吾々は

$$\overline{u(t)u(t)} = \overline{u^2} S(t-t') \quad (25)$$

を得る。ここに $S(\xi)$ は時間 ξ に対する速度 $u(t)$ の相関函数であり、 $\overline{u^2}$ は t に無関係である。

かくて、(24) は次の如くなる：

$$\frac{d\overline{X^2}}{dt} = 2 \overline{u^2} \int_0^{t-t_0} S(\xi) d\xi \quad (26)$$

$\overline{X^2}$ を求めるために、(26) を積分する際に、順序を変えて

$$\overline{X^2} = 2 \overline{u^2} \int_0^{t-t_0} (t-t_0-\xi) S(\xi) d\xi \quad (27)$$

特に、若し $t-t_0$ が充分小さくて、その間に於ける速度変化が無視されるようならば、 $S(\xi)$ は 1 に極く

近い。したがって(2.7)は、次の如くなる：

$$\overline{X^2} = \overline{u^2} (t - t_0)^2 \quad (2.8)$$

若し又、 $t - t_0$ が充分に大きいならば、(2.7)の右辺における $S(\xi)$ を含む積分は収斂するものとして、次式を得る：

$$\begin{aligned} \overline{X^2} &\sim 2 \overline{u^2} (t - t_0) \int_0^\infty S(\xi) d\xi \\ &- 2 \overline{u^2} \int_0^\infty \xi S(\xi) d\xi \cdot \quad (2.9) \end{aligned}$$

(第2図参照)

2.2 a 乱流拡散と酔歩まんさんの問題

前節に示された1つの流体粒子の散乱に関する諸関係式は、Brown運動などいわゆる酔歩まんさんの問題に於て、よく知られている関係式に対応するものである。乱流拡散のような連続的な過程についても、マルコフ過程についてと同じように、これ等の関係が成立つことは、G. I. Taylor (1921) によつて風に示されたところであつて、彼の研究は、その後の乱流拡散の基礎となつている。

酔歩まんさんの問題では速度の飛躍の起る時間間隔は極く短かくて、無数の飛躍の後の状態が研究の対象となつている。これに反して、乱流拡散では速度が持続されると考えられる時間間隔は $\int_0^\infty S(\xi) d\xi$ であつて、吾々が関心をもつ時間内に数多くの速度の飛躍が行なわれるとは考え難く、(2.8)が成立つような短い時間から、(2.9)が近似的に成立つような永い時間まで、広い範囲の $t - t_0$ について $\overline{X^2}$ を考えなければならぬ。

b. X についての正規確率分布函数と拡散方程式

酔歩まんさんの問題に於て、 X^2 が $t - t_0$ に比例すると言うことは、 X の確率分布が正規函数であることと関連している。このことは、乱流拡散についても、 $t - t_0$ が充分に大きくて、(2.9)が成立つような場合には、同じように成立つものと推測される。

流体粒子の移動は、 $X = \int_{t_0}^t u(t') dt'$ である。これは、その粒子が或短い時間 τ ごとに移動した距離の和と考えられる。すなわち $X = \sum_{t_0 + n\pi}^{t_0 + (n+1)\pi} u(t') dt'$ 。 $t - t_0 \rightarrow \infty$ の際に N は無限に大きくなるので、確率論に於ける中央極限定理が適用される範囲の現象に属するものと考えられる(この定理の最も簡単な形は、上記の和記号内の各項が1つ1つ互に関係なく独立している場合である)。したがつて定理の示すように、 $X(t)$ は正規確率分布にしたがうと言うことが推測される。このことは、実験的にも支持されている。

かくて、 $t - t_0$ が充分に大きいときには、 $X(t)$ について

$$Q(X, t/t_0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \overline{X^2})^{1/2}} \exp(-X^2 / 2 \overline{X^2}) \quad (2.10)$$

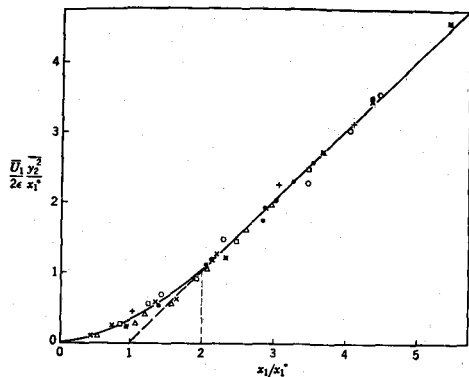


図-2 Lateral diffusion of benzene - carbon tetrachloride droplets in a turbulent flow of water downstream of the injection point

が成立つと考えられる。

Q について正規の確率分布関数が成立つと言うことは、 Q がまた次の拡散方程式を満すことと対等である：

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}, \quad (2.11)$$

ここに、 μ は拡散係数であつて、 $t - t_0$ が大きいときは、(2.9)によつて、次式で与えられる：

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{d \overline{X^2}}{d t} = \overline{u^2} \int_0^\infty S(\xi) d\xi \quad (2.12)$$

この関係式は、再びマルコフ過程による拡散と連続的運動による拡散との類似を示している。長さ $(\overline{u^2})^{1/2} \int_0^\infty S(\xi) d\xi$ は統計的に粒子の速度が持続される距離であつて、気体運動論に於ける分子の平均自由行程に該当している。拡散係数は、これ等にて、夫々の場合の粒子(あるいは分子)の平均速度を乗じたものである。

拡散方程式(2.11)は、これに $P(x', t_0)$ を乗じ、 x' について積分し、平均密度 $P(x', t)$ についての拡散方程式に書き直せば、理解し易いものとなる。すなわち

