

流　　れ　　の　　抵　　抗　　則

—表　面　粗　度—

名古屋大学工学部 工博　　足　立　昭　平

ま　え　が　き

非圧縮性流体の運動の解析は、連続体としての流体の質量保存法則と運動量保存法則、すなわち連続方程式と運動方程式とから、流れの場を記述する運動学のおよび力学的物理量、すなわち流速 $V(u, v, w)$ と圧力 P とを求めることである。もし、流体の変形が応力をともなわないのであれば、これらの基礎方程式と未知量との数は一致しているから、少なくとも原理的には解けるはずである。しかしながら、流体も一般の物質と同様に変形に対してまったく無抵抗であるわけではなく、せん断力に対する変形は止まることを知らないけれども、その変形速度に見合う内部応力をもつ。したがって、基礎方程式が解けるためには、そのような変形速度とせん断応力との関係を知らねばならない。この関係式を与えるものが抵抗則である。ただ通常は、流路の流れの様子が流積についての積分量で記述されるので、抵抗則も積分量、すなわち平均流速と外力との関係式であらわされる。

このような抵抗則は、流路壁面の形態、流れの状態によってきわめて複雑に変化し、その確立は容易ではない。しかし一方において、現実の木工問題には対処しなければならないから、未知の事象をすべて経験的事実に負わせて抵抗則を経験的係数で表現する方法がとられてきた。経験的係数もすでに200年の歴史を重ね、近年ではそれらの経験的係数の物理的意味も次第に追究されるようになってはきたが、まだそれらを統一的にとり扱うことは困難である。

本稿ではこうした抵抗則に関する基礎的概念を整理することに主眼をおき、もっとも単純な二次元等流を例として代表的仮説を述べ、表面粗度のモデルとして二次元的形状の人工粗度に関する実験の一部を紹介する。

1　抵抗則の基礎的概念

1.1　流体要素に働くせん断応力

粘性流体のひずみ速度と応力との関係式は、Newton-Stokesの粘性法則として知られており、非圧縮性流体の応力テンソル τ_{ij} は、圧力を P 、流体の粘性係数を μ 、速度成分を u_i とおいて次式で与えられる。⁽¹⁾

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

ここに、 δ_{ij} は Kronecker delta であり、添付 i および j は直角座標 x, y, z の各方向の成分をあらわす free index および dummy index である。右辺第一項が流体そのものの状態による垂直応力成分、第二項が流体の運動による変形の結果として生ずる応力成分をあらわす。

二次元等流、すなわち、速度成分が

$$u = u(y), \quad v = 0, \quad w = 0$$

の場合、流体変形にともなう応力は τ_{xy} 成分だけであるから、このせん断応力を単に τ と記せば、

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad \text{or} \quad = \rho \nu \frac{du}{dy} \quad \dots\dots\dots (1.2)$$

である。ここに、 ρ は流体の密度であり、 $\nu = \mu/\rho$ が動粘性係数と呼ばれるのは周知のところである。

流れの慣性力が (1.2) 式で与えられる粘性力をはるかにしのぐような場合、すなわち流れの Reynolds 数が高い場合には、流れは乱流となり速度成分は時間的平均値 $\bar{u}_i$ と変動値 u'_i との和で与えられる。 u'_i は $\bar{u}_i$ に対して二次的な大きさしか有しないが、 $\bar{u}_i$ に注目するとき平均値としてのひずみ速度と応力との関係は、(1.1) 式に、 $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ が見かけの応力としてつけ加えられる。これが渦動粘性あるいは Reynolds 応力と呼ばれるものである。乱れの機構がまだ十分に解き明かされていない現在では、この見かけの応力と $\bar{u}_i$ との関係は経験的仮説によって表現されている。二次元等流の場合のそれは $-\rho \overline{u'v'}$ であるが、Boussinesq は (1.2) 式にならって動粘性係数 ν に相当する渦動粘性係数 ϵ を定義し、

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho \epsilon \frac{d\bar{u}}{dy} \quad \dots\dots\dots (1.3)$$

とあらわした。また、Prandtl および Von Kármán は、変動速度が平均流の速度勾配に関係づけられるとして、

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho \ell^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad \dots\dots\dots (1.4)$$

を提案した。ここに、 ℓ は混合距離と名付けられるものであり、Prandtl は壁面近くの領域を対象として、

$$\ell = ky \quad \dots\dots\dots (1.5)$$

を、Von Kármán は壁面から離れた領域を対象として速度分布の相似の仮説から、

$$\ell = k \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \middle/ \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right| \quad \dots\dots\dots (1.6)$$

を与えた。ここに、 k は Kármán 常数と名付けられている。渦動粘性係数あるいは混合距離によるこれらの表現は、壁面の形態、あるいは自由表面などの影響について種々の提案がなされているが、ここではこの種の仮説の基本形を挙げるだけにとどめる。

1.2 二次元等流の速度分布

一般に流体要素の変形は、流れの場の流体全体の変形のひな形ではない。流路の一次元的解析法における平均流速の抵抗則をとりあげる前に、流路における流体全体の変形、つまり速度分布の基本形を述べておこう。

非圧縮性流体の運動方程式は、物体力のポテンシャルを Ω であらわして、

$$\frac{Du_i}{Dt} = - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots (1.7)$$

で与えられる。自由表面をもつ二次元等流の場合には、水路床面の摩擦応力を τ_w 、水深を H 、重力の加速度を g 、水路勾配を I とおいて、

$$\tau = \tau_w \left(1 - \frac{y}{H}\right), \quad \tau_w = \rho g H I \quad \dots\dots\dots (18), (19)$$

となる。速度分布は前項の応力と速度勾配との関係式をこの (1.8) 式に代入して導かれる。

流れが層流であれば、(1.2) 式が適用され、その速度分布は二次曲線分布となる。すなわち、

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* H}{\nu} \left\{ \left(\frac{y}{H}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{H}\right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (1.10)$$

ここに、 u_* は摩擦速度であって、

$$u_* = \sqrt{\tau_w / \rho} = \sqrt{g H I} \quad \dots\dots\dots (1.11)$$

また、流れが乱流であれば、(1.2) 式の粘性応力に変動速度による Reynolds 応力がつけ加えられるが、一般に壁面に接する領域を除けば粘性応力は Reynolds 数に対して省略でき、

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'} \approx -\rho \overline{u'v'}$$

と考えるとよい。(1.3) 式を採用し、 ϵ を常数と見なせば、この場合速度分布は (1.10) 式とまったく同形をとり、

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{u_* H}{\epsilon} \left\{ \left(\frac{y}{H}\right) - \left(\frac{y}{H}\right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (1.12)$$

となる。しかし、(1.4) 式にもとづくいわゆる運動量輸送理論によれば、壁面に比較的に近い領域を対象として、 y/H を 1 に対して省略するとともに、(1.5) 式の Prandtl の混合距離の仮定を採用すれば、

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{y_0} \quad \dots\dots\dots (1.13)$$

あるいは、壁面から離れて (1.6) 式の Von Kármán の混合距離の仮説を用いれば、

$$\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}}{u_*} = -\frac{1}{k} \left\{ \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{H}}\right) + \sqrt{1 - \frac{y}{H}} \right\} \quad \dots\dots\dots (1.14)$$

となる。

Von Kármán の混合距離は (1.14) 式を (1.6) 式に代入して、

$$\ell = ky \sqrt{1 - \frac{y}{H}} / \left\{ \sqrt{1 - \frac{y}{H}} + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{H}\right) \right\}$$

