

水理学における数学的手法

京都大学工学部 工博 岩 佐 義 朗

1 ま え が き

一口に“水理学における数学的手法”といっても、それが自然現象としての水の運動の表現法にまでさか上るいわば哲学的課題を意味するのか、こうして抽象化されたモデルの数学的解析法という技巧的手段を表現するのかなどによって、その内容は異質のものとなる。技術者や研究者も、この題目をみたとき、その人の持つ才能や職業的経験などに応じてそれぞれ独自の受け取り方をするであろう。第一、筆者自身が水理学を勉強している一介の研究者にすぎないから、このようなむずかしい問題を客観的な立場より眺め、また他人に説明しうる能力を持ちあわせていない。しかし、この稿を引き受けた以上、同好の志にこの問題に対する自分自身の考えを明らかにし、より秀れた研究方法、解決策を探るための一つの材料を提供する義務がある。

水理学は、流体運動とくに水の運動に関する力学的、運動学的取り扱いを対象とした物理的記述法であるから、おのずから数学と異なる。数学が公理にかなう定理系によって構成される論理体系であるのに反し、物理学は現象を記述した理論的モデルの正しさ、また得られた理論の有用性などの判断を自然そのものに仰がなければならない。いうならば、水理学は流体運動、とくに水の運動に関する事実の認識をその出発点としているといえよう。こうした意味からみれば、現在の多くの研究者は一顧だにしない実験係数の集積に終始した古典的水解析法も、単に実用上の必要性というだけでなく、もっと大きな意義を持っていたに違いない。しかし、それは単なる資料の蒐集と羅列にとどまっていたはならない。より一般的な記述のためには、資料の間に論理的関連性が必要とされ、また同時に不必要な資料はいつでも整理されるものとしておくことが肝要である。これは、水理学が水の運動、水の力学に関する正しいモデルの作成とその解析を対象とするものに外ならないことを表わしている。

実験水理学の充実、応用数学を縦横に駆使した古典流体力学の展開、ならびにそれら両者の融合化による流体運動に関する数学的モデルの具象化はすでに19世紀の間で相当の発展を遂げたが、その後のよりあたらしい努力がHydraulicsといわれるよりもFluid Mechanicsとして知られる体系を作り上げた。この間の歴史的発展過程はRouse と Ince との共著“水理学の歴史”¹⁾に詳しく説明されている。ただ注目すべき点は、初期の流体力学の理論的発展には土木技術者（たとえば、Navier、Cauchy など）が少なからぬ役割を果していることである。

対象とする水理現象が数学的に記述されたモデルとなりうれば、この現象解析、したがって問題は一応解決されたと考えてよからう。電子計算機の使用が当然となった今日ではとくにそのようにいえる。このような現状より推測して水理解析法はどのような形態をとるようになるであろうか。その明確な解答は種々の制約条件をつけない限り容易でないが、少なくとも今後における研究の方向は

- 1) 正しいモデルの作成とその解析をおこなう数学的記述法
- 2) 各種のシミュレーション技術の応用による実用的解析法および関連分野への拡張

3) プログラムなど計算機利用法とそれに伴う技術の開発

という方面に向うことが考えられる。しかし、これらのいずれもが土木技術者あるいはより高度の専門的職業人としての水理技術者に課せられた目標であるというのではない。

これらのうち、1)および2)の分野の問題の取り扱い、いわゆる古典的あるいは純正的といわれる水理技術者に委ねられてきたし、今後も引き続きそうあるべきものであろう。一方、3)は電子計算機の実用化とともにあたらしく生れた分野である。これが水理学に属しているか、また分離されて一つの職業となるか否かは将来の問題であり、また対象それ自体は水理学上のものであっても、その内容は数値解析法やプログラムに関係するものである。したがって、ここでは数学的モデル作成に関する諸問題と解析法、およびシミュレーションに対する問題などについて説明を加え、これをもって「水理学における数学的手法」ということに代えたいと考える。

2 流体運動の数学的モデル

われわれが対象とする問題を一般的に解くために、数学的モデルの作成とその解析といういわゆる狭義の数学的な手法が必要となる。この場合もっとも注意しなければならないことは、数学というものがわれわれの当面する問題の解決に使われる手段にすぎないこと、また水理現象といった物理的な問題は **verify** されるけれども、決して **prove** されないことを十分認識しなければならない。問題解決のためのモデル化にはどのような表現法が用いられても差し支えなからうが、より一般的な記述のために数式による表現が使われるのである。たとえば、理論構成が華麗な数学的手法や演算によって組み立てられていても、それがもとの現象を歪んだ形で示したものであれば何の価値もないし、また逆に一見初歩的な演算で終始していても、現象そのものが忠実に記述されているものであれば、それはもっとも秀れた理論となる。したがって、われわれはモデルを構成するに当たっても、またそれを放棄するにもきわめて大胆に振まわなければならないということをまず自覚する必要がある。このことがモデル作成に先立って十分理解されなければならない基本的事実である。

(1) 流体運動の基礎原理と水理学

従来より、水理学は水の物理的、力学的挙動を取り扱い、河川工学、海岸工学、水道工学、発電水力工学、かんがい工学、水資源工学などすべての水工学における計画、設計のプロセスを形成するものであるといわれる。しかし、社会的ならびに経済的な要請、あるいは学術的な興味の変遷によって水理学が対象とするものも次第に変わってきた。すなわち、乱流拡散、混相流、流体力による振動などの問題の研究が盛んになってきたことから推測されよう。

研究の興味がどのように変わっても、水理学で取り扱われる解析法の基礎は連続体のモデルによる流体運動理論であることに違いない。少なくとも当分の間はそうであろう。

連続体としてのモデルによる流体運動理論の基礎は、

1. 質量保存の法則
2. Newton の運動法則
3. 熱力学の法則
4. Maxwell の電磁方程式

によって構成されることはいうまでもない。ところが、水理学の研究対象がいくら変わったといっても、熱エネルギーが直接対象とされる問題は冷却水に関するものなどの特殊の分野に属し、またまして流体運動と電磁場との相互作用を論ずる Magneto hydro dynamics、あるいは Magneto fluid mechanics の問題は水理学の分野へはなかなか導入されないであろう。したがって、水理学における基礎原理は従来と同様に今後も相当長く質量保存の法則と Newton の運動法則を中心としたものであろう。

(2) 基礎原理の数学的表示

(1)で述べた水理学を構成する基礎原理を実際に適用するに当って、どのような立場よりおこなうかがまず問題とされる。従来の古典流体力学的立場より、運動は Lagrange 的方法と Euler 的方法により取り扱われることは周知の事実であるが、現在では同様な立場ではあるが、名前を変えたシステム法 (System Approach) とコントロール・ヴォリューム法 (Control Volume Approach) という名称のもとで解析される。¹⁾ すなわち、

- a. 対象とするものの質量の活動 (activity) が基礎原理を満足するようなものである。および
- b. 基礎原理が常に満足されるような活動のある空間容積内で考えること。

システム法による基礎原理の数学的表示は簡単であって、 m : 質量、 $\mathbf{v}$: 速度ベクトル、 $\mathbf{F}$: この質量 m に作用する外力、 t : 時間、とすると、それぞれ

