

河 川 汚 濁 論

九州大学助教授 栗 谷 陽 一

1 まえがき

河川の水質汚濁は、古くからあったやっかいな問題であるが、人口の都市集中と都市生活の高度化に伴って都市下水は増加し、さらに工業の伸展に伴う工場廃水の増加、農業技術の進歩による農業の排出など、近來非常に深刻な問題となっている。一方、公共水域の水質を保全するための立法も、この10年ばかり前から進められ、また水質汚濁あるいはその対策などに関する研究も非常にさかんになってきている。

河川の水質汚濁の問題を大ざっぱに言えば、河川にどういう水質・水量の汚水をどのように放流したら、水域にどのような汚染状態があらわれるか、あるいはさらにどのような被害があるか、という因果関係を求めることである。具体的にいえば、上水や工・農業用水の取水源として、あるいは河川およびこれにつながる海域の水産資源保護の立場から、あるいは公衆衛生上の立場から、どの水域は水質の汚染程度をどの程度におさえるべきかを把握し、そのためには現在放流されている汚水ないしは計画汚水を未処理で放置してよいか、どの程度浄化すべきか、あるいは如何に放流すべきかを知ることといえよう。

河川の汚濁物成分としては、有機物・無機物・酸性あるいはアルカリ性の物質や有毒物質・油脂類・病原菌・寄生虫などを挙げることができる。このうちで有機物質は河川水中で好気性の微生物によって酸化をうけ、次第に無機化されていく。このとき水中に溶解している遊離酸素を消費し、大気からの酸素の補給が間にあわないと、魚介類などはもちろん、好気性微生物も死滅し、代って嫌気的な微生物が増殖し、河川は腐敗して汚色や悪臭をていするにいたる。したがって溶存酸素の濃度が非常に重要な意味をもつことになる。

河川水中におけるこれらの物質の移り変わりに関係する要素として、1) 汚濁物質を下流に持ち去る流速・流量はいうまでもないが、そのほか、2) 乱れなどによる希釈拡散、3) 酸化を営む微生物の生物相および生息状況、4) 水表面からあるいは河床の植物による溶存酸素の補給速度、5) 浮遊物の沈澱による除去あるいはその逆の掃流、6) 揮発性物質の揮散、さらに厳密には上記項目に含まれるが、7) 河口附近における塩分の侵入と入退潮流の影響などがあげられる。

これらの作用が実際には共存するわけであるが、河川の長い区間にわたる汚濁物質の濃度分布やその変化を考える場合には、濃度勾配がゆるやかなため、感潮部分を除いては拡散の影響はあまりあらわれず、生物学的酸化が濃度変化の主役となる。これに対して比較的短い範囲の汚濁分布や放流点附近の状況を考える場合などには、1日ないし数日程度の緩慢な時間の尺度で行なわれる生物学的酸化による濃度の減衰は無視され、沈澱や化学的变化のいちじるしい特別の場合を除いては、物質の保存を基礎とした拡散の効果が卓越する。このように、対象とする水域の状況だけでなく、考える水域の範囲によっても、考慮すべき浄化の機構が違ってくるわけである。そのほか汚濁物質の各種成分についての特質も重要なことである。

以上河川汚濁の問題の一部を見渡したつもりであるが、今日まですでにこの問題についての著書や解析記

事は枚挙に暇がない。筆者の浅学をもってしては、新たに稿を練る意味を見出すのに骨を折るものであり、また準備時間と紙面の不足から、これまでの貴重な研究をひろく紹介することも出来ないので、この稿では水理学的なことにやや重点をかけ、従来のいくつかの基礎的な研究について、考え方を主体に述べてみるつもりである。

2. 汚濁物質の拡散

2.1 拡散の基礎式

河川に放流された物質が、生物学的な酸化などによる自己減衰や沈澱、揮散などを無視し、物質の量が保存される場合に、どのように移動、伝播されるかを考える。

河川の中の物質を移動させる作用には、常識的にいって、流れによる輸送と、いわゆる拡散作用とがある。このように表現したとき、両者の区別にはある程度任意性があり、水流の複雑な運動をどこまで流れとして扱うかによって、拡散の考えが変わってくることになる。液体の連続体として考へる最小限度の運動までを流れとして忠実に表現すれば、拡散現象としては分子拡散あるいはブラウン運動による移動を考えればよいことになる。この場合、流速の直交成分を u, v, w 、物質の濃度を c 、分子拡散係数を D_m とすれば、例えば x 方向への単位面積単位時間当たりの物質の輸送量 P_x は

$$q_x / \rho = c u - D_m (\partial c / \partial x) \quad (2.1)$$

で与えられることになる。ただし ρ は水の密度で、濃度 C はあまり高くないとして、高次の項は省略してある。物質移動をベクトル $\mathbf{q}$ で、流速を $\mathbf{u}$ とすれば、(2.1) は

$$\mathbf{q} / \rho = c \mathbf{u} - D_m \text{grad } c \quad (2.1')$$

となり、物質の保存されることから

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{div } \mathbf{q} = -\text{div} (c \mathbf{u} - D_m \text{grad } c)$$

連続の式 $\text{div } \mathbf{u} = 0$ を用いれば、拡散方程式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } c = D_m \Delta c \quad (2.2)$$

がえられる。(2.2) を解けば、 c が求められるわけであるが、 $\mathbf{u}$ を詳細に与えることができないので、 $\mathbf{u}$ を理論的ないし実験的に推定できる何等かの意味の時間平均 $\bar{\mathbf{u}}$ と各瞬間における $\bar{\mathbf{u}}$ からのずれ $\mathbf{u}'$ に分け、同様な意味で c を $\bar{c}$ と c' とに分けて、

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad c = \bar{c} + c' \quad (2.3)$$

とおき、(2.1') に代入し、前と同じ意味で時間平均をとると、 $\bar{\mathbf{u}}' = \bar{c}' = 0$ より

$$\overline{\mathbf{q}} / \rho = \bar{c} \bar{\mathbf{u}} + \overline{c' \mathbf{u}'} - D_m \text{grad } \bar{c}$$

となる。これから平均値からの変動による物質輸送 $\overline{c' \mathbf{u}'}$ を生じることが示される。河川などいわゆる乱流状態の流れに対して、普通には $\mathbf{u}'$ として乱れの流速をとり、 $\overline{c' \mathbf{u}'}$ で表わされる輸送を乱流拡散と

いう。この輸送量は多くの場合濃度勾配に比例するとして

$$\overline{c' u'} = -D_t \text{grad } \overline{c} \quad (2.4)$$

と書き、 D_t を乱流拡散係数という。等方性の乱れに対しては D_t はスカラー量であるが、一般に河川の乱れは非等方性であり、そのとき D_t は対称なテンソル量となる。また乱流拡散にくらべ分子拡散は非常に小さいのでこれを無視すれば、形の上で (2.1') と同じ式

$$\overline{q}/\rho = \overline{c} \overline{u} - D_t \text{grad } \overline{c} \quad (2.5)$$

をうる。(2.3) を (2.2) に代入し、同様に計算し、平均流速 $\overline{u}$ に対しても連続の式 $\text{div } \overline{u} = 0$ が成りたつことを考慮し、さらに (2.4) を用いれば、(2.2) と同様の乱流拡散方程式

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} + \overline{u} \cdot \text{grad } \overline{c} = \text{div} (D_t \text{grad } \overline{c}) \quad (2.6)$$

が得られる。乱流拡散を考える場合の基礎式として (2.6) は広く用いられる。以後平均値を示す $\overline{}$ を省略する。

(2.6) の概略の性質を示すいみで、一様流速、一様な等方性の乱れをもつ流れの点源などからの拡散を考える。一様流速を u とし x 方向にとると、(2.6) は

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D_t \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right)$$

さらに速さ u で x 方向に移動する座標系から見

$$x' = x - ut$$

とみると

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_t \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \quad (2.7)$$

となる。(2.7) の特解の例として、点、 x に垂直な線 (例えば z 軸) あるいは面に瞬間的な汚濁物質資源を与えたときに対しては

$$C = (S/\rho) (4\pi D_t t)^{-3/2} \exp \{ -(x'^2 + y^2 + z^2)/4D_t t \} \quad (\text{点源}) \quad (2.8)$$

$$C = (\rho_s/\rho) (4\pi D_t t)^{-1} \exp \{ -(x'^2 + y^2)/4D_t t \} \quad (\text{線源}) \quad (2.9)$$

$$C = (\sigma_s/\rho) (4\pi D_t t)^{-1/2} \exp \{ -x'^2/4D_t t \} \quad (\text{面源}) \quad (2.10)$$

となる。(2.6) は1次の同次式であるから、任意の条件に対する解は、適当に同様の解をくみ合わせてつくることができる。

(2.6) を導くのに (2.4) を仮定したわけであるが、ここで、この仮定について簡単にふれておく。流速の変動部分 u' は、 $\overline{u'} = 0$ であることから、流体部分の局部的な入れ替えと見られる。それで濃度勾配のあるところでこのような入れ替えが行なわれれば、濃度の高いところから低いところに移動する物質の量は、その逆より多くなり、その差の平均として直観的には (2.4) が理解される。Taylor はこの問題を Lagrange 的にとり扱って、一点から出発した粒子が乱れによって移動する距離を求めた。¹⁾ ある一

点から出発した粒子の x 方向の乱れの流速 u' による t 時間の移動量を X とすると

$$X = \int_0^t u'(\tau) d\tau$$

したがって

$$\overline{X^2} = \left[\int_0^t u'(\tau) d\tau \right]^2 = \int_0^t \int_0^t u'(\tau_1) u'(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1$$

Lagrange の相関係数

$$R(\xi) = \overline{u'(t) u'(t+\xi)} / \overline{u'^2}$$

を用いれば

$$\overline{X^2} = \overline{u'^2} \int_0^t \int_{-\tau_1}^{t-\tau_1} R(\xi) d\xi d\tau_1$$

