

境 界 層

九州大学応用力学研究所教授 岡 部 淳 一

§ 1 境界層理論

境界層の理論は1904年 Heidelberg で開かれた第3回国際数学会議で、Prandtl の試みた次の講演に始まる：“Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung”（全集、第2巻、頁575-584、Springer-Verlag、1961）。その冒頭はおよそ次のように述べられている。“古典流体力学の取り扱う処は主として完全流体の運動である。粘性流体の運動方程式は、物理的な観察によってその正しさが充分確かめられているとはいうものの、その解としては、例えば Lord Rayleigh の与えた1次元問題を除けば、流体の慣性が無視されるか、あるいは少なくとも何の役割も果たさない場合だけしか見出だされていない。摩擦と慣性の両方を顧慮した2次元および3次元問題の解はまだ得られていないのである。その理由は実にその微分方程式のもつ厄介な性質に依る。この方程式はベクトル記号を使うと次のように書かれる。

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) + \nabla (\Omega + p) = \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (1.1)$$

ただし $\vec{v}$ は速度、 ρ は密度、 Ω は流体に働く body force の potential、 p は圧力、 μ は粘性係数である。... この方程式から容易に次のことがわかる。すなわち、速度が充分小さく、またその変化が充分緩やかな運動では、 ρ にかかる項は他の項に比べていくらかでも小さくなり、したがってその場合慣性の影響を無視しても充分よい近似が得られる。逆にまた非常に速い運動では、 $\vec{v}$ について2次の項 $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ （位置の変化による運動の変化）が非常に大きくなり、摩擦の作用 $\mu \nabla^2 \vec{v}$ は完全に副次的となる。工学で問題となる流体運動はほとんど後者である。したがってこの場合、あっさり完全流体の運動方程式を利用することは一応尤もなことではあるが、しかし、この方程式の解が大抵の場合経験と全然合わないことはよく知られている。ここでは理論によれば抵抗を受けることなく動くはずの Dirichlet の球（完全流体の中を一樣な速度で運動する球）を指摘するに止めよう。”

Prandtl がここに挙げたのは一般に D'Alembert の背理（G. Birkhoff, Hydrodynamics, p. 10 -, Dover, 1955）と呼ばれるものの1例である。すなわち、“無限に広がった完全流体の中を、一樣な速度で運動する物体に働く抵抗は零である。”我々の経験と矛盾するこの定理は、実在流体の運動が、遅い運動の場合はもちろん、摩擦力の影響が一応2義的と見なされる速い運動の場合でさえも、少なくとも抵抗に関係のある問題については、完全流体の運動との間に越え難い溝をはさんでいることを示すものに他ならない。完全流体の運動の理論（特にその古典的部分）に関しては、18世紀以来応用数学の1分野として美しい体系が作られ、また一方緩やかな粘性流体の運動の数学的な研究は、既に古く Stokes、

Oseen などによって始められ、或程度まで実験と一致する結果が得られている。結局残された問題は慣性の項の優越する速い運動であって、それを解明しようと試みるのが境界層の方法であり、20世紀の新しい流体力学はここに始まったといっても言い過ぎではないように思われる。

境界層の理論はドイツの Prandtl に始まり、その門下に Blasius, Hiemenz などが輩出するにおよんで、その周囲にいわゆる Göttingen 学派を作った。Durand 編 Aerodynamic Theory に寄稿された Prandtl の粘性流体論の後半は、その一門の業績を以て埋められている。門下生によって次々に発表された論文を、後年に至って、ただ適当な順序に排列することによって、一篇の著作がおのずから生れたということは Prandtl の学問的な見通しのよさを示すものに他ならないであろう。Schlichting の大著 Grenzschicht-Theorie (初版1951、第5版1965) はその学派の金字塔ともいえる。また一方1921年には von Kármán によって重要な寄与(境界層の運動量理論、§8参照)がなされた。彼がその後米国に渡るにおよんで、彼の指導の下に米国でも理論的および実験的な研究が花々しく幕をあげ、特に第2次大戦後は境界層理論の応用の分野で世界の学界の主導権をとるに至った。一方また英国では Lamb が古典流体力学の総決算ともいふべき大著 Hydrodynamics (Cambridge University Press、初版1879、第6版1932)を公にしたのを承けて、いわゆる近代流体力学は Taylor によってその第1歩が踏み出された。Goldstein の編集になる Modern Developments in Fluid Dynamics 上下2巻(1938)は、その当時までで得られていた境界層の知識の集大成であって、現在の立場から見直せば、新たに補足すべき点の多いことは言うを俟たないけれども、一方誤りとして棄てるべき処はほとんど見当たらない点で、我々を驚かせるものがある。その後の発展を取り入れて編纂された改訂版は、Fluid motion Memoirs という全く別の叢書として現在出版が進行中である。

翻って、我が国の境界層の研究は航空機に関係した研究者によって先鞭がつけられたようである。その後、境界層理論によって代表される近代流体力学の成果は、機械工学、土木工学の分野にも採り入れられ、それに関連した研究論文の数では、現在諸外国と肩を並べるに至った。ただしそれぞれの研究が統一総合されて、上記諸外国に見られるようなまとまった体系をなすまでには至っていないように見受けられるのは残念というべきであろう。

小文は境界層理論と普通に呼ばれている分野のうち、その最も基礎的な部分のみを概説したものである。ただ準備に充分の時間を割くことができなかつたため、極めて不満足な解説に止まったのは慚愧にたえない。小文の前半に対しては主として Goldstein, Modern Developments in Fluid Dynamics, vol. 1を、後半には主として Schlichting, Grenzschicht-Theorie を参照する処が多かった。ここにこれらの編著者に敬意を表する。巻末に、本文と直接関係のある範囲内で一般的な参考書を掲げた。また最小限の参考論文と若干の成書(境界層理論と直接関係のないもの)とは本文中に示した。

§ 2 境界層

実在流体（いわゆる *real fluid* を以下このように呼ぶ）の中に置かれた物体の周りの流れを観察してみよう。流体の粘性 μ が小さく、流れの速さ（代表として、一般流、すなわち物体から遠く離れてその影響が消滅したと見なされる点での流速をとる） U が大きいとき、言い換えると、その中に置かれた物体を代表する長さ、球ならばその直径、を d と書いて、 U 、 d 、 μ 、および流体の密度 ρ から作られる無次元量 $Ud\rho/\mu$ 、または $\mu/\rho = \nu$ と置いて Ud/ν 、が大きい場合には、物体のうしろにできる後流の領域を除けば、流れの速さは表面のすぐ近くまで大体 U と同じ程度の大きさであり、表面のごく近くではじめて速度が急に減少することが実験的に知られている。特に流線形の物体の周りの流れでは、物体のごく近くを除いて、流線図も速度分布も完全流体の *potential flow* として計算されたものとほとんど完全に一致することが、種々の場合に確かめられている。なおここでレイノルズ数 Ud/ν が、慣性力 ρU^2 と粘性力 $\rho \nu U/d$ との比として与えられることに注意しよう。すなわち、レイノルズ数が大きいことは慣性力が粘性力に比べて大きいことを、レイノルズ数が小さいことはその逆のことを意味するのである。しかしながらいちいち断わらないが、小文で取り扱うのはレイノルズ数がかなり大きい流れだけである。

一方実在流体が物体の表面で満たすべき条件を決定することは、長い間困難な問題とされていたのであるけれども、現在実的な目的のためには、“固体に直接接触している実在流体は固体との間に相対速度を持たない”という極めて簡単な条件で充分であることが確立された。結局我々がいろいろな観察によって知り得たことは、流体が物体の表面ではそれに固着し、物体を離れれば完全流体の理論の与える速度に急速に近づいてゆくということである。

そこで、はっきりした境界をつけることのできないのはもちろんであるが、物体の周りの流れの場合には、大まかにいって3つの区域のあることがわかるであろう。その1は物体の表面に接した部分、そこでは表面に平行な速度成分を u 、外向きの法線を n として $\partial u / \partial n$ が非常に大きく、それ自身では非常に小さい μ も剪断応力 $\tau = \mu \partial u / \partial n$ としては慣性力に匹敵するだけの大きさを持ち、流れに本質的な影響を与え得るのである。物体表面のごく近くで、速度勾配の大きいこのような領域を境界層と呼ぶ。第2は境界層の外側、そこにはもはや大きな速度勾配は無く、粘性の影響はしたがってほとんど現われず、流れは大体完全流体の *potential flow* と考えてよい。第3に物体の境界層が1つに合流して、物体の後方に流れ去る領域がある。これを後流という。いわゆる流線形の物体ではこの後流の幅は上下（および左右）から集まってくる境界層の厚さの程度であり、極めて小さいのであるが、そうでない物体では、そのうしろに大きい渦領域ができて、後流の幅は境界層の厚さよりも遙かに大きくなる。このような物体を *bluff body* と呼ぶ。

次に、非常に薄いと繰り返し述べた境界層が、実際にはどの程度の厚さのものであるかを確かめるために、次のような簡略算を行なってみよう。静止した液体の中で、 x 軸の正、負の方向へ無限に延びる平板を、時刻 $t=0$ 以後、突然 U という一定の速さで x の負の方向に動かし続ける場合を考える。このとき板の面から少し離れた所の流体は、すべてほとんど静止しているであろうから、板に相対的には U の速さで x

の正の方向に流れ去って行く。ただ、板に直接触れている流体粒子だけにはそれが許されない。すなわち前に述べたように、これらの粒子は板と共に x の負の方向に U の速さで引かれて行く。模型的に誇張していうと、動き始めの瞬間には、板の面に吸いつけられたように並んだ1列の粒子の側を、それ以遠の粒子が U という有限の速さで滑ってゆくことになる。このことを我々は $t=0$ で板の面に渦の層 vortex sheet があるとか、あるいは渦度 vorticity がそこに集中しているとかいうのである。しかし1瞬間板の表面に集中していた渦度は、直ちに拡散を始める。すなわち1つには流体の持っている粘性によってぼかされてゆき、2つには同時にまた対流によって周囲の流体と共に板の外側を流れて行くのである。

数学的に表わすと次の通りである。まず、(1.1)の x 成分だけを取り出して、

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad .$$

ここに、 y は x 軸に垂直な座標、 u, v は $\vec{v}$ のそれぞれ x, y 成分。また流体実質部分に働く body force を無視し、現象が x 軸に沿って一様であることを考慮して、 x に関する微分はすべて零と置いた。更に v が非常に小さいと仮定して、左辺第2項を省略すれば、次の方程式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad . \quad (2.1)$$

ここで熱伝導論の知識を応用すると、我々の求める解は次の形で与えられる。

$$u = -U + \int_0^y \frac{U}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-y^2/4\nu t} dy \quad . \quad (2.2)$$