質量保存の法則：

$$\frac{d}{dt} \int dm = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

Newton の運動量法則：

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{v} dm = \sum \mathbf{F} \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。この解析法が適用される問題はたとえば段波の伝ば²⁾などであるが、一般にはコントロール・ヴォリューム法の方がより便利であって、常に用いられる。このためには、連続性によって説明される物理量 N のシステム法による表示とヴォリューム法によるものの相互関係を知っておく必要がある。すなわち

$$\frac{dN}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) dV + \int \eta (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA^* \quad \dots\dots\dots (3)$$

である。ここに、 η は単位質量当りの N 、 ρ : 流体密度、 V : 質量 m の物質の容積、 A : その表面積、 $\mathbf{n}$: A より外向きに立てた法線ベクトルである。

(3)式において、 $\eta = 1$ とおけば N は質量、また $\eta = \mathbf{v}$ とおけば N は運動量となるから、(1)および(2)式はコントロール・ヴォリューム法としての Euler 的表現式がえられる。すなわち

質量保存の法則：

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

Newton の運動量法則：

$$\int \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV + \int \mathbf{v} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV + \int \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} dV$$

* この式の説明は講習会でこなわれる。

$$\begin{aligned}
&= \int \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla (\rho \mathbf{v}) \right\} dV \\
&= \int \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \Sigma \mathbf{F} \quad \dots\dots\dots (5)
\end{aligned}$$

したがって、問題はFの表示であるが、これは一般にはつぎのように分類³⁾される。

表面力：単位容積当りについて*

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{F}_s}{dV} = & -\text{grad } P + \mathbf{i} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right. \\
& \left. + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \quad \dots\dots\dots (6)
\end{aligned}$$

物体力：同じく単位容積当りについて

$$\frac{d\mathbf{F}_b}{dV} = -\rho \text{ grad } \Omega \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、電磁力は考えていない。また、P：流体圧、Ω：力のポテンシャル、 $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}$ ：流体運動にともなう変形による応力テンソルの成分である。

これらの関係を用いて、(5)式を書き直せばよい。その結果において取り扱ったコントロール・ボリュームは任意であるから、これを取り去り、結局

質量保存の法則（連続方程式）：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

Newtonの運動量法則（運動方程式）：

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = & -\text{grad} \left(\Omega + \frac{P}{\rho} \right) + \frac{\mathbf{i}}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{\mathbf{j}}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \quad \dots\dots\dots (9)
\end{aligned}$$

がえられることになる。(8)および(9)式の誘導に当って、何らの特別な条件や仮定を入れていないから、これらは流体運動の基礎式といわれるべきものである。

(3) 流体の物理学的挙動

(2)においてえられた4個の基礎方程式に含まれる未知数は、密度、3個の流速成分、流体圧、3個の垂直応力成分および3個のせん断応力成分（ $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ）という11個である。したがって、これらの未知量の間には存在する何らかの関係を知って未知量の数と方程式の数とを等しくするようにしなければならない。

空気力学の問題では圧力Pと状態方程式によって結びつけられる密度ρも、水理学で対象となる流体は一般に非圧縮性であるから、一定となる。すなわち、周知の

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

が流体力学的な連続方程式である。しかし、浮流砂の濃度分布などを対象とする輸送過程では、流体そのものおよび砂粒は非圧縮性であっても、連続条件式という数学的表示では(8)式と似た形をとる。もともと、水と砂礫との混相流 (multi-component flow) であるから、それぞれの成分について前項で

* ここでは直角座標系による表示を用いている。さらに一般的な直交曲線座標系については文献(3)を参照されたい。

示した基礎方程式が成立するはずである。ところが、水理学では混相流の個々の成分についての物理的変動よりも、全体の平均的な挙動、すなわち流砂の濃度分布の時間的、空間的变化を知る方がより望まれる。したがって、たとえば流砂の水に対する容積比 c について質量保存の法則を適用すれば、この種の問題の連続条件式がえられる。その結果は、混合体の平均的輸送過程が流体そのものの速度ベクトルと流砂の静水中における沈降速度ベクトルの差によってほぼ表わしえられるとするならば、よく知られた流砂の連続式⁴⁾

$$\frac{\partial c}{\partial t} + [(V - V_0) \cdot \nabla] c = 0 \dots\dots\dots (11)$$

になることが誘導される。ここに、 V_0 は沈降速度ベクトルである。

つぎに、6個の表面力成分としての応力を流体の変形と何らかの形で結びつける必要がある。空気や水、すなわち気体と多くの簡単な化学構造をもった液体などのいわゆる Newton 流体では、応力とひずみとの関係は Newton の経験的法則によって与えられている。この関係の一般化は Stokes によるものであって、つぎの前提より構成されている。

- a. 流体は弾性的に等方性である。
- b. 単なる移動や回転によって抵抗力は生れないが、変形に当って粘性抵抗力が作用する。
- c. 応力とひずみとの間に一次的な関係が存在し、これは座標軸の方向と無関係である。
- d. 流体運動に伴う変形が生じないとき、応力テンソルは静水圧として示される。

これらの前提条件より、完全弾性学における一般化した Hooke の法則の誘導⁵⁾と同様にして、応力とひずみとの関係が2個の係数を含む数式によって示される。ところが、水理学で対象となる流体は非圧縮性であることから、結局、Newton の粘性係数 μ を通じて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_z &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

がえられることになる。もちろん、(12)式に示した関係を(9)式に代入して、 $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}$ を消去すれば、いわゆる非圧縮性流体の Navier-Stokes の運動方程式となる。

ところが、応力とひずみとの関係が(12)で示されない流体も多数存在し、近年は流体運動の力学が工学の広い分野に亘り応用されてきたから、このような流体の性質を明らかにすることがきわめて重要となってきた。一般に(12)式で示す応力とひずみの線型関係が存在しない流体を非 Newton 流体という。したがって、非 Newton 流体の挙動はきわめて多岐にわたり、それらを一括表示⁶⁾することは容易でない。

それは、単に応力とひずみとの線型関係が成立しないということのみならず、ひずみの時間的割合に応力の持続時間が関係したり、変形量の導入される粘弾性的なもの、あるいは流体が連続体モデルとして取り扱われずに粒状体の集合として解析される性質のものなどまで含むからである。しかし、土砂を含んだ流れやグラウティングなど土木事業に関係した非 Newton 流体の物理的挙動は比較的単純な Bingham のモデルや指数法則によって近似されるようであり、これらの代表例を示すと、つぎの諸式がある。

Bingham Model :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yx} &= \mu \frac{du}{dy} + \tau_0 & \text{for } \tau_{yx} > \tau_0 \\ \frac{du}{dy} &= 0 & \text{for } \tau_{yx} < \tau_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

Ostwald-de Waele Model :

$$\tau_{yx} = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} \dots\dots\dots (14)$$

$n < 1$: pseudo plastic
 $n = 1, m = \mu$: Newtonian
 $n > 1$: dilatant

Eyring-Powell Model :

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} + \frac{1}{B} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{A} \frac{du}{dy} \right) \dots\dots\dots (15)$$

いずれにせよ、対象とする流体が非 Newton 流体であればまず応力とひずみとの関係（一般にレオロジー方程式といわれている）を明らかにする必要がある、このためには粘度計などによって資料の流動特性を十分に調べておかなければならない。