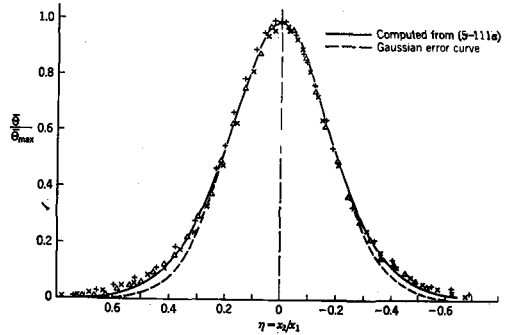
$$\frac{\partial P}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 P}{\partial x'^2} \quad (2.13)$$

この関係によつて、初期条件が与えられるならば、Euler 流に問題を解くことができる。

c. 拡散方程式の成立つ限界

$t - t_0$ が小さくて、漸近的な関係式(2.9)が成立つ限界以下であるような場合には、 X の確率分布が正規函数になること期待し難い。したがつて、函数 Q および P が拡散方程式を満すことも期待しかねる。しかしながら、何か特別の理由によつて、余り大きくない $t - t_0$ に対しても、 Q が正規分布の形をしている場合には、 $\overline{X^2}$ が $t - t_0$ に比例しなくても、 P は拡散方程式(2.13)を満すことになる。ただし、拡散係数 μ は t の函数となる。

例えば、 $t - t_0$ が十分に小さいときには、 $X(t)$ は $u(t)$ に比例する。 $u(t)$ は定常偶然函数で、Waxwell-Boltzmann の分布則にしたがう傾向が強いから、 X もまた正規確率函数にしたがうことになる。このときには、拡散係数は(2.8),(2.12)によつて $\overline{u^2} (t - t_0)$ となる。



Temperature distribution downstream of a heated wire in a nearly isotropic turbulence at a point in the axis of a plane free jet at 100 mm from the orifice of 5-mm width. (Hinze, J. O., and B. G. van der Hegge Zijnen, "General Discussion on Heat Transfer," p. 188, London, 1951.)

図 - 3

特別の場合を除いて、実際には、 $t-t_0$ が余り大きくなく、そのために X の確率分布が正規函数とならない場合が多い。そのような場合には、 Q および P が微分方程式を満たすとは考えられない。現象は、流体粒子の経歴を考慮した積分方程式によつて規定されることになるであろう。

物理的に言うならば、分子拡散の場合には、分子の平均自由行程の拡りの範囲内での平均量の変化が極く小さいのに反して、乱流拡散の場合には、そうでなく粒子が初めの速度を持続するであろうと考えられる距離内での考えている平均密度（或は物理量）の変化を、直線的变化で近似することが全く無意味となるところに問題があるのである。

3 One-particle analysis の応用

3.1 管内の縦方向の拡散

一定の圧力勾配のもとにある管内の定常な流れに際しては、乱れの運動は、統計的に定常であり、管に沿つて一様である。管壁があるために、流体粒子は横方向への運動は制約を受けている。流体粒子は、それが放出されたときの断面内の位置の特別選択の影響が消えて仕舞うと、統計的には全く偶然的な運動を行ない、その速度は、定常偶然函数となる。

管軸の方向への乱流拡散に対しては、前節に取り扱った結果が応用されるが、この場合には、さらに横断面内での平均流速の変化が重要な役割を演じる。すなわち平均流速の異なつた流線は、横方向に乱流によつて運ばれてきた **marked fluid** を縦方向に、まゑと違つた速さで運んでゆき、縦方向に強い分散を起す能力をもっている。

管内の乱流拡散の問題をとくために、吾々は、先づ流体粒子の管壁に対する相対的平均速度（これは **marked fluid** の重心の速度になる）を求めなければならない。次に、この平均流に対する流体粒子の相対速度、したがつて **marked fluid** の重心に対する拡散を考えねばならない。

a. 管内の流体粒子の平均速度、エルゴードの理論

エルゴードの理論は、次のことを教える： $u(t)$ が定常的な偶然函数であるならば、 $u(t)$ の確率平均は、充分に永い時間について行なわれた積分値から得られる平均値に等しい。したがつて、考えている管内の流れについて言えば、1つの粒子の速度の確率平均は、ただ1回の実現に際しての1つの粒子の永い間の時間平均に等しい、しかも、充分に永い間には、粒子は、管の横断面のあらゆる部分を自由に通過し、かつ管内を流れる粒子は、何れの粒子も相互に区別することができないから、総ての粒子は、いずれも確率平均速度と同じ平均速度をもつ管である。

一方、実際的には、管内の平均速度は、ある断面に於て永い時間測られた流出量から計算されるのが普通である。したがつて、これは1回の実現に際して、1つの粒子がその断面に達したときの速度を無数の粒子について平均したものである。厳密ではないが、この永い間にとられた集合は、1つの粒子が永い間にとるであろう、あらゆる値の集合と同等であるから、その平均速度は確率平均速度に等しいと見做される。

b. 管内の乱流によって運ばれる固体粒子の平均速度

前節の理論的考察の妥当性を確かめるため、Batcheler 達は、管内の水流に、水と同一密度の固体球を放出して、その平均速度を測定する実験を、数種の大きさの球について行なった。もちろん、固体球が有限の大きさであることを考慮して、理論を展開している。

1つの固体球が2つの測定断面を通過する時間の変動を吟味して、僅かの球を用うるだけで充分によい精度を以って、水の流出平均速度を決め得ることを示した。

このBatcheler 達の実験は、理論的な価値のほかに、Allenの salt-velocity 法(Taylor によって理論的に取り扱われている)に対する新しい平均流速の測定法を示したものである。

c. Marked fluid の拡散

U を放出流速、したがって流体粒子の統計的平均速度とする。平均流に対する粒子の変動速度を $u(t)$ とする。Marked fluid の平均の位置は、 $t-t_0$ の後に、放出された断面から $U(t-t_0)$ だけ下流に移っている。すると、管内の流体粒子の長時間に亘る運動経過は、定常偶然函数と考えられるので、marked particles のその確率平均位置に対する位置 $X(t)$ についての確率密度函数は正規型になっている筈である。