となり、 $y/H \ll 1$ のとき $\ell = ky$ 、すなわち (1.5) 式の Prandtl のそれと一致する。したがって、両者の混合距離に関する常数 k は同じものと考えてよい。また、Prandtl の対数速度分布式から渦動粘性係数 ϵ を求めれば、

$$\epsilon = k u_* H \left(\frac{y}{H}\right) \left(1 - \frac{y}{H}\right), \quad \epsilon_m = \frac{1}{H} \int_0^H \epsilon dy = \frac{k}{6} u_* H \quad \dots\dots\dots (1.15)$$

となる。二次元等流の乱流速度分布 (1.12)、(1.13) および (1.14) の 3 式を比較するため、(1.12) 式に (1.15) 式の ϵ_m を使い、(1.12)、(1.13) 式を (1.14) 式の形に書きあらわせ

ば、

$$\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}}{u_*} = \frac{3}{k} \left(1 - \frac{y}{H} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (1.12')$$

$$\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}}{u_*} = -\frac{1}{k} \ln \left(\frac{y}{H} \right) \quad \dots\dots\dots (1.13')$$

となる。図-1はこれらの曲線形を図示したものである。図に見られるように、3曲線には若干のずれがあるけれども、壁面に接する粘性領域、あるいは壁面の形態との関係を考慮するうに、Prandtl の (1.13) 式がもっとも好都合であり、またその比較的単純な仮定にもかかわらず実験結果との対応も良好であることから、(1.13) 式が乱流速度分布の基本形と目されている。これがいわゆる対数速度分布則である。

(1.13) 式の積分常数 y_0 は壁面のごく近傍の流れに関する諸量、壁面の摩擦速度 u_* 、動粘性係数 ν 、壁面の不規則性の幾何学的パラメーター、たとえば凹凸の高さ k 、間隔 s 、幅 t などに決定づけられると考えられる。したがって次元解析から、

$$\frac{u_* y_0}{\nu} = f_1 \left(\frac{u_* k}{\nu}, \frac{s}{k}, \frac{t}{k} \right) \quad \dots\dots (1.16)$$

あるいは

$$\frac{y_0}{k} = f_2 \left(\frac{u_* k}{\nu}, \frac{s}{k}, \frac{t}{k} \right) \quad \dots\dots\dots (1.16')$$

が期待される。したがって対数速度分布則 (1.13) 式は、

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \left\{ \ln \frac{u_* y}{\nu} - f_1 \left(\frac{u_* k}{\nu}, \frac{s}{k}, \frac{t}{k} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (1.17)$$

$$\text{or} = \frac{1}{k} \left\{ \ln \frac{y}{k} - f_2 \left(\frac{u_* k}{\nu}, \frac{s}{k}, \frac{t}{k} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (1.17')$$

砂粒粗度に関する J. Nikuradse の円管流実験によれば、砂粒々径を k_s とおいて、上の諸係数は、

$$\frac{u_* k_s}{\nu} < 3 \sim 5 \quad \therefore \frac{\bar{u}}{u_*} = 5.75 \log_{10} \frac{u_* y}{\nu} + 5.5 \quad \dots\dots\dots (1.18)$$

$$\frac{u_* k_s}{\nu} > 60 \sim 100 \therefore \frac{\bar{u}}{u_*} = 5.75 \log_{10} \frac{y}{k_s} + 8.5 \quad \dots\dots\dots (1.19)$$

である。(2.18) 式は滑面、(2.19) 式は完全粗面の速度分布の基本的実験式となっているものである。なお、両者の中間は粗滑遷移領域と呼ばれるが、壁面の粗度の種類によってかなり変化することが知られている。

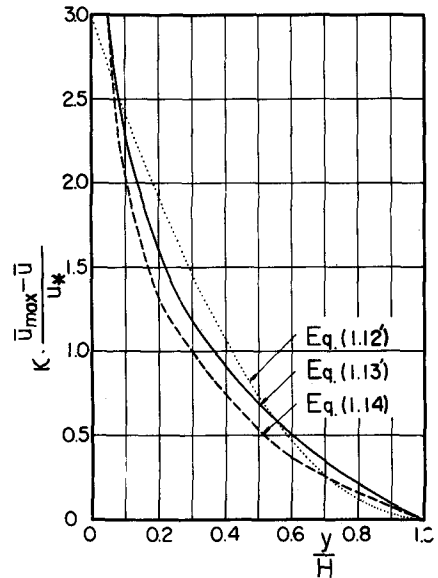


図-1 二次元等乱流流速度分布式の比較

1.3 抵抗係数と粗度係数

流れの抵抗則は本来流体要素のひずみ速度と応力の関係であるが、水工学では實際上流体要素の微視的な挙動よりも、水深、平均流速あるいは流量といった平均的な水理量の把握が問題の中心となるから、抵抗則は平均流速 U と潤辺の平均せん断応力 τ_0 との関係式で与えられる。また、エネルギー勾配を I_e 、流水断面の径深を R とおけば、

$$\tau_0 = \rho g R I_e \quad \dots\dots\dots (1.20)$$

であるから、流路の抵抗則は U と I_e との関係式で与えられることも多い。

このような抵抗則の一つの代表的形式は、抵抗力と慣性力（エネルギー的には、損失水頭と速度水頭）との比を抵抗係数と定義するものである。

$$\tau_0 = \lambda \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \quad \text{i.e.} \quad \lambda = \tau_0 / \frac{1}{2} \rho U^2 \quad \dots\dots\dots (1.21)$$

の λ は一般的であるが、とくに円管流については Darcy-Weisbach の式として知られる。

$$h_r = f \frac{\ell}{D} \frac{U^2}{2g} \quad \text{i.e.} \quad f = h_r / \frac{\ell}{D} \frac{U^2}{2g} \quad \dots\dots\dots (1.22)$$

の摩擦係数 f が用いられる。ここに、 h_r は損失水頭、 D は管径、 ℓ は管長である。

これらの抵抗係数は、流路壁面の平均摩擦速度を、

$$U_* = \sqrt{\tau_0 / \rho} = \sqrt{g R I_e} \quad \dots\dots\dots (1.23)$$

と置いて、

$$\frac{U}{U_*} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} = \sqrt{\frac{8}{f}} \quad \dots\dots\dots (1.24)$$

とあらわされる。 U/U_* は速度分布を流水全断面について積分して得られるものであり、これらの抵抗係数は速度分布、つまり流路における流水全体の変形をあらわす係数であるということもできる。たとえば、二次元等流の場合には $u_* = U_*$ であるから、

層流の場合、(2.10) 式から、

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{3} \frac{U_* H}{\nu} \quad \dots\dots\dots (1.25)$$

乱流の場合、(1.17)、(1.17') 式から

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\ell} \left\{ \ln \frac{U_* H}{\nu} - 1 - \ln f_1 \left(\frac{U_* \ell}{\nu}, \frac{s}{\ell}, \frac{t}{\ell} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (1.26)$$

$$\text{or} \quad = \frac{1}{\ell} \left\{ \ln \frac{H}{\ell} - 1 - \ln f_2 \left(\frac{U_* \ell}{\nu}, \frac{s}{\ell}, \frac{t}{\ell} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (1.26')$$

とくに Nikuradse の砂粒粗度の場合には、(2.18)、(2.19) 式から

$$\text{滑面} \quad \left(\frac{U_* \ell_s}{\nu} < 3 \sim 5 \right) : \frac{U}{U_*} = 3.0 + 5.75 \log_{10} \frac{U_* H}{\nu} \quad \dots\dots\dots (1.27)$$

$$\text{粗面} \quad \left(\frac{U_* \ell_s}{\nu} > 60 \sim 100 \right) : \frac{U}{U_*} = 6.0 + 5.75 \log_{10} \frac{H}{\ell_s} \quad \dots\dots\dots (1.28)$$