もちろん、これまでの論義はいずれも粘性流体を頭に浮べておこなわれたものであるが、さらに単純なモデルは表面力が流体の状態によって定められる流体圧のみという完全流体がある。実存する流体は完全流体ではないが、対象とする水理現象の種類によっては完全流体の仮定である程度まで説明されることがある。とくに、波動現象では十分に認められる。このような仮定のもとでは、(9)式の応力の項が消えた Euler の運動方程式が基礎方程式となることはいうまでもない。

以上に示したように、対象とされる流体の物理的、力学的性質によって基礎原理がいろいろの形に示されうることを概説したものであって、それらを表示すれば、表-1、-2 に示すようになる。

(4) 流体の運動学的挙動による基礎方程式の表現

基礎方程式(8)および(9)にみられるように、流体運動は一般に時間的にも空間的にも変わるものである。しかし、このような現象はきわめて複雑であって、多くの場合時間的に変化しない

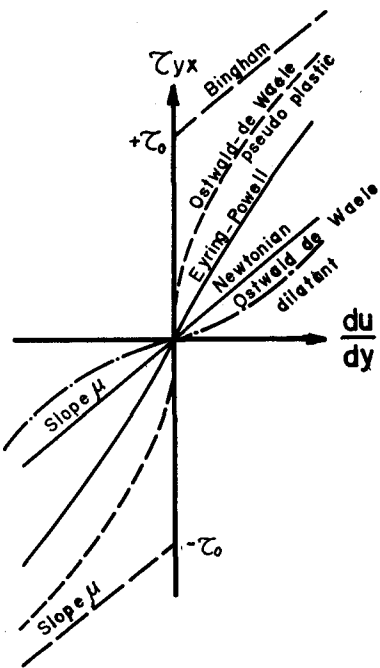


図-1 各種非 Newton 流体モデルの定常流動特性

流体現象が取り扱われる。これを定常流という。さらにまた、流体運動の特質は(3)式の右辺第2項あるいは(9)式の $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ のように、ある連続体モデルとしての物理量が流体の速度とともに輸送されることであって、 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ に関する微分係数は convective derivative といわれ、もっとも意味深い項である。ところがさらに単純なモデルは、(9)式の左辺、すなわち速度の時間的な変化がないいわゆる平衡状態に関する流れであって水理学では広く等流といわれるものの基礎をなしている。このような問題は弾性学上のそれと類似の関係がある。

一方、われわれが取り扱う流れは乱流であるのが普通であって、すべての測定量はある平均値とそれからの変動量との和として構成される。すなわち、

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', \dots, \mathbf{p} = \overline{\mathbf{p}} + \mathbf{p}', \dots \quad (16)$$

であると考えられている。しかも、水理学の問題ではもともとの乱流理論の意味よりさらに拡大した流れの概念を用い、平均値の時間的な変化を常に取り入れるという方法を採用している。いずれにせよ、変動流速の相関関係として表わされる Reynolds 応力が導入され、その結果は非圧縮性の平均流に対して

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{\Omega} + \overline{p}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\sigma}_x - \rho \overline{u} \overline{u} - \rho \overline{u u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\tau}_{xy} - \rho \overline{u} \overline{v} - \rho \overline{u v'}) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\tau}_{zx} - \rho \overline{w} \overline{u} - \rho \overline{w u'}) , \dots \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{\Omega} + \overline{p}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\tau}_{xy} - \rho \overline{u} \overline{v} - \rho \overline{u v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\sigma}_y - \rho \overline{v} \overline{v} - \rho \overline{v v'}) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\tau}_{yz} - \rho \overline{v} \overline{w} - \rho \overline{v w'}) , \dots \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \overline{w}}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{\Omega} + \overline{p}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\tau}_{zx} - \rho \overline{w} \overline{u} - \rho \overline{w u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\tau}_{yz} - \rho \overline{v} \overline{w} - \rho \overline{v w'}) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\sigma}_z - \rho \overline{w} \overline{w} - \rho \overline{w w'}) \dots \quad (19) \end{aligned}$$

という Reynolds 方程式がえられることは周知の事実である。また $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$ に(12)式を代入して時間的平均操作をおこなえば乱流場における粘性流体の基礎方程式(すなわち Navier-Stokes の方程式に Reynolds 応力が加えられたもの)がえられる。しかし、実際の乱流場における流体運動では乱れによる見掛けの応力が粘性応力に比してきわめて大きく、水理学ではごく特殊の問題を除いては粘性応力を考える必要がない。

流体に関する運動学的特徴としていま一つきわめて重要な概念に、完全流体における非回転運動がある。基礎方程式(9)の左辺の convective derivative はつぎのように変形される。

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{q^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \left(\frac{q^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (20)$$

ここに、 $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$: 合速度、 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$: 渦度ベクトルである。渦度が0という非回転運動では速度ポテンシャル ϕ が存在し、運動方程式(9)がきわめて簡単な形

$$\text{grad} \left(- \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \Omega + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (21)$$

となり、これを積分してBernoulli の式

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \Omega + \frac{p}{\rho} = C \quad \cdots \cdots \cdots (22)$$

がえられる。また流れの場における速度ベクトルの方向を示す流線とポテンシャルとが直交すること、とくに二次元流れでは互いにCauchy-Riemann の方程式を満足することから、応用数学における複素関数論がそのまま適用され、前世紀における古典流体力学の発展に大きく寄与したことはいうまでもな
 かるう。

表－１ 質量保存則の流体力学的表示

質量保存の法則

↓

システム法

: $\frac{d}{dt} \int dm = 0$

↓

←

$\frac{dN}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) dV + \int \eta (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$

コントロール・
ヴォリューム法

: $\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0$

↓

←

Green-Gauss の定理

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{圧縮性流体})$$

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{非圧縮性流体})$$

↓

←

乱流場

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (\text{平均流})$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (\text{変動流})$$

表－２ Newton の法則の流体力学的表示

Newton の運動量法則

↓

システム法

: $\frac{d}{dt} \int \mathbf{v} dm = \Sigma \mathbf{F}$

↓

←

$\frac{dN}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) dV + \int \eta (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$

コントロール・
ヴォリューム法

: $\int \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \Sigma \mathbf{F}$

↓

←

$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_b$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{q^2}{2} \right) - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega} = -\text{grad} \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right)$$

$$+ i \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + j \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right)$$

$$+ k \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right)$$



完全流体
($\sigma_x, \dots, \tau_{zx} = 0$)

粘性流体
($\sigma_x, \dots, \tau_{zx} \neq 0$)

完全流体

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{q^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = -\text{grad} \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right)$$

(Euler の運動方程式)



← 非回転流れ ($\omega = 0$)

$$\text{grad} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \Omega + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0$$



← 積分

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \Omega + \int \frac{dp}{\rho} = C$$

(Bernoulli の方程式)



← 非圧縮性流体 ($\rho = \text{一定}$)

$$\nabla^2 \phi = 0$$

(Laplace の方程式)

粘性流体



Newton の流体
(ひずみ-応力: 線型)

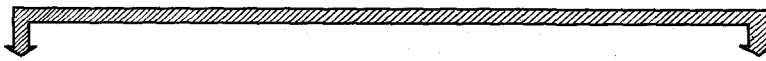
非Newton 流体
(ひずみ-応力: 非線型)