かくて、分散 $\overline{X^2}$ については(2.9) がそのまま成立つ：

$$\overline{X^2} \sim 2(t-t_0) \overline{u^2} \int_0^\infty S(\xi) d\xi - 2\overline{u^2} \int_0^\infty \xi S(\xi) d\xi \quad (3.1)$$

標準偏差 $(\overline{X^2})^{1/2}$ は時間と共に増加するが、他方平均移動距離は $(t-t_0)U$ であるから、この平均距離に対する標準偏差の割合は時間と共に減少する。したがって、粒子の移動時間の測定から平均流速を求める方法は、管が十分に長ければ、放流速度決定のよい方法となる。

(3.1) の右辺で大きいのは第1項である。そこで $\overline{u^2} \int_0^\infty S(\xi) d\xi$ の決定が重要問題となる。これは、管内の流れの模様で決まるものであるから Reynolds 数が十分に大きければ、摩擦速度 $u_\tau = (\tau_0/\rho)^{1/2}$ と半径 a の函数である。次元解析から

$$\overline{u^2} \int_0^\infty S(\xi) d\xi = K a u_\tau \quad (3.2)$$

を得る。ここに K は常数である。この関係は実験的に認められている。

Allen の salt-velocity法では、管に注入される塩分溶液(あるいは放射性溶液)が下流の測定点に達するまでの時間を、その点に於ける濃度分布から求めるのである。拡散は、ここに述べてきた理論にしたがっているから、当然 Gauss の型をしている。その極大点の位置が平均速度を与えるのである。この極大点を定めるのに困難が伴うのである。

3.2 減衰しつつある一様乱れの場合

風洞内におかれた格子によって起される乱流は、格子を過ぎて間もなく等方性になり、同時に一様な乱れの出現する。しかしながら、乱れは粘性によって、次第に弱められてゆくので、下流に向って乱れの強

さは、減少してゆく。

流れに直角に熱線をおき、その下流で、風洞の横断面内の温度分布を測定すれば、marked particle の拡散の模様を知ることができる。熱線と流れの方向を含む断面からの粒子の移動距離を $X(t)$ とすれば(22) (23)によつて、次式を得る：

$$\overline{X^2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 Q(X, t/t_0) dX = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x, t) dx ,$$

ここで、分子拡散を無視することができ、しかも熱線の近くを通過した総ての流体粒子は、同一の温度を得られるものならば、吾々は、次式を得る：

$$\overline{X^2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 O(x, t) dx / \int_{-\infty}^{\infty} O(x, t) dx , \quad (3.3)$$

ここで、 $O(x, t)$ は時刻 t に於て測られた平均超過温度である。

これ等の関係をLagrang 流の速度相関 $\overline{u(t)u(t')}$ を探るために用いようとする場合に、2つの困難な問題が生ずる、第1は、粒子速度 $u(t)$ は、乱れの減衰に伴つて定常な t の偶然函数ではなくなることである。第2は、分子拡散の影響は、 $t-t_0$ が小さい場合にだけしか考慮することができないことで、本質的な困難である。第1の困難は、次のようにして取り除くことができる。

風洞の格子によつて発生された一様の乱れは、後方に進むにしたがつて減衰してゆくが、その統計的な性質は近似的に相似であつて、しかも乱れの代表的長さは、近似的に $t^{1/2}$ に、代表的速度は $t^{-1/2}$ に比例して変化してゆくことが実験的に知られている。この結果は、次のように言い表わされる：

流体粒子の速度 $\vec{w}(t)$ は、 $t^{1/2} \vec{w}(t)$ とすると、新しく定義される変数 τ の定常偶然函数となる。ここに、 τ は時間の尺度が t に比例して増加することから

$$d\tau = dt/t \quad \text{あるいは} \quad \tau = \log t/t_1$$

と置いて定義されたものである(t_1 は常数である)。

$S(\xi)$ を、新しい変数の差 $\xi = \tau - \tau_0$ に対する新しく定義された定常偶然速度($t^{1/2} \vec{w}(t)$)の x -成分に関する相関係数とするならば、分散の変化の割合、(2.4)式は次の如くなる：

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{X^2}}{dt} &= 2 \int_{t_0}^t \overline{u(t)u(t')} dt' = 2 \int_{t_0}^t \overline{u^2(t) u^2(t')} S(\tau - \tau') dt' \\ &= 2 t_0 \overline{u^2(t_0)} \int_0^{\log t/t_0} e^{-1/2 \xi} S(\xi) d\xi . \end{aligned} \quad (3.4)$$

(3.4)の右辺は、 $\log t/t_0 \rightarrow \infty$ とすれば、 t に無関係の量となるので、再び分散は、 t と共に直線的に増加することになる。したがつて、中央極限定理が適用可能の範囲に入るように思われる。しかし、ここに重大な困難が生ずる。

第1は、時間軸が対数的に縮小されるために、時系列の偶然要素として考えられる要素の数が対数的に減少して、統計的な取り扱いが困難になること。第2には、大きな t に対する(3.4)に於ける積分は、エネルギースペクトルの振動数が零の附近の形で定められる。しかるに、そのような低周波成分に対しては、相似の仮定は余り期待できないことである。

3.3 自由な乱れた剪断流に於ける拡散

a. 一般的考察

管内の乱流に於て流体粒子の速度が定常時間の偶然函数であることは、次のような管内乱流の性質によるものである： a) 流体粒子は管壁のため、常に管内乱流の中にある。流体粒子は管の横断面の異なった部分を通過して動いてゆくが、十分に長い管を通つてゆく場合には、粒子の統計的性質は、どの粒子についても同一である。

ここで、今までに得られた拡散の理論を自由な乱れた剪断流(噴流、後流あるいは混合層など)に適用できるように修正することを考えてみる。自由な乱れた流れが管内のそれと異なる点は、第1に、固体壁に囲まれていないで、外側は乱れていない流体に接しているため、乱れた流れの中にあつた流体粒子は外側に飛び出してしまわないと言う保証がないことである。第2は、固体壁がないために、乱流の状態は横断面から横断面へと性質が変わり、乱流領域は下流に向つて拡つてゆくことである。

