

波 の 変 形 論

京都大学防災研究所 工博 岩 垣 雄 一

1 緒 言

われわれが普通、波の変形とっているのは、波の形状、すなわち波形が変わるという、いわゆる deformation のみを意味するのではなく、波高、波長、波の方向、位相などが変わることも意味しており、transformation という言葉であらわしている。したがって不規則波の場合にはスペクトルが変化することもあることになる。とくに、波の変形といえば、むしろ transformation を指す場合が多く、波形が変形する deformation は数学的取扱いが非常にむづかしく、現状では浅海において特性曲線法を用いて解析することが行なわれているのみであり、またその方法ですべてが解決されるわけのものではない。

一般に風波の予知、あるいは hindcasting といえば、天気図あるいは風域図を用いて、ある時刻のある箇所の波高および周期を推定することを指し、その方法には、代表的なものとして SMB 法、PNJ 法、Wilson の図式法などがあり、浅海においては Bretschneider の方法が用いられることは周知のことである。ところが、海岸・港湾工学上要求される波の推定箇所は、現在のところ水深が 15 m 程度より浅いところであって、風からこのような浅いところの波を推定しようとする、上記の方法を適用するにしても多くの困難を伴うことが多い。というのは、深海波の推算は比較的容易であるが、波が浅海域へ侵入すると、shoaling の効果、屈折、海底摩擦、海底砂層への浸透、流れ、構造物や地形による回折、反射、碎波などのいろいろの現象によって波が変形し、浅海における波の推算を複雑にしているからである。したがって、浅海における波の推算の精度向上は、深海波の推算法の精度をよくすると同時に、浅海において波の変形の原因となる上記各種の現象を十分に理解し、それを適確に定量化することであろう。

ここでは、それらについてすべてを述べることは紙数の関係で不可能であるから、主として平面的な変形は除外し、一次元の変形について説明したいと思う。

2 エネルギー損失を伴わない波の一次元変形

2.1 Shoaling 効果

- (a) 微小振幅波理論 いま図-1に示すように、海底地形によって波が屈折し、深海領域で波の方向線 (wave orthogonal) の間隔 b_0 が、浅海のある点で b に変わったものとする。この2つの波の方向線の間で波のエネルギーが保存され、エネルギーの出入りが無いものと仮定する。実際の海の波は、波

の峯線に沿って波高が変化するので、方向線を横切ってエネルギーの出入りがあるが、簡単のためここでは一様な波を考え、2つの相隣れる方向線の間でエネルギーが保存されるものとする。いま単位時間に単位幅を横切って輸送される平均の波のエネルギーを $\bar{W}$ とすれば、上述のエネルギー保存則から、

$$b \cdot \bar{W} = \text{const.} \quad (1)$$

と書くことができる。微小振幅波理論の教えるところにより、 n を群速度 c_g と波速 c との比、 E

を単位面積あたりの波のもつ平均のエネルギーとすれば、 $\bar{W}$ は次式であらわされる。

$$\bar{W} = nEc \quad (2)$$

ここに、

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4\pi h/L}{\sinh 4\pi h/L} \right) \quad (3)$$

$$E = (1/8) \rho g H^2 \quad (4)$$

であり、 h ：水深、 L ：波長、 H ：波高、 ρ ：海水の密度 および g ：重力加速度である。したがって、深海波における n の値は $1/2$ であり、波高を H_0 、波速を c_0 とあらわせば、(1)および(2)式より、次式が求まる。

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{b_0}{b} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2n} \frac{c_0}{c} \right)^{1/2} \quad (5)$$

いま、

$$\left(\frac{b_0}{b} \right)^{1/2} = K_r \quad (6)$$

$$\left(\frac{1}{2n} \frac{c_0}{c} \right)^{1/2} = K_s \quad (7)$$

とおけば、(5)式は

$$\frac{H}{H_0} = K_r \cdot K_s \quad (5')$$

とかける。 K_r を屈折係数(refraction factor)、 K_s を浅水係数(shoaling factor)とよび、

$$H'_0 = H_0 \cdot K_r \quad (8)$$

とおいて、

$$\frac{H}{H'_0} = K_s \quad (9)$$

と書くこともある。 H'_0 を相当沖波波高(equivalent deep-water wave height)とよんでいる。

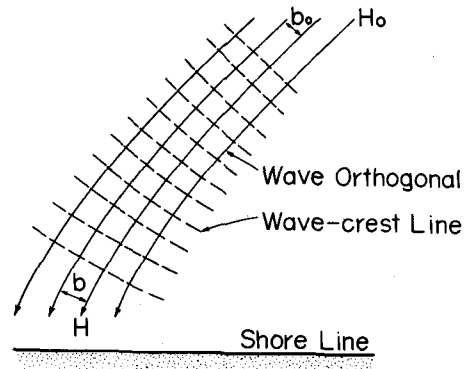


図-1 波の峯線と方向線

さらに、周期 T が波の進行とともに変わらなければ、 $T = L/c = \text{const}$ であるから、

$$\frac{c}{c_0} = \frac{L}{L_0} = \tanh \frac{2\pi h}{L} = \tanh 2\pi \left(\frac{h}{L_0} \right) \left(\frac{L_0}{L} \right) \dots\dots\dots (10)$$

がなりたつ。したがって、

c/c_0 および L/L_0 は h/L あるいは h/L_0 の関数であり、また浅水係数 K_s も h/L あるいは h/L_0 の関数であることがわかる。これらの関係は図-2の実線で示されている。

h/L の値が0に近づいたときの極限である微小振幅長波の場合を考えると、 n は1に近づき、 $\tanh 2\pi h/L$ は $2\pi h/L$ に近づくから、(10)式は、

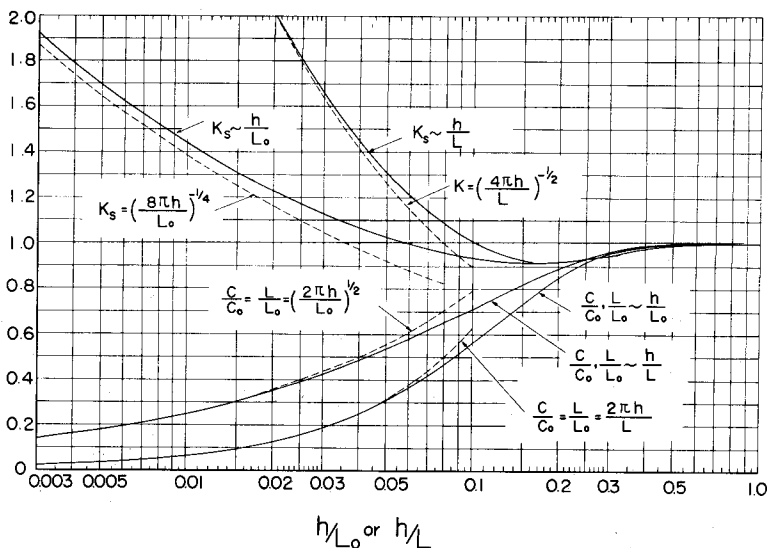


図-2 浅海における波の特性の変化
(微小振幅波の場合)

$$\frac{c}{c_0} = \frac{L}{L_0} = \frac{2\pi h}{L} \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{c}{c_0} = \frac{L}{L_0} = \left(\frac{2\pi h}{L_0} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (12)$$

となり、(7)式は

$$K_s = \left(\frac{4\pi h}{L} \right)^{-1/2} \dots\dots\dots (13)$$

$$K_s = \left(\frac{8\pi h}{L_0} \right)^{-1/4} \dots\dots\dots (14)$$

となる。これらの関係は図-2の破線で示されている。(14)式および(6)式からわかるように、波高は水深の $1/4$ 乗に逆比例して増大し、また波向線間隔の $1/2$ 乗に逆比例して増大する。これがいわゆる Green の定理である。微小振幅波理論では、深海域から浅海域へ波が進行すると、いったん波高が、 $0.913 H_0$ まで減少し、さらに水深が減少すると波高は逆に増加し始める。波高の最小があらわれるのは、 $h/L_0 = 0.16$ あるいは $h/L = 0.19$ 付近である。

(b) 有限振幅波理論 Méhauté-Webb¹⁾ は、3rd order の Stokes 波の理論を用いて、shoaling 効果を計算した。用いた Stokes 波理論は、水理公式集²⁾ に掲載してある Skjelbreia のもので、それは Skjelbreia-Hendrickson³⁾ が導いた 5th order の理論から求められる。

微小振幅波の場合の(2)式に対応する $\bar{W}$ は、一般に

$$\bar{W} = -\frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_0^{\eta+h} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dz dt \quad \dots\dots\dots (15)$$

で与えられる。ここに φ は速度ポテンシャルであって、3rd orderの場合には、

$$\varphi = \frac{L^2}{2\pi} \left[(A_{11} \lambda + A_{13} \lambda^3) \cosh kz \sin \theta + \lambda^2 A_{22} \cosh 2kz \sin 2\theta + \lambda^3 A_{33} \cosh 3kz \sin 3\theta \right], \quad \dots\dots\dots (16)$$

波形 η は、

$$\eta = k (\lambda \cos \theta + \lambda^2 B_{22} \cos 2\theta + \lambda^3 B_{33} \cos 3\theta) \quad \dots\dots\dots (17)$$