積分順序を変更し、 $R(\xi) = R(-\xi)$ を用いると

$$\overline{X^2} = 2 \overline{u'^2} \int_0^t (t-\xi) R(\xi) d\xi$$

ここに、相関係数 $R(\xi)$ は $\xi \rightarrow 0$ で $R(\xi) \rightarrow 1$, $\xi \rightarrow \infty$ で $R(\xi) \rightarrow 0$ となる。それで

$$\int_0^\infty R(\xi) d\xi = t_*$$

とおくと、

$$\left. \begin{aligned} t \ll t_* \text{ では } \overline{X^2} &= \overline{u'^2} t^2 \\ t \gg t_* \text{ では } \overline{X^2} &= 2 \overline{u'^2} t_* t \end{aligned} \right\} (2.11)$$

となる。 t_* は乱れの Lagrange

的な流速変化の時間の尺度を与えるもので

乱れの平均寿命といわれる。

一方 (2.8) から x 方向の移動距離の2

乗平均値 $\overline{X^2}$ を求めると、

$$\overline{X^2} = \frac{\iiint x^2 c \, dx dy dz}{\iiint c \, dx dy dz} = 2 D_t t \quad (2.12)$$

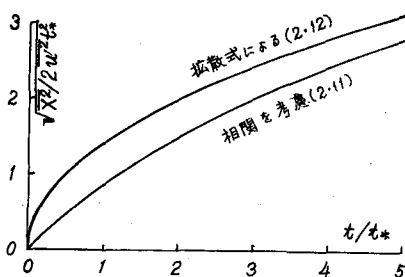


図1 相関を考慮した変動量の rms (Taylor)

となる。(2.10)、(2.12)を比較すれば、 D_t が t によらなくなる。すなわち乱流拡散が拡散係数 D_t を用いて表わすことができるのは、 $t \gg t_*$ のときであることがわかる。

$\sqrt{u'^2} t_*$ は乱水の大きさを表わすものと見られるから、乱流拡散を考える領域が、乱れの大きさにくらべて十分大きいときともいえる。河川における乱れの最大の大きさは、非常に大きいことが報告されている。

2) 河川における拡散問題に(2.6)を用いることは、このように原理的に問題があるが、 D_t の値を適当にとれば実用上満足な計算結果が得られることも多いので基礎式として使われている。

2.2 横方向の拡散（2次元問題）

（2.6）は一般の複雑な流れの場合における解を求めるのが面倒である。それで状況に応じて次元をへらしめて扱い、省略した次元に対しては単に平均値をもって論ずることが多い。例えば河川の水深が浅くて、深さ方向の濃度の変化は小さく、流下方向と横方向の濃度分布を論じたい場合には、流速や濃度として深さ方向の平均値 $\bar{u}(x, y)$, $\bar{c}(x, y)$ を用いるのが便利である。

$\bar{c}$ を与える基礎方程式を求めるには、（2.6）を深さ方向に積分し、河床と自由表面における境界条件を入れても求められるが、むしろ（2.1'）を積分して2次元的な輸送を考えた方が容易である。（2.1'）において前と同様 D_m を省略すると、 x および y 方向について

$$q_x / \rho = \bar{c} u \quad q_y / \rho = \bar{c} v \quad (2.13)$$

となる。 u, v, c を

$$u = \bar{u} + \bar{u}'' + u', \quad v = \bar{v} + \bar{v}'' + v', \quad c = \bar{c} + \bar{c}'' + c' \quad (2.14)$$

とおく。ここに $\bar{u}, \bar{v}, \bar{c}$ は時間平均のさらに z 方向の平均値を表わし、 $\bar{u}'', \bar{v}'', \bar{c}''$ は（2.3）の $\bar{u}$ と $\bar{u}$ との差などをあらわすものとする。（2.14）を（2.13）に代入し時間平均をとると

$$\overline{q_x / \rho} = \overline{\bar{c} u + c' u'} = (\bar{c} + \bar{c}'') (\bar{u} + \bar{u}'') + \overline{c' u'}$$

$$\overline{q_y / \rho} = \overline{\bar{c} v + c' v'} = (\bar{c} + \bar{c}'') (\bar{v} + \bar{v}'') + \overline{c' v'}$$

となり、さらに z 方向に水深 h の間の平均をとると

$$\overline{q_x / \rho} = \bar{c} \bar{u} + \overline{\bar{c}'' \bar{u}''} + \overline{c' u'}$$

$$\overline{q_y / \rho} = \bar{c} \bar{v} + \overline{\bar{c}'' \bar{v}''} + \overline{c' v'}$$

となる。右辺の第1項を2次元的な平均流による輸送とすれば、形式的に第2項と第3項を拡散項と考えて、（2.4）にならって、2次元のベクトルを用い

$$\overline{c'' \bar{u}''} + \overline{c' u'} = \bar{c} \bar{u}'' - D_t (\text{grad } \bar{c})_{xy \text{ 面}} = -D_{ap} \text{grad } \bar{c} \quad (2.15)$$

とかくことにすると、 D_{ap} は乱流拡散のほか、濃度と時間平均流速との鉛直分布の相関が含まれることがわかる。（2.15）で与えられる見掛けの拡散は、必ずしも $\text{grad } \bar{c}$ に比例するとは限らないが、鉛直方向に十分拡散が行なわれていると見られる場合には、（2.15）が成りたつと見てよい。

（2.15）を用いると、単位平面積当たりの汚濁物質の保存則は、水深を h として

$$\frac{\partial}{\partial t} (h \bar{c}) = -\text{div} (h \bar{q}) = -\text{div} (h \bar{c} \cdot \bar{u} - h D_{ap} \text{grad } \bar{c})$$

となる。さらに流量保存 $\partial h / \partial t = -\text{div}(h \bar{\mathbf{u}})$ を考慮すれば、平均値を示す $\bar{}$ を省略して

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad} c = \frac{1}{h} \text{div}(h D_{ap} \text{grad} c) \quad (2.16)$$

なる2次元の拡散の基礎式をうる。

2次元の拡散の実際的な解として、河川の一方から汚濁物質を放流するとき、それが河川の全幅にどのように拡散していくかを求める。取扱いを簡単にするために、河川を一樣な水深、一樣な幅とし、側壁の流れに及ぼす影響を無視して、流速 $\mathbf{u}$ および拡散係数 D_{ap} も一樣とする。流下方向を x 軸、横方向に y 軸をとると、このとき D_{ap} の非対角要素はなく、(2.16)は

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (2.17)$$

となる。一点に瞬間的に投入された汚濁物質の拡散は、兩岸の影響を無視すれば(2.9)と同様の式

$$c = \frac{S}{4\pi\rho h\sqrt{D_x D_y}t} \exp\left[-\left\{\frac{(x-ut)^2}{4D_x t} + \frac{y^2}{4D_y t}\right\}\right] \quad (2.18)$$

で与えられる。この解はトレーサーを注入して D_x, D_y を求めるとき用いられる。ここに S は投入量である。

汚濁物質が連続的に注がれる場合の定常解は、(2.18)を積分しても得られる。

$$c = \frac{Q}{4\pi\rho h\sqrt{D_x D_y}} \int_0^\infty \frac{1}{\tau} \exp\left[-\left\{\frac{(x-u\tau)^2}{4D_x \tau} + \frac{y^2}{4D_y \tau}\right\}\right] d\tau \quad (2.19)$$

Q は単位時間あたりの汚濁物質流入量である。

しかし実際には、このように連続して汚濁物質が注がれる場合、放流点の近傍を除いて、流下方向の濃度勾配は横方向の濃度勾配にくらべて著しく小さいのが普通であるから^{*}、(2.17)で $\partial^2 c / \partial x^2$ を含む項を省略し、定常状態に対して

$$u \frac{\partial c}{\partial x} = D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (2.20)$$

を解けばよいことになる。境界条件は、兩岸を通して物質の輸送がないことから、

* 横方向の代表長さとして川幅をとり、川幅 B に対する拡散時間を t_B とすると、 $t_B \sim B^2/D_y$ は現象の代表時間尺度と見られる。流下方向に対しては $L=ut_B$ が代表長さを表わす。したがって x 方向の代表的拡散速度は D_x/L であるから、上記の条件は $u \gg D_x/L$ すなわち $uB \gg \sqrt{D_x D_y}$ とおくことに当たる。

$$y=0 \text{ および } y=B \text{ において } \partial c / \partial y = 0, \quad (2.21)$$

および放流を受ける断面において放流状況などできめられる一定の y 方向の分布をもつとして

$$x=0, \quad 0 \leq y \leq B \text{ において } c = f(y) \quad (2.22)$$

とする。

南部³⁾ はこれらの境界条件を満足する (2.20) の解として

$$c = \frac{1}{B} \int_0^B f(y) dy + \frac{2}{B} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{D}{u} y \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 x} \cos \frac{n\pi y}{B} \int_0^B f(y) \cos \frac{n\pi y}{B} dy \quad (2.23)$$

をみちびき、さらに実際の汚水の流入状況が

$$f(y) = \begin{cases} c_s \cos(\pi y / 2b_T) & [0 \leq y \leq b_T] \\ 0 & [b_T < y \leq B] \end{cases}$$

で近似しうるとして計算を進めている。

ここでは特別な場合として、 $y=0$ の点に集中的に汚濁物質が流入する場合の解を挙げるにとどめる。この場合の解としては、汚濁物質の放流量を Q 、水深を h として

$$c = \frac{Q}{\rho B h u} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{D}{u} y \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 x} \cos \frac{n\pi y}{B} \right) \quad (2.24)$$

がえられる。 $x \ll u B^2 / D y$ のときには、対岸の影響を無視して得られる解

$$c = \frac{Q}{\rho h \sqrt{\pi u D y x}} \exp \left\{ -\frac{v y^2}{4 D y x} \right\} \quad (2.25)$$

で近似しうる。(2.24) を図2の中の実線で、(2.25) を破線で示す。(2.25) は (2.19) において Q を $Q/2$ とし、 $D_x \rightarrow 0$ としても得られる。

(2.23), (2.24)などを実際の河川に応用しようとする場合 (a) 水深が川幅方向に一樣なこと (b) 兩岸の影響が少いため $h \ll B$ であることなどを必要とするが、実測の結果から適当に D_y の値を求めれば、かなりよい結果がえられるようである。⁴⁾