(2.2) が実際に境界条件

$$\left. \begin{array}{ll} t=0 & \text{で到るところ} (y=0 \text{ を除く}) \quad u=0, \\ y=0 & \text{で常に} \quad u=-U, \\ y \rightarrow \infty & \text{で常に} \quad u=0, \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

と方程式(2.1)とを満たすことは直ちに確かめることができるであろう。(2.2) はまた次のように書き直すこともできる。

$$u = -U \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right\} \quad . \quad (2.4)$$

ここに Φ は誤差関数である。

この例と、正の x 方向への定常な流れの中に置かれた半無限平板 ($y=0, x \geq 0$) に沿って発達する

境界層の問題とを結びつけるために、次のように考える。前の例で現象は x に関係しないから、 x のどの断面をとってもよいのであるが、 $t=0$ (動き始め) の瞬間に対応するのは、後の問題で流れが板の前縁に突き当たって、そこに強い vortex sheet を作った瞬間である。また $t=0$ から $t=t$ までの時間に、板は x の負の方に $-Ut$ だけ動いているのであるが、 $t=t$ における速度分布 (2.4) は、流れが板の前縁から右の方へ $x=Ut$ で与えられる長さ x だけ進んで示す速度分布と対応する。すなわち (2.4) の t の代わりに x/U を入れると、半無限平板に沿う速度分布は次の式で近似される。

$$u/U = \Phi\left(\frac{y}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right). \quad (2.5)$$

誤差関数の数表を参照すれば、 $u/U=0.99$ に相当する $\sqrt{U} y / 2 \sqrt{\nu x}$ の値は大約 1.72 であるから、境界層の厚さを δ と書けば

$$\delta = 3.4 \sqrt{\nu x / U} \quad (2.6)$$

が得られる。そこで今 $\nu = 0.01007 \text{ cm}^2/\text{sec}$ (20°C の水)、 $U = 10 \text{ cm/sec}$ 、 $x = 10 \text{ cm}$ という値を仮定すれば $\delta = 0.34 \text{ cm}$ となる。これを以て、境界層の厚さ (または薄さ) に対して大体の了解を得ることができるであろう。

以上の議論には粘性が分子粘性 μ だけであることが暗黙のうちに仮定されていた。しかしこの仮定はいつも成り立つとは限らない。しかしその前に、我々は乱れた流れ (乱流) について触れなければならないであろう。

§ 3 乱流境界層

流体が真直な円管の中を流れるとき、理論的にはいわゆる Hagen-Poiseuille の流れが現われることはよく知られている。すなわち、おのおのの流体粒子は管の軸に平行な直線の上を運動し、圧力勾配は管の長さに沿って一定で、平均速度に比例し、各断面の速度分布は放物線形を成す。実際レイノルズ数があまり大きくないときには、管の入口附近を除いて上のような流れの実現されている事が確かめられている。管の中を流れる水の中に、その運動を乱さないよう上手に着色液のフィラメントを入れてやると、そのフィラメントは 1 直線に下流へ延びて行き、ただ拡散によって極めて徐々に広がるだけである。しかし流れの速度を徐々に増して行くと、遂にこのような直線運動が突然破壊される段階がやってくる。すなわちそのとき着色液のフィラメントは周囲の水と混合して、管の内部は全体にわたって一様に色づき始める。仔細に調べてみると、流れは決して管軸方向の直線運動ではなく、各断面上で 1 点から他の点へ移る不規則な運動を行ない、絶え間なく変動していることがわかる。最初の段階の規則正しい流れと、それが破壊されて生じる不規則な流れとをそれぞれ層流および乱流と呼ぶ。着色液のフィラメントによる管内の流れの観察は前世紀末 Reynolds によって始めて試みられた有名な実験である。

層流の破壊されるレイノルズ数（いわゆる臨界レイノルズ数） $u_m d/\nu$ の値は Reynolds の実験では大体 1.3×10^4 であった。ここに u_m は平均流速、 d は管の直径、すなわち流量を Q とおけば $u_m \pi d^2/4 = Q$ という関係がある。ただし、これは管の入口を滑らかにしたときの値であって、入口で流れに攪乱を与えてやれば、臨界レイノルズ数は約 2,000 まで下がることが知られている。このように臨界レイノルズ数は流れにもともと存在する乱れによってかなりの差異があり、その乱れをできるだけ小さくするように入念な注意が払われると、 1.3×10^4 よりもかなり高い値が得られる。例えば Schiller は 2×10^4 (1922)、Ekman は 4×10^4 (1910) に到達した。そして流れにもともと含まれる乱れをもし完全に除き去ることができれば、臨界レイノルズ数は限りなく大きくなるものと想像される。しかし一方これに反して、それ以下のレイノルズ数では、始めにどのような乱れを与えておいても、それが次第に減衰して遂には層流になるという、いわゆる“臨界レイノルズ数の下限”は確かに存在するように思われ、その値は大体 2,000 と推定されている。

以上は管の中の流れについて述べたのであるが、レイノルズ数が大きくなると境界層内の流れも遂には乱れる。乱れた境界層のうしろに作られる後流もまた当然乱れてくる。我々の周囲に見慣れている流れはむしろ乱れているのが普通である。そして応用の立場からすると、そのような乱れた流れについて我々が問題にするのは、各点の時々刻々の物理量よりも、むしろその時間または空間平均であることの方が普通である。この事については後に更に詳しく述べるつもりである。尖端をナイフエッジに尖らせた平板を、乱れのかかなり少ない流れ U の中に平行に置くと、境界層の厚さを δ と書いて $U\delta/\nu \approx 3,000$ の点附近で、層流から乱流への遷移が起こることが知られている。一方また δ は板の尖端から測った距離 x の函数として、(2.6) またはもっと正確と思われる関係 $\delta = 5.83 \sqrt{\nu x/U}$ (von Kármán および Pohlhausen による) で与えられるので、これを上の δ に入れると、 x に関する臨界レイノルズ数 $Ux/\nu \approx 3 \times 10^5$ が得られる。管の中の流れと同じく、この場合にも、臨界レイノルズ数は主流の中にもともと含まれた乱れや板の前縁の状況によって大いに違ってくる。（水槽による船体模型の抵抗試験で、船首に砂粒を貼りつけることによって境界層を乱すのはよく知られた処である。）実験的には臨界値として $U\delta/\nu$ に対しては 1,650 から 5,750 が、同じく Ux/ν については 9×10^4 から 1.1×10^6 が得られている。もちろん層流から乱流への遷移はある一点で爆発的に起こるものではなく、普通ある幅をもった遷移領域の中で徐々に行なわれるようである。（もっと詳しくいうと、臨界レイノルズ数の近所で、流れはあるときは層流へ次の瞬間乱流へと揺れ動くものようである。）それで一般に物体の周りの境界層は上流で層流、下流は乱流となり、その中間に多少の過渡領域が存在する。レイノルズ数を増せば層流の区域は次第に縮少して、乱流領域が上流にさかのぼる。

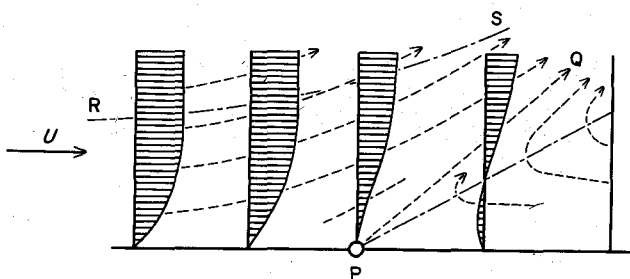
層流から乱流への遷移が起こると、流れの模様はかなり変わってしまう。例えば境界層の厚さは層流の場合よりもずっと急激に発達して行くし、平板に沿う摩擦応力にしても、層流の場合には流速 U の 1.5 乗に比例するのに反し、乱流の場合には板の長さを L として $UL/\nu = 3 \times 10^6$ 程度までは U の 1.8 乗に比例することが半実験的に見出だされている。造船学で有名な Froude の実験 (1872) では、 U の

1:8 2 5 乗に比例するという結果が得られている。また境界層内部の速度プロファイルも、層流の場合と乱流の場合とでは著しく異なって、乱流境界層の速度プロファイルは層流の場合よりも遙かに平坦である。すなわち見かけ上物体表面で零でない値を持ち（滑り速度）、なだらかに境界層外縁の値に近づく。

§ 4 境界層の剝離

物体の表面の圧力が流れの方向に高くなっている場合に（この時圧力勾配に逆らって流れるということがある）、境界層が特別の現象を起こすことがあるので、それについて述べることにしよう。流れの中に置かれた肥えた物体 bluff body の背後に大きな渦ができてるのは、我々が日常しばしば目にする処である。渦領域の境界の流線を逆にたどって行くと、結局それは前の岐点から物体表面に沿って流れて来た流線が、或点で物体を離れて流体の中を延びて来たものであることを認めるであろう。剝離 separation というのはまさしくそのような現象に対して名付けられた言葉である。

境界層は非常に薄いので、或断面に働く圧力は壁に直角な方向に大体一様な大きさを持っていると見なしてよい（このことは後に証明する）。したがって、或断面の圧力勾配も境界層の内部に一樣に作用すると見てよいのである。今境界層内部の流体粒子の運動を見ると、それは次に述べる3つの原因で定められる。第1に、粘性の作用によって、その下の流体のためにうしろへ引き止められる。第2に、同じくその上の流体のためにまえへ引きずられる。第3に、圧力勾配の向きによって押しもどされたり、押しやられたりする。さて、この粒子が物体の前の岐点から出発して、物体表面に沿って下流へ進んで行く途中のことを想像してみよう。速度分布から大体了解されるように、初めのうちは（特に加速領域ではそうである） $\partial u / \partial y$ （ u は物体表面に沿う速度成分、 y は表面に立てた法線）が境界層の底部で大きいので、上の第1の原因による減速は、第2の原因による加速よりも強い。したがって粒子は粘性が働かない場合（完全流体。この場合でも第3の原因は同じく作用する）にその位置で持つべき運動量よりも小さい運動量しか持つことはできないであろう。圧力最低の点を通り過ぎて、逆向きの圧力勾配が支配する区域にはいれば、境界層の底部がますます減速される結果として、遂には上の層の $\partial u / \partial y$ がかえって下の層の値より大きく、粒子は粘性力によってむしろ加速される傾向になるのであるが、この辺での逆向き圧力勾配はますます甚だしく、粒子は後の岐点まで達せずして途中で停止してしまうのである。そしてあたかもそれによって生じた空所を埋めるかのように、後の岐点から逆向きの圧力勾配によって壁に沿ってゆっくりした逆流が起り、前から来た流れは壁から剝れてこの逆流の上を進んで行く。この



第1図 剝離

P は剝離点、PQ 剝離した流線、RS 境界層の外縁

辺の事情は図によって了解していただきたい。もちろん逆向きの圧力勾配がありさえすれば、いつでもこのような事態が発生するというわけではない。圧力勾配が充分緩やかな場合には、前半の順の圧力勾配の場で獲得した運動量を完全には失うことなく、事実上物体の後端に到達する可能性もあるのであって、このような物体を普通流線形と呼ぶことは周知のことであろう。