であらわされる。ここに、 z は水底からの鉛直座標、 $\theta = k(x - ct)$ 、 $k = 2\pi/L$ であり、

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{s_h}, \quad A_{13} = -\frac{c_h^2 (5c_h^2 + 1)}{8s_h^5}, \quad A_{22} = \frac{3}{8s_h^4}, \\ A_{33} &= \frac{13 - 4c_h^2}{64s_h^7}, \quad B_{22} = \frac{c_h (2c_h^2 + 1)}{4s_h^3}, \\ B_{33} &= \frac{3(8c_h^6 + 1)}{64s_h^6}, \quad s_h = \sinh kh, \quad c_h = \cosh kh. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{L}{T}\right)^2 &= c_3^2 = c_1^2 (1 + B\lambda^2), \\ c_1^2 &= \frac{g}{k} \tanh kh, \\ B &= \frac{8c_h^4 - 8c_h^2 + 9}{8s_h^4} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

および

$$\lambda^3 B_{33} + \lambda = \frac{\pi H}{L} \quad \dots\dots\dots (20)$$

の関係がある。Méhauté らは(16)および(17)式を用いて、(15)式を計算し、

$$\left. \begin{aligned} \bar{W} &= \frac{\pi \rho c_s^2 \lambda^2}{8k^2 T} \cdot \frac{1}{s_h^2} [F_0 + F_2 \lambda^2], \\ F_0 &= 4(s_h c_h + kh), \\ F_2 &= \frac{s_h c_h + kh}{4s_h^6} (-20c_h^6 + 16c_h^4 + 4c_h^2 + 9) \\ &\quad + \frac{s_h c_h}{2s_h^4} (16c_h^4 + 2c_h^2 + 9) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

を得た。^{*} いま、波が屈折せず直進する場合を考えれば、 $K = 32\pi/\rho T^5$ を(21)式の両辺にかけ、

$$K\bar{W} = K\bar{W}(\eta \rightarrow \infty) \quad \dots\dots\dots (22)$$

より、次式が求められる。

^{*} 文献 4) では F_2 の最後の項の分母 $2s_h^4$ が $2s_h^2$ となっている。

$$\left(\frac{L}{T^2}\right)^4 \frac{\lambda^2}{s_h^2} (F_0 + F_2 \lambda^2) = \left(\frac{L_0}{T^2}\right)^4 \lambda_0^2 \left(4 \left(1 + \frac{3}{4} \lambda_0^2\right)\right) \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 λ_0 は(20)式より求められるつぎの関係

$$\frac{3}{8} \lambda_0^3 + \lambda_0 = \frac{\pi H_0}{L_0} \dots\dots\dots (24)$$

から計算される。また(19)式より、 $h \rightarrow \infty$ のとき $B \rightarrow 1$ であるから、

$$\left(\frac{L_0}{T}\right)^2 = \frac{g}{k_0} (1 + \lambda_0^2) \dots\dots\dots (25)$$

が求められる。したがって、(19) および (25) 式より、

$$\frac{L}{L_0} = \tanh kh \cdot \frac{1 + B \lambda^2}{1 + \lambda_0^2} \dots\dots\dots (26)$$

となる。(26)式は微小振幅波の場合の(10)式に対応している。(20),(23),(24)および(26)式を用いれば、 H_0/L_0 をパラメーターとして H/H_0 と h/L_0 との関係を求めることができる。Méhauté らは H_0/L_0 のかわりに H_0/T^2 を、 h/L_0 のかわりに h/T^2 を用いて計算し、図-3に示す結果をえた。この図によると 3rd order の理論では、 h/T^2 の大きいところを除いて、水深が浅くなると波高は微小振幅波理論による波高 ($H_0/T^2=0$ の場合) より大きくなることわかる。そしてその程度は波形勾配あるいは H_0/T^2 の値が大きいほど大きい。 H_0/T^2 および h/T^2 (ft/sec²) から H_0/L_0 および h/L_0 へ

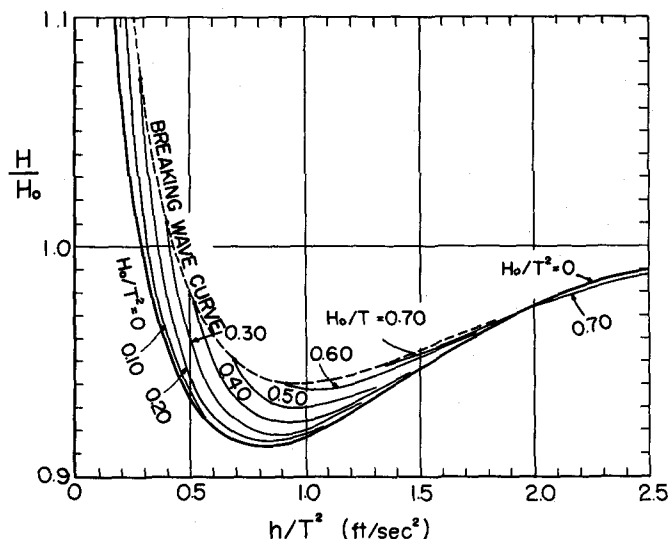


図-3 浅海における波高変化 (3rd order の Stokes 波理論による)

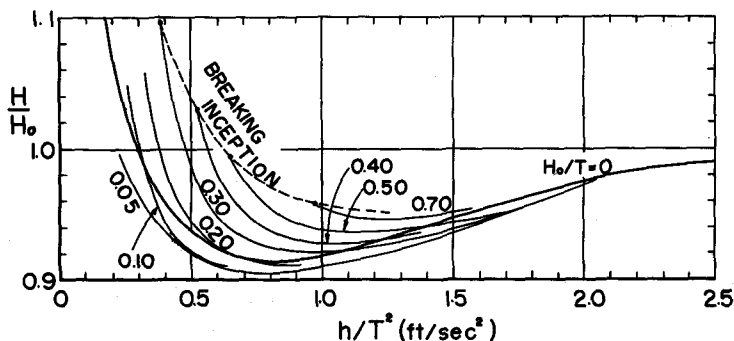


図-4 浅海における波高変化 (3rd order と 5th order の Stokes 波理論を組合せたものによる)

を用いると、 $H_0/5.12T^2$ および $h/5.12T^2$ によって求められる。なお、図-4は、エネルギーの伝達 $\bar{W}$ の式として 3rd order のものを用い、波長の計算には 5th order のものを組合せ用いて求めたものである。すべて 5th order のものを用いればよいが、計算式が非常に長く複雑なので工合が悪い。図-3と4を比較すると、用いる式の order をあげればあげるほど、波高は微小振幅波の波高よりいったん小さくなり、さらに水深が減少すれば波高は急激に増大する傾向が強くなっていくようである。図-5は Iversen が 0.054 と

0.072 の水底勾配について実験水槽により波高変化を測定した結果⁵⁾を示したもので、水底摩擦の影響を考慮したとしても、実際には波高は微小振幅波の波高よりいったん減少し、ある水深のところからは水深の減少とともに波高が増大する傾向をもっていることは疑いない。というのは、 H/H_0 が極小値をとるあたりでは Iversen が微小振幅波理

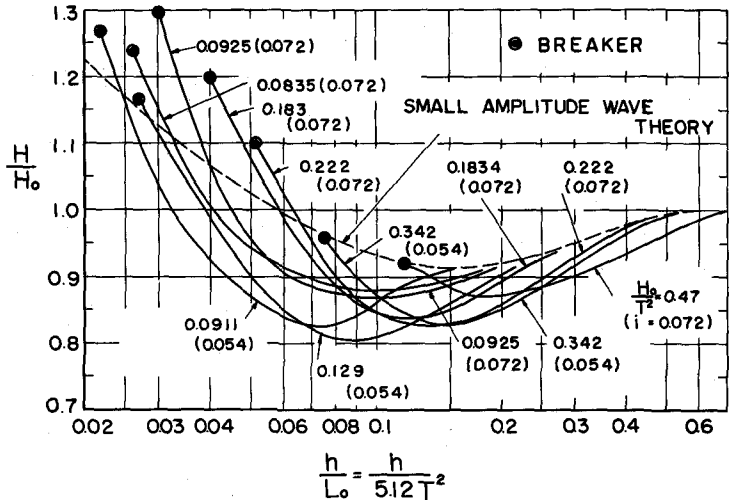


図-5 Iversen の shoaling に関する実験結果

論により水底摩擦を考慮して求めた波高変化の曲線より、ずっと小さいところに実験値がプロットされるからである。このことは、Stokes 波の 3rd order の理論でもこの事実を説明しえないことを示している。

いま、もう少し波長の長い波の Shoaling を考えてみよう。Masch⁶⁾ はクノイド波の波高変化を(1)式で b を一定として計算しようと試みたが成功しなかった。そこで筆者はクノイド波と孤立波の中間の波ともいべき波(この波を hyperbolic waves と名付けた。)の理論を考え、この波の shoaling について説明してみよう。