第2の問題について：乱れが下流に移つてゆく場合にも、その構造は変化しないで、単に乱れの運動の長さ、時間のおよび速度の尺度が変化してゆくだけで、いわゆる自己保存の状態にあることがよくある。これは、乱れの発生点から十分に下流に於ておこる。このような場合には、風洞の格子の後方の減衰してゆく乱れによる拡散を取り扱つた時のように、代表的な量の尺度を変換することによつて、流体粒子の速度を定常偶然函数におきかえることができる。

したがつて、残された第1の問題を考えてみる必要がある。"管壁の存在は、1つの流体粒子を、その乱流領域内にとどめる"が"自由な乱れた剪断流の場合にも、1つの流体粒子は、乱れた流れの領域内に残っているだろうか"あるいは"乱れた流れの領域から流体粒子群が周囲の乱れていない流体の領域に放出され、その後、乱れの運動に参加しないことが可能であろうか"。

乱れた領域から乱れない領域への脱出の可能性はあるか、どうか。

若し脱出が可能なら、粒子の速度を、簡単な速度と時間の尺度の調整によつて定常偶然函数に変換することは不可能である。

幸い最近の自由に乱れた剪断流の性質についての研究は、このような脱出は起らないことを示唆している。自由に乱れた剪断流は、瞬間的には、不規則で全く秩序のない形の鮮明な境界によつて、その中心部が外側の乱れない領域から選別されている(第4図、第5図)

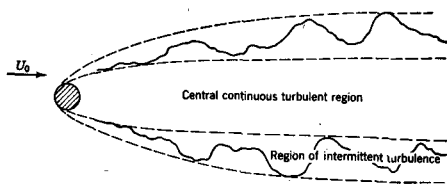
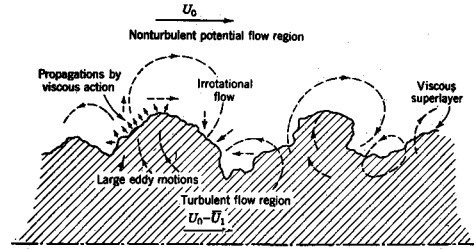


図-4 Instantaneous picture of the wake flow behind a cylinder

渦度は粘性によって中心部から外側領域に拡散するだろうが、と同時に、中心部に於ては渦系は、著しく引き伸ばされ、その渦度は強められる。これが鮮明な境界となつて、外側領域の乱れのない流体の中に突き進んでゆき、乱れのない流体部分を中心部の中に巻き込み混合させて仕舞う。したがつて、中心部の流体粒子が脱出してゆくことはないのである。



図—5 Possible flow pattern in the intermittent boundary region of a plane wake.

このようにして、流体部分が一たび中心領域にあつたとすると、いつまでも、その中にいることになる。このようにして、乱流領域は、外側の乱れのない流体部分を吸収し、長さや時間の尺度を変えながら下流に流れてゆく。以下、この中心部の流体粒子の速度が、どのようにして、定常な偶然函数に変換されるかを考えてみる。

仮定：考えている乱れた剪断流は、定常であつて、仮想的な原点から下流にある異なつた距離 x の各断面に於て、同じ構造をしている。その流れの統計的性質は、単に運動に関する長さ(L)、速度(V)の尺度が違ふだけである。そして

$$L(x) \propto x^p, \quad V(x) \propto x^{-q} \quad (3.5)$$

とする。したがつて、運動の時間の尺度は、 x^{p+q} にしたがつて変化する。

流体微小部分は、下流に流れゆくにしたがつて、その速度 $u(t)$ の統計的性質は、 x の増加に伴つて Euler 流の速度の場合の性質を変えてゆくのに対応して、流れてゆく時間 t にしたがつて変化してゆく。すなわち、この流体微小部分を取りまく周囲の流れは、統計的に相似なのであるから、速度と時間の尺度を適當(Euler, 流に)に調節すれば、 $u(t)$ は定常な偶然函数になる筈である。

U_0 を流れの全領域の移動速度とすれば、変動速度は、 $u(t) - U_0$ であつて、これが考えている統計変数である。

吾々の仮定は、式で表わすと

$$[u(t) - U_0] / \omega(t) = F(\eta) \quad (3.6)$$

である。ここに $F(\eta)$ は、次式で表わされる新しい変数 η の定常な偶然函数である：

$$d\eta \propto dt / \tau(t) \quad (3.7)$$

$\omega(t)$, $\tau(t)$ は時刻 t に於ける流体粒子の速度および時間の尺度である。

(3.6), (3.7)は、Lagrang 流に考えた場合の乱流の相似についての仮定である。よく知られている Euler 流の相似の仮定に類推をとつたものに過ぎない。

(3.5) は Euler 流の形式であるが、これを Lagrang 流に表わすときには、変数 x の代りに流体粒子の移動の平均距離 $\bar{X}(t)$ をとるのが自然である。したがって、(3.5) は

$$\omega(t) \propto [\bar{X}(t)]^{-q}, \tau(t) \propto [\bar{X}(t)]^{p+q} \quad (3.8)$$

となる。ここに $\bar{X}$ は、(3.6) により

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{u}(t) = U_0 + \bar{F}(\eta) \omega(t) \quad (3.9)$$