2.3 流下方向の拡散 (1次元問題)

前項の2次元問題に対する解析は、容易に流下方向の1次元拡散問題になおすことができる。(2.14)に対応し流下方向の流速 u と濃度 c を

$$u = \bar{u} + \bar{u}'' + u', \quad c = \bar{c} + \bar{c}'' + c' \quad (2.26)$$

とおく。ただし $\bar{u}$, $\bar{c}$ は河川横断面内の平均値である。これを用いれば、流下方向の単位面積あたりの物質移動量 q_x の横断面平均値 $\bar{q}_x$ は

$$\bar{q}_x / \rho = \bar{c} \bar{u} + \bar{c}'' \bar{u}'' + \bar{c}' \bar{u}'$$

となる。さらに右辺の第2第3項が平均濃度勾配に比例するとして

$$\bar{c}'' \bar{u}'' + \bar{c}' \bar{u}' = -D_L (\partial \bar{c} / \partial x) \quad (2.27)$$

とおくと、河川単位長さ当たりの汚濁物質の保存式は

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \bar{c}) = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ A \bar{c} \bar{u} - A D_L \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right\}$$

とかける。ここに A は河川の横断面積、 D_L は1次元の見掛けの拡算係数である。流量の保存

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (A \bar{u})$$

を考慮すれば、平均値を示す $\bar{\quad}$ を省略して

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(A D_L \frac{\partial c}{\partial x} \right) \quad (2.28)$$

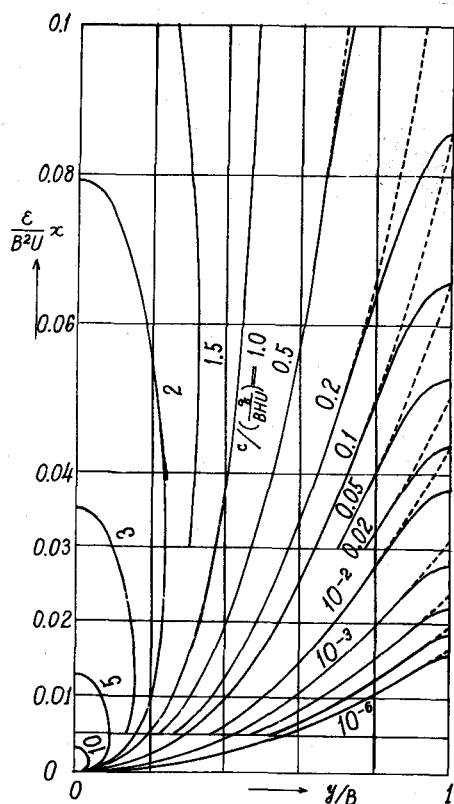


図2 横方向の拡散

が得られる。(2.28)が流下方向拡散の基礎式として用いられている。ここに

$$D_L = \overline{D_x} - \overline{c'' u''} / \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (2.29)$$

である。 $* D_L$ の値については後にのべるが、普通の乱流拡散係数とは著しく異なる値となることは注意を要する。つぎに実際上の意味のある(2.28)の解をいくつかあげてみる。

2.3.1 定常解

河川の流れが定常である場合には、 u および A は x のみの関数であり、流量の保存から

$$A_u = \text{const.} = R$$

となる。 R は固有流量である。さらに汚濁物質濃度分布も定常として $\partial c / \partial t = 0$ とみると、(2.28)は直ちに2回積分されて

$$c = c_1 + c_2 \exp \{ R \int^x dx / A D_L \} \quad (2.30)$$

なる解が得られる。

例として、 $x=0$ において単位時間当たり Q の汚濁物質の放流を受ける場合を考え、上流からの汚濁物質の流入はないものとする。境界条件は

$$x \rightarrow -\infty \quad c = 0$$

$$x = 0 \quad c_{x=0+} = c_{x=0-}$$

$$\left[c R - A D_L \frac{\partial c}{\partial x} \right]_{x=0+} = \left[c R - A D_L \frac{\partial c}{\partial x} \right]_{x=0-} + \frac{Q}{\rho}$$

また $x \rightarrow \infty$ で $c = \text{有限}$

とする。これらの条件を満足する解を(2.19)にしたがって

$$x < 0 \quad c = c_1 + c_2 \exp \{ R \int_0^x dx / A D_L \}$$

$$x \geq 0 \quad c = c_3 + c_4 \exp \{ R \int_0^x dx / A D_L \}$$

とおけば、

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3, \quad c_3 R - c_4 R = c_1 R - c_2 R + \frac{Q}{\rho}, \quad c_4 = 0$$

* 厳密には $D_L = \{ (\overline{D_t \text{grad } c})_{x \text{ 方向}} / \overline{c'' u''} \} / \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}$

となるから

$$\left. \begin{array}{ll} x < 0 & \text{で} \quad c = (Q/\rho R) \exp\{R \int_0^x dx / AD_L\} \\ x > 0 & \text{で} \quad c = Q/\rho R \end{array} \right\} \quad (2.31)$$

となる。 $x < 0$ に対する解は $x=0$ の点から離れると急激に減衰するので、殆ど意味がなく、また $x > 0$ に対しては濃度一定となり、拡散は考慮する必要がないことになる。このように、定常問題に対しては、単なる算術的希釈計算で十分である。

2.3.2 定常な等流における非定常解

(2.28) を一般の非定常問題として解くことは、実際の河川における u , A および D_L の値を用いた数値積分にまたなければならないので、これらの値が x にも t にもよらない定常な等流について、二三の解を求めてみる。

(2.28) はこのとき

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (2.32)$$

となる。

(a) $t=0$ において一点 $x=0$ に集中的に総量 S の汚濁物質を投入した場合の解は

$$c = \frac{S}{2\rho A\sqrt{\pi D_L t}} \exp\left\{-\frac{(x-ut)^2}{4D_L t}\right\} \quad (2.33)$$

与えられる。これは (2.10) と全く同じ形である。

(b) $t=0$ において $-x_0 < x < x_0$ の範囲に一樣に総量 S の汚濁物質を投入した場合には

$$c = \frac{S}{4\rho A x_0} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{x_0 - x + ut}{2\sqrt{D_L t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-x_0 - x + ut}{2\sqrt{D_L t}}\right) \right\} \quad (2.34)$$

となる。⁵⁾ ただし

$$\operatorname{erf}(x) \equiv (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-x^2} dx$$

である。

(c) $x=0$ の点において時刻 $t=0$ から一定量 Q の放流を開始したとき、 $t>0$ に対して $x<0$ で

$$c = \frac{Q}{2\rho R} \left[\exp(ux/D_L) \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x+ut}{2\sqrt{D_L t}}\right) \right\} - \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{D_L t}}\right) \right\} \right] \quad (2.35)$$

$x > 0$ で

$$c = \frac{Q}{2\rho R} \left[\left\{ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{D_L t}}\right) \right\} - \exp(ux/D_L) \left\{ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x+ut}{2\sqrt{D_L t}}\right) \right\} \right]$$

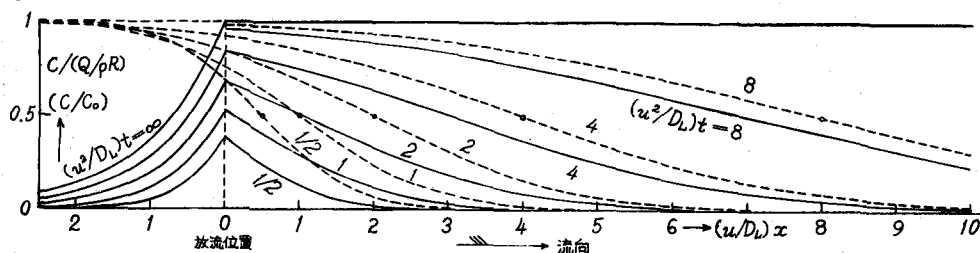


図3 放流開始後の拡散

となる。(図3) $t \rightarrow \infty$ とすると(2.31)に一致する。

(d) $x=0$ における濃度 c が一定値 $c=c_0$ に保たれる場合、 $t=0$ で $c=0$ とすると、 $t>0$ に対して

$$c = \frac{c_0}{2} \left[\exp(ux/D_L) \left\{ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x+ut}{2\sqrt{D_L t}}\right) \right\} - \left\{ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{D_L t}}\right) \right\} \right] \quad (2.36)$$

となる。 $t \rightarrow \infty$ とすると(2.31)で $Q/\rho R = c_0$ とおいたものに一致する。

2.3.3. 流下方向の拡散係数

前項に述べたような計算結果を河川における拡散現象に適用する場合に、 D_L として単なる乱流拡算係数

D_t より著しく大きな値を用いなければ実際と合わないことが知られている。これは(2.29)右辺第2項が、第1項にくらべてはるかに大きいことによる。しかしそれでも D_L の値が流状のみによって定められることは、(2.29)の $\bar{c}''$ の分布の形が一定で、その大きさが $\partial \bar{c} / \partial x$ に比例していることを示すと考えられる。

Taylor⁶⁾ は円管内の乱流について D_L を計算しており、河川の縦方向の拡散にもこの考えが基礎となるので、考え方を簡単に説明する。拡算物質を含む円管内の流れが、流下方向に一定の濃度勾配をもっていたとする。(例えば濃度が流下方向に行くにつれて大きいとする。)いま拡散を無視して考えれば、流れるにつれて、流速の速い中心部では濃度の低い流れが速やかに送られてくるのにくらべ、外周では濃度の高いものが比較的小くまで停滞するため、円管の半径方向に濃度勾配を生じることになる。ところが

実際には半径方向の乱流拡散のため、半径方向では中心に向って物質の移動を生じ、これが流速分布による前述の濃度勾配をつくろうとする働きとつり合ったところで落ちつくことになる。このつり合った状態における半径方向の濃度勾配と、半径方向の流速分布により物質の輸送現象が生じるのである。(2.6)を円管に適用すれば、 $\bar{u}$ は軸方向であるから