剝離の現象は流体の持っている energy の授受に注目すれば、もっと理解し易いであろう。説明の便利のために完全流体との対応から話を始めよう。完全流体の potential flow に対して Bernoulli の定理が成り立つことはよく知られている。すなわち、岐点（まえおよびうしろ）での圧力を p_0 として

$$p + \frac{1}{2} \rho q^2 = p_0, \quad (4.1)$$

ただし p 、 q は物体表面上任意の点での圧力と速度との大きさである。この定理は元来運動方程式を積分して得られたものであり、したがって energy 方程式である。実際 (4.1) は、流体の粒子に働く圧力差によってなされる仕事が、その粒子の運動 energy の増加に等しいということに他ならない。物体の表面に沿って流れる粒子は“前の岐点”Aから最低圧力点Bまでは圧力の降下によって加速され、Bから“後の岐点”Cまでは逆に圧力の上昇によって減速される。Cでの圧力もAでの圧力も共に p_0 に等しいので、この粒子がCに達したときちょうどすべての運動 energy を失って、それを全部圧力に変えてしまうのである。

しかし境界層の中では粘性の作用を省略するわけにはゆかない。すなわち energy の1部は粘性によって絶えず熱となって散逸し、機械的 energy は保存されないのである。そこでBを通過する時の運動 energy は、potential flow の場合に比べて既に減っているのに、粒子は到底Cまでたどり着くことはできず、BとCとの中間のどこかで立ち止まることになる。その隙間を埋めるように、高い圧力の支配するCから圧力勾配によって壁に沿ってゆっくりした流れが起こり、前から来た流れは物体の表面を剝がれてしまうのである。このような説明によって理解されるように、剝離の始まる点は、物体表面上で、前から来た流れと後から来た流れとが突き当たる点として決定され、その点では表面摩擦 τ_0 が零、すなわち

$$(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0 \quad (4.2)$$

となる。(4.2)を以て剝離点の数学的な定義とする。この点の位置は、境界層の外の potential flow による圧力分布が与えられていれば、あとに述べるような方法で境界層方程式を解くことによって決定することができる。

ここでは詳細を省略するけれども、理論から引き出される重要な結論として、外部の potential flow による圧力分布が不変に保たれている限り、レイノルズ数に無関係に剝離点の位置は不変に保たれる。(ただし実際には、レイノルズ数がある値以上になると、§3に述べたように、境界層の内部に乱れが発生して乱流境界層となり、剝離点の位置も後退し始め、したがってまた圧力分布も変化するが、剝離点の

後退もある点に到って停止し — その点を乱流剝離点と呼ぶ — 圧力分布もまた一定の型に落ち着くはずである。)したがって、極限としてレイノルズ数が限りなく大きくなり、境界層の厚さが零となってもなお表面からの剝離は存在するのである。一方剝離の流線 PQ (図参照) が固体の壁との間になす角度は、レイノルズ数が増大すると共に減少し、流れの diagram は壁に垂直な方向の尺度がレイノルズ数の平方根に逆比例して縮むのである。以上の結論を要約すれば次のように述べられるであろう。すなわち、粘性の非常に小さい流体の運動は、微分方程式 (1.1) で直ちに $\nu=0$ と置いて導かれる方程式の解ではなく、もとの方程式の解から $\nu \rightarrow 0$ (レイノルズ数 $\rightarrow \infty$) の極限として得られるべきものである。この操作を *singular perturbation* と呼ぶ。

最後に、乱れた境界層の剝離に触れておきたい。一般に剝離の起こるような物体の周りの流れでは、層流から乱流への遷移は剝離点の前で行なわれる。ところで前に述べたように、物体に接した流体層の運動は、壁による引き止め作用と、その上にある流体の引きずり作用と、圧力勾配の作用との3つで決定される。流れが層流の場合、この引きずり作用は、分子的な原因による分子粘性によって起こるものである。しかし流れが乱れると、流体の粒子は境界層の内部で、壁に近く速度の小さい層から、境界層の外縁に近く速度の大きい層へ、またその逆の方向へ、と絶えず変動する。このようにして、例えば速度の大きい層からきた粒子は、速度の小さい層の中に没入してそれと混合する。このようにして2つの違った層の間に運動量の交換が行なわれるのである。この過程は分子的な混合よりも遙かに大きな規模で行なわれるので、それによって発生する運動量の交換は、普通の粘性の原因となる分子的な交換よりも遙かに強烈である。その結果として、第1に、壁の引き戻しの作用は層流の場合よりも速くへおよび、境界層は厚くなる。第2に、壁に接した流体の層におよぼされるその上の層の引きずりの作用は、運動量の交換が層流の場合よりも遙かに強烈なために著しく大きい。したがってまた、減速された流体粒子は層流で剝離した点よりもずっと遠くまで、圧力勾配に逆らって高い圧力の中へ進んで行くことができる。それで剝離点の位置はずっと物体の後端に近づき、圧力の低い後流の部分は狭い領域に限られ、圧力抵抗は減少する。(ただし、(4.2)に対応する乱流境界層の剝離の条件式はまだ確立されていない。)結論として、主流の速さが大きくなって、その中に置かれた肥えた物体の周りの境界層が乱れると、抵抗係数は急激に減少する。この極めて重要な事実は実験的に確かめられている。すなわち球の場合、レイノルズ数 4×10^5 の附近で抵抗係数は0.4から0.1へと不連続的に減少するし、また円筒でもほぼ同じレイノルズ数で抵抗係数が1.2から0.3へと急激に変化する。いずれの場合もレイノルズ数には物体の代表長さとしてその直径を使う。これは球や円筒の抵抗がほとんど圧力抵抗から成ることを示すもので、摩擦抵抗に関していえば境界層の遷移によって抵抗係数が逆に急上昇することは前節の終わりに述べた。

§ 5 層流境界層の方程式

直線の壁に沿う2次元の流れについて、層流境界層(今後しばらく層流境界層だけについて述べるので、層流という形容を省略して、単に境界層ということにする)の中の流れの状況を近似的に記述する方程式、

いわゆる境界層の方程式、を作ることから始めよう。 x 軸を壁に沿って、 y 軸をそれに垂直にとり、速度ベクトル $\vec{v}$ の x, y 成分をそれぞれ u, v と書く。 ρ を流体の密度、 p を圧力、 ν を動粘性係数、 t を時間とする。また小文を通じて、流体は一様かつ非圧縮性であると仮定し、したがって ρ は場所的にも時間的にも一定不変とする。この仮定は我々の取り扱う流体が液体である場合はもちろん、気体の場合でも、流れの速さがその状態に対応する音速に比べて小さければ、実用的には充分正確であるといつてよい。

以上を前置きとして流体の運動方程式（いわゆるナヴィエ・ストークスの方程式）と連続の式とを書けば次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (5.2)$$

および
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.3)$$

境界条件として、

$$y = 0 \text{ (壁の上) で } u = v = 0 \quad (5.4)$$

である。その他の境界条件および初期条件は現在必要がないから触れないことにする。 δ を境界層の厚さ、 u_1 を境界層の外縁での x 方向の速度成分とすれば、境界層の定義から、 u_1 は一般流と同じ程度の大きさをもつ。この大きさを速度の標準にとり 1 の order とし、これを $O(1)$ と書くことにする。そのとき u は δ の幅の中で 0 から 1 まで変化する。したがって境界層の内部で $\partial u / \partial y$ は $O(\delta^{-1})$ であり、同様に $\partial^2 u / \partial y^2$ は $O(\delta^{-2})$ である。もちろん δ は非常に小さいものと考えておく。また、 u 、 $\partial u / \partial t$ 、 $\partial u / \partial x$ 、 $\partial^2 u / \partial x^2$ などは $O(1)$ と見なされる。何故なら、 u はもちろん $O(1)$ と考えられるし、時間 t および流れの方向 x に関する変化は、特別の場合を除き、特に著しくはないからである。次に連続の式 (5.3) から $\partial v / \partial y$ は $O(1)$ であり、 v はこれを積分して得られるので、(5.4) を参照して v は $O(\delta)$ である。したがって u の場合と同じように考えて、 $\partial v / \partial t$ 、 $\partial v / \partial x$ 、 $\partial^2 v / \partial x^2$ は $O(\delta)$ 、 $\partial^2 v / \partial y^2$ は $O(\delta^{-1})$ である。

これだけの事を念頭において (5.1) を見直すと、右辺の $\partial^2 u / \partial x^2$ は $\partial^2 u / \partial y^2$ に比べて無視することができ、結局 $O(1)$ の方程式として

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.5)$$

を得る。また(5.2)で δ 以上の order の量をすべて右辺に移すと、

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = O(\delta) \quad (5.6)$$

となり、言い換えると $p(x, 0) - p(x, \delta)$ 、あるいは壁の法線に沿って境界層の厚さに応ずる圧力の全変化量、は $O(\delta^2)$ であり無視できる。その結果圧力 p は y の方向に一定で、したがってまた境界層外縁での値に等しいと置くことができる。境界層の外縁を洗うのは、potential flow と考えてよいほど粘性の影響の少ない主流であり、その附近では $\partial u / \partial y$ 、 $\partial^2 u / \partial y^2$ は共に小さいと思われるから、(5.1)によって

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad (5.7)$$

と書くことができる。したがってこれを(5.5)に用いれば、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.8)$$

を得る。これと(5.3)とを連立させたものが一般の2次元境界層方程式である。特に現象が t に無関係な場合(これを定常な流れと呼ぶ)については、

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

となるが、 p と u_1 とが x だけの関数で、 y に関係しないことを思い出して、これをまた

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = u_1 \frac{du_1}{dx} \quad (5.9)$$

と書くこともできる。すなわち、定常な2次元境界層の方程式は次の形をもっている。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \frac{du_1}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5.10)$$

および

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (5.11)$$

ここに u_1 は境界層外縁の流速で、 x の函数として理論または実験によって与えられているものとする。ただし実際の計算に当たっては、境界層が非常に薄いことを考慮して、 $u_1(x)$ としては potential flow による速度の壁の上の値そのものをもって差し支えない。更に精度を上げるためには、その u_1 を使って計算された境界層によって、主流が押しのけられることを考慮して、実際よりも見掛け上その厚み（後に述べる排除厚）だけ肥えた物体の周りの potential flow を計算して、更に新しい u_1 を求めればよいであろう。