で与えられる。そして $\bar{F}(\eta)$ は常数である。

(3.6), (3.7) および補助条件式 (3.8), (3.9) は、自由な乱れた剪断流について、吾々が求めているところの変換を定めるものである。

b. 噴流型の流れの中の拡散

この場合には、 $U_0 = 0$ である、(3.9) は (3.8) の力を籍りて、次式を与える

$$\bar{X} \propto t^{1/(1+q)} \quad (3.10)$$

ただし、積分に際し、 $x=0$ に於て流体粒子は放出されたものとしている。

したがって、(3.7) は (3.8) により、比例常数を 1 とおいて

$$d\eta = t^{-(p+q)/(1+q)} dt$$

よく知られているように、Euler 流の運動方程式を用いるならば、相似の仮定は $p=1$ (噴流は直線的に拡る) を与える。

故に

$$\eta = \log t \quad (3.11)$$

流体粒子の平均速度に対する変動速度は、(3.6), (3.8) および (3.10) によつて次の如くなる：

$$\begin{aligned} u(t) - \bar{u}(t) &\propto t^{-q/(1+q)} [F(\eta) - \bar{F}(\eta)] \\ &= t^{-q/(1+q)} f(\eta) \quad \text{とおく。} \end{aligned}$$

$f(\eta)$ もまた定常偶然函数である。そして、粒子の平均位置の周りの位置の変動は次の如くなる：

$$\begin{aligned} X(t) - \bar{X}(t) &= \int_0^t t^{-q/(1+q)} f(\eta) d\eta' \\ &= \int_{-\infty}^{\log t} e^{\eta'/(1+q)} f(\eta') d\eta' \end{aligned} \quad (3.12)$$

減衰しつつある一様な乱れの中の拡散の場合と同じように、前頁の関係からみて、変動がGauss型の確率関数にしたがうと言うことは考え難い。

(3.12)を用いて、流体粒子の統計的分散を定める関係式を求めると

$$\begin{aligned}\frac{dD_x^2}{dt} &= 2 t^{-q/(1+q)} \int_{-\infty}^{\log t} e^{\eta'/(1+q)} \overline{f(\eta)f(\eta')} d\eta' \\ &= 2 t^{(1-q)/(1+q)} \int_0^{\infty} e^{-\xi/(1+q)} R(\xi) d\xi\end{aligned}\quad (3.13)$$

ここに $\xi = \eta - \eta'$ であり、 $R(\xi)$ は $f(\eta)$ の相関関数である。

(3.13)を積分すると、(3.10)によつて

$$Dx(t) \propto t^{1/(1+q)} \propto \bar{X}(t) \quad (3.14)$$

を得る。

c. 後流型の流れの中の拡散

速さが U_0 である流れの中におかれた1つの物体の後流の場合には、 U_0 に対して相対的な流体粒子の速度が統計的に自己保存の法則にしたがっている。(3.9)の右辺に於て U_0 は零ではなく、第2項は小さいので、これを無視すると、次式を得る：

$$\bar{X}(t) = U_0 t \quad (3.15)$$

したがつて、(3.8)により $\omega(t) \propto t^{-q}$ 、 $\tau(t) \propto t^{p+q}$ を得る。これを(3.7)に代入すると、比例常数を1とおいて

$$d\eta = t^{-p-q} dt$$

と得る。Eulerの運動方程式に相似の仮定を用うると、 $p+q=1$ なる関係が求まるので、噴流の場合と同じように、 η と t の間には再び

$$\eta = \log t$$

の関係式が成立つ

流体粒子の速度の平均値の周りの変動は

$$X(t) - \bar{X}(t) = \int_{-\infty}^{\log t} e^{-(1-q)\eta'} f(\eta') d\eta' \quad (3.16)$$

となる。これは噴流の場合の(3.12)に対応するものである。したがつて、前同様にして、縦方向の拡散巾

に対して次式を得る：

$$Dx(t) \propto t^{1-q} \propto [\bar{X}(t)]^p \quad (3.17)$$

(3.5)は、この右辺が後流の巾に比例することを示している。したがって、噴流の場合と同じの拡散巾と剪断層の厚みとの関係が成立つ。

d. 2次元的な自由に乱れた剪断流に於ける横方向の拡散

表題の流れに際して、流体粒子は、縦方向と同じように、横方向にも拡散してゆく。粒子の速度変動は、縦方向のものと同じように、**marked particle** の統計的な縦軸方向の平均位置に於ける断面では、**Euler** 流に考えた速度の統計的構造をもっていて、各断面に於て相似であると考えられる。もちろん、横方向の平均位置は零である。したがって

$$u(t) = \begin{cases} t^{-q/(1+q)} g(\eta) & : \text{噴流型} \\ t^{-q} g(\eta) & : \text{後流型} \end{cases}$$

である。ここに、 $g(\eta)$ は定常偶然函数であつて、 $\bar{g}(\eta) = 0$ である。

1つの**marked particle**の最初の位置から測つた横方向の変位を $Y(t)$ とする。もちろん $\bar{Y}(t) = 0$ である。 $t \rightarrow \infty$ の際の、この変位の分散は、次式によつて定められる：

$$\frac{dD_y}{dt} \propto \begin{cases} t^{(1-q)/(1+q)} \int_0^\infty e^{-\xi/(1+q)} S(\xi) d\xi & : \text{噴流型} \\ t^{(1-2q)} \int_0^\infty e^{-(1-q)\xi} S(\xi) d\xi & : \text{後流型} \end{cases}$$

ここに、 $S(\xi)$ は $g(\eta)$ の相関係数である。

これ等を積分した結果を、(3.14)および(3.17)と比較すれば、いずれの場合にも

$$Dy(t) \propto Dx(t) \quad (3.18)$$

なることを知る。

この結果は、粒子速度の縦方向および横方向の成分を定常偶然函数に変換するための変換式が同型であることに由来する。

Marked particlesが原点から放出される場合に、**marked fluid**の後流を xy 面で切つたときの境界($y=0$ に於ける平均密度のある分数の線)は、 $x = \bar{X}(t)$ に於ける、 $Dy(t)$ に比例する。したがって、**marked fluid**は、次の曲線によつて囲まれる：

$$\begin{aligned} y &\propto x = x^p & : & \text{噴流型} \\ y &\propto x^{1-q} = x^p & : & \text{後流型} \end{aligned}$$