となる。

一般の流路の場合には、自由表面の影響も含めて速度分布の三次元的考慮が必要であって、速度分布の積分過程に導入される流路断面形の影響、潤辺せん断応力の不均一性の影響などが加わり、問題はきわめて複雑になる。しかし、上記の二次元等流の関係式がそのような複雑な課題に有力な手づるを与えるであろうことは期待してよい。

抵抗則のいま一つの代表的形式は、平均流速公式として知られる U と R および I との間の経験公式である。土木工学の分野では、さきの抵抗係数よりもこの形式で定義される粗度係数の方が親しまれている。平均流速公式は 1755 年の Chézy 公式に始まり、数多くの経験公式が提案されたが、最近では Manning 公式が広く使用されている。それらは周知のように、

$$U = C\sqrt{RI} \quad \dots\dots\dots (1.29)$$

$$U = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (1.30)$$

である。ここに、 C は Chézy 係数、 n は Manning の粗度係数である。これらも λ 、 f と同様に U/U_* で書きあらわすことができ、

$$C = \sqrt{\varphi} \frac{U}{U_*}, \quad n = R^{\frac{1}{6}} / C = R^{\frac{1}{6}} / \sqrt{\varphi} \left(\frac{U}{U_*} \right) \quad \dots\dots\dots (1.31)$$

である。

2 二次元粗度要素の抵抗則

われわれが対象とする流れの多くは粗面乱流である。粗面乱流の抵抗則については、円管流実験で比較的古くから Darcy の摩擦係数 f (1.22) 式が Reynolds 数の大きい範囲である一定値に近づくことが見出されていたが、粗面の粗度要素と抵抗係数とを直接関係づけたのは、J. Nikuradse (1931) である。Nikuradse の砂粒粗度実験の詳細は多くの教科書に記載されているものであり、ここでもすでに (1.28) 式に示したとおりである。

Nikuradse の砂粒粗度は、均一粒径の砂粒を隙間なく敷き詰めたものであるから、粗度要素の大きさと密度とを砂粒粒径 δ_s をもって同時に代表できるという利点を有している。いわゆる相当砂粒粗度はこの利点に着目して一般粗面の粗度を砂粒粗面に換算して評価しようとする試みである。すなわち、(1.28) 式を用いて、等価な流水抵抗を生ずるような砂粒粗度 δ'_s をもって (1.16)、あるいは (1.16') 式の δ 、 s 、 t を纏めた尺度にするわけである。もちろん、相当砂粒粗度 δ'_s それ自身は個々の粗度要素の幾何学的長さを直接にあらわすものではない。 δ'_s の物理的意味は明確ではないが、こうしたパラメーターの導入によって、粗面を構成する粗度要素の形態から流水抵抗を評価する途がひらかれたわけである。

粗面の形態はきわめて複雑であることから、こうした表面粗度の性格の吟味はもっぱら模型化された粗度要素をもつ人工粗面の実験から始められている。人工粗面の抵抗則の実験はかなり数にのぼるが、使用されている粗度要素の模型もきわめて多種にわたり、これまでのところ、粗面の形態と流水抵抗との関係を理論的に究明することよりも、むしろ莫大な実験資料をどのように体系づけるかに追われてきたように思われる。近年活発に研究が進められている開水路乱流構造の追究の成

果が、これらの長年にわたる実験値の蓄積を実らす時は、それ程遠くないのかも知れないが、ここでは従来の実験研究の展開に沿って、粗面乱流の抵抗則の性格を追ってみよう。なお、粗度形式としてはもっとも単純な粗度模型として、流れを横切って設けられる線状粗度（稜粗度、溝粗度）を例とする。

2.1 粗面乱流の形態

粗面流の抵抗は、粗度要素によって強制される乱れの大きさとその拡散に特性づけられるが、Von Kármán の速度分布の相似の仮説に例示されるように、壁面から離れた流心部における乱れの混合機構は壁面での乱れの発生の仕方には独立であろう。したがって、壁面の個々の粗度要素によって強制される渦は、壁面からある距離までの間に、流心部の速度分布と異質の拡散領域を形成するであろう。図-2は滑面水路の底面におかれた孤立稜粗度要素のまわりの速度分布実測の一例であるが、拡散領域の成立を示唆しているといつてよいであろう。同様に図-3は同じ寸法の稜粗度を一定の間隔に配置し、稜粗度要素の直上と、稜粗度の丁度中点で測定した速度分布を比較したものである。これらも拡散領域の存在を肯定する資料であるが、稜の間隔による

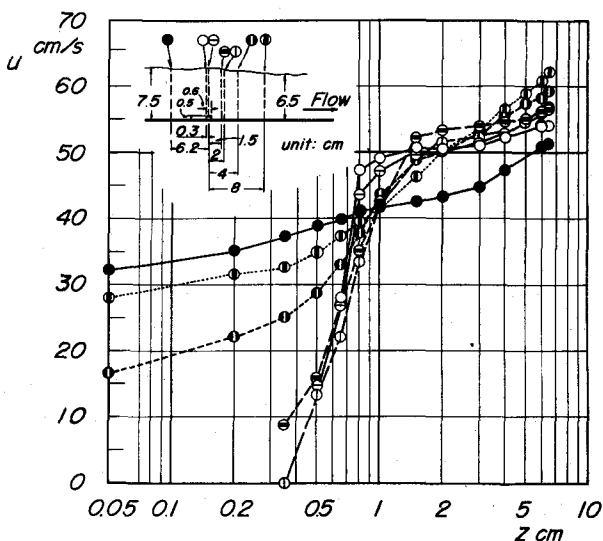


図-2 孤立稜粗度要素付近の速度分布

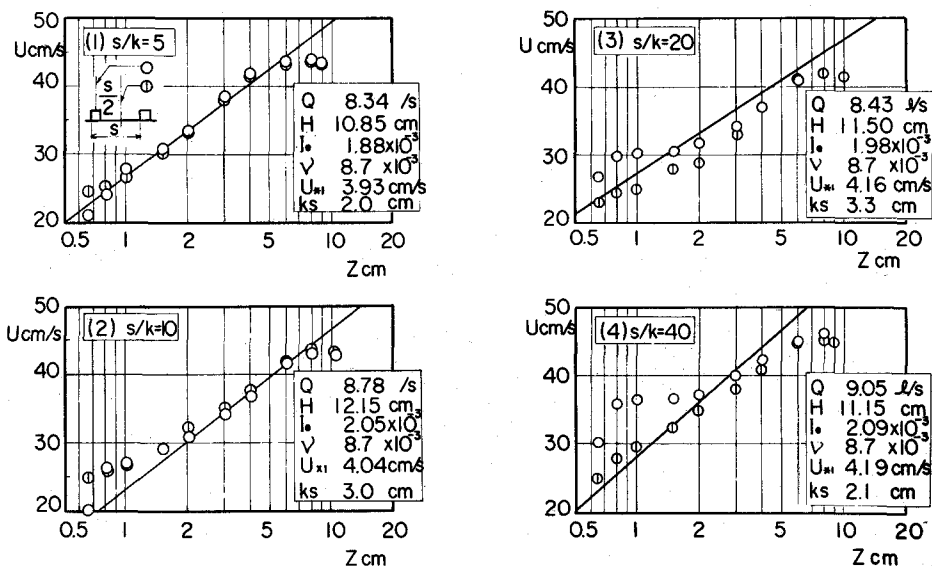


図-3 稜粗度による速度分布

拡散領域の速度分布の相違をはっきりと示している。なお図中 U_{*1} は足立の方法⁽²⁾で求めた底面の平均摩擦速度であり、実線はこの U_{*1} を用いて Nikuradse の完全粗面乱流の速度分布式 (1.19) 式である。これらの速度分布は限られた範囲の一例にすぎないが、拡散領域の存在と棧間隔による流れの形態の変化を証拠だてているといえよう。