(5.10) からまた境界層の厚さの程度を評価することができる。一般流を U 、物体を代表する寸法を L と書くと、 u は $O(U)$ 、 x は $O(L)$ であるから慣性項は $O(U^2/L)$ であり、また一方粘性項は $O(\nu U/\delta^2)$ である。境界層という考え方の基礎には、その中で運動方程式の粘性項が慣性項と同じ程度の大きさを持つという仮定があるので、これを上の2つの order 評価に対して用いると、 $\delta = O(\sqrt{\nu L/U})$ 、あるいは $\delta/L = O(\sqrt{\nu/UL})$ 。そこで今、流れを支配するレイノルズ数 UL/ν を Re と書くと、上の関係を次の式で表わすことができる。

$$\delta/L = O(Re^{-1/2}). \quad (5.12)$$

次に(5.5)–(5.3)または(5.10)–(5.11)を取り扱うに当たっての注意を述べよう。その1。これらの方程式は直線の壁に沿う流れについて導かれたのであるけれども、実は曲がった壁の場合にも、壁に沿って x を、壁に立てた法線方向に y を測ることにすれば、全く同じ形の方程式を導くことができる。ただしこの場合、 k を壁の曲率として、 $k\delta$ 、 $\delta^2 \partial k / \partial x$ を小さいものと仮定する。したがって座標 x 、 y を曲線座標として上のように採るものとする、これらの方程式は形式的には全く一般的なものとなるのである。その2。圧力 p が物体の周りの potential flow から(5.7)または(5.9)によって決定されることを述べた。しかしながら、壁に沿って逆向きの圧力勾配があつて剝離が起る場合には、主流の potential flow の場はそれによって全然変えられてしまつて、等角写像などの方法を使って普通に計算された potential flow とは全然違つてしまうのである。そのとき、数学的な解による壁面上の速度分布を依然として(5.7)または(5.9)の u_1 として使用するの望ましくない。この場合にはむしろ、現実に剝離の起っている状況で壁面上の p の値を直接に測定し、それを x に関して微分して $\partial p / \partial x$ を求めるべきである。その3。方程式を積分するに当たっての境界条件および初期条件について。連続の式を(5.11)の形で使うことにすれば、(5.8)または(5.10)の中に含まれる従属変数は $u(x, y, t)$ だけとなり、次の条件が課せられる。(1) $y=0$ (壁の上)で $u=0$ 、(2) $x=0$ で u の分布 $u(0, y, t)$ が指定される、(3) u が主流の速度に滑らかにつながるように、境界層の外縁で $u=u_1$ 、 $\partial u / \partial y = 0$ 、(4) 更に運動が非定常の場合には $t=0$ における $u(x, y, 0)$ が与えられる。さて、壁の上で u と同じく v に対してもまた $v=0$ という条件を課すべきことは当然であるが、それは既に(5.11)によって果たされている。ただし、 v に関する方程式(5.2)を省略したことによって、(2)、(3)、(4)に v に対する条件を加えることができないのはやむをえない。前に述べたよ

うに $v=O(\delta)=O(Re^{-1/2})$ であるから、このようにして導かれた境界層方程式の解には、少なくとも $Re^{-1/2}$ 程度の誤差が含まれることを覚悟しておかねばならない。次に境界層外縁の条件 $u=u_1$ 、 $\partial u/\partial y=0$ を (5.8) または (5.10) に入れると $\partial^2 u/\partial y^2=0$ となり、完全流体への滑らかな移行が実現される。しかし実際には上述の境界層外縁の条件を y の有限の値に対して満足させることは不可能で、 $y \rightarrow \infty$ における漸近的な条件として取り扱わねばならない。元来境界層の厚さという量は、ある程度便宜的に定義されたものであって、境界層の内外にもともとはっきりした境目のあるべきはずはないので、その外縁で境界条件を合わせるといっても、厳密な意味では不可能であることが明らかであろう。また数学的に見ても、境界層の方程式が非線型熱伝導型（後述）であることから、粘性による物体の影響が無限の遠方（ $y \rightarrow \infty$ ）にまでおよぶことは、容易に推定されるであろう。ただし、上に述べたように、境界層の理論はその厚さ δ が非常に薄いという仮定から出発して作られたものであるのにも拘らず、その境界条件が $y \rightarrow \infty$ で規定されているのは、一見矛盾ではないかという疑問が起って来る。しかし、これは単に数学的な便宜に過ぎないのであって、実際に計算してみると、この境界条件は $Re^{1/2} y$ が有限の値、すなわち $y=O(Re^{-1/2})$ 、において、既にほぼ満足されるのである。したがってまたこのことから、 $y \rightarrow \infty$ での境界条件は、 u を無限遠方の流速に一致させるのではなく、実は potential flow が物体の壁の上で持つべき速度そのもののに、滑らかにつなぐべきであることが了解されるのである。

最後に、境界層方程式の数学的性格について一言つけ加えたい。一般的な (5.5) でも本質的には同じことであるが、簡単のため (5.10) について述べると、もともとのナビエ・ストークスの方程式 (5.1) が x, y について楕円型の方程式（例、ポテンシャル方程式）であったのに対して、(5.10) は放物型の方程式（例、熱伝導方程式）であることに注意しなければならない。すなわち、本来の方程式は境界層の或断面の状況が x に関して無限の上流から無限の下流に到るまでの全領域の状態によって影響を受けることを要求しているのに反して、境界層の近似は $\partial^2 u/\partial x^2$ の項を省略した結果として、境界層の或断面の状態が、その上流からだけの影響によって完全に決定されることを示している。それは、(5.10) で x を時間、 y を空間座標とみなし、方程式を非線型の熱伝導方程式と読み換えることによって容易に類推されるであろう。このことが重大な簡略化であるのは、こうして導かれた境界層方程式が、一方的に上流から逐次に解いて行きさえすればよいのであって、下流の影響は上流へさかのぼらないということによって明瞭である。ただし、圧力 p の分布を通じて間接的に下流の状況を取り入れることはできるのであって、bluff body の境界層を計算する際に、測定によって得られた p の値を使うことによって、下流の剝離した流れに適合する境界層を解くことができると前に述べたのは、その意味である。

§ 6 境界層の厚さ

以上の説明で、“慣性力と粘性力（例えそれが分子粘性であろうと、あるいはまた乱れによる渦動粘性であろうと）とが同じ程度の大きさを持つ領域”として定義された境界層に、はっきりした境目がないことは理解されたであろう。実際、§ 2 で挙げた例（平板に沿う境界層の簡略算）でも、速度分布は y と共に指

数函数的に一般流に接近し、決して有限の y の値で一般流と完全に等しくなることはない。(2.6)に示した境界層の厚さは、速度が一般流の99%となる点を以て境界層の外縁と見なした場合であって、全く便宜的であることはいうまでもない。例えばもし99.9%となる点を以てその外縁と定めることにすれば、右辺の係数は4.5と変更すべきである。したがって、この定義は単なる約束にすぎないけれども、直観的かつ簡単であるので、実験結果を整理するに当たってはしばしば使用されるのである。

境界層の厚さの定義に伴う曖昧さを取り除くためには、次のようにして定められる量を使用すればよい。

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy, \quad (6.1)$$

$$\vartheta = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy, \quad (6.2)$$

$$\text{および} \quad \sigma = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u^2}{u_1^2}\right) dy. \quad (6.3)$$

これらはそれぞれ排除厚 displacement thickness、運動量厚 momentum thickness、およびエネルギー厚 energy thickness と呼ばれる。 u_1 が境界層外縁の流速であることは前の通り。積分の上限は実質的に境界層の外縁とすべきであって、その決定に多少の曖昧さがあるとしても、その附近で被積分函数の中の()の項は非常に小さくなるので、實際上確定的な答えが得られることになる。

長さの次元を持つこれら3つの量の物理的な意味を考えてみよう。まず、排除厚は境界層内部の減速のために外部の potential flow が押しのけられる厚さを与える。すなわち $\int_0^{\infty} (u_1 - u) dy$ は全速度欠陥であり、これを $u_1 \delta_1$ に等しいと置けば、外部の流れの場に対する境界層による押しのけの影響は、物体が δ_1 だけ肥って、その見かけの物体に沿って potential flow u_1 が流れ過ぎて行くのと同様である。排除厚に対する第2の解釈は次のようである。すなわち、境界層の中に含まれる全渦度をその平均の高さ δ_c に集めて渦の層を作れば、 δ_c は排除厚に等しい。この定理を証明するには、先ず渦度

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.4)$$

が、境界層の中ではほぼ

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.5)$$

によって与えられることに注意する。そうすれば x の或断面で境界層の厚さに沿った全渦度は(6.5)から直ちに $-u_1$ に等しい。すなわち

$$\delta_c = \frac{\int_0^\infty y \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy}{-u_1} = \frac{\int_0^\infty (u_1 - u) dy}{u_1} = \delta_1$$

である。($y \rightarrow \infty$ で u は主流に一致するのでなく、壁の上の potential flow の流速 u_1 に収斂する。)

次に、境界層を横切つて x の或断面を考える。この断面を通る流体粒子はもし粘性がなければ当然すべて u_1 という速度を持っていたはずである。しかし実際には u という速度しか持たない。だから x 断面までに粘性によって失われた全運動量(完全流体の場合に比べての差)は $\int_0^\infty \rho u(u_1 - u) dy$ である。これを ρu_1^2 で割れば長さの次元となる。これが運動量厚である。1例として流れに平行に置かれた平板に沿つて発達した境界層について考えてみよう。この際 $u_1 = U$ (一定)であるから、長さ L の板の片面の単位幅に働く全抵抗を D と書くと $D / \rho U^2 = \vartheta(L)$ という関係がある($\vartheta(L)$ は板の後端での ϑ の値。数学的に証明するには、後に出る(8.7)を x について積分すればよい)。ただし板の前端では、 $\vartheta = 0$ と仮定した。板(片面)の摩擦抵抗係数 C_f を

$$C_f = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 L} \quad (6.6)$$

によって定義すると、上の関係から

$$C_f = 2 \vartheta(L) / L \quad (6.7)$$

が得られる。したがつて板の摩擦抵抗はその後端の速度プロファイルを測定することによって決定される。

第3にエネルギー厚は x 断面を通る運動エネルギーの非粘性流れの場合に比べての減少に対応する。定常な層流境界層についてこの関係を書くと、

$$\frac{d}{dx} (u_1^3 \sigma) = 2 \nu \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \quad (6.8)$$

となる。右辺の被積分項は散逸函数の近似値である。

最後に、このようにして新たに定義された3つの量が、境界層の直観的な厚さ δ とどのような関係にあるかを見ることにしよう。そのために、最も簡単な例として、或 x 断面の速度プロファイル $u(y)$ が $u(0) = 0$ から $u(\delta) = u_1$ まで直線的に増加している場合を採る。その時(6.1)、(6.2)、(6.3)はそれぞれ次の計算式で与えられる。

$$\delta_1 = \delta \int_0^1 (1 - \eta) d\eta, \quad (6.9)$$

$$\vartheta = \delta \int_0^1 (\eta - \eta^2) d\eta, \quad (6.10)$$

$$\text{および } \sigma = \delta \int_0^1 (\eta - \eta^3) d\eta, \quad (6.11)$$

ただしおのおのについて $\eta = y/\delta$ と置いた。これらの積分を実行すると

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\vartheta}{\delta} = \frac{1}{6}, \quad \text{および } \frac{\sigma}{\delta} = \frac{1}{4} \quad (6.12)$$