流れの方向に直角な断面内で、 y 方向の拡散は z 方向の拡散に比例するから、marked fluid が連続的に放出される場合には、 x の如何に拘らず marked fluid の後流は、各断面で同一型である筈である。

原点から marked partielees が連続的に放出される場合の x -軸上の marked fluid の濃度を $C_m(x)$ とする。ある横断面に於ける marked fluid の後流の面積は Dy^2 に比例する。この断面を流れる marked fluid の全量は、 x に無関係に一定である。したがって、 $C_m(x)$ は平均流速 $\times Dy^2$ に逆比例する。すなわち

$$C_m(x) \propto \begin{cases} x^{q-2} p = x^{q-2} & : \text{噴流型} \\ x^{-2} p = x^{q-2} & : \text{後流型} \end{cases}$$

となる。

最後に、Euler の運動方程式から、相似の仮定によって定められる p, q の値は次表の通りである：

	円形	平面	混合	円形	平面
	噴流	噴流	層	後流	後流
p	1	1	1	1	1/2
q	1	1/2	0	2/3	1/2

4 Two-particle analysis

Marked fluid の拡散の様子を知るのに、最も簡単な方法は、1つの粒子を捕えて、これを追跡してゆく方法である。これは、前節までに取り扱ってきたところである。もう少し詳しく模様を探り度いと思うならば、2つの粒子を追跡すればよい。すなわち、時刻 t に marked fluid が与えられた空間の2点 $\vec{x}_1$ および $\vec{x}_2$ に同時に見出される確率 $P(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$ と2の marked particles の移動に関する確率密度関数を考えることである。

初め (t_0) に、marked fluid の位置が確定していたとすると、その中に、2点 ($\vec{x}_1, \vec{x}_2$) が同時にある場合に $P(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t_0)$ は1であつて、その他の場合には零である。

marked fluid の容積 (V) は変らないから、 t に無関係に次式が成立つ：

$$\iint P(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 = V^2 \quad (4.1)$$

拡散を表わすのに、移動と変形を夫々別々に欠る上で、 $\vec{x} = \vec{x}_1$, $\vec{y} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ なる2つの独立変数 $\vec{x}, \vec{y}$ を用うるのが便利である。

marked fluid の位置だけを見ようとするときには

$$P(\vec{x}, t) = \frac{1}{V} \int P(\vec{x}, \vec{y}, t) d\vec{y} \quad (4.1)$$

を考えればよい(これは前節までに取り扱ってきたもの)。

変形だけを取り扱うときには

$$p(\vec{y}, t) = \frac{1}{V} \int P(\vec{x}, \vec{y}, t) d\vec{x} \quad (4.2)$$

を用いるのが便利である。ただし

$$p(\vec{0}, t) = 1, \quad \int p(\vec{y}, t) d\vec{y} = V \quad (4.3)$$

$P(\vec{y}, t)$ の意味は、次の通りである：1回の実現に際して、時刻 t に、marked fluid 中の1点 M からのベクトル $\vec{y}$ の端がまた marked fluid 中にあるような実現を取り出してみる。しかるとき、無数に実現を繰り返すとき、平均的に全容積 V のある割合の部分だけに、上述の M 点が考えられる。このような割合が $p(\vec{y}, t)$ なのである。

$Q(\vec{x}, \vec{y}, t/\vec{x}, \vec{y}, t_0)$ は t_0 に $(\vec{x}, \vec{x}+\vec{y})$ にあつた2つの流体粒子が、 $t-t_0$ の間に、 $(\vec{x}, \vec{x}+\vec{y})$ に移る確率密度函数とすると

$$P(\vec{x}, \vec{y}, t) = \int P(\vec{x}', \vec{y}, t_0) Q(\vec{x}, \vec{y}, t/\vec{x}', \vec{y}, t_0) d\vec{x}' d\vec{y}'$$

が成立つ、これは one particle analysis に於ける(2.1)の関係に対応するものである。

$Q(\vec{x}, \vec{y}, t/\vec{x}, \vec{y}, t_0)$ を全ての $\vec{y}$ について積分すれば、1つの粒子についての変位確率密度函数が得られる。他方、 $\vec{x}$ について積分すれば、新しい函数

$$q(\vec{y}, t/\vec{y}, t_0) = \int Q(\vec{x}, \vec{y}, t/\vec{x}, \vec{y}, t_0) d\vec{x} \quad (4.5)$$

と得る。これは、1対の粒子の、位置には関係なく、分離間隔に関する統計的性質によつて決められる。

(4.2), (4.4) および (4.5) から、次の関係が得られる：

$$p(\vec{y}, t) = \int p(\vec{y}, t_0) q(\vec{y}, t/\vec{y}, t_0) d\vec{y} \quad (4.6)$$

$q(\vec{y}, t/\vec{y}, t_0)$ は、単に時刻 t_0 に分離間隔が $\vec{y}$ であつた1対の粒子が、時刻 t にはその分離間隔が $\vec{y}$ になっている確率密度函数である。

この函数は、古く L. F. Richardson によつて "distance neighbour function" とて導入されたものであるが、それが乱流の相対拡散作用の適切な表現尺度になっていると言う意味では、余り評価されていなかった。

2つの粒子の分離間隔が乱れのエネルギーの渦の大きさに較べて小さいが、Reynolds 数は充分に大

きい場合について考えてみる。

このような場合には、考えている乱れについて普遍平衡理論の結果を用うることができる。 $q(\vec{y}, t/\vec{y}_0, t_0)$ は $\vec{y}, \vec{y}_0$ については等分性をもった函数であり、 $t-t_0$ の函数である。そして、パラメーター ν と ε (単位質量毎のエネルギーの粘性消失の割合) を通してのみ乱れに支配される函数である。