クノイド波の水理量の無次元表示を Φ とすれば、一般に次のようにあらわされる。

$$\Phi = f \left(\frac{h_t}{H}, \frac{z}{h_t}, K, \frac{E}{K}, k, \text{cn}(v, k), \text{sn}(v, k), \text{dn}(v, k) \right) \quad (27)$$

$$\text{ここに、 } v = 2K(x - ct)/L \quad (28)$$

で、 h_t は波の谷からの水深、 K および E はそれぞれ第1種および第2種の完全だ円積分、 cn, sn および dn は Jacobi のだ円関数、 k はその母数、 x 軸は波の谷を通して水平方向、 z 軸は鉛直上方にとる。一方、孤立波は $k \rightarrow 1$ すなわち $K \rightarrow \infty, E \rightarrow 1, L \rightarrow \infty$ の極限をとれば求められ、その場合、 $\text{cn}(v, k)$ および $\text{dn}(v, k)$ はともに $\text{sech } v$ となり、また $\text{sn}(v, k)$ は $\tanh v$ となる。さらに $K/L = a/h_t$

(α は h_t/H の関数) とかけるので、(27)および(28)式に対応して、孤立波の無次元表示した水理量 Φ_s は次のようにあらわされる。

$$\Phi_s = f_s \left(\frac{h_t}{H}, \frac{z}{h_t}, \operatorname{sech} v, \tanh v \right) \quad (29)$$

$$v = 2\alpha(x-ct)/h_t \quad (30)$$

ここに、添字 s は孤立波に対する量をあらわす。(27)式中の Jacobi のだ円関数は周期関数であるから、クノイド波は周期波であるのに対して、(29)式中の双曲線関数はもはや周期関数ではないので、孤立波は周期波ではない。

ここで、孤立波のように $k \rightarrow 1$ という極限ではなく、 $k \approx 1$ と近似しうる場合を考えれば、 K は ∞ とみなされるほど大きくならない。逆にいえば、 K が 3 程度の値のときには、 $k \approx 0.98$ であって、近似的に 1 とみなしてよい。このことから、

$$K \geq 3 \quad (31)$$

を条件として k のみを 1 としておくと、(27)式に対応する新しい波の水理量の無次元表示を Φ_h として、

$$\Phi_h = f_h \left(\frac{h_t}{H}, \frac{z}{h_t}, K, \frac{E}{K}, \operatorname{sech} v, \tanh v \right) \quad (32)$$

がえられる。この波は双曲線関数であらわされるから周期波ではないが、波長は無限大ではないので、1 波長ごとに波の谷を結合させていけば、周期波として取り扱うことができる。このような新しい波を **hyperbolic waves** と名付けたわけである。

(15)式はベルヌーイの定理を用いると、

$$\bar{W} = \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h_t}^{\eta} \left\{ \frac{1}{2} (v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz \right\} u \, dz \, dt \quad (33)$$

と変形され、圧力 p 、水粒子速度 v および w として **hyperbolic waves** の第 1 近似式を用い (33) 式を計算すれば、 $(H/h_t)^3$ 以下の項を無視して次式がえられる。

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{2}{3} \rho g \sqrt{gh_t} H^2 \frac{1}{K} \left\{ 1 + \frac{6}{5} \frac{H}{h_t} + \frac{2}{5} \left(\frac{H}{h_t} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} - \frac{5}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h_t} - \frac{13}{10} \frac{1}{K} \left(\frac{H}{h_t} \right)^2 \right\} \\ &\approx \frac{2}{3} \rho g \sqrt{gh} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) H^2 \frac{1}{K} \left\{ 1 + \frac{6}{5} \frac{H}{h} + \frac{2}{5} \left(\frac{H}{h} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} - \frac{5}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

ここで、 K と水理量との関係は、

$$\frac{K}{T \sqrt{g/h}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{H}{h} \right)^{1/2} \left\{ 1 - 1.3 \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (35)$$

であらわされる。^{*} なお、 H/h が小さい場合には、(34)および(35)式は近似的に次のようにあらわされる。

$$\bar{W} = \frac{2}{3} \rho g \sqrt{gh} H^2 \frac{1}{K} \quad (36)$$

$$K = \frac{\sqrt{3}}{4} T \sqrt{\frac{g}{h}} \left(\frac{H}{h} \right)^{1/2} \quad (37)$$

^{*} 文献 7) には $\bar{W}$ の式に誤りがあるので脚注のように訂正されたい。

いま、深海波のエネルギー伝達の割合を $\bar{W}_0$ として、

$$\bar{W}_0 = \frac{1}{16} \rho g H_0^2 \cdot \frac{L_0}{T} \quad (38)$$

を用い、(1)式にもとづく

$$\bar{W}_0 b_0 = \bar{W} b = \text{const.} \quad (39)$$

の関係と、(36)および(37)式を用いると、次式がえられる。

$$\frac{H}{H_0} = \frac{3}{16} \left(\frac{1}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{L_0}{h} \right) \left(\frac{H_0}{L_0} \right)^{1/3} \left(\frac{b_0}{b} \right)^{2/3} = K_r \cdot K_s \quad (40)$$

ここに、

$$K_r = \left(b_0/b \right)^{2/3} \quad (41)$$

$$K_s = \frac{3}{16} \left(\frac{1}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{H_0}{L_0} \right)^{1/3} \left(\frac{h}{L_0} \right)^{-1} \quad (42)$$

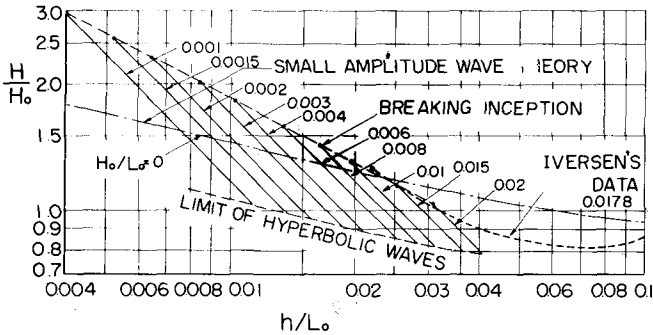


図-6 浅海における波高変化 (hyperbolic waves の理論による)

(6)式と(41)式、さらに(14)式と(42)式とを比較してわかるように、有限振幅の長波ともいふべき hyperbolic waves では、微小振幅の長波の場合に波高が水深の $1/4$ 乗に逆比例し、波向線間隔の $1/2$ 乗に逆比例するのに対して、 H/h が小さいときには水深の 1 乗に逆比例し、波向線間隔の $2/3$ 乗に逆比例して波高が増大する。図-6は、 $K_r = 1$ として(40)式の関係を図示したもので、図中の鎖線は微小振幅波理論

によるものを示している。なお、図の太い破線は図-5に示す Iversen の実験結果のうちの $H_0/T_0 = 0.0911 \text{ ft/sec}^2$ ($i = 0.054$) のものを取り出して移したもので、 H_0/L_0 に換算して 0.0178 に相当している。これから、厳密には理論と一致しないけれども、波高が水深の減少とともに急増する傾向はよく似ている。 H_0/L_0 を一定として、 h/L_0 の値が大きくなると適用限界にぶつかる。この波は(3)式と(35)式より

$$T \sqrt{\frac{g}{h}} \geq 4 \sqrt{3} \left(\frac{H}{h} \right)^{-1/2} \left\{ 1 - 1.3 \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right\}^{-1/2} \quad (43)$$

であらわされ、とくに H/h が小さいときには、

$$T \geq 4 \sqrt{3} h / \sqrt{gH} \quad (44)$$

となる。問題は(40)式の order をあげて計算し、Stokes 波とつなぐことであるが、現在その研究を行なっている。

2.2 流れの場における波の変形

水深が一樣であっても、流れがあると、流れのないところからの侵入波の波高が変化する。これは波の水に対する位相速度と流れの速度とがベクトルの的に加わって、静止系から観測した波の位相速度が変化し、波長の伸縮がおこり、波のエネルギーに増減がなければ、流れをさか上る波の波高は増大し、逆に流れに沿って下る波の波高は減少する。ここでは、一樣な流れの中に波が侵入する場合と長い周期の波や潮流のような振動流に短い波が乗った場合について紹介してみよう。

(a) 一樣な流れの場合⁸⁾ いま、図-7に示すように、

水深が一樣で河口まで一樣な流速 U の流れが海に注ぎ、 O の断面で急に流速が0となった場合を考える。 O 断面から沖は深海で、沖の方から一樣な波が位相速度(波速) c_0 で河口に近づき、流速 U の流れをさか上って、静止座標系からみた波の位相速度が $c-U$ となるものとする。

深海における波の波長を L_0 、河に入ってから波長を L とすれば、その間で周期 T は変わらないから、

$$\frac{L_0}{c_0} = \frac{L}{c-U} \quad \dots\dots\dots (45)$$

が成立する。流れがあると、(2)式に示す $\bar{W}$ は

$$\bar{W} = n E c - E U \quad \dots\dots\dots (46)$$

と書きかえるべきであるから、 $b = \text{const.}$ として(1)式を適用すれば、

$$n_0 E_0 c_0 = n E c - E U = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (47)$$

となる。 $n_0 = 1/2$, $E_0 = (1/8) \rho g H_0^2$, $E = (1/8) \rho g H^2$ であるから、(5)式に対応して次式がえられる。

$$\frac{H}{H_0} = \left\{ \frac{1}{2n(c/c_0) - 2(U/c_0)} \right\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (48)$$