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \text{div} (D_t \text{grad } \bar{c})$$

半径方向の濃度勾配が流下方向にくらべて大きいとして、右辺において流下方向の乱流拡散を無視すれば、円筒座標を用いて

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D \frac{\partial \bar{c}}{\partial r} \right).$$

平均流速 $\bar{u}$ で移動する系からみて

$$x' = x - \bar{u} t$$

とおき、この系から見れば前述のつり合い状態では濃度が定常になるとして*

$$(\bar{u}(r) - \bar{u}) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x'} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D \frac{\partial \bar{c}}{\partial r} \right) \quad (2.37)$$

となる。 $\partial \bar{c} / \partial x'$ が最初に与えた濃度勾配に等しくつねに一定であるとすれば、(2.37)を積分して

$$\bar{c} = c_0 + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x'} x' + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x'} \int_0^r \frac{1}{r D} \int_0^r r (\bar{u}(r) - \bar{u}) dr dr \quad (2.38)$$

で濃度分布が与えられることになる。(2.38)を(2.29)に代入すれば、 $\bar{u}'' = \bar{u} - \bar{u}$, $\bar{u}'' = 0$ および $\partial \bar{c} / \partial x = \partial \bar{c} / \partial x$ であるから

$$\begin{aligned} D_L &= \bar{D} + \frac{2}{a} \int_0^a (\bar{u} - \bar{u}) \bar{c} r dr / \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \\ &= \bar{D} + \frac{2}{a} \int_0^a r (\bar{u} - \bar{u}) \int_0^r \frac{1}{r D} \int_0^r r (\bar{u} - \bar{u}) dr dr dr \quad (2.39) \end{aligned}$$

より D_L を求めることができる。Taylorは円管内の乱流の流速分布としてNikuradseの実験に基づいた不変分布形(図4)

$$\frac{u - u_0}{u_*} = \phi \left(\frac{r}{a} \right) \quad (u_0 \text{ は中心流速})$$

* $\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \text{const.}$ とすれば容易に検証される。

を仮定し、径方向の物質の拡算係数が運動量の拡算係数すなわち動粘性係数に等しいとする Reynolds の仮定

$$D_r = \frac{\tau}{\rho \frac{\partial u}{\partial r}} = \frac{-q_r}{\frac{\partial c}{\partial r}} \quad \left(\tau = \frac{r}{a} \tau_0 = \frac{r}{a} \rho u_*^2 \right)$$

を用いて

$$D_r = r u_* / \phi'$$

とし、これらを (2.8) に代入し、

$$\bar{D}_x = 0.052 \quad a u_*$$

として

$$D_L = 1.01 \quad a u_*$$

(2.40)

なる結果を導いている。

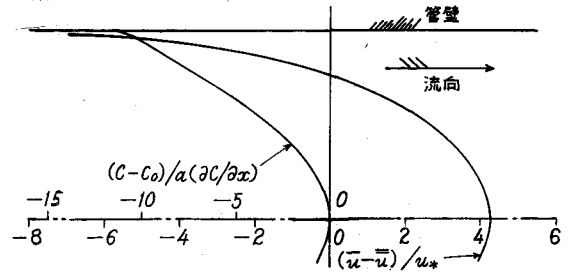


図4 内管内の乱流拡散

(2.40) を、Darcy-Weisbach の摩擦係数 $f = 8 (u_* / u)^2$ および径深 $R = a/2$ を用いて表わせば

$$D_L = 7.14 \quad R u f^{1/2}$$

となる。またさらに Manning の粗度係数 n を用いれば、 $f = 8 n^2 g / R^{1/3}$ より

$$D_L = 63 n u R^{5/6} = \frac{63 n}{R^{1/6}} \quad Re \cdot \nu \quad (m\text{-sec系}) \quad (2.41)$$

となる。Harleman⁷⁾ は (2.41) を開水路・河川にも適用している。河川においては、軸対象な円管についての計算とは数値的には若干相違する筈であるが、^{*} 実測結果とかなりの一致が報告されている。

トレーサーを投入して、(2.22) から D_L を実測する方法もいろいろ研究されているが、ここでは省略する。 D_L の値は河川の状況に応じて非常に変化するため、 D_L の推定は非常にむづかしい問題である。

3 汚濁物質の酸化と溶存酸素の変化

最初にもふれたとおり、河川に放流される污水にはたいいてい不安定な有機物質を多く含むが、水中に生息する好気性の微生物によつて徐々に酸化され、 O_2 、 H_2O 、硝酸塩など安定な無機物に変化していく。これとともなつて水中に溶存する遊離の酸素が消費される。清浄な河川では溶存酸素濃度は、大気と平衡するいわゆる飽和濃度をもっているが、污水の流入を受けて酸素が消費されると、次第に濃度を減ずる。しかし飽和濃度との差すなわち酸素不足量に応じて、水表面などから酸素が補給されている、いわゆる再曝気作用が行われる。このようにして河川の自然の浄化作用が維持される。

汚水中の有機物質の量が少ない場合ないし酸化速度の遅い場合には、再曝気による酸素の補給が十分に水中の酸素の消費をまかなうことができるが、濃度が高くなると再曝気が間に合わず、溶存酸素は消費しつく

^{*} (2.39) に対数分布を仮定すると $D_L = 0.324 a u_* / \kappa^3 = 0.648 R u_* / \kappa^3$ ，また同様な計算を2次元流（無限幅）として行なえば、 $D_L = 0.404 R u_* / \kappa^3$ となる。

されることになり、好気性の微生物は死滅して河川は腐敗し悪臭や汚色を呈するにいたる。したがって河川における汚濁物質の酸化速度ないし酸素消費速度と、再曝気速度とが、極めて重要な問題となる。

3.1 BOD除去速度と脱酸素反応速度

水中の有機分質が好気的な微生物によって酸化されるときには、水中の溶存酸素を消費する。この酸素の消費量は、水中の有機物濃度を表わす重要な指標となり、生物化学的酸素要求量(BOD)と言われる。微生物による有機物質の酸化過程は非常に複雑であり、酸化速度も有機物質の種類、濃度、生息する生物の状態などによって大きく左右される。また酸化の段階に応じてあらわれる生物相も変化し、通常2段階にわかれ、第1段階で炭素化合物が酸化され、つぎに窒素化合物が酸化される。しかし十分な酸素の存在のもとでは、最終的にはすべての有機物が酸化されると考えられ、それまでの全酸素消費量が最終BODである。実際の水質試験では、最終BODを求めるのは非常に長期間を要するので、便宜上5日間の酸素消費量BOD₅が用いられる。これは主として炭素化合物による酸素消費量となる。

酸化の進行過程の簡単な表示をうるために酸化速度が最終BODの値 L および生物体の濃度 S によって与えられ、その他の条件はすべて一定とする。 S にくらべて L が十分大きく、微生物の増殖が最大速度で行なわれるときには、 S の増加が S 自身に比例するねずみ算式の対数増殖

$$dS/dt = K_1 S \quad S = S_0 e^{K_1 t} \quad (3.1)$$

となる。逆に L が小さいときには、増殖速度 K_1 は L に比例して低下することになり、

$$dS/dt = K_2 SL \quad (3.2)$$

となる。また任意のBODの値 L に対しては

$$\frac{dS}{dt} = \frac{K_1 SL}{L + L_1} \quad L_1 = \frac{K_1}{K_2} = \text{常数} \quad (3.3)$$

8) となるといわれる。これは、生物酸化を酵素反応として導かれる、Michaelis-Mentenの式として知られている式である。

微生物は有機物を摂取して増殖するわけであるが、このとき L が S に変化するのに一定の割合がある。この比を a とすると、

$$dS = -a dL \quad (3.4)$$

が成り立つことになる。したがって(3.1)に対するBODの変化は

$$L = L_0 - \frac{S_0}{a} (e^{K_1 t} - 1) \quad (3.5)$$

(3.2)に対しては

$$L = L_0 (L_0 + \frac{S_0}{a}) / [L_0 + \frac{S_0}{a} \exp \{K_2 (L_0 + \frac{S_0}{a}) t\}] \quad (3.6)$$

(3.3) に対しては

$$\left(L_1 + L_0 + \frac{S_0}{a} \right) \ln \frac{L_0 + (S_0/a) - L}{S_0/a} - L_1 \ln \frac{L}{L_0} = K_1 \left(L_0 + \frac{S_0}{a} \right) t \quad (3.7)$$

となる。(3.5)、(3.6)はこの特別な場合とみられるが、とくに(3.6)において

$$L < L_0 \ll S_0$$

とすると

$$L = L_0 \exp \{ - (K_2 S_0 / a) t \} = L_0 e^{-K t} \quad (3.8)$$

となるが、これは(3.2)で $S = S_0$ 一定とおいたことに相当する。すなわちBODが低く事実上生物の増殖が無視しうるときには、BODの減少は一次反応式

$$\frac{dL}{dt} = -KL \quad (3.9)$$

に従うことになる。

実際の河川における微生物による除濁作用は、従来一次反応(3.9)に従うものとしてとり扱われてきたが、その反応速度恒数 K の値は、前述の諸原因で、河川により、また同一河川でも条件によつて変化する。河川における反応速度をしらべるにも、大抵の場合前述の BOD_5 試験の結果にたよることになる。水質の採取試験における酸化反応が一次反応式に従うものとして、水質試験における速度恒数を K_s とすると

$$BOD_s = L_0 (1 - e^{-K_s \times 5 \text{ 日}}) \quad (3.10) \quad \text{図5 BODの減少と生物体の増殖}$$

ここに L_0 は試料採取時の最終BODである。実験室における経時的な酸素の測定から K_s の値を求めることは容易であるが、実験室の試験条件と河川における条件とは異なるため、 K_s の値から河川における反応速度を推定することは許されない。河川における酸化反応を一次反応として、その反応速度恒数を K_r とおけば、

$$L = L_0 e^{-K_r t} \quad (3.11)$$

となる。そこで、河川に2つの測定点A、Bを設定し、AB間の流下時間を t_{AB} とすると、两点におけるBODの間には

$$L_B = L_A e^{-K_r t} \quad (3.12)$$

なる関係がある。したがってA、B两点から試料を採取して BOD_5 を求め、それぞれ $BOD_5(A)$ 、 $BOD_5(B)$ なる値を得たとすれば、(3.10)、(3.12)より