つぎに、抵抗特性を決定づける有力な因子の一つとして、棧粗度要素の圧力抗力を取りあげてみよう。図-4 は次式 (2.1) で定義した抗力係数 C_D の相対水深 H/k に対する変化を示すものである。

$$C_D = D / \frac{1}{2} \rho k U^2 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

ここに、 D は圧力抗力であって、棧粗度の上流面と下流面に直径 0.5 mm の小孔を底面から 1 mm 間隔の高さに 4 個ずつ穿ち、これらの小孔を内径 1 mm の銅管で水路外のマンメーターに連結して測定したものである。棧粗度要素の寸法は図-2、3 のそれと同一であり、 $k = 5 \text{ mm}$ 、 $t = 6.4 \text{ mm}$ である。この抗力係数は便宜上平均流速 U に対して定義されているが、抗力の特性が棧間隔に大きく影響されていることがわかる。すなわち、 $s/k = 2.5$ の場合 $C_D = 0$ であるが、 s/k が増すにしたがって C_D が増大し、 $s/k = 160$ に至って、ほぼ $s/k = \infty$ 、すなわち孤立棧粗度のそれに一致する。このような C_D の変化はさきの速度分布の実測とも符合し、棧間隔の相違による粗面流の形態の変化を明瞭に物語っている。

2.2 粗面乱流の相当砂粒粗度

粗度要素の密度によって相当砂粒粗度の値が変化することは、点状粗度要素を用いた H・Schlichting⁽³⁾ あるいは螺旋溝を粗度要素とした V.L.Streeter⁽⁴⁾ の管路実験でも指摘されている。しかし、棧粗度を用いてその間隔の変化による相当砂粒粗度の変化を調べ、相対棧間隔 s/k が 10 付近で抵抗が最大となることを最初に指摘したのは J.W.Johnson⁽⁵⁾ である。図-5 は Johnson が整理した実験資料に、その後の同類の実験資料を加えて、粗度要素の間隔に対応する相当砂粒粗度の変化を示したものである。なお同図には参考値として移動河床における砂堆の実測値⁽⁷⁾ をつけ加えてある。

実験値はかなり散らばってはいるが、相対棧間隔 $b/k = 8 \sim 12$ の付近で相当砂粒粗度 k_s' が最大になると断定してよい。このような最大抵抗の出現は流れに対する粗度要素の働きから説明される。すなわち、棧粗度の間隔がある程度広ければ、棧粗度は流れに対して突起物として抵抗し、その密度が高ければ高いほど抵抗は増大する。しかし一方、棧間隔がある程度以上狭くなれば、棧粗度相互の遮蔽効果のため、流れに対する個々の棧粗度の抵抗が減り、かえって抵抗が減少すると考えられる。

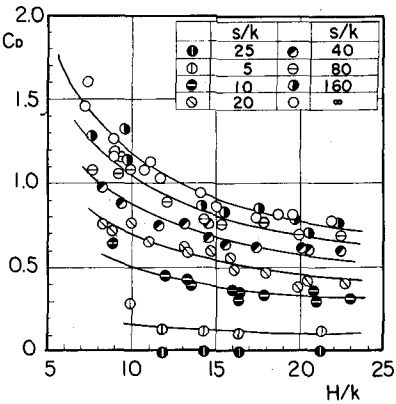


図-4 棧粗度要素の抗力係数

図-5の実験値の散らばりは、粗度要素の形状の相違にもよるけれども、水深測定の高さが統一されていないことにも原因の一つがある。Johnsonは棧粗度の頂面を、Bazin、Powellは棧粗度の底面を、また細井は棧の1/2高をそれぞれ0点としている。基面の設定は粗度要素の機能に関する本質的な解釈に関連するものでもあり、図-5の実験値は棧粗度の間隔に対する流水抵抗の定性的変化を確認するだけに満足することにしよう。

実験値の散らばりについては、さらに流れの形態の相違による抵抗特性の相違についても考えねばならない。すなわち、完全粗面乱流のNikuradseの実験定数がある。そのような見地から、(1.28)式の砂粒粗度実験式にとらわれなくて、実験に採用した粗面のそれぞれの形態に応じてあらためて実験定数を提案する試みもなされている。

R・W・Powell⁽⁸⁾が与えた相当粗度はその一例である。彼は相対棧間隔の比較的大きい棧粗度を対象として、

$$\frac{U}{U_*} = 7.41 \log_{10} \frac{R}{\varepsilon_p} \quad \dots\dots (2.2)$$

を提案し、粗度間隔に対応する ε_p の値として表-1を与えている。Powellの ε_p をNikuradseの砂粒粗度(1.28)式で定義される k'_s であらわせば、

$$\varepsilon_p = 0.144 R \left(\frac{k'_s}{R} \right)^{0.776} \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

となる。

相当砂粒粗度 k'_s に代って、別の相当粗度 ε_p を採用する方が実験結果の整理に好都合であったことについて、Powell自身は開水路の特性によるものと述べているけれども、自由表面の影響だけではなく、粗面自身の特性でもあると解釈

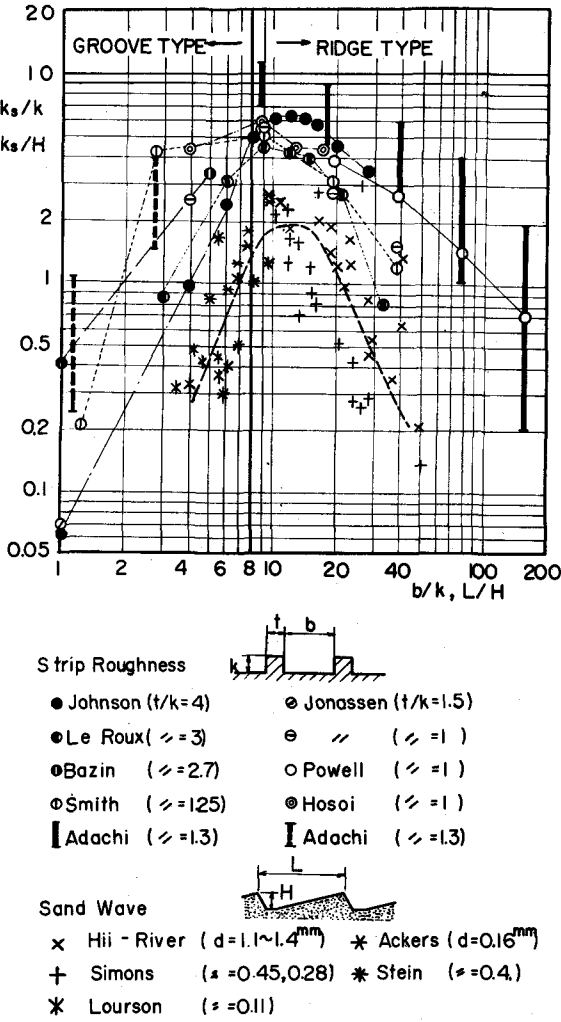


図-5 棧粗度要素の相当砂粒粗度の変化

表-1 Powellの相当粗度 ε_p

粗度要素 $k \text{ cm} (=t \text{ cm})$	相対棧間隔 s/k	Powell 粗度 $\varepsilon_p \text{ cm}$	相当粗度比 ε_p/k
0.64	20	0.431 ± 0.034	0.679
0.32	20	0.267 ± 0.038	0.841
0.64	40	0.314 ± 0.029	0.494
0.32	40	0.169 ± 0.016	0.532
0.64	80	0.174 ± 0.007	0.274
0.32	80	0.095 ± 0.014	0.300
0.64	160	0.095 ± 0.014	0.149
0.32	160	0.050 ± 0.007	0.157