非圧縮性流体

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\text{grad} \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

(Navier-Stokes の方程式)



層流
定常流 非定常流

乱流
(平均流, 変動流)



← 浸透層内の流れ

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad} \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$



← 定常浸透流

$$0 = -\text{grad} \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$



$$\nabla^2 \left(\frac{\Omega}{g} + \frac{p}{\rho g} \right) = 0$$

(Laplace の方程式)
(Darcy の法則)

3 流体運動の一次元解析法と水理学

前節においては、流体運動に質量保存ならびに Newton の運動量法則を適用して、その力学的挙動を数式によって記述した。また、種々の物理的条件や運動学的条件などの変化によって変わる基礎方程式の多くの形を順次示した。しかし、こうした多くの数学的表示のいずれの式も容易に解かれうるものは少なく、実際にはもっとも単純な流れのモデルに対するもの以外は一般的挙動を知りうるものではない。ところが幸いにして、流体運動や水理学の問題の多くは、前節で示した数式のの一つ一つを忠実に解析して示される解の挙動を対象とするよりも、むしろ物理量のある種の平均的操作によって示される平均量の時間的、場所的变化を求めるという巨視的な解析で十分であるものとなる。このような解析法は広く一次元解析法といわれ、平均的物理量として平均流速、流量、ピエゾ水頭（開水路流れでは水深）などが採用されている。

一次元解析法はすでに前世紀中項より広く用いられており、その理論的構成法も当初における単純なモデル解析から現在の流体力学的に誘導されたものに至るまで種々の発展が時代の進展とともにみられる。いずれにせよ、現在の管路や開水路の水理学の理論的基礎をなすもので、もっとも重要な解析手段と認められよう。むしろ、この手法によって表現されない流体運動は、流れの局所的な挙動の解析を除いて、いまのところ満足な解決法をみつけない性質のものであると解釈してよい。

一次元解析法による流体運動のモデル化は多くの参考書に示されているようであるが、それらを一括して概述すればつぎのようである。

(1) システム法による表示と段波の伝ばん²⁾

システム法による一次元解析的表示が適用される例として最適のものは、段波の伝ばんという水面の不連続性とその移動に関するものがある。図-2 に示すように不連続面を含む流体塊をとり、その質量を m とすれば、(1)および(2)式より

$$\frac{d}{dt} \int dm = \frac{d}{dt} \int_{a_1}^{a_2} \rho dA dx = 0 \quad \dots\dots\dots (1)'$$

および

$$\frac{d}{dt} \int v dm = \frac{d}{dt} \int_{a_1}^{a_2} \rho v dA dx = \Sigma F = \int_{a_1} p dA - \int_{a_2} p dA - \int_{a_1}^{a_2} \tau_0 ds dx \quad \dots\dots\dots (2)'$$

がえられる。ここに、 v ：断面平均流速、 τ_0 ：水路底面や側面に作用するせん断力、また流れは一方向的であって $v = v i$ で表わされると考えている。不連続面で被積分関数は不連続となるから、別々に取り扱い、最終的に $a_1 \rightarrow a_2$ という極限操作をおこなえば求める不連続面の伝ばんが数学的にモデル化されたことになる。たとえば、質量保存則 (1)' に対して

$$\begin{aligned} & \lim \frac{d}{dt} \int_{a_1}^{\xi_-} \rho A dx + \lim \frac{d}{dt} \int_{\xi_+}^{a_2} \rho A dx \\ &= \lim \int_{a_1}^{\xi_-} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) dx + (\rho A)_{\xi_-} \frac{\partial \xi_-}{\partial t} - (\rho A)_{a_1} \frac{\partial a_1}{\partial t} \end{aligned}$$

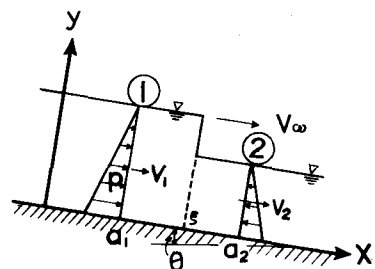


図-2 不連続面を含む流れ

$$+ \lim_{\xi_+} \int_{\xi_+}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) dx + (\rho A)_{a_2} \frac{\partial a_2}{\partial t} - (\rho A)_{\xi_+} \frac{\partial \xi_+}{\partial t} \\ = \lim_{a_1} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) dx + \rho_1 A_1 (v_w - v_1) - \rho_2 A_2 (v_w - v_2) = 0$$

であるから、結局

$$\rho_1 A_1 (v_w - v_1) - \rho_2 A_2 (v_w - v_2) = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

がえられる。これは圧縮性流体の衝撃波に関する一次元伝ばんの連続条件式である。また $\rho_1 = \rho_2 = \rho =$ 一定とおけば、開水路におけるもの²⁾

$$A_1 (v_w - v_1) = A_2 (v_w - v_2) = -M \quad \dots\dots\dots (24)$$

となる。これらの式で v_w : 不連続面の伝ばん速度、 M : 質量フラックスである。

全く同様の数学的操作によって、(2)式も書きあらためられる。開水路におけるものとすれば

$$M [(v_w - v_1) - (v_w - v_2)] = \int_{a_1} p dA - \int_{a_2} p dA \quad \dots\dots\dots (25)$$

となる。

これらの関係式は一次元衝撃波の伝ばんや開水路におけるサージの計算⁷⁾に用いられていることはよく知られている。

(2) コントロール・ヴォリューム法による表示

いうまでもなく、この方法による一次元解析的表示が一般に知られているものである。その基礎はすでに示した質量保存、運動量保存の法則による表示ならびに仕事とエネルギーとの関係に置き換えた機械的エネルギー保存の法則を、一次元流れに課せられた運動学的、幾何学的条件を用いて表わしたものである。その詳細は多くの参考書に示されているが、要約を示すとつぎのようである。

質量保存則としての連続方程式：非圧縮性流体に対して、明らかに(4)式を簡単化した。

$$\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

が成立する。

運動量法則による運動量方程式 (linear momentum equation) はベクトル式である。(10)式より

$$\int \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dV + \int \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \int \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{n} dA = \mathbf{i} \int \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV \\ + \mathbf{j} \int \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dV + \mathbf{k} \int \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dV \quad \dots\dots\dots (27)$$

がえられる。もちろん、全運動量変化は上式でえられる各座標軸方向の分値を合成したものである。ところが、一次元解析法で対象とされる流れは、それが管路のそれであっても開水路のそれであっても一方向的とみなされるものである。すなわち、流れの方向を座標軸の一つの方向にとれば、その方向の運動量方程式のみを取り上げて解析すればよいことになる。したがって、その方向を x 軸にとれば、(27)式は

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int u \{ u \cos(x, \nu) + v \cos(y, \nu) + w \cos(z, \nu) \} dA + \int \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right) \cos(x, \nu) dA \\ = \int \left\{ \frac{\sigma_x}{\rho} \cos(x, \nu) + \frac{\tau_{xy}}{\rho} \cos(y, \nu) + \frac{\tau_{zx}}{\rho} \cos(z, \nu) \right\} dA \quad \dots\dots\dots (28)$$