図-7に示すように、流れが存在するところの波速 L/T は c/U に等しいから、

$$c^2 = \left(\frac{L}{T} + U \right)^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \quad \dots\dots\dots (49)$$

の関係があり、

$$h^* = 4\pi^2 h / g T^2, \quad U^* = U / c_0 = 2\pi U / g T, \quad k^* = g T^2 / 2\pi L \quad \dots\dots\dots (50)$$

とおけば、(49)式は次式のように書きあらわされる。

$$(1 + U^* k^*)^2 = k^* \tanh h^* k^* \quad \dots\dots\dots (51)$$

したがって、上式から、 U^* および h^* が与えられると k^* が求められる。また、(3)式より

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2h^* k^*}{\sinh 2h^* k^*} \right) \quad \dots\dots\dots (52)$$

と書きかえられ、(48)式中の c/c_0 は

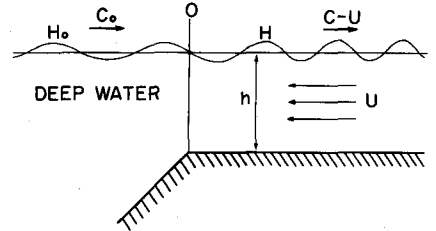


図-7 一樣な流れを遡上する波

$$\frac{c}{c_0} = \frac{(L/T) + U}{gT/2\pi} = \frac{1}{k^*} + U^* \quad (53)$$

と書けるから、(48)式は次のようになる。

$$\frac{H}{H_0} = \left[\frac{1}{(1 + 2h^* k^* \operatorname{cosech} 2h^* k^*) \{ (1/k^*) + U^* \} - 2U^*} \right]^{1/2} \quad (54)$$

一方、流れに沿って波が進行する場合には、(50)式の代りに

$$(1 - U^* k^*)^2 = k^* \tanh h^* k^* \quad (55)$$

(54)式の代りに、

$$\frac{H}{H_0} = \left[\frac{1}{(1 + 2h^* k^* \operatorname{cosech} 2h^* k^*) \{ (1/k^* - U^*) + 2U^* \}} \right]^{1/2} \quad (56)$$

を用いなければならない。また、波長の変化は、(50)式の定義より、 $L_0 = gT^2/2\pi$ を用いて、

$$\frac{L}{L_0} = \frac{1}{k^*} \quad (57)$$

によって与えられる。図-8は(51)、

(54)、(55)および(56)式にもとづいて h^* をパラメーターとして H/H_0 と U^* との関係を示したものである。なお、

(54)式の分母を0とするような h^* と U^* との関係を求めれば、そのときの波高 H は無限大となるから、これは波が流れを遡上するとき、波はもはや流れを進むことができないで、碎波し

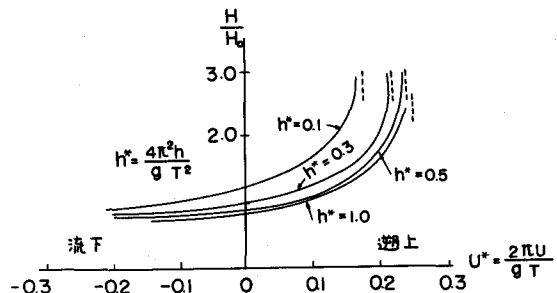


図-8 一様な流れを伴う場合の波高変化 (富永による)

てしまうことを意味している。図-9はこのときの h^* と U^* を与える曲線である。しかし実際には、 U^* の値が図に示す値より小さい値のときから波が碎けて波高が小さくなり限界のところで波高は0に

なる。Yu⁹⁾によると、 $h^* = \infty$ すなわち深海波の場合に、波高が小さくなり始める U^* の値は $1/7$ 程度で、この値より大きくなるにしたがって波高は急激に減少する。

なお、流れが深さ方向に一様ではなく、ある分布をしている場合については、 $1/7$ 乗分布をしているとき¹⁰⁾、放物線分布のとき¹¹⁾ および直線分布のとき⁸⁾ の計算がある。また、任意の流速分布をした流れにおける孤立波¹²⁾ や有限振幅波^{13,14)} の計算も試みられている。

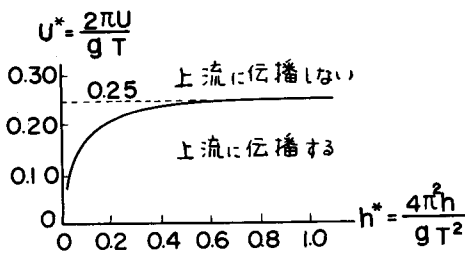


図-9 波が流れを遡上するときの碎波限界 (富永による)

(b) 振動流の場合 ここでは、長い周期をもった波や潮流のような振動流の上に短い波が乗った場合

の短い波の変化について述べてみよう。Longuet-Higgins と Stewart¹⁵⁾ はこの両者の波が非線型干渉をするとして、摂動法により短い波の波高変化と波長の変化を計算し、次の関係をえた。

$$\frac{H'}{H_1} = 1 + \frac{H_2}{2} k_2 \left(\frac{3}{4} \coth k_2 h + \frac{1}{4} \tanh k_2 h \right) \sin(k_2 x - \sigma_2 t + \theta_2) \quad (58)$$

$$\frac{k'}{k_1} = 1 + \frac{H_2}{2} k_2 \coth k_2 h \sin(k_2 x - \sigma_2 t + \theta_2) \quad (59)$$

ここに、 $k=2\pi/L$ 、 $\sigma=2\pi/T$ で、添字 1 は短い波、添字 2 は長い波をあらわし、 H および k はそれぞれ長い波に乗った短い波の変化した波高と波数をあらわす。(58) および (59) 式からわかるように、長い波の峯の部分では、 $\sin(k_2 x - \sigma_2 t + \theta_2)$ が 1 であるから、短い波の波高は増大し、波長は減少する(波数は増大する)。一方、長い波の谷では $\sin(k_2 x - \sigma_2 t + \theta_2)$ が -1 であるから、短い波の波高は逆に減少し、波長は長くなる。

Longuet-Higgins と Stewart はこの物理的な理由を次のように説明している。ある断面を通過する波のエネルギーの割合は、 x 軸を静水面にとると、(33) 式より

$$\bar{W} = \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{1}{2} (u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz \right\} u dz dt \quad (60)$$

いま、流速を一樣な流れ U と波の作用による付加すべき流速 u' および w' の和と考え、

$$u = U + u', \quad w = w' \quad (61)$$

とおく。この場合 u' および w' の時間的平均は 0、すなわち、

$$\bar{u}' = \bar{w}' = 0 \quad (62)$$

である。(61) 式を (60) 式に代入すれば、 $\bar{W}$ は

$$\bar{W} = \bar{W}_0 + \bar{W}_1 + \bar{W}_2 + \bar{W}_3 \quad (63)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_0 &= \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{1}{2} (u'^2 + w'^2) + \frac{p}{\rho} + gz \right\} u' dz dt, \\ \bar{W}_1 &= \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{1}{2} (u'^2 + w'^2) + \frac{p}{\rho} + gz + u'^2 \right\} U dz dt, \\ \bar{W}_2 &= \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h}^{\eta} \frac{3}{2} u' U^2 dz dt, \\ \bar{W}_3 &= \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} U^3 dz dt. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

と書くことができる。そこで、(63) 式の各項をそれぞれ考察してみよう。最初の $\bar{W}_0$ は流れがないときの波のエネルギーの輸送の割合に等しい。微小振幅波理論を用いると、(2) 式によってあらわされるから、

$$\bar{W}_0 = E c_g = n E c \quad (65)$$

である。また、 $\bar{W}_1$ の項は 2 つの部分に分けることができ、

$$\bar{W}_1 = \bar{W}_{11} + \bar{W}_{12} \quad (66)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_{11} &= \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{1}{2} (u'^2 + w'^2) + gz \right\} U dz dt + \frac{1}{2} \rho g h^2 U = E U \\ \bar{W}_{12} &= \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{p}{\rho} + u'^2 \right) U dz dt - \frac{1}{2} \rho g h^2 U = S_x U \end{aligned} \right\} \dots\dots (67)$$

と書くことができる。 $\bar{W}_{11}$ は流れが波のもつ運動のエネルギーと位置のエネルギーを U という流速で輸送することを意味しており、 $\bar{W}_{12}$ は、

$$S_x = \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{p}{\rho} + u'^2 \right) dz dt - \frac{1}{2} \rho g h^2 \dots\dots\dots (68)$$

によって定義される radiation stress に対して流速 U の流れがなす仕事であるといえる。 u'^2 の項を微小量として無視し、微小振幅波理論により S_x を計算すれば、

$$S_x = \frac{1}{8} \rho g H^2 \left(\frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{1}{2} \right) = E \left(\frac{2c_g}{c} - \frac{1}{2} \right) \dots\dots\dots (69)$$

が求められる。この S_x は単位幅当たり波の運動によって生じた付加応力である。したがって、 $\bar{W}_1$ は

$$\bar{W}_1 = (E + S_x) U = E \left(\frac{2c_g}{c} + \frac{1}{2} \right) U \dots\dots\dots (70)$$