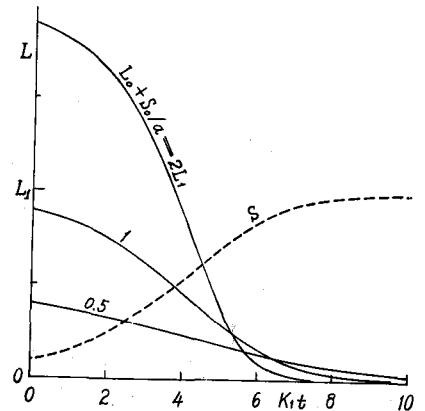


図5 BODの減少と生物体の増殖

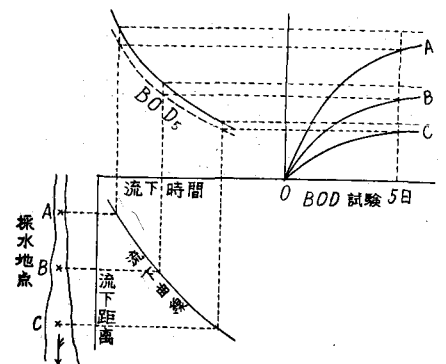


図6 河川におけるBODの変化

$$K_r = \frac{1}{t} \ln \frac{L}{AB} = \frac{1}{t} \ln \frac{BOD_5(A)}{BOD_5(B)} \quad (3.13)$$

となり、これから K_r を求めることができる。多くの測定点間で求めた K_r の値が一致しない場合とか、 BOD 試験における反応が (3.9) に従わないとき、あるいは各測点の試料について K_s の値が異なる場合には、 BOD_5 から K_r を求めることができず、この場合河川における酸化速度を求めるには、各測点における最終 BOD が必要となる。しかし多くの河川では一次反応に従い、(3.13) を用いることができるとされている。

河川における K_r の値は、実験室における K_s の値よりも一般に大きい値をとることが知られている。 K_r に影響を及ぼす因子としては、1) 河川の乱れによる有機物と微生物との接触頻度の増加による酸化促進、2) 河床に生息する微生物の成長による酸化、3) 放流された有機物の急速な化学的酸化、4) 窒素、磷など栄養物の不足による微生物の増殖のおくれがあげられる。また BOD 濃度が高く酸素が不足になったときは、もちろん好気性の微生物による酸化は抑制される。河川における BOD の変化には、このほかに酸素の消費をともなわない 1) 沈殿による BOD の減少、2) 沈殿物の掃流による増大、3) ガス化しやすい有機物の揮散があげられる。 BOD の減少が酸化のみによるならば、水中の酸素の消費は BOD の減少に等しいはずであるが、酸素の消費を伴わない BOD の変化があるために、両者は一般には異った値を示すことになる。汚濁物質の酸化による除去が一次反応に従うときには、酸素の消費速度 dC/dt (C は酸素濃度) も BOD に比例し、

$$\frac{dC}{dt} = -K_d L \quad (3.14)$$

とすることができ、 K_d は脱酸素恒数である。河川における有機物の除去がすべて生物化学的な酸化によって行なわれるときには $K_d = K_r$ であり、沈殿による除去を伴うときには $K_d < K_r$ 、河床沈積物の巻き上げがあれば $K_d > K_r$ となる。

3.2 溶存酸素の補給

水中における酸素の飽和濃度は、Henry の法則に従って水に接する気体中の酸素の分圧に比例するほか、温度や溶解物質の影響を受ける。大気に接する河川水中の溶存酸素飽和濃度に最も大きな影響を与えるのは、水温および河口近くにおける塩分濃度である。これらを図 7 に示す。

K_d	K_r
3.0	3.0
0.15	1.7
0.3	0.75
0.2	1.0

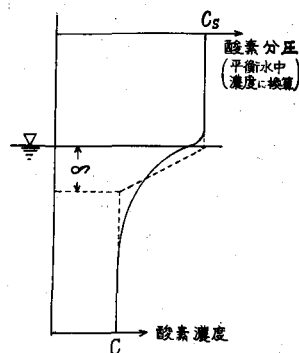
河川は流下する途中で常に大気に接触し、清浄な河川では溶存酸素は飽和濃度を保って大気中の酸素分圧と平衡を保っている。しか

表 1. K_d, K_r の例
(1/day)
(Eckenfelder の)
著書による

し有機物質の汚染を受けると、酸化によって酸素が消費され、水中の

酸素濃度が低下して大気との平衡状態が破れ、大気からの自由表面を通して水中へ酸素の補給、すなわち再曝気が行なわれる。

酸素が大気中より河川内部まで補給される過程は、空気および水の乱流拡散および分子拡散であるが、空気中における酸素の分子拡散係数は水中におけるよりも著しく大きく、また自由表面の近傍を除いては乱流拡散が卓越するため、酸素の輸送に与える濃度勾配は、自由表面に近接する水中部分に集中し、この部分が酸素の補給速度に決定的な影響を与えることになる。このような現象は、簡単には薄膜理論によって説明されている。



この理論にしたがえば、自由表面に接する水中部分に内部の水と混合

しないいわゆる薄膜が存在し、その中では酸素は分子拡散によって輸送されるが、それ以下では乱流拡散のために酸素濃度は一様であると

図7 水表面近傍における酸素濃度分布

する。鉛直下方に z 軸をとり、薄膜中の酸素濃度 C_1 は自由表面 $z=0$ で飽和濃度 C_s に等しく、薄膜の下端 $z=\delta$ (δ は薄膜の厚さ) では内部の濃度 C に等しいとすると、自由表面の単位面積あたり単位時間に輸送される酸素の量 q は

$$q = -D_L \frac{\partial C}{\partial z} = D_L \frac{C_s - C}{\delta} = K_L (C_s - C) \quad (3.15)$$

で与えられることになる。ここに D_L は水中における酸素の分子拡散係数であり、 $K_L = D_L / \delta$ は液膜係数といわれる。薄膜の厚さ δ を与える実験公式をつくれば、(3.15) は実用的には便利であるが、理論的には自由表面近傍の複雑な拡散現象を仮想のパラメータ δ に背負させたすぎない。

O'Connor および Dobbins は表面再生速度 (surface renewal) τ を導入し、自由表面近傍の拡散現象を乱れと関連づけることによって理論を展開している。

まず静水中への酸素の移動を考える。前と同様に z 軸を鉛直下方にとり、濃度 C を z および時間 t のみの関数とすると、分子拡散の方程式は

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (3.16)$$

で与えられる。自由表面では C は常に飽和濃度 C_s に等しいとし、初期条件として $0 < z < \infty$ において $C = C_0$ とすれば、(3.16) の解として

$$C = C_s - (C_s - C_0) \operatorname{erf} \frac{z}{2\sqrt{D_L t}} \quad (3.17)$$

を得る。またこれから酸素の吸収速度 q は

$$q = -D_L \left[\frac{\partial C}{\partial z} \right]_{z=0} - (C_s - C_o) \sqrt{\frac{D_L}{\pi t}} \quad (3.18)$$

となる。さて乱流状態においては、水表面はたえず内部の水とおきかえられると考え、 dt 時間内におきかえられる水表面の部分の水表面全面積に対する割合を $r dt$ とし、これで前述の表面再生速度 r を定義する。乱水の random 性により、表面の再生更新がおきかえられる水面の過去の露出時間 t に無関係に行なわれるとすると、露出時間が t から $t+\Delta t$ までの間の表面の全面積に対する比 $f(t) \Delta t$ が dt 時間に新しく内部から露出した水によっておきかえられる割合は $f(t) \Delta t \cdot r dt$ に等しいから

$$d(f(t) \Delta t) = f(t) \Delta t \cdot r dt$$

となる。これを解いて、 $\int_0^\infty f(t) dt = 1$ とおけば、

$$f(t) = r e^{-rt} \quad (3.19)$$

となり、 $f(t)$ の形がきめられる。したがって (3.18) に (3.19) の比重をかけて積分すれば、平均の酸素吸収速度 $\bar{q}$ が求められる。

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \int_0^\infty q f(t) dt = \int_0^\infty (C_s - C_o) \sqrt{\frac{D_L}{\pi t}} \cdot r e^{-rt} dt \\ &= (C_s - C_o) \sqrt{D_L r} \end{aligned} \quad (3.20)$$

(3.15) の K_L を用いれば

$$K_L = \sqrt{D_L r} \quad (3.21)$$

薄膜理論と比較すれば

$$\delta = \sqrt{D_L / r}$$

によって等価の薄膜の厚さが与えられる。

K_L を求めるためには r を与えなければならないが、O'Connor らは河川の流れを比較的浅くて流速の速い場合の非方性乱れと、その逆の場合に対する等方性乱れとに分けて考え、Chézy 係数 $C = U / \sqrt{HI}$ を用いて

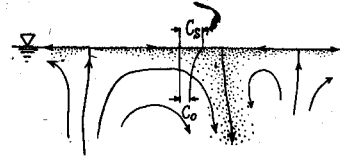


図8 酸素吸収のモデル

$C < 8 \sim 11$ [m-sec系] のとき

非等方性乱れで

$$r = \sqrt{gHI} / \kappa H$$

$C > 8 \sim 11$ のとき

等方性乱れで

$$r = U / H$$

(3.22)

で与えられるとしている。ここに H は水深、 I は勾配、 κ は Karman 常数である。(3.21)(3.22)を用いて酸素吸収速度を計算し、非等方性および等方性の広い範囲にわたって実測結果とよく合う結果を得ている。

このような酸素吸収による河川の溶存酸素濃度 C の変化 dC/dt は、川幅を B 、断面積を A とすれば

$$\frac{dC_o}{dt} = \frac{B}{A} q = \frac{B}{A} K_L (C_s - C_o) = K_2 (C_s - C_o) \quad (3.23)$$