と書かれる。

一方、Newtonの運動量法則を仕事とエネルギーとの関係として示すためには、(10)式に $\mathbf{v}$ を乗じてコ

ントロール・ヴォリューム V に亘って積分すればよい。その結果を示すに先立って、(10)式の左辺に v を乗ずればつぎのように変形される。

$$\begin{aligned} v \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right\} &= v \frac{\partial v}{\partial t} + v (v \cdot \nabla) v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q^2}{2} \right) + v \left[\nabla \left(\frac{q^2}{2} \right) - v \times \omega \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q^2}{2} \right) + v \cdot \nabla \left(\frac{q^2}{2} \right) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q^2}{2} \right) dV + \int v \cdot \nabla \left(\frac{q^2}{2} \right) dV + \int v \cdot \nabla \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right) dV &= \int v \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \frac{k}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \right] dV, \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

あるいは 3)

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q^2}{2} \right) dV + \int \{ u \cos(x, \nu) + v \cos(y, \nu) + w \cos(z, \nu) \} \left(\frac{q^2}{2} + \Omega + \frac{p}{\rho} \right) dA \\ = \int \{ \sigma_x u \cos(x, \nu) + \sigma_y v \cos(y, \nu) + \sigma_z w \cos(z, \nu) \} dA - \int \left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV \\ + \int u \{ \tau_{xy} \cos(y, \nu) + \tau_{zx} \cos(z, \nu) \} dA + \int v \{ \tau_{yz} \cos(z, \nu) + \tau_{xy} \cos(x, \nu) \} dA \\ + \int w \{ \tau_{zx} \cos(x, \nu) + \tau_{yz} \cos(y, \nu) \} dA - 2 \int (\tau_{xy} e_{xy} + \tau_{yz} e_{yz} + \tau_{zx} e_{zx}) dV \\ \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

である。なお、(29)式は一次元解析法によって示される境界面における表面抵抗がわかりやすい形に表わされたものである。

(3) 一次元水理解析法の基礎方程式

(2)で述べた連続、運動量および機械的エネルギーに関する方程式は一次元流れの基本的関係であるが、それらを一次元流れの水理解析法に適用するためには、流れを規定する運動学的条件や幾何学的条件によって容積積分や面積積分をおこなわなければならない。しかも、積分操作をおこなうに当って、さらにいくつかの前提や仮定を導入する必要がある。

境界面における条件は、管壁や開水路壁面における運動学的条件、また開水路流れにおける自由表面の運動学的、幾何学的条件であって、これらはつぎのようである。

$$v \cdot n = v_n, \dots\dots\dots (31)$$

および

$$v_s = \frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} + w_s \frac{\partial h}{\partial z}, \dots\dots\dots (32)$$

および

$$\cos_s(x, \nu) = -\frac{\partial h}{\partial x}, \cos_s(y, \nu) = 1, \cos_s(z, \nu) = -\frac{\partial h}{\partial z} \dots\dots\dots (33)$$

である。ここに、 h ：水深、 z ：水路幅方向の距離、添字の b および s は境界面および自由表面における値である。

(29)、(28)および(30)式を(31)～(33)式の条件を用いて任意のコントロール・ヴォリューム V およびそれを囲む表面積 A について積分し、コントロール・ヴォリュームの流下距離 dx でわって、これを 0 とする極限操

作をおこなえば所要の一次元水理解析法における基礎方程式がえられる。われわれの取り扱う流れはつねに乱流であるから、(26)，(28)および(30)式は乱流の平均流としてのものに書きあらためなければならない。しかし、完全乱流場では乱れによる影響が粘性によるものに比し卓越していること、解析の対象が巨視的な平均量の変化で流体運動の力学的機構の細部まで必要としないことなどから、乱れによる Reynolds 応力を σ ， τ ，と覚えておけばそのまま用いてよい。ただし、エネルギー方程式において変動量の 3 次の相関関係は無視されている。

演算の結果を示すとつぎのようである。管路の流れに対して、連続、運動量およびエネルギー方程式は

$$\frac{dQ}{dx} = -q \quad (q > 0 : \text{流出}, q < 0 : \text{流入}), \dots\dots\dots (34)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta v^2}{2g} + h \right) + \frac{v}{gA} \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\tau_b}{\rho gR} + \frac{\beta v q}{gA} \left(1 - \frac{u_b}{\beta v} \right), \dots\dots\dots (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} + h \right) + \frac{\beta v}{2gA} \frac{\partial A}{\partial t} \\ = -\frac{\tau_b}{\rho gR} \frac{u_b}{v} + \frac{q}{Q} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} + h \right) \left[1 - \left(\frac{u_b^2}{2g} + h \right) / \left(\frac{\alpha v^2}{2g} + h \right) \right], \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

となる。ここに、 q ：単位長さ当りの流出入流量、 h ：ピエゾ水頭 ($= \Omega/g + p/\rho g$)、 u_b ：境界面近傍における u の値である。普通には管路の断面は時間的に変わらないから、 $\partial A/\partial t = 0$ とおいてよい。

ここで注意すべき事項は (34)～(36) 式の誘導に当って用いられた前提条件や仮定である。このところを明確にしておかないと、これらの式が用いられないような流れにも適用する危険性をもつからである。これらを列挙すると、

1. 管軸が流れの方向にあまり曲っていないこと。これは数学的演算に用いた座標軸系が直角座標系であることによる。しかし、エネルギー方程式を用いれば、この理由はなくなり、むしろ乱流場の乱れが平均流のそれに比して十分小さければ成立することになる。
2. 流れは十分な一次元流れとみなされること、すなわち、管軸方向の流速が他の座標軸方向のそれに比して十分大きく、運動エネルギーの分布や遠心力の影響の評価には v 、 w は無視されてよい。
3. すでに述べたように、乱れによる各種の影響は平均流によるものに比して十分に小さい。

などである。

全く同様にして、開水路流れにおける基礎方程式もえられる。この場合、境界の条件として (31)～(33) 式を用いる必要がある。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + q = 0, \dots\dots\dots (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\beta v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{gA} (1-\beta) \frac{\partial A}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = \sin \theta - \frac{\tau}{\rho gR} + \frac{\beta q v}{gA} \left(1 - \frac{u_b}{\beta v} \right), \\ \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\alpha v}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{2gA} (\beta - \alpha) \frac{\partial A}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = \sin \theta - \frac{\tau}{\rho gR} \frac{u_b}{v} + \frac{\alpha q v}{2gA} \left(1 - \frac{u_b^2}{\alpha v} \right). \\ \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

(38) および (39) 式の誘導に当って、1～3 の条件以外に

4. 流体圧の分布は近似的に静水圧の法則によって表わされること。したがって、流線の曲がりあるい

は水面こう配の大きいところでは適合されない。

5 自由表面での流速 u_s は水路幅方向に一様である。

という条件を用いている。

われわれが取り扱う管路や開水路の流れに関する水理解析法は以上の基礎方程式より出発している。この場合、上述の誘導過程からもみられるように、管路や開水路がコントロール・ヴォリュームであると仮定していた。ところが、境界面が急激に変わるところでは、流れにいわゆるはくり (separation and stall) が起り、流れそのものとコントロール・ヴォリューム構成部分と一致しなくなる。これは広く形状抵抗 (form resistance) といわれるが、いまのところ理論的に基礎方程式に導入されえないのが悩みである。管路における計算のように、多くの形状抵抗による損失水頭に比例する形として係数を経験的に決定しているのが現状といっても過言ではない。