する方が無理がないように思われる。

切れ目のある稜粗度についてはあるが、同様に砂粒粗度実験式 (1.28) 式にとらわれずに実験定数を求めたものに M・L・Albertson⁽⁹⁾ の提案がある。それは、

$$\frac{U}{U_*} = 6.06 \log_{10} \frac{H}{\epsilon_a} + 2.6 \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

ここに、 ϵ_a は粗度要素寸法と相対粗度間隔の関数であって、相当砂粒粗度 k'_s とは、

$$\epsilon_a = 3.64 H \left(\frac{k'_s}{H} \right)^{0.95} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

の関係になる。

このような流れの形態の相違に対する抵抗則の修正に関連して、H・M・Morris⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ の流れの分類は多くの示唆に富んでいるように思われる。Morris は相当砂粒粗度 k'_s が特別の物理的意味を有しないことを強調して、 k'_s が粗度要素の流れに対する投影高を代表するという概念は捨てるべきであって、粗面の状態をあらわす物理量は粗度要素の間隔 s であると主張している。そして、粗度要素の間隔によって粗面流の形式をつぎのように分類している。まず、粗度要素の間隔が十分に大きく、粗度要素が個々に孤立状態にあるものを孤立粗度流 (isolated roughness flow あるいは semi-smooth turbulent flow)、粗度要素の間隔がそれぞれの粗度要素の後流の相互干渉を起すに適当なものを後流干渉流 (wake-interference flow あるいは hyper-turbulent flow)、粗度要素の間隔が非常に小さく、粗度要素間に死水領域を生ずるものを擬似滑面流 (skimming flow あるいは quasi-smooth flow) と名付け、Nikuradse の砂粒粗度の完全粗面流は干渉流に属するものとした。そして、それぞれの形式の流れの抵抗則として、

a) 孤立粗度流：

$$f = f_s (1 + 67.2 \Sigma E) \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

ここに、 f は Darcy の摩擦係数、 f_s は滑面のそれであり (1.27) 式を (1.24) 式に代入して、

$$\sqrt{\frac{1}{f_s}} = 2 \log_{10} Re \sqrt{f_s} - 0.8, \quad Re = \frac{DU}{\nu} \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

また、 E は粗度要素の特性に関する量であって粗度要素の抗力係数を C_D 、水路潤辺を ϕ 、粗度要素の辺長を Pr とおいて、

$$E = C_D (Pr/Po) (k/s) \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

b) 後流干渉流：

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 2 \log_{10} \frac{D}{2s} + 1.75 + \phi (Re) \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

ここに ϕ は Re 数が増大すると減少するような関係であって、 $U_* s / \nu$ と流路断面の形状による関数である。(2.9) 式は Nikuradse の砂粒粗度 (1.28) 式を (1.26) 式の一般形に代入した形である。ただし、Morris は砂粒粗度 k_s はあくまでも砂粒径ではなくて粗度間隔を代表するものと解釈している。

c) 擬似滑面流：

$$f = f_s + \Sigma X \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

ここに、 X は粗度要素に挟まれた死水領域の渦エネルギーに対応するものであって、彼の実験

では、

$$X = 0.05 (P_r / P_o) (b/s) \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

であるという。なお b は粗度要素間の純間隔である。

これらの Morris の提案は抵抗則の確立には流れの形態の分類が必要であることを指摘したものであり、各流れの形式における乱れの内部構造の吟味が待たれる。

2.3 棧粗度の基面

粗面流の水路床基面の設定は、測定の出発点であって、速度分布の壁面境界条件を左右するから、抵抗則のもっとも基本的な問題である。さきにも述べたが、これは粗度要素の機能に対する解釈から決定される性質のものである。いま、流水抵抗が主として棧粗度要素の抗力に依存すると考えて、棧粗度の有効高さ k_e に注目してみよう。

図 - 4 に示されるように、 $s/k = 2.5$ においては $C_D = 0$ であった。したがって、そこでは棧粗度の高さはも早や問題ではなく、基面は棧頂面に選ばれて当然である。一方、 $s/k = \infty$ における C_D の値はこの棧粗度に固有な特性を示すものと見なしてよく、棧粗度の全高が有効高であって、基面が棧底面に選ばれることに疑問はない。 $s/k = 160$ の場合の C_D は $s/k = \infty$ のそれに等しいからここでもなお基面は棧底面にある。 $2.5 < s/k < 160$ の場合には、 C_D は両者の中間にあり、基面もまた両者の中間にあると考えるべきであろう。そして、それらの $s/k = \infty$ の C_D からの差は、棧粗度要素相互の遮蔽効果をあらわしていることになる。いま、棧粗度の基面高を底面から C の高さ、有効高を k_e 、有効水深を H_e とおけば、

$$H_e = H - C, \quad k_e = k - C$$

であるから、 C および k_e を決定する一試案として、これらの H_e 、 k_e を用いて改めて実験資料を整理して得られる C_{De} が $s/k = \infty$ の C_D に一致するように C を選ぶことにしてみよう。

$$\frac{H_e}{k_e} = \frac{(1-C/H)}{(1-c/k)} \frac{H}{k} \approx \frac{1}{(1-c/k)} \frac{H}{k},$$

$$C_{De} = \frac{(1-C/H)^2}{(1-c/k)} C_D \approx \frac{1}{(1-c/k)} C_D$$

であるから、図 - 4 を両対数紙にプロットし直して、各 C_D 値が $s/k = \infty$ の C_D 値まで 45° 方向にど

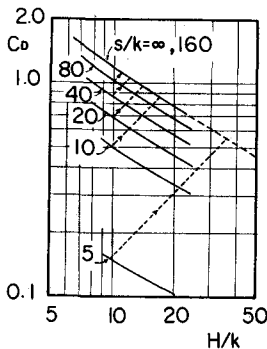


図-6 棧粗度抗力係数による棧粗度有効高の算出

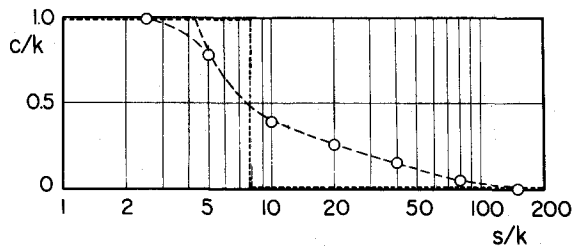


図-7 棧粗度要素の遮蔽効果

れだけ距たっているかを調べれば、その距離が $\sqrt{2} \log (c/k-1)$ に等しい。図-6はさきの図-4を両対数紙に再記したものであり、各 C_D 曲線がほぼ平行であることから、上記の試算による基面高 c/k は相対棧間隔 s/k に対応してほぼ一定値をとることになる。この結果は図-7に示すようであり、 $5 < s/k < 10$ の間で遮蔽高 C の変化がやや急であることが注目される。この C を基面高に採るわけであるが、実用上の便宜さを重視して、 $c/k < 0.5$ の場合は $C = 0$ 、 $c/k > 0.5$ の場合を $C = 1$ で近似することにすれば、図の点線のようにその境界は $s/k = 8$ である。

さて、図-3に示した速度分布の状態から推論すれば、 $s/k < 20$ の場合、粗度要素後流の相互干渉はかなり強いから、流れの形式はMorrisのいう後流干渉流が期待されるから、それらの抵抗特性は砂粒粗度の完全粗面乱流に近いであろう。このような推論から $s/k = 5$ 、 10 、および 20 の実験資料が基面高 $C = 0$ および 1 のいずれを採用した方が完全粗面実験式(1.28)式に近いかを調べることにした。その結果は、 $s/k = 5$ は $C = 1$ 、 $s/k = 20$ は $C = 0$ がはっきりと適当であり、 $s/k = 10$ は $C = 1$ でも近似可能ではあるが、 $C = 0$ の方がより適合度のよいことが見出された。つまり、基面は $s/k = 5$ のときは棧頂面に、 $s/k = 10$ および 20 のときは棧底面に近いことになる。この結果は図-7の棧粗度遮蔽高の変化と全く符合し、二次元的な棧粗度は $s/k = 8$ の付近を境界として、流れに対する粗度要素の機能が変化すると結論づけられる。図-5では棧幅 t の大きい粗度要素が含まれているので、棧粗度の純間隔 b を採っているが、ここでは、 $s/k = 8$ はほぼ最大抵抗の位置に当たっており、この結論を支持している。