が得られる。平板に沿う層流境界層の速度プロフィルの性質はこれに近い。(6.12)から $\delta_1/\vartheta = 3$ が導かれるが、平板の問題を精密に計算した次節の結果によると、 $\delta_1/\vartheta = 2.6$ である。なおいちいち断わらなかつたけれども、本節の結果の大部分は乱流境界層に対しても成り立つことを最後に付け加える。

§ 7 流れに平行に置かれた平板

境界層方程式を解く典型的な例として、流れに平行に置かれた幅の広い平板に沿って発達する層流境界層の問題を採り上げてみよう。今の場合、 $u_1 = U$ (一定) であるので、基礎の方程式(5.10)は簡単に

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.1)$$

と書かれる。ただし、流れはどの方向へも無限にひろがっているものとし、座標の原点は板の先端、それから板に沿って x 軸、垂直に y 軸を取る。連続の式としては、(5.1.1)よりむしろその元の形(5.3)を使う方が便利である。境界条件はしたがって、

$$y = 0 \text{ で } u = v = 0, \quad y \rightarrow \infty \text{ と } x = 0 \text{ とで } u = U \quad (7.2)$$

である。しかしながら、(7.1)と(5.3)とを連立させ、従属変数を u と v との2つとして取り扱うよりは、むしろ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7.3)$$

で定義される流れの函数 ψ を導入して、未知函数を1つに減らしてしまう方が便利である。このような流れ函数によって連続の式はおのずから満足されて、もはや特に考慮するには及ばない。しかしそれに伴って、もとの2階の微分方程式が3階の方程式になってしまうのは後に見る通りである。

ψ が x と y との函数であることはもちろんであるが、これらがどのような形で組み合わせられているかをもし予め知ることができれば、あとの計算は非常に容易になる。そこで次のように考えてみよう。平板に沿う流れには圧力の勾配が無いから、 x のいろいろな断面をとって考えてみても、境界層の厚さ δ が段々大きくなって行くこと以外、速度プロフィルの形自体は別に変化するはずがないであろう。すなわち、 u の

分布は $\delta(x)$ をパラメーターとする1つの相似形にまとめられるであろう。言い換えると、 u の中には x と y とがばらばらには入っていないのではなく、 $u = u(y/\delta)$ という形で表わされるに相違ない。ところで、(5.12)に述べたように $\delta/x = O(\sqrt{\nu/Ux})$ 、あるいは $\delta = O(\sqrt{\nu x/U})$ であるから、我々の求める引数は

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} y \quad (7.4)$$

という形で与えられるであろう。(このような推論によらなくとも、 $y \rightarrow \infty$ と $x=0$ との u の値が等しいことを考慮して、 η に対して $y/x^p (\nu/U)^{p-1}$ ($p>0$) の形を仮定し、(7.1)が η だけの方程式となるよう p の値を定めれば同じ結果に到達する。)右辺の係数 $1/2$ は単に以後の計算の便利のためにつけたものである。更に、 u が η だけの函数であったとして、それを(7.3)に入れて y で積分すれば、 ψ に対しても次の形が得られる。

$$\psi = \sqrt{\nu U x} f(\eta). \quad (7.5)$$

ここに f は未知函数である。これから直ちに次の関係式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{U}{2} f', & v &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U\nu}{x}} (\eta f' - f), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{U}{4} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f'', & \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{4} \frac{U}{x} \eta f'', \\ \text{および} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{U}{8} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''' \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

これらを(7.1)に入れると、境界層の方程式は結局次の形に帰せられる。

$$f''' + f f'' = 0. \quad (7.7)$$

ここにダッシュは η に関する微分を示す。また f に対する境界条件は次のようである。

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 2. \quad (7.8)$$

方程式(7.7)を $\eta=0$ から出発して数値的に積分するには、 $f(0)$ 、 $f'(0)$ および $f''(0)$ の値が指定されることが必要である。しかるに我々の場合、 $f''(0)$ に代わって $f'(\infty)$ が規定されている。これが境界層方程式の特徴であって、解を求めるに当たって大きな困難を形作る。したがって我々は次の

手続きをとらねばならない。すなわち、 $f(0) = f'(0) = 0$ 、それと $f''(0)$ を適当な数に仮定して、(7.7) を積分する。積分の範囲が充分広がり、 f' がほぼ一定の値に到達したら、それと最終値2とを比較し、それによって初めに仮定した $f''(0)$ の値を修正して、計算をやり直す。この例は境界層の最も典型的な問題であって、Blasius によって最初に取り扱われた有名な計算である(H. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 56, 1908.)、彼の方法は相当に煩雑であるが、電子計算機でこの手続きを自動的に実行するには、例えば図の flow diagram に示されたようにすればよいであろう。

将来同じような問題を取り扱われるかたの御参考のために、各ステップについて簡単な説明を加えると次のようである。以下文頭の番号は flow diagram 右端の番号と対応する。

(1) データの宣言： P は $f''(0)$ として、初めに仮定された値、 Q は P の増し分、 D 、 E 、 F は収斂判定の常数、(9) - (13 参照、 N は積分ステップ数の制限。

(2) P の変化に関する指令：この場所を通る際に、 P は増し分 Q だけ増える。

(3) 初期値の指定： S は $\eta = 0$ から数えて積分のステップの数。

(4) η 、 f 、 f' 、 f'' の初期値の印刷

(5) 次のステップへの積分の前進。

(6) S が N に達した際、言い換えると、積分の範囲がある制限に達した時は、ループから脱して、直接(10)へ行く。

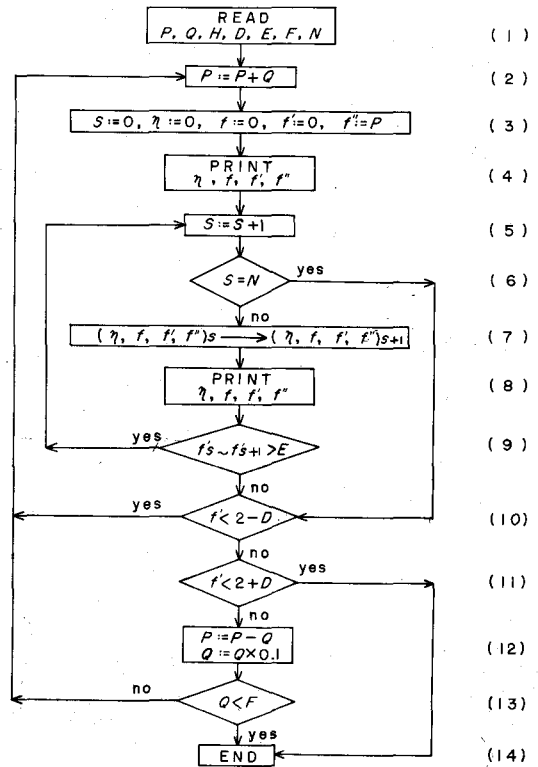
(7) Runge-Kutta-Gill 法の1ステップ： H を積分間隔として $\eta = SH$ での f 、 f' 、 f'' の値が与えられていれば、この方式によって $\eta = (S+1)H$ でのそれぞれの値を見出だすことができる。

(8) 新しい場所での η 、 f 、 f' 、 f'' の印刷。

(9) f' の収斂の判定： f' の収斂を次の条件で定義する。

$$\left| (f')_{\eta=SH} - (f')_{\eta=(S+1)H} \right| \leq E,$$

ただし $S+1 \leq N$ 。収斂しなければ Runge-Kutta-Gill 法を続ける。



第2図 フローダイアグラム

(10) f' が収斂するか、あるいは積分のステップ数が N を超えるならば、 $f' < 2 - D$ であるかどうかを判定する。もし不等式が成立すれば、引き返して f'' の初期値を Q だけ増して計算を繰り返す。

(11) $2 - D \leq f' < 2 + D$ ならば計算終わり。もし $f' \geq 2 + D$ ならば(12)へ進む。

(12) 初めの P に戻って、 Q に 0.1 をかける。

(13) Q が F より小さくなれば計算終わり。そうでなければ引き返して新しい初期値で計算を初める。

$$\begin{aligned} H &= 0.01, \quad N = 600, \quad D = 2.5 \times 10^{-7}, \\ E &= 10^{-8}, \quad F = 10^{-7} \end{aligned} \quad (7.9)$$

という値を使って、以上の計算を実行した結果

$$f''(0) = 1.328231 \quad (7.10)$$

が得られた。この時 f' の収斂値は次のようであった。

$$f'(4.58) = 2.0000015. \quad (7.11)$$

詳細は次の論文を参照されたい。 J. -i. Okabe and G. Kimura, Numerical Tables of SEBAN - BOND Solution for Equation of Laminar Boundary Layer on a Circular Cylinder in Axial Incompressible Flow, Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ., 15, 1967.

§ 8 運動量方程式とその応用

境界層の方程式は、その最も簡単な例と考えられる平板に沿う定常な境界層に対してでさえも、厳密に解こうとすると、相当に複雑な計算を必要とすることは、前節に見た通りである。もっと一般的な場合、例えば壁に沿って圧力勾配の存在する際に、これを精確に取り扱うには、膨大な量の計算を実行せねばならない。その方法は例えば Schlichting の前掲書、第9章について御覧いただきたい。本節では方程式を精確に解くことをやめて、近似的に取り扱う方式を探り上げてみよう。その中で最も重要なものは von Kármán による方法で運動量方程式と呼ばれる。以下それについて述べる。

方程式 (5.5) は本来 x 、 y 、および t の或範囲内のあらゆる値について成立すべきものである。しかしながら今、 y について、それが 0 から δ までのあらゆる値について成り立つことを要求する代わりに、それより遙かに緩やかな条件、すなわち (5.5) が 0 から δ までの y について“平均的に”成立することを以て満足することにしてしよう。そのためには (5.5) の代わりに、その両辺を y に関して 0 から δ まで積分して得られる式を相等しいと置けばよい。すなわち、

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial t} dy + \int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \delta + \nu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^\delta. \quad (8.1)$$

左辺の第2項は

$$= \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy + [uv]_0^\delta - \int_0^\delta u \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

となる。しかるに $(u, v)_{y=0} = 0$ 、 $(u)_{y=\delta} = u_1$ 、また(5.11)を参照して

$$(v)_{y=\delta} = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy, \quad (5.3) \text{ から } - \int_0^\delta u \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad \text{であるから、}$$

上の式はまた

$$= \int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x} dy - u_1 \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy。$$

しかし簡単な計算によつて、これは次のように変形される。

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy - u_1 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u dy。$$