4 理論的解析に応用される数学

2および3において示したように、水理学あるいはさらに広く流体運動の力学の理論的構成はきわめて広範囲の応用数学の分野を含んでいることがわかう。したがって、これらのそれぞれを分類して水理技術者の勉強に便ならしめることも容易ではないし、まして特定の条件に対するそれぞれの解法といったことを述べることは多年の労力を必要としよう。ここでは、これまでに示した基礎的關係を適当に分類して、それぞれの問題に対して応用される数学的方法の概略を示すにとどめておこう。

(1) ポテンシャル論とその応用

渦度ベクトルが0という非回転流れには速度ポテンシャルが存在する。重力の場における物体力の表示も力のポテンシャル Ω を用いた。さらに、流れの性格は全く異なるけれども、浸透層内の層流浸透流の速度がDarcyの法則によって与えられることは地下水位としてのビエゾ水頭がポテンシャルであることを意味している。これらの流体力学、水理学的例示からもわかるように、数学におけるポテンシャル論がわれわれの対象とするものにも十分利用されることになる。このような例を順序不同に列挙すれば、まず

1. 流体が静止状態あるいはこれに近い状態から急激に加速される運動をなすために、非回転流れと仮定されるものとしての、スルース、オリフィス、せき、流体内部におかれた流線形物体周辺の流れなどがある。これらは、一般に大きなReynolds数をもっているから実用上粘性は無視される。
2. 重力波、噴流、cavity flowなどにみられるように、自由表面や圧力の一定な面を対象とするもの。
3. 上述の浸透層内の層流流れ

などがある。とくに水理学では波動理論および地下水理論に応用されていることはいうまでもない。

ポテンシャル論における数学的理論は流体力学⁸⁾や静電気学に関する参考書に詳しいが、その多くはGreenやGaussの定理によるものである。水理学で対象とされる流体は非圧縮性であるから、もし流れが非回転であれば、ポテンシャルはLaplaceの方程式

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

によって規定される。明らかに、流体運動はEulerの運動方程式によって示されるから、(2)あるいは(3)式に示したようにBernoulliの式

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \Omega + \frac{p}{\rho} = C \quad \dots\dots\dots (22)$$

がえられる。

Laplace の方程式を解くこの種の問題は調和関数に関する境界値問題および重力波の Cauchy の問題として知られている。Dirichlet の問題⁹⁾ (Dirichlet problem) は境界面においてポテンシャルが与えられたとき、領域内で ϕ の値を求めるものであり、二次元非回転流れでは流れ関数と速度ポテンシャルは互いに共役であるから、境界面の定まった領域内の二次元流れはこの種の問題の例となる。一方、Neumann の問題⁹⁾ (Neumann problem) は境界面でポテンシャルの法線方向の微分係数 $\partial \phi / \partial n$ が与えられたときの ϕ を決定するものである。この種の例は、条件が境界面における法線方向の速度を与えるから、流体内部におかれた物体のまわりの流れ、境界面をもつ多相流体の流れなどが考えられる。また、流体内部におかれた物体が加速度運動をするとき、その運動は付加質量が加わった仮想質量を用いて力学的に表示されなければならない。この場合、流れが非回転運動しておれば理論的に仮想質量係数は計算されることはよく知られている (球: 0.5, 円柱: 1.0)。

二次元非圧縮性完全流体では、速度ポテンシャルと流れ関数とが共役関係を持ち、Cauchy-Riemann の方程式を満足する。このことから、複素関数論が都合よく応用される。もちろん、水理学における問題ではあまり有用ではないが、鏡像の方法の井戸や注水井戸、群井への応用は常に用いられている。これは一種のシミュレーションであって、後にふたたび説明を加える。

重力波の Cauchy の問題は、微小振幅波 (Airy の波) の速度ポテンシャルに関する境界条件として示される。これは自由表面における運動学的条件

$$-\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (41)$$

および圧力条件としての Bernoulli の式

$$-\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{y=\eta} + g\eta = 0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

よりえられる近似条件式

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

において、 ϕ が場所と時間とにわけられる。すなわち周期的なポテンシャルであるとすれば、 $\phi \propto \phi'(x, y) e^{i\omega t}$ を代入して、次式がえられる。

$$\left(\frac{\partial \phi'}{\partial y} + \frac{\omega^2}{g} \phi'\right)_{y=0} = 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

この式は自由表面においてえられる Cauchy 型の条件である。

以上は特定の方法であったが、一般に Laplace の方程式という楕円型偏微分方程式を解く方法にはいくつかのものがある。解析的な方法としての変数分離法や積分方程式による方法、あるいは図解法、数値計算法、電氣的模擬法などである。変数分離法は $\phi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$ において原式に代入し、各項がそれぞれに付随した変数のみによって決定されることから、解は

$$\phi = \left\{ \begin{matrix} \cos mx \\ \sin mx \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \cos ny \\ \sin ny \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} e^{lz} \\ e^{-lz} \end{matrix} \right\} \quad \dots\dots\dots (45)$$

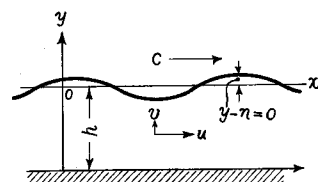


図-3 微小振幅波

一方、円筒座標系¹¹⁾では、解は $R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z)$ とおいてえられる

$$\begin{cases} \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -n^2, \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = l^2, \\ r \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (r^2 l^2 - n^2) = 0 \end{cases}$$

より

$$\phi = \left. \begin{matrix} e^{iz} \\ e^{-iz} \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} J_n(1r) \\ Y_n(1r) \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (46)$$

となることがわかる。ここに、 J_n および Y_n はそれぞれ n 次の第一種、第二種 Bessel 関数である。全く同様にして、球面座標系 $(r, \theta, \psi)^{11)}$ では

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0, \\ \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] \Theta = 0, \\ \frac{d^2 \Psi}{d\Psi^2} + m^2 \Psi = 0 \end{array} \right.$$

よりえられる解

$$\phi = \left. \begin{matrix} r^n \\ r^{-n-1} \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} m \Psi \left\{ \begin{matrix} P_n^m(\cos \theta) \\ Q_n^m(\cos \theta) \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (47)$$

がえられる。ここ $\mu = \cos \theta$, P_n^m , Q_n^m はそれぞれ n 次、 m 位の第一種、第二種 Legendre 陪関数である。

Legendre の方程式は境界面が単純な形であれば、上述の方法で解かれるが、複雑な形の境界面の場合には積分方程式を用いた境界値問題として取り扱われる。その詳細は文献(11)あるいは(9), (12)を参考にされたい。

流線網解析 (flow net analysis)
 として知られている図解析は、流線に沿って測った距離を s 、ポテンシャル線に沿ったものを n とするとき、Cauchy-Riemann の方程式より近似的に

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta \Psi} = \frac{\Delta s}{\Delta n} \dots \dots \dots (48)$$