2.4 棧および溝粗度の抵抗係数

棧粗度と溝粗度とは表裏の関係にあり、壁面の凹凸の形だけからは同種のものである。しかし、前項に述べたように、相対粗度間隔 s/k によって凹凸の粗度としての機能に相違があるわけである。もっとも両者の境界を一線で劃し、二者択一式に断定するのは単に実用上の便宜的処置ではある。

二次元等流の対数抵抗則は(1.26')式で与えられる。

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{k} \left\{ \ln \frac{H}{R} - 1 - f_2 \left(\frac{U_* k}{\nu}, \frac{s}{k}, \frac{t}{k} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots ((1.26) \text{式再記})$$

この一般式を相当砂粒粗度であらわせば、

$$\frac{k_s}{k} = 30 f_2 \left(\frac{U_* k}{\nu}, \frac{s}{k}, \frac{t}{k} \right) \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

となる。Morrisの流れの形式のモデルから明らかなように孤立粗度流に近い流れでは壁面 Re 数が無視できない。しかし、いま水路勾配がほぼ一定で、棧粗度要素の寸法にも大差がないとすれば、 ν はまず一定と考えてよいから、壁面 Re 数 $U_* k/\nu$ は H/k と $\sqrt{g k I} \cdot k/\nu$ でおきかえることができ、(2.12)式は、

$$\frac{k_s}{k} = 30 f_2' \left(\frac{H}{k}, \frac{s}{k} \right) \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

と書ける。図-8は $k = 5 \text{ mm}$ 、 $t = 6.4 \text{ mm}$ 、 $I = 2 \times 10^{-2}$ 、 $\nu = 1.3 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{sec}$ の実験資料を(2.13)式の形で図示したものである。 k_s/k は s/k が小さく、粗度密度が増すとともに一定値に近づき、Nikuradseの砂粒粗度による完全粗面、いかえれば、Morrisの後流干渉流へ移行する。この図の実験値は上記の特定の条件のもとに得られたものではあるが、この実験値から導かれ

る抵抗係数

$$\frac{U}{U_*} = F\left(\frac{R}{k}, \frac{s}{k}\right) \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

は次図の図-8および9の実線のようなである。図-8および9の実験値は異なる棧粗度の実験値と

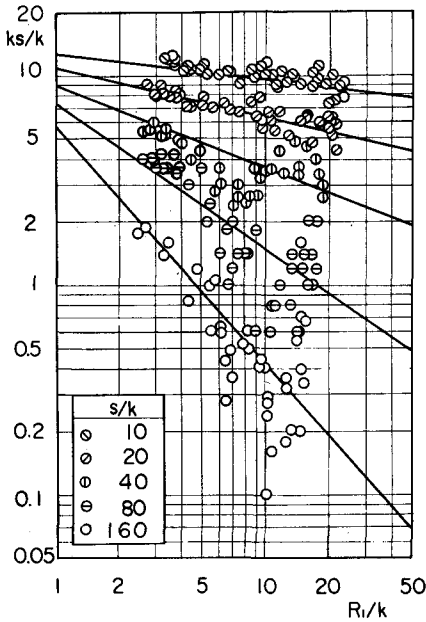


図-8 棧粗度の相当砂粒粗度

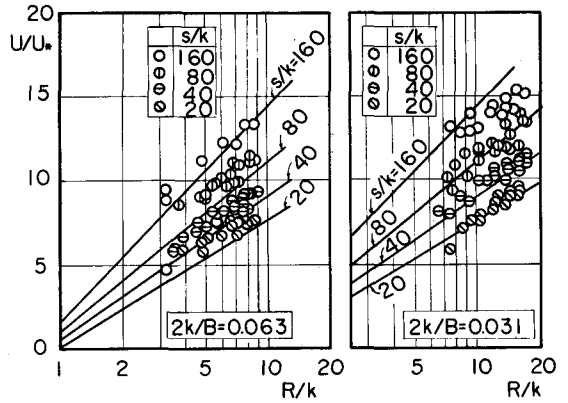


図-9 Powellの棧粗度の抵抗係数

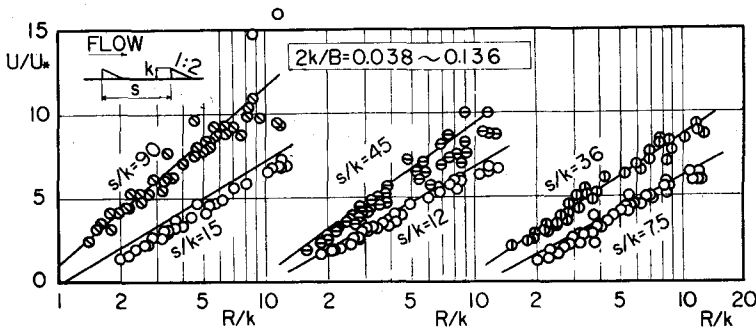


図-10 W.E.Sの棧粗度の抵抗係数

の比較である。Powell⁽¹²⁾は正方形断面(1/4"および1/8")の棧粗度、W.E.S⁽¹³⁾は三角断面の棧粗度であり、水路勾配は大凡 2×10^{-3} である。

溝粗度の場合にも、棧粗度の(2.13)と同様に、

$$\frac{k_s'}{k_s} = 30 f_2''\left(\frac{H}{k}, \frac{s}{b}\right) \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

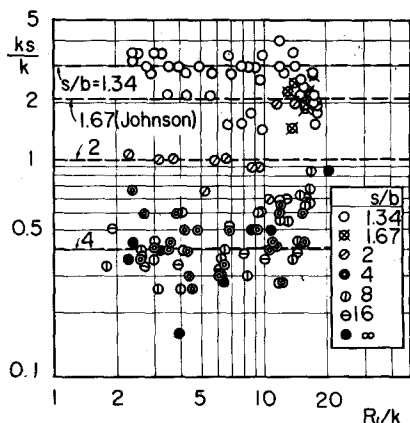


図-11 溝粗度の相当砂粒粗度

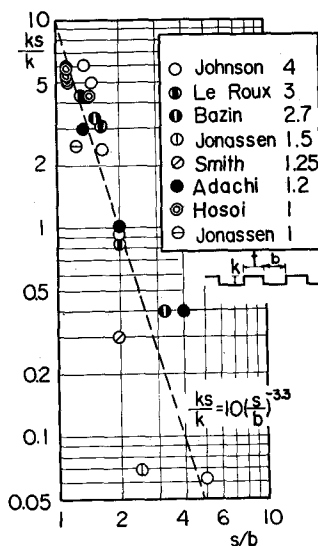


図-12 溝粗度の相当砂粒粗度

が期待される。図-11は $b = 6.4 \text{ mm}$, $k = 5 \text{ mm}$, $I = 2 \times 10^{-2}$, $\nu = 1.4 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{sec}$ の実験資料の相当砂粒粗度 k_s のプロットである。実験値はやや散らばってはいるが、稜粗度の場合と異なり、 k_s/k は H/k には独立であるように見られる。