次に(8.1)の右辺の第2式で、境界層外縁での速度プロファイルの滑らかな接続の条件から、 $(\frac{\partial u}{\partial y})_{y=\delta} = 0$ 。以上のことから、(8.1)は

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy - u_1 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u dy = - \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (8.2)$$

と書き直される。

これは形式的に行なった計算に過ぎないけれども、実はこの結果は物体の表面、境界層の x 断面、同じく $x+dx$ 断面、両断面を連ねる境界層外縁、時刻 t に以上の4断面に囲まれていた流体の実質部分が、時刻 $t+dt$ で占める新しい空間領域を調査し、この実質部分の持つ運動量の増加の時間的割合が、これに対して働く力に等しいという Newton の運動法則をそのまま書き下すことによって、もっと直接的に導くこともできる。このことは1921年 von Kármán によつて与えられた重要な寄与であつて、これ以後の境界層方程式の近似解法の最も有力な出発点の1つとなつた。(T. v. Kármán, Über laminare und turbulente Reibung, Z. A. M. M., 1, 1921) この意味で(8.2)を境界層の運動量方程式と呼ぶ。次に(8.2)をもっと便利な形に書き直すことにしよう。まず $(\rho \nu \partial u / \partial y)_{y=0}$ は物体の壁面に働く摩擦応力であるからこれを τ_0 と書き、また $\partial p / \partial x$ は(5.7)を使って u_1 で表わし、更に u_1 およびその微係数が y に無関係であることを考慮して、

$$-\frac{\partial}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \int_0^\delta \frac{\partial u_1}{\partial t} dy + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^\delta u_1 dy$$

と書いて(8.2)に入れると、

$$\frac{\tau_0}{\rho} = u_1 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u dy - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^\delta u_1 dy + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta (u_1 - u) dy。$$

しかし右辺の第1項は

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u_1 u dy - \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^\delta u dy。$$

結局

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u(u_1 - u) dy + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^\delta (u_1 - u) dy + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta (u_1 - u) dy \quad (8.3)$$

を得る。ところで(6.1)、(6.2)で定義された排除厚と運動量厚とを導入すれば容易に

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x} (u_1^2 \vartheta) + \frac{\partial u_1}{\partial x} (u_1 \delta_1) + \frac{\partial}{\partial t} (u_1 \delta_1) \quad (8.4)$$

が導かれるが、両辺を u_1^2 で割って最後に

$$\frac{\tau_0}{\rho u_1^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} (2\vartheta + \delta_1) + \frac{1}{u_1^2} \frac{\partial}{\partial t} (u_1 \delta_1)。 \quad (8.5)$$

この式もまた運動量方程式と呼ばれる。この方程式はまた境界層の厚さ δ を導入せずに、境界層方程式を $y=0$ から ∞ まで積分し、(6.1)、(6.2)をそのまま使うことによっても導かれる。 ϑ という量は前にも述べた通りかなり便宜的なものであるから、曖昧さを避ける意味ではそのようにする方が適當であろう。(8.3)の特別の場合として、流れが定常であれば

$$\frac{\tau_0}{\rho u_1^2} = \frac{d\vartheta}{dx} + \frac{1}{u_1} \frac{du_1}{dx} (2\vartheta + \delta_1), \quad (8.6)$$

更に流れに平行に置かれた平板では $u_1 = U$ (一定)であるから

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{d\vartheta}{dx}。 \quad (8.7)$$

この式を x について 0 から L (板の後端) まで積分すれば (6.7) に到達する事は前に述べた。

(8.3) またはその変形 (8.5) は u に関する複雑な微積分方程式であって、これを直接解いて u を求め、あるいは更に δ 、 $\rho\nu(\partial u/\partial y)_{y=0} \equiv \tau_0$ などの諸量を知ることは甚だ困難である。それよりむしろ、速度プロファイル u に関して、適当な数の境界条件を満足する近似表式を予め仮定しておいて、その中に含ませた1つの未定のパラメーターを (8.5) から定めようと試みる方が遙かに容易に目的を達する。 u に対する境界条件は次のようである。先ず $y=0$ で、

$$u = 0, \quad \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \nu \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}, \quad \dots \quad (8.8)$$

次に $y = \delta$ で、

$$u = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0, \quad \dots \quad (8.9)$$

このうち、(8.8) の2番目の式は運動方程式 (5.5) に $u=v=0$ と置いて導かれ、3番目以下は方程式を y で逐次に微分した後 $u=v=0$ と置いて得られる。次に (8.9) の1番目と2番目は境界層外縁で速度プロファイルが potential flow に滑らかに接続することをいったもの、3番目は以上2つの条件を方程式に入れると必然的に出てくる。4番目以下はその接続が充分滑らかなことを要求する。

次に簡単な実例についてその手続きを説明するために、§7で詳しく述べた、平板に沿って発達する定常な境界層を取り上げてみる。この場合 $u_1 = U$ (一定) であり、そこに記した考察によって、 u/U は y/δ だけの函数と考えられる。そこで

$$y/\delta = \eta, \quad u/U = f(\eta) \quad (8.10)$$

と置く。(8.7) に現われる量を計算すると

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\nu}{U \delta} \left(\frac{df}{d\eta} \right)_{\eta=0} \equiv \frac{\nu}{U \delta} f'(0),$$

$$\delta = \delta \int_0^1 f(1-f) d\eta,$$

であるから、これらを (8.7) に入れて、 $x=0$ で $\delta=0$ という条件から出発して x について積分すれば、

$$\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \delta = \sqrt{\frac{2f'(0)}{\int_0^1 f(1-f) d\eta}} \quad (8.11)$$

に到達する。ここで Pohlhausen (K. Pohlhausen, Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht, Z. A. M. M., 1, 1921) にしたがって、 f としてそれぞれ1次、2次、3次および4次の多項式を仮定してみよう。(これは f として採り得るものが多項式に限られることを示すものではなく、単に説明の便宜に過ぎない。) この場合 f に対する境界条件は(8.8)と(8.9)とから、

$$f(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = 0, \quad (8.12)$$

$$\text{および } f(1) = 1, f'(1) = f''(1) = f'''(1) = \dots = 0 \quad (8.13)$$

である。先ず1次の多項式では、このうち $f(0) = 0$ と $f(1) = 1$ だけしか満足できず、 $f_1(\eta) = \eta$ (脚符1は1次式を示す、以下同断)である。2次の多項式を採れば、更に $f'(1) = 0$ を付け加えることができ、 $f_2(\eta) = 2\eta - \eta^2$ 、3次式では更に $f''(0) = 0$ を満足させられて、 $f_3(\eta) = 3/2 \eta - 1/2 \eta^3$ 、また $f''(1) = 0$ は4次式で採り入れられて、 $f_4(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$ 。(境界層の上端と下端との条件を交互に採用することに注意。)このようにして導かれた f を(8.11)の右辺に入れると、この常数は簡単に計算できる。これからまた δ が $\sqrt{\nu x/U}$ に比例することになり、平板の境界層には当然の結果である。更にこれらを用いて $\tau_0/\rho U^2 \sqrt{Ux/\nu}$ 、 $\delta_1 \sqrt{U/\nu x}$ を計算した結果を次の表に示す。正確解は § 7 に示した解の結果であって、当然 δ に対しては有限の値を与えない。

f	$\frac{\tau_0}{\rho U^2} \sqrt{\frac{Ux}{\nu}}$	$\delta \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$	$\delta_1 \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$
η	0.289	3.46	1.73
$2\eta - \eta^2$	0.365	5.48	1.83
$\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$	0.323	4.64	1.74
$2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$	0.343	5.83	1.75
正 確 解	0.332		1.72

第 1 表

この表を見て気がつくことは、第1に、種々の近似段階によって δ の値に相当大きな変動が見られること、第2に、物理的にはっきりした意味のある τ_0 と δ_1 には、それにも拘らずあまり著しいばらつきを生じないことであって、この意味からも、 δ は便宜的に導入された1つのパラメーターに過ぎないと考えておくのが無難であろう。ここで更に、1つの疑問が提出される。“多項式の次数をいくらかでも上げて、

(8.12) と (8.13) との境界条件をいくらでも正確に満足させさえすれば、 f は正確解にどこまでも接近するであろうか？”この問に対する答は運動量方程式の意味を思い出すことによって与えられるであろう。すなわち、この節の初めに述べたように、この方程式は境界層方程式を $y=0$ と δ との間で平均的に満足させたもの（言い換えると方程式の零次のモーメントを零に等しいと置いた条件）に他ならないのであり、単に f の次数を上げるだけでは、 $y=0$ と δ との附近で f と正確解との接触をよくする可能性を増すのに止まって、全体として解の近似度が高まる事はあまり期待できないのである。（前の表で f の次数を3次から4次へと進めることによって、必ずしも近似度が上がったとは思われないことも、その辺の事情を物語るものであろう。）全体としての精度を上げるためには、 f の次数を上げると同時に、より多くのパラメーターを含ませておいて、高次のモーメントを零と置いて得られる多くの連立した条件からそれらを決定すべきである。以上は戦後まもなく Yamada によって公にされた見解であり、彼はこの方針のもとに運動量方程式の精密化を行なった。（山田彦児、層流境界層方程式の一近似解法、流体工学研究所報告、第4巻、1948；第5巻、1949）この方法はモーメントを多く取ることによって、境界層方程式の、原理的にはいかほどでも精密な解法を可能にするので、極めて注目すべきものと思われる。ただし、終戦直後の事情によってこの論文は外国にはほとんど知られず、その後全く独立に海外でも同じ着想に基づく研究が発表された。流れの方向に圧力勾配のある場合についても、運動量方程式の利用は容易に行なわれるけれども、ここではすべて省略することにしよう。ただしこの方法（普通の運動量方程式を指す。上記の精密化を含まない）による結果は、減速流（ $dp/dx > 0$ ）に対して相当不正確であり、それで計算された摩擦応力は実際より大きすぎるし、剥離点は実際より後退することは記憶しておく必要があるであろう。

§ 9 遷移と乱れ

§ 3 で、平板に沿って発達した境界層が乱流に遷移する最低の臨界値として、実験的に $U\delta/\nu = 1650$ が得られたことを述べた。Tollmien の詳しい計算によると、不安定波の発生する最低レイノルズ数は $U\delta_1/\nu = 420$ として与えられるけれども、 δ/δ_1 は約 3.3（Pohlhausen の 4 次式による、第 1 表参照）であるから、これを後者に代入すればほぼ前者に似た値となる。しかしながら、平板の境界層はその速度プロファイルが板の前端からの距離に関係なく相似形を保っているという特殊の例であって、一般の場合には、流れの方向への圧力勾配のためにこの相似性は成り立たない。Schlichting と Ulrich とは種々の圧力勾配をもった層流境界層の不安定を計算したが、その結果によれば、臨界レイノルズ数は圧力が下流へ降下する（順の勾配）場合には高く、これに反して下流へ上昇する（逆の勾配）場合には著しく低くなる。この現象は、逆の圧力勾配によって、速度プロファイルに変曲点を生じることで説明されるであろう。ただしここで注意しておかねばならぬことは、これらのレイノルズ数はすべて、ある特定の波長の攪乱が減衰せずに残るという条件から決定されたものであって、必ずしも直ちに乱流の発生を意味するものではないということである。恐らく、このようにして生き残った波が、下流の速度プロファイルに変曲点を作り、その不安定によって波長の短い攪乱が成長し、やがて本格的な乱れへと成長するのであろう。