となる。さらに、 $\bar{W}_2$ および $\bar{W}_3$ を計算すれば、

$$\bar{W}_2 = 3 E U^2 / 2c, \quad \bar{W}_3 = \rho h U^3 / 2 \dots\dots\dots (71)$$

となる。有限振幅波の理論では、波の進行方向に $E/c\rho h$ であらわされる質量輸送速度が存在するので、

$$U + (E/c\rho h) = U' \dots\dots\dots (72)$$

とおけば、

$$\bar{W}_2 + \bar{W}_3 = \rho h U'^3 / 2 \dots\dots\dots (73)$$

とあらわされる。これは流れ自身のもつ運動のエネルギーの輸送をあらわしている。以上の各項を総合すれば、(63)式は次のように書ける。

$$\bar{W} = E c_g + E U + S_x U + (1/2) \rho h U'^3 \dots\dots\dots (74)$$

つぎに、短い波が長い波に乗ったときの短い波のもつエネルギー E' は、長い波の鉛直方向の静水面における加速度 $\partial W / \partial t$ が重力加速度 g に加わるので、運動のエネルギーがその分だけ増加することから、

$$E' \sim \frac{1}{8} \rho g H'^2 \left(1 + \frac{1}{2g} \frac{\partial W}{\partial t} \right) \dots\dots\dots (75)$$

とした。エネルギーの保存則から、

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \{ E' (c_g + U) + S_x U \} \dots\dots\dots (76)$$

が成立するので、右辺の E' を $E' = \text{const.} = (1/8) \rho g H_1^2 = E_1$ と近似し、また $S_x = \text{const.}$ とすれば、

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = -E_1 \frac{\partial}{\partial x} (c_0 + U) - S_x \frac{\partial U}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (77)$$

S_x として (69)式を用い、かつ $\partial c_0 / \partial x \ll \partial U / \partial x$ であるから、(77)式は

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = -E_1 \left(\frac{2c_0}{c_1} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (78)$$

となり、また $\partial U / \partial x = -(1/c_2) \partial U / \partial t$ の関係を用いると、(78)式は結局次のようにかける。

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = E_1 \left(\frac{2c_0}{c_1} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{c_2} \frac{\partial U}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (79)$$

これを積分し、(75)式の関係と $c_0 / c_1 = 1/2$ の関係を用いると、

$$\frac{H'}{H_1} = 1 + \frac{3}{4} \frac{U}{c_2} - \frac{1}{4g} \frac{\partial W}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (80)$$

がえられる。(80)式の U/c_2 および $\partial W / \partial t$ は $U = (H_2/2) \sigma_2 \coth k_2 h \sin(k_2 x - \sigma_2 t + \theta_2)$ 、 $W = -(H_2/2) \sigma_2 \cos(k_2 x - \sigma_2 t + \theta_2)$ であるから、

$$\left. \begin{aligned} U/C_2 &= (H_2/2) k_2 \coth k_2 h \sin(k_2 x - \sigma_2 t + \theta_2), \\ -\frac{1}{g} \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{H_2 \sigma_2^2}{2g} \sin(k_2 x - \sigma_2 t + \theta_2) \\ &= \frac{H_2}{2} k_2 \tanh k_2 h \cdot \sin(k_2 x - \sigma_2 t + \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (81)$$

となり、(58)式と一致する。

なお、Longuet-Higgins と Stewart はさらに U としていろいろな非定常流を与えた場合について計算し、Whitham はこうした問題について別の説明を与えている。¹⁶⁾ このような流れと波との共存の問題は、hydraulic breakwater とか空気防波堤などへの応用、あるいは河口付近の波の変形などの問題と関連があるばかりでなく、波相互の干渉の問題に対しても参考になるのではないかと考えられる。

3 エネルギー損失を伴う一次元変形

3.1 内部粘性による変形

一般に単位体積の流体が単位時間に粘性のために消散する損失エネルギーを Φ とすれば、

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (82)$$

によってあらわされる。¹⁸⁾ ここに μ は粘性係数である。(82)式を変形し、連続式を用いると、単位面積当たり単位時間に消散する平均のエネルギー $\overline{E}_f$ は次のように書くことができる。¹⁹⁾

$$\overline{E}_f = \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-h}^0 \mu \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dz dx \quad \dots\dots\dots (83)$$

したがって、波の運動が非回転的 (irrotational) であれば、(83)式の { } 内の第1項は0となるから、そのときのエネルギー損失はもっぱら第2項によることになる。しかし、速度勾配はいずれも小さい量なので、 $\bar{E}_f$ も小さい。この第2項が内部粘性による波の減衰の原因となる。

いま浅海波の場合を取り扱おうとすれば、

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{kcH}{2 \sinh kh} \cosh k(h+z) \sin(kx - \sigma t), \\ w &= -\frac{kcH}{2 \sinh kh} \sinh k(h+z) \cos(kx - \sigma t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (84)$$

であるから、これを用いて (83)式を計算すれば、次式が得られる。

$$\bar{E}_{fi} = \frac{\mu}{2} \beta \left(\frac{\pi H}{T} \right)^2 \operatorname{cosech}^2 kh \cdot \frac{2k}{\beta} \sinh 2kH \dots\dots\dots (85)$$

ここに、 $\beta = \sqrt{\sigma/2\nu}$ 、 ν は動粘性係数 μ/ρ である。また添字 i は内部粘性をあらわす。

波のエネルギーの輸送の割合 $c_0 E$ の単位面積当たりの減少量が $\bar{E}_{fi}$ に等しいから、

$$\frac{d}{dx} (c_0 E) = -\bar{E}_{fi} \dots\dots\dots (86)$$

が成立する。 E は(4)式を c_0 は(3)式と $n = c_0/c$ の関係を用いて(86)式を積分し、 $x=0$ で $H=H_1$ とすれば、次式がえられる。

$$H = H_1 \exp(-\varepsilon_i x/L) \dots\dots\dots (87)$$

ここに

$$\varepsilon_i = \frac{4\pi^2}{\beta L (\sinh 2kh + 2kh)} \cdot \frac{2k}{\beta} \sinh 2kh \dots\dots\dots (88)$$

この ε_i を無次元減衰率 (dimensionless decay modulus) とよんでいる。とくに深海波の場合には $kh \rightarrow \infty$ とすればよいから、(87)および(88)式はそれぞれ次のようになる。

$$H = H_1 \exp(-\varepsilon_i x/L_0) \dots\dots\dots (89)$$

$$\varepsilon_i = 4\nu k^2 T \dots\dots\dots (90)$$

$x/t = c_0 = c/2$ の関係を用いると、(89)式は、

$$H = H_1 \exp(-2\nu k^2 t) \dots\dots\dots (91)$$

となり、Lamb²⁰⁾ が示した式と一致する。

3.2 境界摩擦による変形

(a) 境界壁の摩擦応力 いま、波の進行方向に x 軸、底面に垂直に z 軸をとり、底面に発生する層流境界層内の速度成分を u および w とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (92)$$

が成立する。ここに、 U は境界層外線における流速であって、波動理論から求められる関係が適用されるものとする。(90)式において、convective acceleration の項 $u \partial u / \partial x, w \partial u / \partial z$ および $U \partial U / \partial x$ を他の項に比べ小さいとして無視すれば、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (93)$$

がえられる。ここで U として微小振幅波理論による底面における速度、すなわち(84)式で $z = -h$ とおいた式

$$U = \frac{kcH}{2 \sinh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad \dots\dots\dots (94)$$

を用いると、(93)式の解として次式がえられる。

$$u = \frac{kcH}{2 \sinh kh} \{ \sin(kx - \sigma t) - \exp(-\beta z) \sin(kx - \sigma t + \beta z) \} \quad \dots\dots\dots (95)$$

ここで β は(85)式のものと同じである。(95)式からわかるように、右辺の第2項は z に関して減水振動の形をしており、その振幅は $(kcH) / (2 \sinh kh) \exp(-\beta z)$ であって、底面からの距離とともに指数的に振幅が減少することを意味している。これは半無限の流体が無限の長さをもつ平板の振動によっておこる粘性流体の運動として解かれた Stokes の解²⁰⁾であって、 $\sigma / \beta = \sqrt{2\sigma\nu}$ という伝播速度をもつ shear-wave と呼ばれるものである。理論的には $z \rightarrow \infty$ としなければ u は(94)式の U に等しくないが、実際には (shear wave の1波長) $z = 2\pi / \beta$ をとれば $\exp(-2\pi) \approx 0.0019$ であるから、 $u = U$ としてよい。底面に働く摩擦応力 τ_0 は $\mu (\partial u / \partial z)_{z=0}$ に等しいから、(95)式を用いて計算すれば、

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2} \mu \beta kcH}{2 \sinh kh} \sin(kx - \sigma t - \frac{\pi}{4}) \quad \dots\dots\dots (96)$$

がえられる。この式から摩擦応力 τ_0 は、波形および境界層外の流速 U に対して、位相が $\pi/4$ だけずれることがわかる。いま(96)式を無次元の形に書きなおせば、次式がえられる。

$$\frac{\tau_0}{\rho U_{\max}^2} = R_e^{-1/2} \sin(kx - \sigma t - \frac{\pi}{4}) \quad \dots\dots\dots (97)$$

$$\text{ここに、} \quad R_e = (1/2\pi) U_{\max}^2 T / \nu \quad \dots\dots\dots (98)$$