Morris の擬似滑面流は s/b が十分に大きくて、溝粗度部が死水領域となり、そこに安定した渦動が維持されるというものである。 s/b がそれほど大きくなければ、凹部に安定した渦動を期待することは無理であり、後流干渉流の形式をとるであろう。したがって、図-11の $s/b > 2$ の k_s/k が H に独立、すなわち完全粗面流となることは肯定できる。ただこの実験の場合には、 $s/b = \infty$ 、すなわち溝のない状態でも滑面の抵抗則から外れており、 $s/b > 4$ のいずれの場合からも擬似滑面流をうかがえないのは、凸部頂面自身が滑面でないことによるものと考えられる。さきの図-4における溝粗度と見られる実験値を $k_s/k \sim s/b$ の関係に書き直し、図-11のそれと重ね合わせると、図-12のようであり、

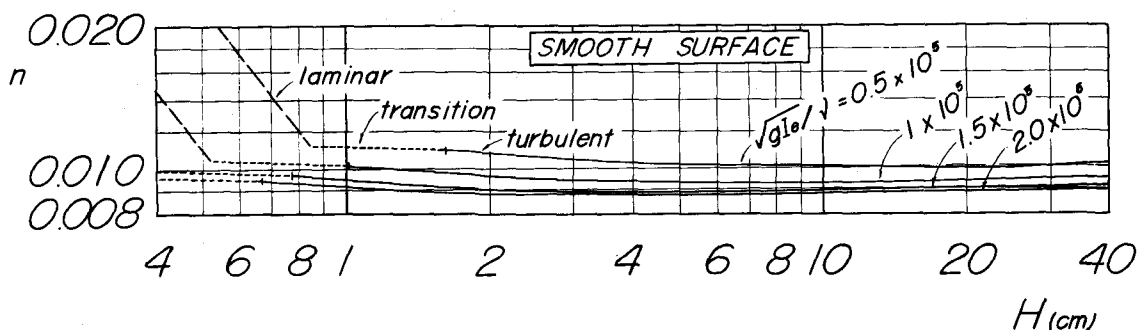
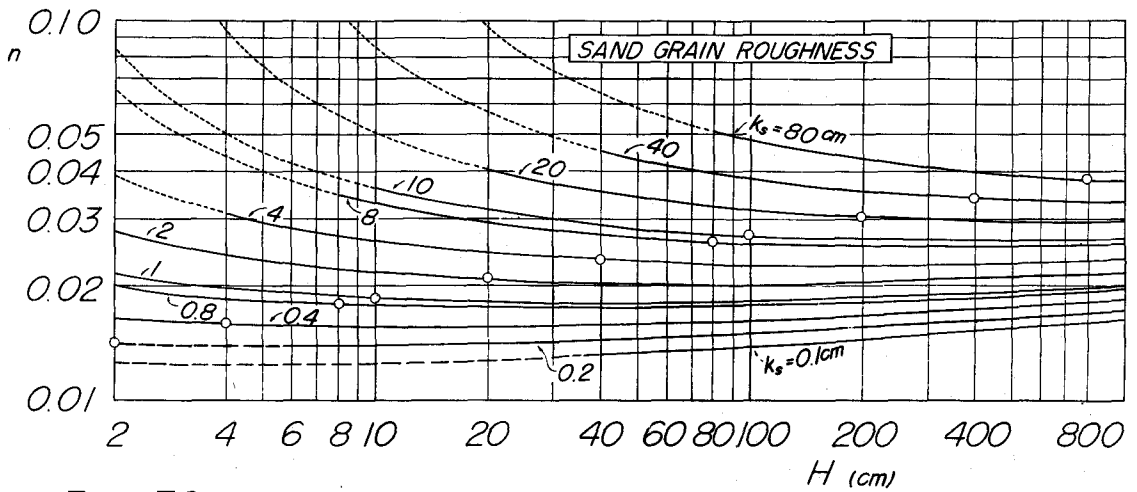


Fig 71

図-13 滑面水路の Manning 係数



流との中間にある後流干渉流である。孤立粗度流に近づくほど n の水深による変化が目立ち、この種の粗面流は浅水深で n は一定にはなり難いといえよう。

3 側壁粗度の効果に関する簡易計算

前章ではもっぱら二次元等流を対象としたが、抵抗則は速度分布の積分形であるから、水路の断面形、潤辺の粗度の変化も抵抗則の重要な因子であることはいうまでもない。流水抵抗における局部的な潤辺粗度の受け持つ役割りは、厳密には三次元速度分布から論じなければならない。しかし、潤辺粗度の組み合わせによって生ずる抵抗特性の変化の概略を知ることも実用上有用である。このような実用的推算法は、流水断面積を分割して各部分ごとに粗度係数を与える方法がとられている。その代表的簡易計算法は H. A. Einstein⁽³⁾ であろう。彼の基本仮定は、流水断面積と潤辺を分割して、それぞれの分割部分を相対せしめることができ、相対する流積部分と潤辺部分との間に成立する抵抗則が不変であるとするものである。この仮定の抵抗則を Manning 公式であらわせるとすれば、流水断面 A および潤辺 p をそれぞれ m 個の部分 A_i および p_i に分割し、相対する一組の A_i および p_i について、径深 R_i を定義して、

$$U = \frac{1}{n_i} R_i^{\frac{2}{3}} I_e^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (3.1)$$

である。ここに、 n_i は分割潤辺 p_i の粗度係数であり、 U は全流積の平均流速である。

Einstein は U が個々の分割断面積の平均流速に等しいと考えたけれども、個々の分割断面積はそれが単独の流積にはなり得ないから、(3.1) 式の基本仮定における U はかならずしも分割面積の平均流速ではないとする方が自然である。この仮定は全く直観的仮定ではあるが、長方形断面水路の流速分布を二次元速度分布の組み合わせとして側壁効果を検討した足立の研究では、実用上この仮定は成立する。

(3.1) 式の仮定は、全流積に関する粗度係数を n とおいて、

$$\frac{n}{R^{2/3}} = \frac{n_1}{R_1^{2/3}} = \dots = \frac{n_i}{R_i^{2/3}} = \dots = \frac{n_m}{R_m^{2/3}} \equiv \sqrt{I_e}/U \dots\dots\dots (3.2)$$

と書きあらためることもできる。いま、

$$R = \frac{A}{p} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^m A_i, \quad A_i = p_i R_i \dots\dots\dots (3.3)$$

である。したがって、 n_i と R_i との関係が既知であれば、 $\sqrt{I_e}/U$ のある値に対して、 $R_1, \dots, R_i, \dots, R_m$ の一組の値が決まる。そしてこれらの一組の R_i に対応する全断面の径深 R は (3.3) 式から、

$$R = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^m (p_i R_i) \dots\dots\dots (3.4)$$

で与えられる。 R が見出されれば (3.2) 式に帰って、 n が算定される。この計算を種々の $\sqrt{I_e}/U$ の値について繰り返えせば、粗度の異なる潤辺部分をもつ水路の抵抗則が求められる。

もし、 n_i が常数であれば、 $R_i = n_i^{3/2} \sqrt{I_e}/U$ であるから、結局 n は $\sqrt{I_e}/U$ に独立となり、

$$n = \left\{ \frac{1}{p} \sum_{i=1}^m \left(p_i n_i^{\frac{3}{2}} \right) \right\}^{2/3} \dots\dots\dots (3.5)$$

で比較的容易に n を算出できる。

しかしながら、 n_i は一般には常数ではなく、とくに R_i の小さい範囲では R_i の値によってかなり大きく変化することを考慮しなければならない。水路幅が十分に広く、側壁の効果が省略できる場合には、(3.4)式で p および p_i が近似的に R に独立に与えられるから、計算はまだ比較的に楽である。しかし、 p および p_i が R の関係としなければならぬ場合には、(3.4)式を R について解かねばならない。この計算は一般の断面の場合にはかなりの手数を要する。単純な例として両側壁の粗度が等しい長方形断面水路をとりあげれば、(3.4)式は、

$$\frac{2R}{B} = \frac{2R_1}{B} \Big/ \left(1 + \frac{2R_1}{B} - \frac{2R_2}{B} \right) \dots\dots\dots (3.6)$$