我々の周囲に実際に現われるのは大抵乱れた流れである。“乱れた流れ”あるいは簡単に“乱流”とは、不規則な混合運動が主流に重ね合わされた流れをいう。その重ね合わされた攪乱 fluctuation は驚くべく複雑多様であり、時々刻々の変化それ自体を、数学的に厳密に取り扱うことは到底不可能であるように思われるし、また流れの性質を理解するには、細かな乱れそのものの詳細を時間的に追跡することは必ずしも必要でなく、むしろある適当な平均操作によって現実の流れから作られる、仮想的な流動状態の力学的性質を調べる方が遙かに有効である。空間の1点で時間と共に不規則に変動する量を、時間平均とその周りの変動 fluctuation とにわけて、前者にはバーを、後者にはダッシュをつけて表わすことにする。例えば、速度の成分 u 、 v 、 w と圧力 p について、

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad p = \bar{p} + p'. \quad (9.1)$$

時間平均は次のように定義されている：例えば u について、

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u dt. \quad (9.2)$$

ここに T は充分長い時間間隔を意味する。時間平均である以上、もちろん積分は空間のある1点について行なわれる。また、

$$\bar{u}', \quad \bar{v}', \quad \bar{w}', \quad \bar{p}' = 0 \quad (9.3)$$

は明らかであろう。

ナヴィエ・ストークスの方程式 (1.1) の $\vec{v}$ 、 p に (9.1) を入れて、そのあとで全体の時間平均をとるという操作を行なうと、結局次の方程式に到達する。ただし流体の実質部分に働く body force は無視する。

$$\begin{aligned} \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} \\ - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (9.4)$$

(y, z 成分の方程式は省略)。そしてこのことから、我々は流れの場の中に、粘性による摩擦応力の他に、乱れによって見かけ上次のような応力が発生していることを知るのである。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \overline{u'^2} & -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{u'w'} \\ -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{v'^2} & -\rho \overline{v'w'} \\ -\rho \overline{u'w'} & -\rho \overline{v'w'} & -\rho \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

これをレイノルズの応力という。この応力の成分、例えば τ_{xy} は y 軸に垂直な単位面積を通して単位時間に行なわれる x 方向運動量の輸送と解釈される。そこで今例えば $\bar{u} = \bar{u}(y)$ 、 $\bar{v} = \bar{w} = 0$ で定義される平均流れを考えてみよう。ただし $d\bar{u}/dy > 0$ と仮定する。乱れの成分 $v' > 0$ によって、上向きに移動して y の層に到達した粒子は、小さな平均流速の支配する層から出発したものである。ところが、大体において粒子はそれが以前もっていた速度 $\bar{u}$ を保持するので、新しい侵入者は y の層に負の u' をひき起こすことになる。逆に、上の層から y の層へやって来た ($v' < 0$) 粒子は、正の u' を持つて来ることになる。したがって平均として、正の v' はほとんど確実に負の u' と、負の v' はほとんど確実に正の u' と、結びついている。つまり $(u'v')$ の時間平均 $\overline{(u'v')}$ は零でないばかりでなく、負である事を知る。したがってこの場合剪断応力 $\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$ は正であり、粘性による剪断応力 $\tau_{xy} = \mu du/dy$ と同じ符号を持っているのである。

レイノルズの応力を粘性剪断応力と同じ形式に書くために、渦動粘性という量を導入する事がある。すなわち、例えば

$$\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'} \equiv \rho \varepsilon \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (9.6)$$

と置く。ここに ε と記された量がそれであって、分子粘性と違って、場所の(非定常の乱れでは更に時間の)函数である。また例えば τ_{xy} に対応する ε と τ_{yz} に対応する ε とは必ずしも同じ大きさではない。以上の手続きによつて了解されるように、渦動粘性と称せられる仮想的な量の中に、乱流論のすべての複雑さと困難とが集約されているのであり、このような量を導入したからといって、決して本質的な進歩がなしとげられたわけではない。しかしながら、流れの場の性質を計算する際に、ごく大づかみに ε を簡単な函数形に置くことが許されるならば(それと共に、物体表面で流れが有限の入り速度をもつものと仮定する事が必要であるが)、この方法は時として甚だ有効である。水工土木ないし地球物理学的な応用問題にあっては、 ε はしばしば ν に比べて桁違いに大きな量である。すなわち水に対して ν は $1/100 \text{ cm}^2/\text{sec}$ の程度であるのに反して、嵐の海の ε は 100 またはそれ以上の値をとる事が珍しくない。

前々段に述べたモデルを念頭に置くと、 $(y-l)$ 層を出発して y 層に到着した流体粒子は、まえからそこにあった粒子よりも、平均として小さい速度しか持っていない。それらの速度の差はほぼ

$$\Delta u_1 = \bar{u}(y) - \bar{u}(y-l) = l \frac{d\bar{u}}{dy}$$

である。また同じように、 $(y+l)$ 層から y 層にやって来た粒子は、周囲より大きい速度をもっていて、その速度差は

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y+l) - \bar{u}(y) = l \frac{d\bar{u}}{dy}$$

である。これらの速度差は y 層に発生する速度の変動と見なされるので、 y 層には下からも上からも同じ割合で侵入者が現われるものと仮定すると、速度変動の絶対値の時間平均 $|\bar{w}|$ は次の量に比例するであろう。

$$\frac{1}{2} (|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = l \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (9.7)$$

もちろん y 層に到着する粒子は種々の層を出発したものがあるはずで、決して $(y+l)$ または $(y-l)$ なる単一の層だけから来るものではない。しかし気体運動論の平均自由行路に類推を求めるならば、流体の塊が以前持っていた性質を失って、周囲と全く同じようになるまでに移動する道程の平均値 l というものを想定することは、必ずしも不合理ではないであろう。更に、ここで詳細を述べないけれども、次の2つを仮定する。

$$\begin{aligned} |\bar{v}'| &= \text{常数} \times |\bar{u}'|, \\ \overline{u'v'} &= -c |\bar{u}'| |\bar{v}'| \quad (0 < c < 1). \end{aligned} \quad (9.8)$$

前者は v' から u' が生じ、また逆に u' から、2つの流体粒子の衝突または隔離の結果として、 v' が発生することを考慮すれば、無理なく承認されるであろう。後者の負の符号は前々段に述べた処から当然の結果であるし、上記 u' 、 v' の因果関係から、 u' と v' との相関係数 c が空間の到る処で一定であるというのも自然な仮定である。結局(9.7)を参考にして

$$\overline{u'v'} = -l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

と置くことができる。ただし到る処に現われたいろいろな常数は未定の常数 l にすべて含ませて置くことにする。しかしながら、(9.6)によって τ が $d\bar{u}/dy$ と同じ符号を持つべきことを考慮すれば、

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (9.9)$$

と書くのが適当であろう。以上の考察は Prandtl によって初めて試みられたものであり、 l を混合距離という名で呼ぶのである。

以上の結果から更に、滑らかな壁に沿う流れの平均速度の分布公式を導くには、次の仮定を追加しなければならない。第1に、壁の近くで混合距離が壁からの距離に比例すること。第2に、同じく壁の近くで、摩擦応力が一定で壁の上の値 τ_0 に等しいこと。式で書けば、

$$l = \kappa y, \quad \tau = \tau_0 \equiv \rho u_*^2, \quad (9.10)$$

ただし κ は常数(実験の結果から逆算すれば約0.4)、また u_* は速度の次元を持ち、摩擦応力の強さを示すので摩擦速度と名付けられる。これらを(9.9)に入れると($d\bar{u}/dy > 0$ の領域だけを考える)、

$$u_*^2 = \kappa^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

となるから、これから

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_*}{\kappa y}。$$

したがって c を積分常数として、

$$\bar{u} = \frac{u_*}{\kappa} \ln y + c$$

が得られるが、もっと見易い形にするために、次のように書き直す。

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_*}{\nu} + c'。$$

c' は他の常数である。常用対数を使うと、

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa \log e} \log \frac{y u_*}{\nu} + c'。$$

$\kappa = 0.4$ 、 $\log e = 0.4343$ を代入すると、

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 5.75 \log \frac{y u_*}{\nu} + c' \quad (9.11)$$

となるが、 $c' = 5.5$ と置けば、滑らかな内壁をもつ円管中の流速分布を見事に表わすことができる。この公式は対数法則という名で知られている。

更に目を転じて、流れに平行に置かれた滑らかな平板に沿った境界層を採り上げると、(9.11)の常数

を多少修正して、

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 5.85 \log \frac{y u_*}{\nu} + 5.56 \quad (9.12)$$

とすれば、その速度プロファイルをうまく表現することができる。円管の中の流れは周囲の境界層が合流して1つの定常的な流れを作り上げたものであり、板に沿って発達してゆく境界層とは相当に趣を異にするにも拘らず、両者を共通に表わすのに、常数のこの程度の修正で事足りるということは、驚くべきことといわねばならない。しかし、(9.11)にせよまた(9.12)にせよ、 $y=0$ と置けば共に $\bar{u} \rightarrow -\infty$ となり、全く事実と反する。すなわち、これらの対数法則は壁面およびそのごく近傍では流れの模様を忠実に再現してはいないことがわかる。それではこの附近では流れはどのような様相を示すであろうか、それを次の節で考えてみることにしよう。

§ 10 層流底層と表面の粗さ

§ 2で述べたように、静止した固体表面上で実在流体が満たすべき境界条件は、その速度が固体面上で消滅するということである。このことは、流体が層流状態にあると否とに拘らず、一般に成立するのであって、特に乱流状態の場合に、それをあてはめると、平均速度の成分 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\bar{w}$ 、更に速度の変動成分 u' 、 v' 、 w' は共に表面上で零にならねばならない。したがってレイノルズ応力のテンソル(9.5)のすべての成分は壁の上で零であり、壁の上でなお生き残っている摩擦応力は、分子粘性によるものだけである。したがって更にまた、壁のごく近くでは、レイノルズ応力は粘性応力に比べて小さいにちがいないということがわかる。そこで乱れた流れでも、壁のごく近くには、層流状態の支配する極めて薄い層が存在することが推論される。これを層流底層という。安定論の立場からいえば、ここでは速度が非常に小さいので、粘性力が慣性力に卓越し、すなわちこの層を代表するレイノルズ数は極めて小さいので、乱れが発生せず、流れは層流状態に保たれるのである。“層流”底層という呼び名はここに由来する。層流底層の上方には遷移領域があって、そこでは速度の変動がだんだん大きくなり、それによって生ずる乱れの応力が粘性力と同じ程度にまで成長し、更にそのまた上方には、充分発達した乱れの層があって、そこでは乱れの応力が粘性力を完全に圧倒してしまうのである。以上が乱流境界層の模型的な構造である。