いま水槽内を進行する波を考えると、底面のみでなく側壁においても摩擦応力が作用する。底面の場合と同様な方法で、側壁における層流境界層内の流速分布を求めると、

$$u = \left(\frac{\pi H}{T} \right) \frac{\cosh kz}{\sinh kh} \{ \sin(kx - \sigma t) - \exp(-\beta y) \sin(kx - \sigma t + \beta y) \} \quad \dots\dots\dots (98)$$

$$w = - \left(\frac{\pi H}{T} \right) \frac{\sinh kz}{\sinh kh} \{ \cos(kx - \sigma t) - \exp(-\beta y) \cos(kx - \sigma t + \beta y) \} \quad \dots\dots\dots (99)$$

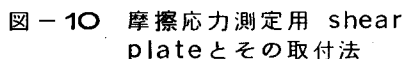
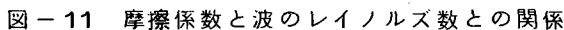
がえられる。ここに、 y は側壁に垂直に、 z は側壁にそって鉛直にとった座標である。したがって、側壁に作用する摩擦応力を x 方向に働く応力 τ_{ox} と z 方向の応力 τ_{oz} とにわけてあらわすと、(98) および (99) 式を用いて次式が求められる。

$$\frac{\tau_{ox}}{\rho U_{\max}^2} = R_e^{-1/2} \cosh kz \sin(kx - \sigma t - \frac{\pi}{4}) \quad \dots\dots\dots (100)$$

$$- \frac{\tau_{oz}}{\rho U_{\max}^2} = R_e^{-1/2} \cosh kz \cos(kx - \sigma t - \frac{\pi}{4}) \quad \dots\dots\dots (101)$$

$\overline{C}_f$ は

によって定義され、 $\bar{\tau}_0$ および $\bar{U}^2$ はそれぞれ (96) に示す τ_0 および (94) 式の U の自乗を、 $\tau_0 = 0$ と


$$\begin{aligned}\overline{C}_f &= 8 \sqrt{2/\pi} \, R_e T^{-1/2} \\ &= 6.39 \, R_e T^{-1/2} \dots (103)\end{aligned}$$

図中の実線は (103) 式を主としたもので、実験値とよく一致している。

$$\overline{E_{fb}} = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^\delta \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz dx \quad (105)$$
$$\overline{E}_{fb} \approx \frac{\mu}{2} \beta \left(\frac{\pi H}{T} \right)^2 \operatorname{cosech}^2 kh \quad (106)$$

が得られる。(86)式の $\overline{E}_{fi}$ の代わりに(106)式の $\overline{E}_{fb}$ を用いて(86)式を積分すれば、次のような波高減衰式が求められる。

$$H = H_1 \exp(-\varepsilon_b x/L) \quad (107)$$

ここに、

$$\varepsilon_b = \frac{4\pi^2}{\beta L (\sinh 2kh + 2kh)} \quad (108)$$

また、両側壁における損失エネルギー $2\overline{E}_{fw}$ は、

$$2\overline{E}_{fw} = \frac{2}{Lh} \int_0^h \int_0^L \int_0^{\delta} \mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dy dx dz \quad (109)$$

であらわされるから、(98)および(99)式を用いて(109)式を計算すれば、次の式が得られる。

$$2\overline{E}_{fw} \approx \frac{\mu}{2} \beta \left(\frac{\pi H}{T} \right)^2 \operatorname{cosech}^2 kh \cdot \frac{\sinh 2kh}{kh} \quad (110)$$

ここに、添字 w は側壁摩擦による損失をあらわす。

いま、水槽の幅を B とし、底面のほかに両側壁による摩擦損失も加わると、(86)式の代わりに、

$$\frac{d}{dx} (c_g E B) = -(\overline{E}_{fb} B + 2\overline{E}_{fw} h) = -\overline{E}_{fb} B (1 + \Psi) \quad (111)$$

ここに、

$$\Psi = \frac{\sinh 2kh}{kB} \quad (112)$$

を用いる必要がある。したがって、この場合の波高減衰式に、次のようになる。

$$H = H_1 \exp(-\varepsilon_{(b+w)} x/L) \quad (113)$$

ここに、

$$\varepsilon_{(b+w)} = (1 + \Psi) \varepsilon_b \quad (114)$$

この式を用いると、側壁の影響を含めた $\varepsilon_{(b+w)}$ の値を実験によって求めた場合、底面摩擦のみによる波高減衰率 ε_b を見出すことができる。図-12はこのような方法によって、 $\varepsilon_{(b+w)}$ の実験値から ε_b を換算した筆者らの実験結果^{23,24}のほか、Grosch Lukasik(1960, 1963)や Eagleson(1959, 1962)の実験結果をプロットしたものである。実験値は(108)式にもとづく理論値より40%程度大きい。筆者ら^{24,25}はこの理由を説明しようとして、(93)式で省略した非線型項の影響を調べるため、(92)式から出発して摂動法により理論解を求めたが、底面摩擦に対しては3~4%の影響しかなく、波高減衰率は平均して約10%程度実験値が理論値に近づくこ

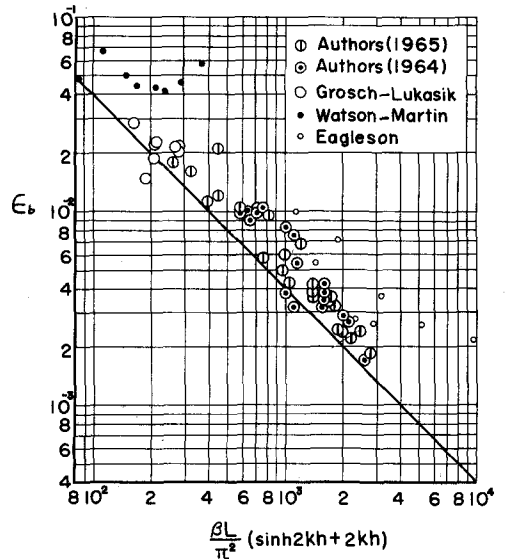


図-12 波高減衰率の理論値と実験値の比較

とがわかったのみで、いぜんとして20~30%の差があり、その原因はまだよくわかっていない。

(c) 乱流境界層の場合 底面における流速 U が大きくなると、層流境界層が乱流境界層へ遷移するであろうことは定常流における境界層の研究から想像されることである。Collins²⁹⁾は境界層外線の質量輸送速度 U と波長 L の積が $(U_{\max}/\nu\beta)^2$ に比例することと、 $U_{\max}/\nu\beta$ がさらに $H/\sqrt{T} \sinh kh$ に比例することを利用して、 $U_B L$ と $H/\sqrt{T} \sinh kh$ との関係を実験的に求め、両者の関係が急変するところを層流から乱流への遷移点と考え、

$$(U_{\max}/\nu\beta)_{\text{crit}} = 160 \quad \dots\dots\dots (115)$$

と定めた。この値は $Re_T = U_{\max}^2 T/\nu$ に換算すると約 8×10^4 になる。また $H/\sqrt{T} \sinh kh$ の値は9.15である。一方、静止流体中で水底を水平に振動させ、境界層に色素を注入してその拡散の模様から遷移点を調べたVincent³⁰⁾とLi³¹⁾によると、それぞれ $H/\sqrt{T} \sinh kh$ の値は6.34および31.7であって、Collinsの9.15という値とかなり異なっている。CollinsやLiの実験のように振動板を用いると、流体の慣性力がきくので、波動の場合に適用するのを疑問視しているが、現在どちらが正しいかよくわからない。

乱流境界層に対する振動流の底面摩擦の理論的な取り扱いには、梶浦²⁹⁾とJonsson³⁰⁾が試みている。しかし、まだ十分な実験的裏付けがない。ここでは、Putnam-Johnson³¹⁾が示した実用的な方法を述べてみよう。

いま、単位面積当たり、単位時間に底面摩擦によって損失する平均のエネルギー $\overline{E}_{fb}$ は、一般に

$$\overline{E}_{fb} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \tau_0 U^2 dt \quad \dots\dots\dots (116)$$

によってあらわされる。ここに、 U は(94)式で示される底面における流速である。底面の摩擦応力 τ_0 を

$$\tau_0 = f \rho U^2 \quad \dots\dots\dots (117)$$

とおき、(94)式を用いて $\overline{E}_{fb}$ を計算すれば、 f を一定として

$$\overline{E}_{fb} = \frac{4}{3} \pi^2 \frac{\rho f H^3}{T^3 \sinh^3 kh} \quad \dots\dots\dots (118)$$

が得られる。ここに、 f はやはり摩擦係数(friction factor)とよばれるが、(102)式で定義される摩擦係数 $\overline{C}_f$ とは等しくならない。層流境界層の場合には、(118)式と(106)式を等しくおけば、

$$f = (3\pi\sqrt{\pi}/8) Re_T^{-1/2} = 2.08 Re_T^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (119)$$