が成立するから、ポテンシャルの差分と

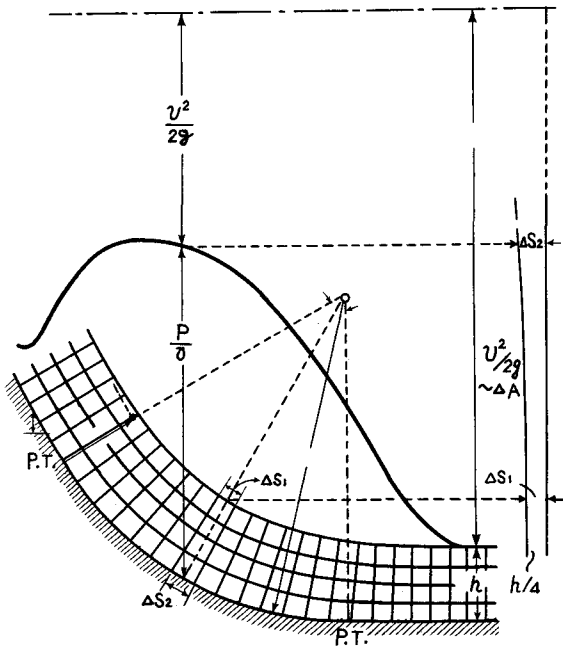


図-4 流線網による流れの解析

流線のそれとを等しくすれば $\Delta s = \Delta n$ となる関係を利用して、流線と等ポテンシャル線とでつくられる網を正方形にするように図式的に解くものである。この詳細は文献13を参照されたい。

(2) 摂動法 (perturbation)* による解析

(1)の(44)式で示した重力波の自由表面における Cauchy 条件は、もともとの非線型境界条件より変量の変わり方が小さいとした近似式であって、Airy の波は ϕ' として(45)式の二次元解を用いればその数学的な特性を表わすものである。しかし、より高次の解が必要とされることもあり、事実、上述の波動では Stokes の波として知られている。こうした場合、速度ポテンシャル ϕ および波動による自由水面よりの上り η をパラメーター ε に関して

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \varepsilon^3 \phi^{(3)} + \dots, \quad (49)$$

$$\eta(x, z, t) = \varepsilon \eta^{(1)}(x, z, t) + \varepsilon^2 \eta^{(2)}(x, z, t) + \dots \quad (50)$$

とおき、もとの式に代入し、 ε に関する同次項を解くという方法がとられる。これが、いわゆる摂動法といわれるものである。

三次元 Laplace の方程式より

$$\nabla^2 \phi^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (51)$$

また水路底の運動学的条件(3)より、 $v_n = 0$ として、

$$\frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial n} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (52)$$

一方、自由表面における圧力条件および運動学的条件を適用するに当って、 η の小さい値に対するつぎの式を考慮しておく必要¹⁰⁾がある。

$$f(x, z, t, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^m}{m!} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (53)$$

いま、 f の代りに速度ポテンシャル ϕ を用いて、この関係を書きなおすと、 $y = \eta$ の条件は $y = 0$ において

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x, z, t, \eta) &= \phi^{(1)}(x, z, t, 0) + \eta \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right)_{y=0} + \dots \\ &= \phi^{(1)} + \varepsilon \eta^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} + \dots \end{aligned}$$

となるから、

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \left(\phi^{(2)} + \eta^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right) + \dots \quad (54)$$

と変換される。この関係式は $y = \eta$ の条件を $y = 0$ に変換したときの補正を含むものである。したがって、自由表面における圧力条件としての Bernoulli の式(23)および運動学的条件(52)は、 $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots$ に対してそれぞれ

* 摂動法には数学的にみているいろいろの方法があるが詳細はたとえば文献14を参照されたい。

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + g\eta^{(1)} = 0 \\ -\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} + g\eta^{(2)} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] - \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial y \partial t} = 0 \dots\dots\dots (56) \\ \vdots \end{array} \right.$$

および

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} = -\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = -\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial y} - \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial y^2} \dots\dots\dots (57) \\ \vdots \end{array} \right.$$

がえられる。(56)および(57)式の第一のものはすでに述べた微小振幅に関するAiryの波の条件式(41)および(42)に等しく、第二のものが二次の波を与えることになる。

このように、非回転運動による波動理論は変数 ϕ および η に関する摂動法によって取り扱われることがわかったが、このような数学的手法はその他の流体力学、水理学の問題へも適用される。海岸近くにおける浅海波も深さ H と水平方向の長さ L とに関するパラメータ $\sigma (=H/L)$ を用いた。

$$f = f^{(0)} + \sigma f^{(1)} + \sigma^2 f^{(2)} + \dots\dots\dots (58)$$

によってEulerの運動方程式および連続方程式を展開して解析される。これはShallow Water Wave Theory⁷⁾として広く知られている。また、流れの局所的な変化を取り扱うような場合にも、これと同じような手法によって問題の解析が比較的うまく解決されることもある。

非線型振動論の解析的解法においても、全く同様な摂動法が用いられている。このような方法が適用されるのは水理学においては管路内の流体振動、サージタンクの解析であって、従来は広く数値積分法や図解法によっていたが、近年はその位相面における図形解析が重要視されるようになってきた。

(3) 常微分方程式論の応用

3で述べた一次元解析法による基礎方程式をみれば、独立変数は流下距離 x と時間 t とであることがわかる。したがって、基礎方程式は偏微分方程式であるが、流れが定常的であれば時間に関する微分係数は0となる。一方、前項で少しのべたように、管路における非圧縮性流体の振動現象は時間を独立変数とする微分方程式によって記述されている。すなわち、流量が場所的に増減しない開水路定常流はほぼ次式によって近似されることはわれわれの常識である。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sin \theta - \frac{Q^2}{C^2 R A^2} + \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial x}}{\cos \theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h}} \dots\dots\dots (59)$$

また一方、発電水力系統などであらわれる管路内の非定常振動現象は

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2\kappa |v| \frac{dv}{dt} + av = 0^* \dots\dots\dots (60)$$

によって近似的に示される。

もちろん、Navier-Stokesの方程式が解かれる場合としてのCouetteの流れ、二次元Poiseuilleの流れ、Hagen-Poiseuilleの流れなどの方程式、あるいは偏微分方程式で記述されるものでも変数

* 普通にはピエゾ水頭やサージタンク水位を従属変数として用いるが、この式では平均流速を変数としている。

分離形で解くときなどはいずれも常微分方程式であるが、これらの問題については触れない。

(60)式において、 $dv/dt = u$ とおき、解析を $v \sim t$ より $u \sim v$ という位相面に変換すれば

$$\frac{du}{dv} = \frac{-(2\kappa |v| u + av)}{u} \dots\dots\dots (60)$$

となる。(60)および(61)式を比較すれば容易にわかるように、右辺の式にはいずれも左辺の変分量に関する変数しか含まれていない。あるいは、これらを一般的に

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\sigma} = f_1(x, y), & \dots\dots\dots (61) \\ \frac{dy}{d\sigma} = f_2(x, y) & \dots\dots\dots (62) \end{cases}$$