とかける。 K_2 を再曝気係数といい、液膜係数 K_L と

$$K_2 = (B/A) K_L \quad (3.24)$$

なる関係にある。

溶存酸素は、自由表面を通して上述のように補給されるほか、水中の植物の光合成による酸素の放出、あるいは河床に沈積した汚泥の嫌氣的分解にもなって発生上昇するガスによる酸素の追い出しを受けることがある。

3.3 溶存酸素の平衡式

Streeter と Phelps⁹⁾ は、河川における水質の時間的变化にのみ着目し、有機物の酸化による酸素の消費(3.14)と再曝気による酸素の補給(3.23)とを考え、溶存酸素の平衡式として

$$\frac{dC}{dt} = -K_d L + K_2 (C_s - C) \quad (3.25)$$

を導いた。^{*} さらに BOD の変化が一次反応式に従うものとして、(3.25)に(3.11)を代入すると

^{*} Streeter および Phelps は K_d と K_r とを同一と考えていたが、後に差のあることが認められた。

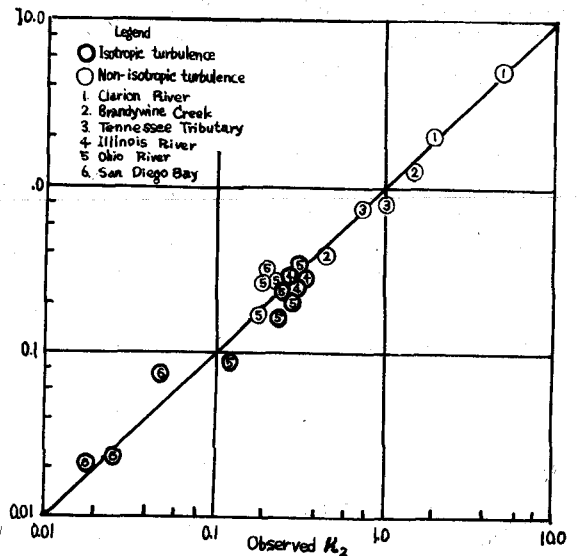


図9 再曝気係数(3.1)(3.2)と実測値との比較 (O'Connor)

$$\frac{dC}{dt} - K_2(C_s - C) = -K_d L_0 e^{-K_r t} \quad (3.26)$$

となる。溶存酸素濃度と飽和濃度との差を酸素不足量

$$D = C_s - C$$

とすれば、 C_s を常数とみて

$$\frac{dD}{dt} + K_2 D = K_d L_0 e^{-K_r t} \quad (3.27)$$

となる。BODの変化が一次反応式に従うときは、 K_d も常数となると考えられるが、さらに K_2 も常数であると仮定すれば、(3.27)の解は、 $K_2 \neq K_r$ として

$$D = \frac{K_d L_0}{K_2 - K_r} (e^{-K_r t} - e^{-K_2 t}) + D_0 e^{-K_2 t} \quad (3.28)$$

となる。ここに D_0 は $t=0$ における酸素不足量である。

(3.28)は一般に D の極大値 D_{max} をもち

$$t = t_c = \frac{1}{K_2 - K_r} \ln \left\{ \frac{K_2}{K_r} \left(1 - \frac{D_0}{L_0} \frac{K_2 - K_r}{K_d} \right) \right\}$$

のとき

$$D_{max} = (K_d / K_2) L_0 e^{-K_r t_c}$$

$$(3.29)$$

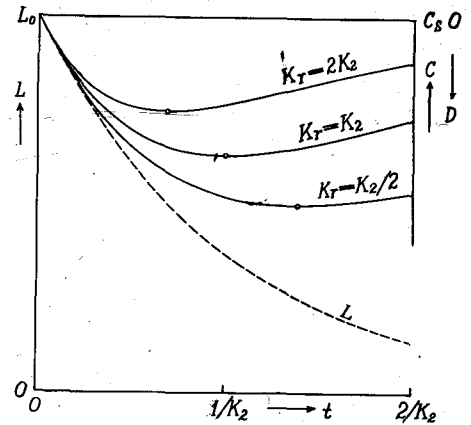


図10 酸素濃度変化
(3.28) ($D_0=0$ とする)

となる。これらの式は、BODの除去が一次反応に従うとして求められたもので、そのためには微生物の生息に十分な溶存酸素が存在しなければならない。したがって D が増加して C_s に近づけば、(3.28)はなりたたなくなる。

3.4 嫌気的狀態における汚濁物質の除去

河川の有機物濃度が高く、好気性の微生物による酸化のために溶存酸素が消費しつくされると(0.2~0.5 ppm)、好気性の微生物は活動を停止し、代って嫌気的な微生物が増殖するにいたる。河川では嫌気的

な状態においても嫌気性の微生物による有機物の分解が行なわれ、酸素の消費ないしはガス発生による酸素の追い出し作用が3.2に述べた酸素補給量以下になれば、再び好気的狀態に恢復することになる。

好気性の微生物は溶存する遊離酸素を摂取するが、嫌気性の微生物は硝酸・亜硝酸・硫酸などの結合酸素を酸素源としており、硝酸を亜硝酸に、さらにはアンモニア性に変え、硫酸を硫化水素に変えて酸素をとり、有機物を分解して、最終的にはメタン、炭酸ガスなどを発生させる。

このようにして、嫌気状態における有機物質の分解、あるいは好気的狀態にもどる地点を検討する場合などには、窒素化合物などの変化が極めて重要である。

4 河川における汚濁物質と溶存酸素の濃度変化

前節では、河川における有機物質の除去は一次反応に従い、また溶存酸素の平衡は(3.26)で与えられ、その時間的变化を求めた。河川の流れが拡散を伴わないものであれば、流下時間と移動距離とを対応させることにより、Lagrange 的に

$$x(t) = \int_0^t u \, dt \quad (4.1)$$

とおくことによって、(3.11)と(3.28)からBODと溶存酸素の分布が求められることになる。しかし実際には2.3で計算したような流下方向の拡散を考慮しなければならない。

(3.9)および(3.25)で与えられるBODおよび溶存酸素の変化を、(2.28)で与えられる流下方向の拡散の式に導入すれば、基礎方程式として

$$\frac{\partial L}{\partial t} + u \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(AD_L \frac{\partial L}{\partial x} \right) - K_r L \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(AD_L \frac{\partial C}{\partial x} \right) - K_d L + K_2 (C_s - C) \quad (4.3)$$

が得られる。

O'Connor^{10) 11)} は定常な等流における定常的なBODおよび溶存酸素不足量 $D = C_s - C$ の分布を考え

$$u \frac{\partial L}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - K_r L \quad (4.4)$$

$$u \frac{\partial D}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + K_d L + K_2 D \quad (4.5)$$

とおき、つぎの解を与えている。

$$\left. \begin{aligned} L &= L_0 e^{J_1 x} \\ D &= \frac{K_d L_0}{K_2 - K_r} e^{J_1 x} + \left(D_0 - \frac{K_d L_0}{K_2 - K_r} \right) e^{J_2 x} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

ここに

$$J_1 = -(\sqrt{u^2 + 4K_r D_L} - u)/2D_L, \quad J_2 = -(\sqrt{u^2 + 4K_2 D_L} - u)/2D_L \quad (4.7)$$

実際には $u^2 \gg K_r D_L$, $u^2 \gg K_2 D_L$ であるから、

$$J_1 \doteq -K_r/u, \quad J_2 \doteq -K_2/u$$

となる。したがって Streeter および Phelps の導いた (3.11) および (3.28) において (4.1) あるいは $t=x/u$ により t を x におきかえた式

$$\left. \begin{aligned} L &= L_0 e^{-(K_r/u)x} \\ D &= \frac{K_d L_0}{K_2 - K_r} e^{-(K_r/u)x} + \left(D_0 - \frac{K_d L_0}{K_2 - K_r} \right) e^{-(K_2/u)x} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

でよいことになる。一般に流水の状態が流下方向で変化する場合の定常問題では、拡散項は省略できるとしても u および K_2 は x の関数となる。このときの解としては

$$\left. \begin{aligned} L &= L_0 \exp \left\{ -K_r \int_0^x \frac{dx}{u} \right\} \\ D &= \exp \left\{ \int_0^x \frac{K_2}{u} dx \right\} \left[D_0 - K_d L_0 \int_0^x \exp \left\{ -\int_0^x \frac{K_2 K_r}{u} dx \right\} dx \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

が容易に得られる。

(4.2) および (4.3) における拡散項が問題になるのは、つぎに述べる感潮河川における場合と、非定常な汚染分布を求める場合である。非定常問題における BOD 分布の変化を求めることは、

$$L = L_1 e^{-K_r t} \quad (4.10)$$

とおくことにより (4.2) は (2.28) と同形となるので、拡散方程式 (2.28) を解くことに帰する。^{*}

しかし 溶存酸素の変化を求めることは一般には面倒である。特別な場合についての計算は若干報告されているが、ここでは省略する。

* 5.2 (5.11) 以下を参照

5 感潮河川における問題

河川感潮部分において、汚濁問題におよぼす潮汐の影響は、1) 固有流量による物質輸送のほかに、入退潮による周期的な物質の往復輸送を生じること、2) 入退潮にともなう潮流流速により拡散作用が増大すること、3) 河口から侵入した塩水は、動力の作用で感潮部に成層流をつくるように作用し、これが物質の拡散に大きく影響すること、4) 塩水の侵入は、河川水中の物質と化学的ないし物理化学的に作用して、沈殿などをおこさせることがあること、5) 塩水侵入により酸素の飽和濃度が低下することなどが挙げられる。これら感潮部における汚濁解析には、まず感潮部の水理的な特性を十分理解しなければならないが、流状を解析することが、すでに非常に複雑で困難な問題である。

感潮部分の水理的な状態を、塩分侵入の状況から見て、普通には強混合、緩混合および弱混合の3通りに分けている。強混合型では、入退潮による拡散混合が強く、河川の横断面内の塩分の分布は殆ど一様となり、事実上塩分濃度は流下方向の位置のみの関数となる。弱混合型では、入退潮による混合が弱く、淡水と塩水とが上下に明瞭な二層をなして、いわゆる塩水くさびを形づくる。緩混合型はこれらの中間であり、流下方向にも鉛直方向にも濃度勾配を生じる。