2つの粒子の間隔の自乗平均は、

$$\overline{y^2} = \int y^2 q(\vec{y}, t/\vec{y}_0, t_0) d\vec{y}$$

であり、上述のことから、次元的考察によつて

$$\frac{d\overline{y^2}}{dt} = \varepsilon \tau^2 \times \text{func}(\vec{y}_0 / E^{1/2} \tau^{3/2}, \tau E^{1/2} / \nu^{1/2}) \quad (4.7)$$

となる。ここに、 $\tau = t - t_0$ および $y_0 = |\vec{y}_0|$ である。

Reynolds 数が充分に大きい場合には、現象は粘性消失には無関係になるから、(4.7) の右辺は ν を含まない筈である。すなわち、 $\text{func}(\vec{y}_0 / \varepsilon^{1/2} \tau^{3/2}, \tau \varepsilon^{1/2} / \nu^{1/2}) \rightarrow \text{func}(\vec{y}_0 / \varepsilon^{1/2} \tau^{3/2})$ になる。このようなとき、更に、

i) 若し、 τ が充分小さく、2粒子の速度は、その向ほぼ一定であると考えられる場合には、 $\frac{d\overline{y^2}}{dt}$ は τ に比例する筈であるから、次の関係式を得る：

$$\frac{d\overline{y^2}}{dt} \propto \tau (\varepsilon y_0)^{3/2} \quad (4.8)$$

ii) 若し、 τ が充分大きくて、2粒子の初めの間隔 y_0 のその後の相対運動への影響が失われて仕舞うようなときには、次の関係が成立つ：

$$\frac{d\overline{y^2}}{dt} \propto \varepsilon \tau^2 \quad \text{あるいは} \quad \frac{d\overline{y^2}}{dt} \propto \varepsilon^{1/2} (\overline{y^2})^{3/2} \quad (4.10)$$

(4.10) を (4.8) に較べれば、よくわかるように、ii) の場合には、相対拡散は加速度的に増加してゆく。これは、 τ が増加すると、相対速度を支配する渦の大きさの範囲が増大し、離れ方が急速になることを物語っている。

2つの粒子の相対速度 $\vec{v}(t)$ (t の偶然函数) の自乗平均は、初めは t に比例して増加してゆくが、2粒子の間隔が次第に離れてゆき、その速度間に統計的に相関がなくなると、遂に $2\overline{u^2}(t)$ になる。

若し、このような $\overline{v^2}$ の増加がなければ、 $d\overline{y^2}/dt$ は τ に比例し、その後は、増加率は減少してゆく (1つの粒子の拡散の場のように)、いまは $\overline{v^2}$ が増加してゆくために、 τ に比例する以上の割合で増加してゆくのである。

Richardson (1926) は、気象学的な拡散の観測から (4.11) の結果を得ているが、彼の資料は、理論の最初の仮定 ($\overline{y^2}$)^{1/2} が乱れの尺度に較べて小さい) に該当していない。

一般理論のもう一つの応用として、 $\overline{y^2}$ が極めて小さい場合については次節に述べることにする。

5 線素および面素の変形

流体の の変化の割合が一樣であると見做すことのできる小さな範囲に、2つの粒子がある場合を考えてみる。このためには $\overline{y^2} \ll (\nu^3 / \varepsilon)^{1/2}$ でなければならない。しかるときには、2粒子間の間隔に関する確率密度函数 $q(\vec{y}, t/\vec{y}_0, t_0)$ は、次の変換式に従う：

$$q(\vec{y}, t/\vec{y}_0, t_0) = \alpha q(\alpha\vec{y}, t/\alpha\vec{y}_0, t) \quad (5.1)$$

ここに、 α は任意常数である。

他方、時刻 t に於ける2つの粒子の間隔は

$$y_i(t) = y_i(t_0) + \int_{t_0}^t y_j(t') \frac{\partial u_i(t')}{\partial x_j} dt' \quad (5.2)$$

で与えられる。

Reynolds数は十分に大きいと仮定する。 $t - t_0$ が充分小さい間は、 $\vec{y}$ の方向は、その最初の $\vec{y}_0$ の方向につよく支配される。しかしながら、時間が充分たつと (普遍平衡理論によれば (ν/ε) の程度) 統計的に、この従属性は消えて等分性になる。

$\vec{y}(t)$ の大きさ $y(t)$ について考えると、(5.2) によって

$$\frac{1}{y(t)} \cdot \frac{dy(t)}{dt} = \ell^i(t) \ell_j(t) \frac{eu_i(t)}{\partial x_j} \quad (5.3)$$

を得る。ここに $\vec{\ell}(t)$ は時刻 t に於ける2粒子間の距離の方向の単位ベクトルを表わしている。

(5.3) の右辺は、 $t = t_0$ に於いて、その平均値は零である ($\vec{\ell}_0$ が決っているから)。時間の経過するに従って変化してゆき、最後には、或一定値に収斂してゆく。何んとなれば、 $\vec{\ell}_0$ の影響がなくなると、これは定常偶然函数になるであろうからである。

他方吾々は、経験的に、乱れの中にある2つの粒子は、常に離れてゆく傾向のあることを知っている。したがって、 $t - t_0 \rightarrow \infty$ の際に

$$\frac{1}{y(t)} \cdot \frac{dy(t)}{dt} \rightarrow \xi \quad (5.4)$$

となる。ここに ξ は正の常数である。普遍平衡理論によれば、 ξ は $(\varepsilon/\nu)^{1/2}$ に比例すると考えられる。

(5.1)によれば、 $\vec{y}$ の統計的性質 $p(\vec{y}, t)$ は、 $\vec{y}$ の大きさ y には関係なく、したがって総ての $\vec{y}$ について相似である。又一方 $p(\vec{y}, t)$ は $\vec{y}$ について等方性をもっている。したがって、(5.3)の右辺は、 $y(t)$ には統計的に無関係である。故に、(5.3)に $y(t)$ を乗じて平均をとれば知られるように、(5.4)は

$$\overline{\frac{1}{y(t)} \cdot \frac{dy(t)}{dt}} = \frac{1}{\overline{y(t)}} \cdot \frac{d\overline{y(t)}}{dt} = \xi$$