が得られるので、(103)式と上式から、 f と $\overline{C}_f$ との関係は

$$f = (3\pi^2/64\sqrt{2}) \overline{C}_f \quad \dots\dots\dots (120)$$

となる。

(86)式の $\overline{E}_{fi}$ の代わりに(118)式の $\overline{E}_{fb}$ を用いて、(86)式を積分し、積分常数を $x=0$ で $H=H_1$ という条件で決めれば、

$$\frac{H}{H_1} = \left\{ \frac{64}{3} \frac{\pi^3}{g^2} \left(\frac{f H_1 x}{h^2} \right) \left(\frac{h}{T} \right)^2 \frac{K_s^2}{\sinh^3 kh} + 1 \right\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (121)$$

が述べられる。ここに、 K_s は(7)式であらわされる浅水係数である。 K_s は前述したように $h/L_0 = (2\pi/g) \times (h/T^2)$ の関数であり、また $\sinh kh$ も h/L_0 の関数であらわされるから、 H/H_1 は $f H_1 x / h^2$ と h/T^2 の関数となる。Bretschneider-Reid³²⁾

はこの関係を利用して、図-13を作成した。ただし、この図は m-sec 単位になおしてある。問題は摩擦係数 f をどうして見積るかであるが、筆者らはここ数年来、わが国海岸各地において、波浪観測を実施し、波の進行方向に沿っての2~3点間における波高減衰の資料を得て、摩擦係数 f の値を求め

た。^{34),35)}

図-14

はその結果であって

秋田、

泉佐野、二色の浜、日吉津、高浜の各海岸で得た値がプロットされている。図中には層流境界層にもとづく関係式(119)式が比較のため載せてあるが、現地海岸での f の値は(119)式の値よりはるかに大きい。現地海岸での波は不規則波であるから、海底摩擦あるいは内部粘性などによる波高減衰の機構が一樣な波の場合と異なっていることが想像されるが、実用の点からは貴重な資料といえよう。

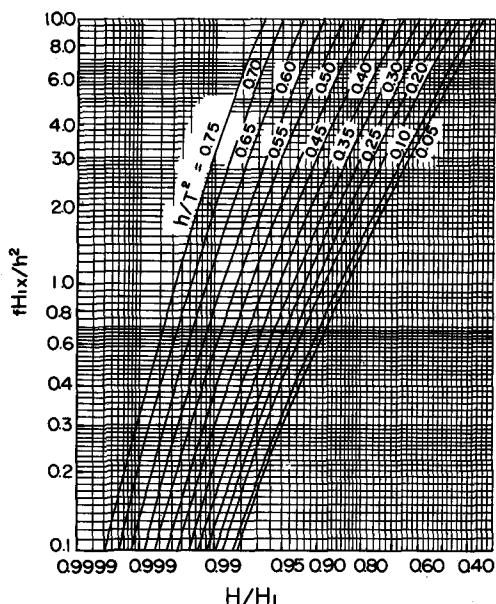


図-13 摩擦係数 f を与えて波高減衰を求める図

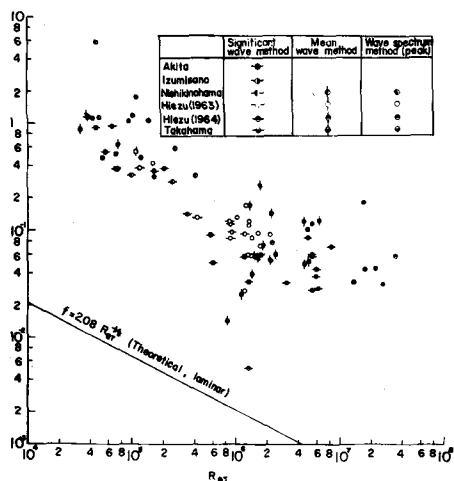


図-14 現地海岸における摩擦係数 f の値

3.3 浸透による変形

図-15に示したように海底が砂礫のような透水性の物質で構成されている場合、波がその上を進行してくると、海底に沿って圧力の高いところと低いところが現われるので、海底の中へ海水が浸透したり海中へ湧出する。そのために粘性によるエネルギーの損失があるので、波高が減衰することになる。この問題を最初に取り扱ったのは、Putnam³⁶⁾であって、その後 Reid-梶浦³⁷⁾が同様な計算を試みた。Putnamは砂層中の流れのポテンシャルを求め、そのポテンシャルを用いて、次式により単位面積、単位時間当たりの平均のエネルギー損失 $\bar{E}_p$ を求めた。

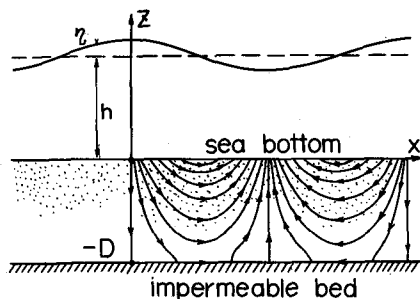


図-15 透水性の海底への浸透

$$\overline{E_p} = -\frac{\rho}{L} \int_0^L \int_{-D}^0 \left(u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + w_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz dx \quad (122)$$

ここに、 u_2 および w_2 は砂層内の x 方向および z 方向の流速成分で、

$$u_2 = -(K/\nu) \partial \varphi / \partial x, \quad w_2 = -(K/\nu) \partial \varphi / \partial z \quad (123)$$

とあらわされ、 K は長さの 2 乗の次元をもつ透水係数、 ν は動粘性係数であるから、速度の次元をもつ透水係数は Kg/ν となる。また、 $(\partial^2 \varphi / \partial x^2) + (\partial^2 \varphi / \partial z^2) = 0$ と $z = -D$ で $\partial \varphi / \partial z = 0$ および $z = 0$ で $\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \sigma t)$ の境界条件を満足するポテンシャル φ は、

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\exp(2\pi z/L) + \exp\{-2\pi(2D+z)/L\}}{1 + \exp(-4\pi D/L)} \cos(kx - \sigma t) \quad (124)$$

であり、 $\varphi = (p/\rho) - gz$ であるから、 φ_0 は

$$\varphi_0 = gH / \sqrt{2 \cosh kh} \quad (125)$$

である。Putnam は (125) 式を $gH / \cosh kh$ としたので、結果が間違っており、Reid-梶浦のものと一致しない原因となっている。(122) 式を計算してみると、

$$E_p = \pi (K/\nu) \varphi_0^2 \rho \left\{ 1 - \exp(-8\pi D/L) \right\} / \left[L \left\{ 1 + \exp(-4\pi D/L) \right\}^2 \right] \quad (126)$$

が求められる。とくに、 $D \geq 0.3L$ の場合には、 D の影響がほとんどなくなり、(126) 式は次のようになる。

$$\overline{E_p} = \frac{\pi K \rho g^2 H^2}{4L\nu} \left\{ \frac{1}{\cosh kh} \right\}^2 \quad (127)$$

なお、(122) 式は Green の定理を用いると、

$$\overline{E_p} = -\frac{\rho}{L} \oint \mathbf{v} \varphi \, ds = -\frac{\rho}{L} \int_0^L (w_2 \varphi)_{z=0} dx \quad (128)$$

となる。ここに $\mathbf{v}$ は速度ベクトル、 ds は線分で、 $\oint$ は 1 波長の長さにとった砂層の周辺の線積分を意味する。Reid-梶浦は (128) 式の代わりに、

$$\overline{E_p} = -\frac{1}{T} \int_0^T (w_2 p)_{z=0} dt \quad (129)$$

を用いて計算したが、これは (128) 式と同じことである。

いま (86) 式において、 $\overline{E_{fi}}$ の代わりに (127) 式を用いて積分すれば次式が得られる。

$$H = H_1 \exp(-\varepsilon_p x/L) \quad (130)$$

ここに、

$$\varepsilon_p = \frac{4\pi^2}{\beta L (\sin 2kh + 2kh)} \frac{2KL}{\pi} \beta^3 \quad (131)$$

Hunt³⁰⁾ は浸透のほか、境界摩擦も一緒に考慮した解析を行なって、(114) 式と (131) 式を加えた

$$\varepsilon_{(b+wt+p)} = \varepsilon_b (1 + \Psi) + \varepsilon_p = \varepsilon_b (1 + \Psi + \alpha) \quad (132)$$

を得ている。ここに、 ε_b は (108) 式、 Ψ は (112) 式で示され、

$$\alpha = 2KL\beta^3/\pi \quad (133)$$

である。また Murray³⁹⁾は Huntが底面の境界条件として、水平方向の流速が0であるとしたのは正しくないとして、ここに新しい考え方を導入して計算をしておいた。

3.4 エネルギー損失を伴う波の変形

以上、内部粘性、境界摩擦および浸透によるエネルギー損失について述べたが、これらが総合して波高減衰がおこる場合には、

$$\frac{d}{dx} (b n E c) = -(\bar{E}_{fi} + \bar{E}_{fb} + \bar{E}_p) b \quad (130)$$

が成立する。しかし、一般には内部粘性による損失 $\bar{E}_{fi}$ は他の損失に比べて小さいので、省略して取り扱う。いま、

$$K_{fp} = \left(\frac{n E c b}{(n E c)_o b_o} \right)^{1/2} = \frac{H}{H_o} K_s^{-1} K_r^{-1} \quad (131)$$

とおくと、(130)式は $\bar{E}_{fi}$ を省略して次式のようになる。

$$\frac{d K_{fp}}{dx} = - \frac{1}{(n E c)_o b_o} \frac{1}{2 K_{fp}} (\bar{E}_{fp} + \bar{E}_p) b \quad (132)$$