層流底層の厚さを決定するには、境界層の速度プロフィルの測定結果を使用しなければならない。層流底層は甚だ薄いので、その中で速度は壁からの距離に比例して増大すると見なして差し支えない。すなわち、(9.10)で導入した摩擦速度 u_* を用いて、

$$\tau_0 \equiv \rho u_*^2 = \rho \nu u / y \quad (10.1)$$

から $u / u_* = y u_* / \nu$

を得る。前節に述べたように、滑らかな円管内の速度分布 u / u_* は $y u_* / \nu$ の函数として実験的に

与えられているので、この曲線の中から(10.1)に相当する部分を探すと、それは大体

$$yu_* / \nu < 5 \quad (10.2)$$

の範囲である。その上に

$$5 < yu_* / \nu < 70 \quad (10.3)$$

にわたる遷移領域があり、更に

$$70 < yu_* / \nu \quad (10.4)$$

では前述の対数法則(9.11)~(9.12)が成り立っているのを知るのである。

円管の中の流れと平板に沿う境界層との間に大きな相似性があることは、前に注意した処であるから、その両者を通じての問題として、前節までに取り扱った滑らかな表面とは具体的に一体何を意味するかを考えてみよう。すなわちおよそ実在の表面である限り、ある程度の凹凸の存在が避けられないのは言うを俟たないとするれば、滑らかな面と粗い面とは何を以て区別することができるのであろうか。この間に答えるには、むしろ逆にいわゆる粗い表面をもつ管について述べるのが便利である。粗い管に対する摩擦抵抗の法則を実験的に作ろうとする試みは古くから数多く続けられて来たが、その問題が本質的に甚だ困難であるのは、面の粗さが幾何学的に多種多様であるに伴って、それを表現すべきパラメーターの数が異常に多いことによるのである。例えば、全く同じ凸起物が数多く並んだ壁を考えるにしても、その抵抗は凸起1つ1つの形、高さ、その分布の密度(単位面積当たりの突起の数)、最後にその配列の仕方によって決まるであろう。また自然の面では突起の1つ1つが決して同じであるはずはないので、この他にまた突起の種類(高さ、一般にその形)の分布を与える確率函数が必要になるであろう。

大まかにいって、抵抗法則に関する限り、面の粗さには2つの種類があるように思われる。その1つは、比較的大粒の凸起がぎっしりと並んだような場合、例えば目の粗い砂粒が表面に貼り付けられているもの、セメント、粗い鋳鉄などに見られるもので、この時抵抗は流速の2乗に比例して増大し、したがって抵抗係数はレイノルズ数に関係しない。このような場合には、粗さの性質は相対粗さと呼ばれるただ1つのパラメーター k/R で表わされる。ここに k は1つ1つ凸起の高さ、 R は管の半径である。その2は、おのおのの凸起がもつとなだらかであるか、または広い面積に相対的に少数の突起が散在する時に起こるものであって、例えば木製管または市販の鋼管の場合に見られる抵抗法則である。このとき抵抗係数は相対粗さとレイノルズ数との両方に関係する。

物理的に考えると、粗さの問題では突起の高さと境界層の厚さの比、もっと具体的には、特に層流底層との比が決定的であることに思い到るであろう。何故なら、粗さが層流底層の中に埋もれている限り、流れは層流を保ちながら凸起に沿って滑らかに流れ、全体として抵抗を増加するようなことはないと思われるからである。すなわち突起の高さ k が層流底層の厚さ δ_ℓ より小さければ、表面は“水力学的に滑らか”と

いってよいであろう。ところが前に述べたように、 δ_l はほぼ

$$\frac{\delta_l u_*}{\nu} = 5$$

という公式で与えられるので、粗さの高さ k が

$$0 < \frac{k u_*}{\nu} \leq 5 \quad (10.5)$$

の場合、粗さはことごとく層流底層に埋まり、抵抗係数はレイノルズ数のみの函数となる。次に

$$\frac{k u_*}{\nu} > 70 \quad (10.6)$$

の場合、全部の突起が発達した乱流の領域に頭を出し、1つ1つの突起はその下流に後流渦を作ることによって、抵抗を増加する。すなわち抵抗の増加は突起の圧力抵抗に基づくものであるから、抵抗曲線は相対粗度 k/R だけに関係し、レイノルズ数 Re に関係しない。最後に、

$$5 < \frac{k u_*}{\nu} < 70 \quad (10.7)$$

は上2つの中間で、突起の高さは層流底層上方の遷移領域にある。したがって抵抗曲線は前2者の混合型として、 k/R と Re との両方に関係する。結局、前段に述べた2種類の抵抗法則は、突起と層流底層との相対的な高さの関係によって説明されるのである。

以上のことがらから“許容粗さ” *admissible roughness* という考え方が出て来る。すなわち、すべての突起が層流底層の中に埋もれていれば、その面の粗さは抵抗の増加に貢献せず、したがってそのような面は流体力学的に滑らかと見なされるのである。この節の初めに提出された疑問はこのようにして一応解決されることになる。実験の結果を総合すると、速さ U の流れの中に置かれた板に対する許容粗さ k_{adm} は次の実験式から算出される。

$$U k_{adm} / \nu = 100. \quad (10.8)$$

板の長さを L と書いて、板のレイノルズ数 Re を UL/ν で定義すると、次の表は上の式から直ちに導かれる。

Re	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
k_{adm} / L	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

第 2 表
15-31

例えば、長さ 100 m の船が毎秒 10 m の速さで走るとすると、その Re は大体 10^9 であるから、許容粗さ k_{adm} は 10^{-2} mm の程度である。言い換えると、普通の工作で作られた鉄船の表面はすべて粗い面といわねばならない。

§ 11 終わりに

以上で境界層序論ともいうべきこの解説を終わる。筆者の学力不足と紙数の制限とによって、甚だとりとめのないものになってしまったことは、まことに申し訳のない処である。

もしページ数に余裕があれば、当然とり上げるべきであった題目には次のようなものがある。圧力勾配のある層流境界層の計算法、非定常の層流境界層、境界層の制御（吸い込みや吹き出しによって境界層の剝離を防止する方法）、圧力勾配のある乱流境界層の計算法、後流や噴流の問題（層流および乱流）、3次元境界層（層流および乱流）、境界層の計測法、等々。これらについては、小文の終わりに掲げた参考書によって御覧いただきたい。

参考書として挙げたのは、境界層の諸問題をその主な話題とすること、特定の工学的な応用に偏らないこと、という2つの観点から選定したものだけである。したがって、一般の教科書のように、その1部に境界層に関する解説を掲載するにとどまるものは含まないし、また土木、航空など特定の分野に属する応用を述べた成書は無視することにした。また、この研修会の性質を考慮して圧縮性流体の境界層に関するものは省略した。一方境界層に関して発表された参考論文は、その主要なものに限っても、文字通り汗牛充棟の状を呈するであろう。それらをいちいち掲げることは、このような小解説の企て得る処ではない。これから境界層の勉強を初めようとされるかたは、参考書(1)または(18)をまず採り上げられるのがよいと思う。(7)は種々の物体の抵抗係数の実測値を集録した異色の本である。境界層に関する百科全書的な知識を要求されるかたには(16)、(17)がお役に立つであろう。(15)および(19)は実質的には(4)の改訂版と見なされる画期的なシリーズであるが、乱流に属する範囲がまだ出版されていない。

本稿を終わるに当たって、種々御配慮を忝くした九州大学工学部水工土木教室椿東一郎教授に感謝する。

参 考 書 (著者アルファベット順)

- (1) Durand, W. F. (ed.)
Aerodynamic Theory, vol. III
The Mechanics of Viscous Fluids (L. Prandtl)
Springer (1935), Dover (1963)
- (2) Ferri, A., Küchemann, D., and Sterne, L. H. G. (ed.)
Progress in Aeronautical Sciences, vol. 2
Turbulent Boundary Layers in Incompressible Flow (J. C. Rotta)
Boundary Layers in Three Dimensions (J. C. Cooke and M. G. Hall)
Pergamon (1962)
- (3) Flügge, S. (ed.)
Handbuch der Physik, Bd. VIII/1, Strömungsmechanik I
Laminar Boundary Layers (L. Howarth)
Entstehung der Turbulenz (H. Schlichting)
Springer (1959)
- (4) Goldstein, S. (ed.)
Modern Developments in Fluid Dynamics, vol. I, II
Oxford University (1938), Dover (1965)
- (5) Görtler, H. und Tollmien, W. (ed.)
50 Jahre Grenzschichtforschung
Friedr. Vieweg & Sohn (1955)
- (6) Görtler, H. (ed.)
Grenzschichtforschung
Springer (1958)

- (7) Hoerner, S. F.
Fluid-Dynamic Drag
Published by the author (1965)
- (8) Lachmann, G. V. (ed.)
Boundary Layer and Flow Control, vol. I, II
Pergamon (1961)
- (9) Lin, C. C. (ed.)
Turbulent Flows and Heat Transfer (High Speed Aerodynamics
and Jet Propulsion, vol. V)
Princeton University (1959)
- (10) Loitsianski, L. G.
Laminare Grenzschichten (in deutscher Sprache herausgegeben
von W. Szablewski)
Akademie (1967)
- (11) Meksyn, D.
New Methods in Laminar Boundary-Layer Theory
Pergamon (1961)
- (12) Moore, F. K. (ed.)
Theory of Laminar Flows (High Speed Aerodynamics and Jet
Propulsion, vol. IV)
Princeton University (1964)
- (13) Pai, S. -I.
Viscous Flow Theory, vol. I, II
Van Nostrand (1956, 1957)

- (14) Prandtl, L. and Tietjens, O. G.
Applied Hydro-and Aeromechanics (translated by J. P. Den Hartog)
McGraw-Hill (1934), Dover (1957)

- (15) Rosenhead, L. (ed.)
Laminar Boundary Layers (Fluid Motion Memoirs)
Oxford University (1963)

- (16) Schlichting, H.
Grenzschicht-Theorie
G. Braun (1965)

- (17) Schlichting, H.
Boundary-Layer Theory (translated by J. Kestin)
McGraw-Hill (1968)

- (18) Tani, I. (谷 一郎)
粘性流体の理論
岩波講座 現代応用数学 B. 7-d (昭和32年)

- (19) Thwaites, B. (ed.)
Incompressible Aerodynamics (Fluid Motion Memoirs)
Oxford University (1960)