となり、積分して

$$\overline{y(t)} \sim y(t_0) e^{\xi(t-t_0)} \quad (5.5)$$

を与える。

(5.5)は、流体の同一の実質粒子からなる微小線素の長さに関するものである。一般に有限の長さの流体粒子からなる線分は、これを構成している微小実質線素の集りと考えられるので、その全長が乱れの性質が変わらない領域にある限りに於て、この実質線分も(5.5)に従って伸びてゆく。すなわち、全長を $L(t)$ とすると

$$\overline{L(t)} \sim L(t_0) e^{\xi(t-t_0)} \quad (5.6)$$

である。流体内の流体粒子からなる線分は指数的に時間と共に増加してゆく。

次に、流体粒子からなる微小実質面積を考えてみる。その面積を $A(t)$ とし、その垂線の方向の単位ベクトルを $\vec{m}$ とする。

いま仮に、 $A(t)$ と微小垂直距離 h だけ離れ、これに平行な実質面素をとってみると、これ等によって囲まれた容積は不変である。 h の変化は、その瞬間に於て(5.3)の形で与えられるから、 $A(t)$ の変化に対して、次式を得る：

$$\frac{1}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt} = -m_i(t) m_j(t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (5.7)$$

前同様にして

$$\overline{\frac{1}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt}} = \frac{1}{\overline{A(t)}} \cdot \frac{d\overline{A(t)}}{dt} = \xi + \eta \quad (5.8)$$

ここに、 η は $(\varepsilon/\nu)^{1/2}$ に比例する常数である。

かくて、 $t-t_0 \rightarrow \infty$ のときに

$$\overline{A(t)} \sim A(t_0) e^{(\xi+\eta)(t-t_0)} \quad (5.9)$$

このように、流体の実質部分からなる線分あるいは面積は、時間と共に指数的に増加してゆくことを知る。このことは、次のように、別の立場から確めることができる。

最初に、marked fluid は直径 $2a$ の球形であつたとする。これがどのように形を変えてゆくかを調べてみる。 $2a$ は小さくて、それが占める領域内では、続いて起る変化を考える時間内に於て、速度勾配は、一様としても差支えないものとする。しかるときは、marked fluid は、いつも楕円形をしていることになる。その主軸は、 $2ae_1(t)$, $2ae_2(t)$, $2ae_3(t)$ であつて、 $e_1 \geq e_2 \geq e_3$ とする。もちろん $e_1 e_2 e_3 = 1$ である。

$\partial u_i / \partial x_j$ は定常偶然函数であり、 $\frac{1}{e_1} \frac{de_1}{dt}$, $\frac{1}{e_2} \frac{de_2}{dt}$, $\frac{1}{e_3} \frac{de_3}{dt}$ も前同様に、marked fluid が最初にあつた位置の影響が消失するようになると、定常偶然函数となるであらう。したがつて、 $\frac{1}{e_1} \frac{de_1}{dt}$, $\frac{1}{e_2} \frac{de_2}{dt}$, $\frac{1}{e_3} \frac{de_3}{dt}$ は漸近的に一定値に収斂する。

前同様にして、これ等は、 $t - t_0 \rightarrow \infty$ の際に

$$\frac{1}{e_1} \sim e^{\xi(t-t_0)}, \quad \frac{1}{e_2} \sim e^{\eta(t-t_0)}, \quad \frac{1}{e_3} \sim e^{-(\xi+\eta)(t-t_0)} \quad (5.10)$$

を与える。

流体運動の歪の変化の割合の主値の平均値、 α, β, γ は $\xi, \eta, -(\xi+\eta)$ と同程度のものと考えられる。計算の結果は、

$$\xi = 0.43 (\varepsilon/\nu), \quad \eta = 0.12 (\varepsilon/\nu) \quad (5.11)$$

である。

初めに球であつた流体実質部分は、やがて楕円体となり、主軸の1つは最も著しく伸び、次のものは、これより低い割合で伸びる。最も短いものは、縮まる一方である。したがつて、楕円体は漸近的に、流体実質からなる総ての直径面は次第に平行になつてゆき、極めて扁平な細長い実体となつて抐つてゆくのである。

参 考 文 献

一般的な水工学に関係ある乱流現象に関する文献に就いては、昭和42年度(第4回)水工学夏期研修会に於ける日野幹雄教授(東工大)講演に示された文献集を参照されたし。

以下、今回のテキストに直接関係あるもののみを挙げる。

Taylor, G. I.

(1921), Diffusion by continuous movement. Proc. Lond. Math. Soc.

20, 196.

- (1935), Statistical theory of turbulence. V. Diffusion in
a turbulent air stream. Proc. Roy. Soc. A, 151, 465.
(1954), The Dispersion of matter in turbulent flow through a
pipe. Proc. Roy. Soc. A, 223, 446.

Batchelor, G. K.

- (1949), Diffusion in a field of homogeneous turbulence.
I. Eulerian analysis. Aust. F. Sci. Res. A, 2, 437.
(1952), Diffusion in a field of homogeneous turbulence.
II. The relative motion of particles. Proc. Camb. Phil. Soc.
(1952), The effect of homogeneous turbulence 48, 345.
on material lines and surfaces. Proc. Roy. Soc. A, 213, 349.
(1958), Diffusion in free turbulent shear flows.
J. Fluid Mech. 3, 67.

Batchelor, G. K., Binne, A. M. and Phillips, O. M. (1955).

The mean velocity of discrete particles in turbulent flow
in a pipe. Proc. Phys. Soc. B, 68, 1095.

このテキストの主体となつてゐるもの：

Batchelor, G. K. & Townsend, A. A. (1956)

Turbulent diffusion. Surveys in mechanics. 352.
Camb. Univ. Press.