これらの3つの型は、もちろん明瞭な区別はないが、実際の感潮河川の特性はひろくこれらの諸型式にわたっているため、感潮部に対する画一的な水理の取扱いをすることは不可能であり、水理特性に依存する汚濁問題も、各混合型式に応じて論じなければならないであろう。しかし、従来の研究は、概して取扱いの容易な強混合の場合から進められてきている。

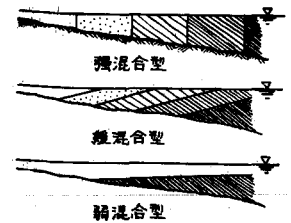


図1.1 感潮河川の混合型

5.1 Tidal Prism の理論

感潮河川の入退潮による汚濁物質の希釈混合を評価するのに、古くから tidal prism の考えが用いられた。河川感潮部分の干潮時における容積を V 、満潮時における容積を $V+P$ とするとき、満潮時の水面と干潮時の水面との間にはさまれた P の部分が、いわゆる tidal prism である。感潮部分を一つの混合タンクと考えれば、満潮から一潮時の間に、 $V+P$ の河川水と海水との混合水から P だけを取り去り、再び一定量 R (固有流量 $\times$ 1 潮時) の河川水と $P-R$ の海水とで満たされることになる。1 潮時の後に状態がもとに復するものとし、河川水の収支に着目すれば、感潮部における河川水の濃度 c_R は次式で求められることになる。

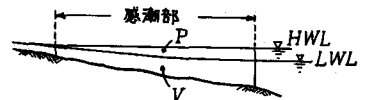


図1.2 Tidal Prism

$$c_R P = R \quad c_R = R/P \quad (5.1)$$

感潮河川に対する汚濁物質の流入が、汚濁物質濃度 C_0 の河川固有流量のみによって運びこまれるとす

とすれば、感潮部分における汚濁物質濃度 c は

$$c = c_o \quad c_R = c_o \quad R/P$$

で与えられることになる。また逆に、海水の塩分濃度を S_o とすると、感潮部分における塩分濃度 S は

$$S = S_o (1 - c_R) = c_o (1 - R/P)$$

となる。実際には、たとえ強混合の感潮河川でも、流下方向に塩分濃度の分布が存在するので、感潮部分を完全混合と考えるのは不当であり、過大な希釈倍率を与えるものとされている。

Ketchum 12) 13) は潮汐による混合が感潮部分全長にわたっては行なわれないことから、感潮部分を数個の区間に分けて取りあつかった。各区間のとりかたは、つぎの通りである。(1) 感潮部の上流端は、その断面より上流側における満潮時の容積と干潮時の容積の差 P_o が1潮時の間の河川の固有流量 R に等しくなるようにとる。このとき、この感潮部上流端断面を通して、上げ潮時には流量は0、下げ潮時には R なる量が流下することになるとする。(2) 第0区間は感潮部上流端より上流側とし、これから以下の各区間は、長さを入退潮流による粒子の平均移動距離にとる。したがって、第 n 区間の干潮時の容積を V_n 、満潮時を $V_n + P_n$ とすると、

$$V_n + P_n = V_{n-1} + 1 \quad (5.2)$$

となる。(5.2) を $n=0$ にまで用いれば、

$$P_o = R \quad (5.3)$$

であるから、

$$V_n = V_o + R + \sum_{i=1}^{n-1} P_i \quad (5.4)$$

となる。^{*} つぎに、1潮時の間で、各区間ではつぎの経過をたどるものとする。(1) 満潮時には各区間で完全に混合が行なわれるとする。(2) 1潮時の間に、この区間から tidal prism の分 P_n だけの水量が入れかえられる。新たに流入した P_n のうち、河川水の量は R に等しいとする。以上の仮定から、最初満潮時に第 n 区間にあった河川水の量を Q_n とすると、そのうちで1潮時の後に同じ区間に残留している部分は

$$Q_n \times \frac{V_n}{V_n + P_n} = Q_n (1 - r_n)$$

^{*} これは、前述の各区間長さを粒子の移動距離とする考えに厳密には矛盾する。この考えを守るなら(5.4)

は $V_n = R + \sum_{i=1}^{n-1} P_i$ とすべきであるが、上流端近くの区間数をいたずらに増すだけで、計算結果に及ぼす影響は、上流端を除いては僅かと思われる。

ただし r_n は交換比で

$$r_n = \frac{P_n}{V_n + P_n}$$

である。固有流量 R が一定で、入退潮がくり返され、1 潮時の後にはもとの状態にもどるような定常状態にあるとすれば、上げ潮時には河川水は R だけ補給されて Q_n になるから

$$Q_n(1 - r_n) + R = Q_n$$

したがって

$$Q_n = \frac{R}{r_n} = \frac{V_n + P_n}{P_n} R \quad (5.5)$$

(5.1) と同様河川水の濃度を c_R で表わせば、

$$c_R = \frac{Q_n}{V_n + P_n} = \frac{R}{P_n} \quad (5.6)$$

すなわち、1 潮時に対する固有流量を、各区間の tidal prism の量まで海水で希釈したことに相当する。

感潮河川の希釈についての上述の理論は大きな仮定を含むものであり、とくに 1 潮時 1 区間に流入する河川水量が R に等しいとした仮定の意味は明確に与え難いが、二三の実測例とよく合うことが Ketchum により報告されている。その一例を図 13 に示す。

またこの理論は、満潮時に各区間内は完全に混合されると仮定しているの、強混合型の感潮河川に適用されるものであり、緩混合あるいは弱混合型では等価的には河床が高められたことにあたり、したがって区間の数が減少し、 P_n は大きくなり、 c_R の値は小さくなると考えられる。感潮部の形状により、区間の数が少なくなる場合にもあまり良い一致が得られないといわれている。(14)

Ketchum の理論では、各区間の分割が単に拡散強度を代表する尺度としてだけの意味ではないので、対応が明確ではないが、拡算強度を代表する意味でのみにこの区間を用いるならば、実際の拡散強度に応じてきめるべきである。このよう

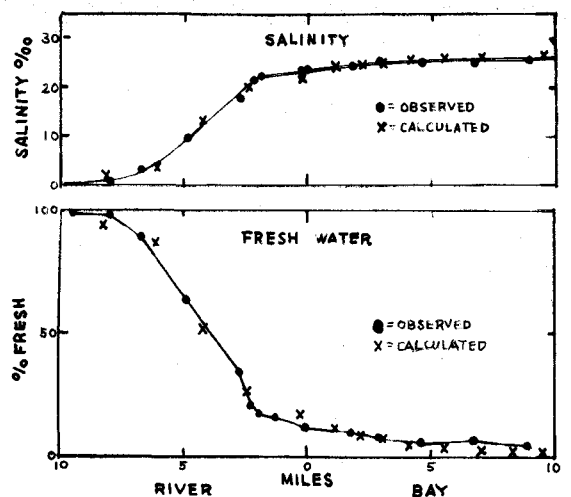


図 13 Tidal prism による計算値と実測値との比較 (Ketchum)

な意味で Preaddy¹⁵⁾ は一つの改良法を提案し、Thames 河に適用してよい結果を得ている。しかし、これはむしろ次節にのべる拡散方程式を用いた取りあつかいの、一つの数値解法とも見るべきものであろう。ここでは説明を省く。

5.2 拡散計数を用いた理論

強混合型の感潮河川における汚濁物質の拡散問題も、一次元的にとり扱うかぎりでは、(4.2)、(4.3)を周期的に変化する流速などの水理的な条件を与えて、非定常な係数をもつ式として解くことに尽きる。すなわち、水理学的な条件から、任意断面 x における u, A, D_L の変化を与えて(4.2)を解くことができれば、感潮部における汚濁物質の推移を知ることが、原理的にはできる筈である。しかし実際の河川において、とくに D_L の変化を詳細に求めることが困難なことから、非定常係数の式の取り扱いが厄介であるので、 D_L の推定法と(4.2)の簡略化した解法とに興味が向けられてきている。

(4.2)の取り扱いの最も単純化したものは、Kent¹⁶⁾の理論で代表されるような、(4.2)を1潮時の平均値を支配する式と見るものである。このように見れば、入退潮による流れは単に変動流速として乱れ速度と同様に扱われ、平均流速としては、単に河川の固有流量に対する流速をとりあげることになる。このように考えれば、潮汐を完全な周期運動とみなせば(4.2)の u, A, D_L は x のみの関数として扱うことが可能となる。

Kent は保存物質に対する1次元の拡散方程式(2.28)において、解析的に解を求めうる簡単な場合として、(1) u, A, D_L がすべて定数の場合(特解として、(2.33)を挙げている)、(2) u, A は定数で D_L が x の1次関数の場合、(3) u, A, D_L が共に x の1次関数の場合を挙げて特殊解を与えている。しかし、(1)の場合を除いては特解の形が実際上の意味に乏しく、ここでは省略する。Kent はさらに、(2.28)の形の式を実際の河川に適用するために階差方程式に改め、数値計算により解を求める方法と、塩分濃度 S の定常な濃度分布に対して(2.28)の定常な方程式

$$R \frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx} \left(A D_L \frac{dS}{dx} \right)$$

を積分して、上流からの塩分の流入がないものとして

$$D_L = \frac{RS}{A(dS/dx)} \quad (5.7)$$

より感潮河川の見掛けの拡散係数が求められるとしている。汚濁物質に対する見掛けの拡散係数が(5.7)で与えられるためには、汚濁物質の輸送が塩分と併合して行なわれることが必要であるが、強混合型の感潮河川では、適用しうるであろう。

Harleman¹⁴⁾ は強混合型のは感潮河川において D_L の値を求めるのにも(2.41)を用いることを

提唱している。この場合のレイノルズ数として、流速には入退潮流速 u' の平均値 $(2/\pi) |u'_{max}|$ を用いて

$$\frac{D_L}{\nu} = \frac{63n}{R^{1/6}} Re_{tidal}, \quad Re_{tidal} = \frac{2}{\pi} \frac{u'_{max} R}{\nu} \quad (5.8)$$