となり、 $2R_1/B$ をパラメーターと

して、 $2R_1/B$ と $2R_2/B$ との関係を図-16のように図示できる。ここに添字1は底面、2は両側壁をあらわす。 R_1 および R_2 は、(3.2)式の対数をとって、

$$\begin{aligned} \log n - \frac{3}{2} \log R &= \log n_i \\ -\frac{2}{3} \log R_i &= \log(\sqrt{Ie}/U) \end{aligned}$$

であるから、 $n_i \sim R_i$ 曲線を両対数紙にプロットしておけば、一組の (n, R) 、 (n_i, R_i) はこの図上で、勾配 $1 : \frac{2}{3}$ の直線上にあることになる。図-17はその例であって、 $\overline{OA} = \log(\sqrt{Ie}/U)$ であり、 B' および C' がそれに対応する R_1 および R_2 を与える。一組の R_1, R_2 の値に対応する全断面の径深 R は図-16から求められる。求める n, R は AC 線上にないから、図上 D' 点が決まる。この操作をくり返せば、全断面の $n \sim R$ 曲線が描かれる。

一般に水深 H が水路幅 B に比較して小さければ、径深 R は H に近づく

から、流れは底面粗度に対する二次元流に近づき、反対に H が B よりも大きくなれば、 R は $B/2$ に近づき、両側壁による平行壁間の二次元流に近づく。したがって、 n_1 の底面粗度と n_2 の両側壁

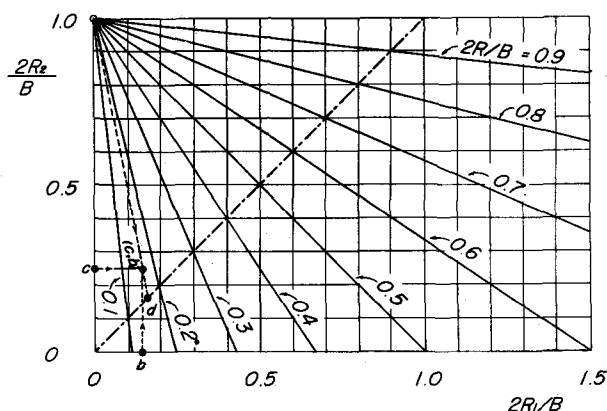


図-16 長方形断面水路における R_1, R_2 、および R の関係

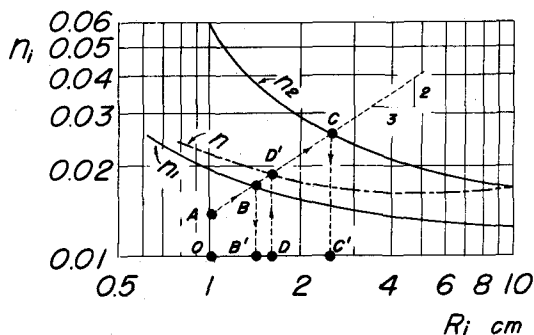


図-17 底面と側壁の粗度が異なる長方形断面水路の n の図解法

粗度で合成された水路の粗度係数 n は、一定の水路幅に対して R が 0 に近づくとき底面の n_1 に、また R が $B/2$ に近づくときに側壁の n_2 に漸近する。図-17の例は $n_2 > n_1$ の場合であるから、 R が小さいとき両成分のうち小さい方の n_1 に、 R が大きいほど大きい方の粗度 n_2 に漸近し、合成された結果、 n の R に対する変化の度合いが緩和されている。

図-18はこのような粗度の合成の簡易計算例と、実験値とを例示したものである。

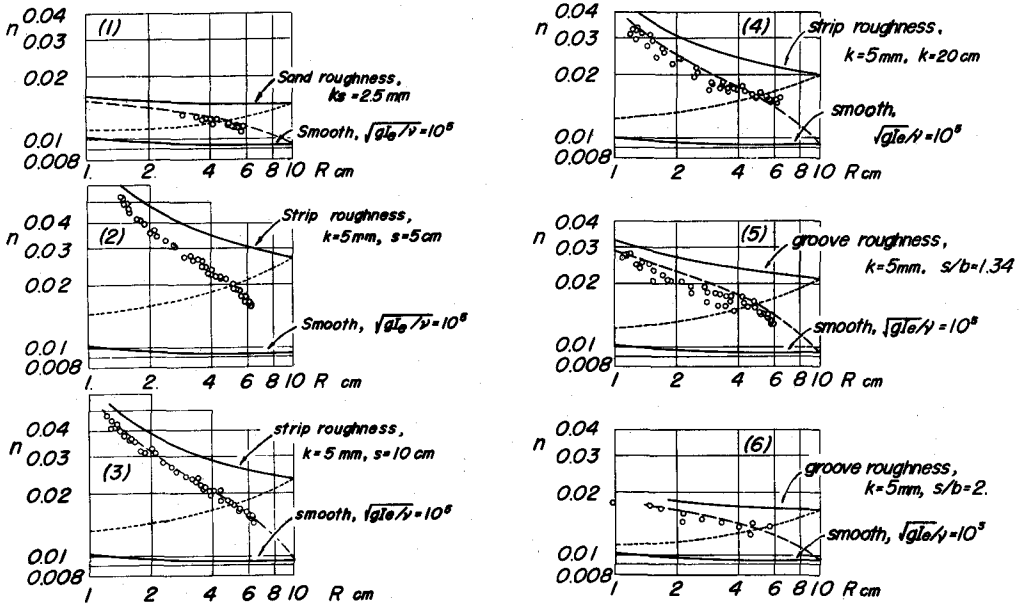


図 - 1 8

あ と が き

以上、流れの抵抗則の基礎的概念の整理を主眼として、表面粗度の抵抗則に関する基礎的実験から得られた抵抗係数の性格を述べた。内容的には、むしろ抵抗則に関する備忘録といったものに終わってしまったけれども、古くてあたらしい研究課題として長い歴史を重ねてきた抵抗則の研究にいくらかでも参考にして頂ければ幸いである。

参 考 文 献

- (1) 岩佐義朗 : 開水路流れの基礎理論、水工学シリーズ64-01、(1964)。
- (2) 足立昭平 : 長方形断面水路の側壁効果に関する研究、土木学会論文集、第81号、(昭37)。
- (3) Schlichting, H. (translated by Kestin, J) : Boundary layer theory, Mc Graw-Hill, p.527, (1960)。
- (4) Streeter, V. L. : Frictional resistance in artificially roughened pipes, Trans., A. S. C. E., Vol. 101, (1936)。
- (5) Johnson, J. W. : Rectangular artificial roughness in open channels, Trans., A. G. U., (1944)。
- (6) 足立昭平 : 人工粗度の実験的研究、土木学会論文集、第104号、1964。
- (7) 椿東一郎 : 流砂、水工学シリーズ66-02、(1966)。
- (8) Powell, R. W. : Resistance to flow in rough channels, Trans., A. G. U., Vol. 31, (1950)。
- (9) Robinson, A. R. and Albertson, M. L. : Artificial roughness standard for open channels, Trans., A. G. U., Vol. 33, (1952)。
- (10) Morris, H. M. : Flow in rough conduits, Trans. A. S. C. E., (1955)。
- (11) Morris, H. M. : Design methods for flow in rough conduits, Proc., A. S. C. E., Vol. 85 (1959)。
- (12) Powell, R. W. : Flow in a channel of definite roughness, Trans., A. S. C. E., Vol. 111, (1946)。
- (13) Einstein, H. A. : Formulas for bed-load transportation, Trans., A. S. C. E., Vol. 107, (1942)。