この式は $\bar{E}_{fp}$ および $\bar{E}_p$ として、それぞれ (118) 式および (127) 式を用いると、次のように変形してあらわすことができる。

$$\frac{d}{dx} (K_{fp}^{-1}) - F_p K_{fp}^{-1} = F_f \quad (133)$$

ここに、

$$F_f = K_r \frac{f H_o}{T^4} \phi_f, \quad \phi_f = \frac{64 \pi^3}{3 g^2} \left(\frac{K_s}{\sinh kh} \right)^3 \quad (134)$$

$$F_p = \frac{K}{4 \nu T^3} \phi_p, \quad \phi_p = \frac{64 \pi^3}{g} \frac{K_s^2}{\sinh 2 kh} \quad (135)$$

(133) 式の一般解は

$$K_{fp}^{-1} = \exp \left(\int E_p dx \right) \left\{ \int \exp \left(- \int E_p dx \right) \cdot E_f dx + \text{const.} \right\} \quad (136)$$

であらわされる。⁴⁰⁾ Bretschneider-Reid³²⁾は (136) 式に基づいて、一様な水底勾配の場合および一定水深の場合の解を導いた。とくに、 $E_f = 0$ の場合、 K_{fp} を K_p とかけば、

$$K_p = \exp \left(- \int_{x_o}^x E_p dx \right) \quad (137)$$

となり、一様水深のときには、

$$K_p = \exp (-F_p x) \quad (138)$$

となって、(130)、(131) 式と一致する。また、 $F_p = 0$ の場合には、 K_{fp} を K_f とかいて、

$$K_f = \left[1 + \int_0^x F_f dx \right]^{-1} \quad (139)$$

となり、一様水深の場合には、

$$K_f = (1 + F_f x)^{-1} \dots\dots\dots (140)$$

となって、(121)式と一致する。

水深が変化する実際の場合には、距離 x を微小区間 Δx に区切り、その間は一様な水深として、

$$K_{fp} = \Sigma \Delta K_f \cdot \Delta K_p \dots\dots\dots (141)$$

により計算をしていく必要がある。ここに、

$$\Delta K_p = \exp(-F_p \Delta x) \dots\dots\dots (142)$$

$$\Delta K_f = (1 + F_f \Delta x)^{-1} \dots\dots\dots (143)$$

である。

4 結 語

波の変形、とくに一次元変形について述べてきたが、波の変形の原因には以上述べたもののほかに、人工構造物による変形があり、また砕波についてもふれることができなかった。さらに、不規則波の変形となるとまだよくわかっていない。この小文がこの方向の研究や実際問題への応用に何らかの貢献をすれば筆者の喜びとするところである。

参 考 文 献

- 1) Méhauté, B. Le and L. M. Webb: Periodic Gravity Waves over a Gentle Slope at a Third Order of Approximation, Proc. of 9th Conf. on Coastal Eng., 1964, pp. 23~40.
- 2) 土木学会編: 水理公式集 昭和38年増補改訂版, 昭38. 8, p. 452.
- 3) Skjelbreia, L. and J. Hendrickson: Fifth Order Gravity Wave Theory, Proc. of 7th Conf. on Coastal Eng., 1960. pp. 184~196.
- 4) Méhauté, B. Le and R. C. Y. Koh: On the Breaking of Waves Arriving at an Angle to the Shore, Jour of Hydraulic Research, Vol. 5, No. 1, 1967, pp. 67~88.
- 5) Iversen, H. W.: Waves and Breakers in Shoaling Water, Proc. of 3rd Conf. on Coastal Eng., 1953, pp. 1~12.
- 6) Masch, F. D.: Cnoidal Waves in Shallow Water, Proc. of 9th Conf. on Coastal Eng., 1964, pp. 1~22.
- 7) 岩垣雄一: クノイド波に関する研究(第4報) — hyperbolic waves について (1) —, 京大防災研究所年報, 第10号B, 昭42. 3, pp. 283~294.
- 8) 富永政英: 流れと波について — 河口に侵入して来る波および流れのある海域に発生する風波について、

海岸災害研究ニュース，海岸災害総合研究班，第6号，昭42.3，pp.28~43.

- 9) Yu, Yi-Yuan: Breaking of Waves by an Opposing Current, Trans. A.G.U., Vol.33, 1952, pp.39~41.
- 10) Hunt, J. N.: Gravity Waves in Flowing Water, Proc. Roy. Soc. London, A Vol. 231, 1955, p.496.
- 11) 浜田徳一，加藤始：流れをさかのぼる波についての一計算，第8回海岸工学講演会講演集，昭36.9，pp.25~29.
- 12) Benjamin, T. B.: The Solitary Wave on a Stream with an Arbitrary Distribution of Velocity, Jour. of Fluid Mechanics, Vol.12, 1961, pp.97~116.
- 13) 浜田徳一，加藤始：流水の中の有限振幅波の計算，第10回海岸工学講演会講演集，昭38.10, pp.1~6.
- 14) 浜田徳一：流れの中の有限振幅波 — 追補 —，第11回海岸工学講演会講演集，昭39.11, pp.1~6.
- 15) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart: Changes in the Form of Short Gravity Waves on Long Waves and Tidal Currents, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 8, 1960, pp. 565~583.
- 16) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart: The Changes in Amplitude of Short Gravity Waves on Steady non-uniform Currents, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 10, 1961, pp. 529~549.
- 17) Whitham, G. B.: Mass, Momentum and Energy Flux in Water Waves, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 12, 1962, pp. 135~147.
- 18) Lamb, H.: Hydrodynamics, 6th ed., Dover Pub., New York, 1932, p. 580.
- 19) Ippen, A. T.: Estuary and Coastline Hydrodynamics, Mc Graw-Hill Book Co New York, 1966, p. 82.
- 20) 18) p.624.
- 21) 18) p.620.
- 22) Eagleson, P. S.: Laminar Damping of Oscillatory Waves, Proc. ASCE, Vol. 88, NO. HY3, 1962, pp. 155~181.
- 23) 岩垣雄一，土屋義人，坂井順行：海底摩擦による波高減衰の基礎的研究(2) — 底面摩擦力の測定について —，第11回海岸工学講演会講演集，昭39.11, pp. 62~68.
- 24) 岩垣雄一，土屋義人，陳活雄：海底摩擦による波高減衰の基礎的研究(3) — 層流境界層方程式の非線型項の影響について —，第12回海岸工学講演会講演集，昭40.11, pp. 41~49.
- 25) Iwagaki, Y, and Y. Tsuchiya: Laminar Damping of Oscillatory Waves due to Bottom Friction, Proc. of 10th Conf. on Coastal Eng., 1966, pp.149~165.
- 26) Collins, J. I.: Inception of Turbulence at the Bed under Periodic Gravity Waves, Jour. of Geophy. Res., Vol. 68, 1963, pp. 6007~6014.

- 27) Vincent, G. E. : Contribution to the Study of Sediment Transport on a Horizontal Bed due to Wave Action, Proc. of 6th Conf. on Coastal Eng., 1958, pp. 326~354.
- 28) Li, Huon : Stability of Oscillatory Laminar Flow along a Wall, Beach Erosion Board, Tech. Memo., No. 47, 1954, pp. 1~48.
- 29) Kajiura, K. : On the Bottom Friction in an Oscillatory Current, Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo Univ., Vol. 42, 1964, pp. 147~174.
- 30) Jonsson, I. G. : Wave Boundary Layers and Friction Factors, Proc. of 10th Conf. on Coastal Eng., 1966, pp. 127~148.
- 31) Putnam, J. A. and J. W. Johnson : The Dissipation of Wave Energy by Bottom Friction, Trans. AGU, Vol. 30, 1949, pp. 67~74.
- 32) Bretschneider, C. L. and R. O. Reid : Modification of Wave Height due to Bottom Friction, Percolation, and Refraction, Beach Erosion Board, Tech. Memo., No. 45, 1954, pp. 1~36.
- 33) 2) p. 468.
- 34) 岩垣雄一, 柿沼忠雄, 宮井宏 : 現地海岸における海底摩擦係数について, 第12回海岸工学講演会講演集, 昭40. 11, pp. 35~40.
- 35) 岩垣雄一, 柿沼忠男 : 現地海岸の海底摩擦係数について(2), 第13回海岸工学講演会講演集, 昭41. 12, pp. 21~29.
- 36) Putnam, J. A. : The Dissipation of Wave Energy by Flow in a Permeable Sea Bottom, Trans. AGU, Vol. 30, 1949, pp. 349~356.
- 37) Reid, R. O. and K. Kajiura : On the Damping of Gravity Waves over a Permeable Sea Bed, Trans. AGU, Vol. 38, No. 5, 1957, pp. 662~666.
- 38) Hunt, J. N. : On the Damping of Gravity Waves Propagated over a Permeable Surface, Jour. of Geophy. Res., Vol. 64, No. 4, 1959, pp. 437~442.
- 39) Murray, J. D. : Viscous Damping of Gravity Waves over a Permeable Bed, Jour. of Geophy. Res., Vol. 70, No. 1965, pp. 2325~2331.
- 40) 19) p. 167.