で与えられるとし、水路実験の結果と比較してよい一致を得ている。

このようにして D_L が与えられれば、これを用いて (4.2) を解けばよいことになる。(4.2), (4.3) において u, A, D_L および K_r, K_d, K_2 を常数とおけば、定常解として (4.6) が得られることは前述の通りである。しかし感潮河川においては一般に $|u'_{max}| \gg u$ であり、したがって $u^2 \gg K_r D_L$ などの仮定を用いて (4.8) を適用することは許されず O'Connor の求めた (4.6) をそのまま用いなければならない。

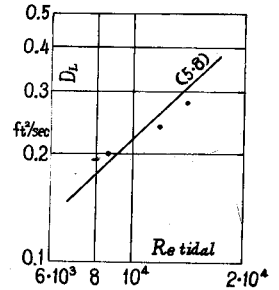


図1.4 (5.8)と水路実験との比較(Harleman)

以上の計算は、入退潮流を単に変動と考え、1潮時の平均値に対してなりたつものである。さらに記述を詳細にするために、入退潮流に伴う汚濁物質の移動を考慮した式を導く。簡単のために、一様断面の水路を考え、入退潮流を一様な並進運動とし、流速が x によらず

$$u = u_f + u_{max} \sin \sigma(t - \delta) \quad (5.9)$$

で与えられるとする。このとき (4.2) を移動座標系

$$x' = x + \frac{u_{max}}{\sigma} \cos \sigma(t - \delta) \quad (5.10)$$

から見ると

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)_{x'} + u_f \frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left(D_L \frac{\partial L}{\partial x'} \right) - K_r L \quad (5.11)$$

となる。ここで (4.10) すなわち $L = L_1 e^{-K_r t}$ とおき、 D_L も x によらないとすると、(2.32)

と同型の式

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)_{x'_1} + u_f \frac{\partial L}{\partial x'_1} = D_L \frac{\partial^2 L}{\partial x'^2} \quad (5.12)$$

をうる。 D_L は u によって変化するので、時刻 t の関数と考えなければならないが、1 潮時内の拡散による変化があまり大きくないとして (5.12) 右辺の D_L を 1 潮時に対する平均値、例えば (5.8) で与えられる値で置きかえて常数と見れば、(2.32) と同様に扱うことができる。特解として集中的な汚濁物質の投入に対しては、(2.33) が得られる。これをもとの座標系に戻せば

$$L = \frac{S}{2\rho A \sqrt{\pi D_L t}} \exp \left\{ - \frac{\left[x - u_f t + \frac{u_{max}}{\sigma} \{ \cos \sigma(t-\delta) - \cos \sigma\delta \} \right]^2}{4 D_L t} - K_r t \right\} \quad \dots\dots\dots (5.13)$$

となる。17) 18) 一点から連続的に流入する汚濁物質に対しては、(5.13) の積分形

$$L = \frac{1}{2\rho A} \int \frac{S}{\sqrt{\pi D_L(t-\tau)}} \exp \left\{ - \frac{\left[x - u_f(t-\tau) + \frac{u_{max}}{\sigma} \{ \cos \sigma(t-\delta) - \cos \sigma(\tau-\delta) \} \right]^2}{4 D_L t} - K_r(t-\tau) \right\} d\tau \quad \dots\dots\dots (5.14)$$

で与えられる。

流下方向に断面形状が変化する場合についても、二三の研究があるが、(5.13) の考え方の拡張と見られるので省略する。

強混合型の場合については、このように拡散方程式 (5.11) を移動座標系から見て解くことにより、感潮部の拡散現象はかなり説明されるように思われるが、入退潮による移動距離が感潮部の長さにくらべて無視できない場合には、河口における境界条件の矛盾が顕著になると考えられる。Ippen および Harleman 19) は塩分の侵入に関してこの問題の一つの近似的な扱いを示しているが、汚濁物質の拡散に関しても興味ある問題である。

5.3 緩混合型ないし弱混合型の場合の拡散

感潮河川における塩分の混合が強くない場合には、塩分濃度のみならず汚濁物質濃度にも鉛直方向の濃度勾配があらわれ、そのとり扱いは極めて複雑になる。とくに弱混合型の場合には、淡水と塩水との二層流となり、上流から流下した汚濁物質は、沈降性がない限り主として上層中を流下することとなり、上層内での流下方向の拡散と下層から躍層を通して巻き上げられる海水による稀釈とが主要な問題となるであろう。また緩混合型の場合には、塩分の濃度勾配による水理的な影響が無視されないにしても、汚濁物質の拡散問題を強混合型と同様に一次的にとり扱うことがある程度は許されるであろう。

何れの場合にしても、上流から定常的に汚濁物質が送られてくる場合には、汚濁物質の稀釈混合の問題は河川水と海水との混合の問題におきかえられることは、5.1 でもふれた通りである。したがって塩分の濃度

分布を解明できれば、感潮河川の汚濁物質の拡散問題もなかば以上解決されたと見られる。

ここでは、緩混合型を対象に1次元なとりあつかいした場合の、流下方向の拡散係数について少しふれる。緩混合型感潮河川における拡散問題を1次元的にとりあつかうならば、原理的には、やはり2.3に述べたようにして

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(A D_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \overline{A c' u'} \right) \quad (5.15)$$

とすることができ。密度差のない場合あるいは強混合の場合には、 $\overline{c' u'}$ の項は前述の通り $-(\partial \bar{c} / \partial x)$ に比例すると考えて拡散係数を用いて表わした。これは横断面内の濃度分布が流下方向の濃度勾配 $\partial \bar{c} / \partial x$ に応じてつくられることによるものである。これは c として塩分濃度 S をとつても同様である。しかし混合が弱い場合には $\overline{S' u'}$ の項に密度流の影響が大きくあらわれることになり、一般には $\partial \bar{c} / \partial x$ との比例関係は成り立たない。^{*}

密度勾配の混合現象に及ぼす影響を現象的に見ると、水平方向の密度勾配があるときに重力の不均衡から生ずるいわゆる密度流による混合を生ずることと、鉛直方向の密度勾配があると上下方向の乱流拡散がよく制されるため、(2.38)、(2.39)からも当然考えられる通りますます鉛直方向の密度勾配を助長して流下方向の拡散が強められることが考えられる。

Ippen は、一様矩形断面の水路実験における定常な塩分濃度分布に対して、(2.28)と同様の拡散式を用い、密度勾配のあるときの見掛けの拡散係数 D'_L を実験的に求めている。それによれば、塩分混合の程度をあらわす成層度パラメータとして、潮流によって起される単位質量当たりの乱れのエネルギーが単位時間に失われる量 G と、淡水が固有流量による流速 U_f で ℓ だけ進む間に海水と混合して比重量が $\Delta \gamma$ だけ増すことによる、単位時間の位置

エネルギーの増加

$$J = (\Delta \gamma / \gamma) g h (U_f / \ell)$$

との比 G/J を定義するとき、

D'_L は G/J の関数として整理されている。

このような理論を実際の河川に適用しようとしても、このままではまだ不十分であり、緩混合型、弱混合型の感潮河川における汚濁物質の拡散問題は、まだ解決の緒についたところと言うべき

であろう。

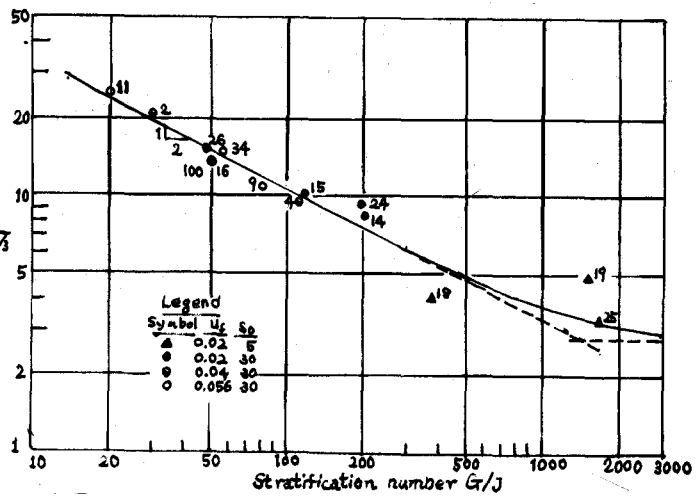


図15 感潮河川における拡散係数 (Ippen, Harleman)

^{*} 例えば河床勾配のあるときを考えても明らかである。

参 考 文 献

- 1) TaYlor : proc. Lond. Math. Soc. 20 (1921)
- 2) 余越正一郎:京大防災研年報 9 (1966)
- 3) 南部~~特~~一:土木学会論文集 59 (1958)26
- 4) 岩井,井上:土木学会第21回年次学術講演会予稿集
- 5) 岩井,合田,植松,南部:日本学術会議第1回原子力シンポジウム要旨集(1958)574
- 6) Taylor:proc. Roy. Soc. A223 (1954)
- 7) Harleman:2nd. Int.Conf.on Water pollution Res.(1964)
- 8) Carret & Sawyer:proc.7Th.Ind.Waste Conf., purdue Univ.51(1958)
- 9) Phelps,E.B.:Stream Sanitation.john Wiley and Sons,(1960)175
- 10) O'Connor:Trans A.S.C.E.126(1961)556
- 11) Dobbins:proc. A.S.C.E. 90 (1964)SA-5,53
- 12) Ketchum:J.Marine Research 10 (1951)18
- 13) Ketchum:Sewage and Industrial Wastes 23 (1951)198
- 14) IPPen:Estuary and Coastline Hydrodynamics. Chap14(Harleman)632
- 15) Preddy:J.Marjne Biology Association 33 (1954)645
- 16) Kent:proc. A.S.C.E. 86 (1960)SA2-15
- 17) Holley,Harleman:M.I.T.Hydrodynamics Lab. Tech.RePort NO 74(1965)
- 18) 14)の書 368
- 19) 14)の書 612