と表わしてよい。したがって、(61)および(62)式で表わされた autonomous equation の系が取り扱う対象となる。

このような系の解析は解析法といわれるいわば級数解や位相面における図形追跡の方法によっておこなわれる。水理学における技術者の解析手段は通常何らかの数値解を求めることを意味していたし、またそれ以外の方法について考えようともしていなかった。しかし、図形解析法による取り扱いをもっと重要視する必要がある。数値解は特定の初期条件あるいは境界条件に対する現象の行動を示す数学的挙動であるが、それは無数に考えられる行動のただ一つのもを表わすに過ぎない。ところが技術者がある事業計画に参画し、特定のモデルを作ることによって所期の目的を達成する場合、そのモデルによって生ずる現象や行動のすべてを理解しなければ、本当に目的にかなったモデルを作ることはいできない。いわゆる機能設計に属するものとみられる。さらに望ましいことは、好ましい現象や行動があらわれるモデルを技術者が思うがままに作成しうることになることである。こうした点を考えると、図形解析法は機能理解の一助となる手段である。というのは、位相面における図形はその数式化されたモデルに対する可能なすべての解を少なくとも定性的に表わしたものであるからである。とくに、開水路の定常流に対する図形解析は水面形状そのものが位相面にあらわれているから、それらの定性的な評価をおこなうことができる。もし好ましい現象が示されていないれば、基本としたモデルを変えることによってあたらしい図形が位相面で描かれ、定性的な性格を論ずることが可能となる。

このような解析の手順は(61)および(62)式で表わされた微分方程式系の特異点の解析より初まる。すなわち、

$$f_1(x_c, y_c) = 0, \quad f_2(x_c, y_c) = 0 \dots\dots\dots (63)$$

である。(60)式で示した管路の非定常流体振動問題では、この点は原点、すなわち、速度および加速度が 0 となるところであるが、(62)式の開水路定常流の位相面解析では一般に任意のところ、 (x_c, y_c) である。したがって、この点へ原点を移動させれば、新しい座標系で特異点は原点へくことになる。とくに、 (x_c, y_c) は (擬似) 等流水深曲線と限界水深曲線との交点であることはいうまでもない。この場合、特異点である原点の近傍での(61)および(62)式の数学的挙動は次式によって近似される。

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{cx' + dy'}{ax' + by'} \dots\dots\dots (64)$$

ここに、 x', y' は位相面 ($x' \sim y'$) での位置をあらわし、また、 a, b, c, d はそれぞれもとの非線型方程式の形より計算される定数である。

(64)式で示される線型同次方程式の原点のまわりの挙動の解析がここでいう位相面での図形解析に外な

らないが、それらは非線型方程式の定性的解析理論^{18,19)}で十分に論じられているところである。その初歩

表-3 特異点の分類^{*,**}

I. $(a-d)^2 + 4bc > 0$

(A) $ad - bc > 0$	$\begin{cases} a+d < 0 \\ a+d > 0 \end{cases}$	安定な結節点 不安定な結節点
(B) $ad - bc < 0$		鞍形点

II. $(a-d)^2 + 4bc < 0$

(A)	$a+d=0$	渦心点
(B)	$\begin{cases} a+d < 0 \\ a+d > 0 \end{cases}$	安定な渦状点 不安定な渦状点

III. $(a-d)^2 + 4bc = 0$

$\begin{cases} a+d < 0 \\ a+d > 0 \end{cases}$	安定な結節点 不安定な結節点
--	-------------------

的理論によれば、表-3に示すように分類されている。振動性状の解析では、時間の経過にともなう変位、速度、あるいは加速度の状態を知る必要がある。このため、 t が限りなく大きくなったときの原点への近接の状態より安定あるいは不安定平衡状態を判別する。しかし、開水路の定常流では時間に関

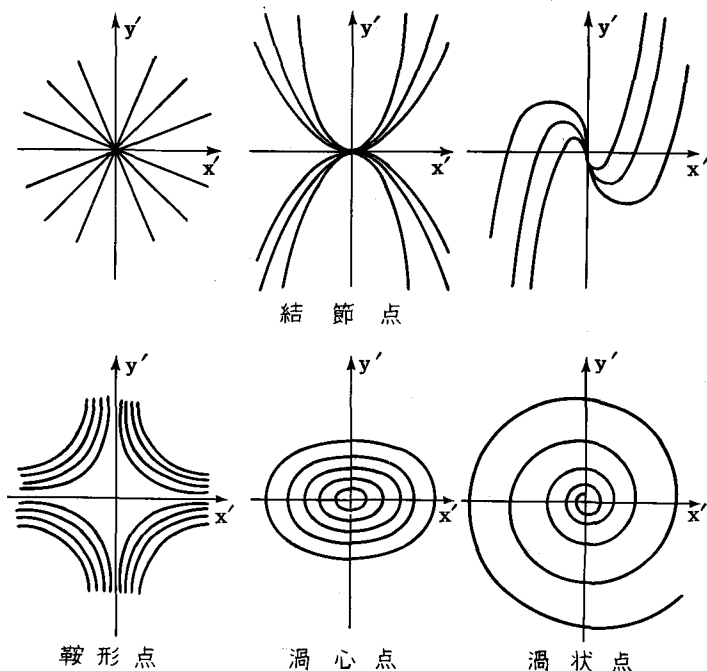


図-5 特異点

* $ad - bc \neq 0$ に対して適用される。 $a+d=0$ のとき、(64)式は不十分で、線型化への過程でさらに高次の項が判別のために必要とされる。

** $t \rightarrow +\infty$ で原点に収束するとき安定、 $t \rightarrow -\infty$ で収束すれば不安定という。

係せず、むしろ図形解析において示される各種水面形を規定するのが特異点である。この詳細はたとえば文献(3)を参照されたいが、一口に要約すれば、鞍形点によって流れは常流より射流に遷移することができ、また結節点や渦状点の存在によって流れは射流より急激な跳水を通して常流へと変わることである。もちろん、この種の図形解析には上・下流での境界条件、初期値としての水深などによって多種多様の図形が組み合わせられることを知っておかねばならない。

非線型方程式(8)において、もし κ が比較的小さいと(2)の摂動法による解析が適用される。この場合、 a の性質より考えて同期的なものとして、

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \kappa v_1 + \kappa^2 v_2 + \cdots, \\ a &= \omega_0^2 + \kappa \omega_1^2 + \kappa^2 \omega_2^2 + \cdots \end{aligned}$$

とおけばよい。ここに、 $\omega_0, \omega_1, \cdots$ は a よりきめられるはずの定数である。しかし、開水路定常流に関する(8)式には摂動法が応用されることはまずないといってよい(しかし、類似の級数に展開して h を x の関数で表わす計算例は文献(20)に記載されている)。これは、 h は特定の点の近傍のみを対象とする、あるいは変動が小さいなどの条件が満たされないためであって、常に数値解析法によることは周知の事実である。もちろん、その場合には、水深よりも水位や比エネルギーを従属変数として取り扱われるのが普通である。

ここで取り扱った開水路の定常流はその流体圧が静水圧の法則で近似される漸変流であることを前提としていた。しかし、水路底がいちぢるしく曲っているため流れもそれに対応して曲った流線をもつ場合、あるいは水路底は一定のこう配であっても流線曲率を無視しえない急変流では(8)式のような一階常微分方程式では不十分となることがある。このような流れの分類を摂動法と同様に取り扱いでおこなった研究²¹があるが、非静水圧分布は流速成分の比

$$(v/u) = (y/h) \partial h / \partial x$$

によることから、(8)式の運動エネルギーのフラックスに v の効果が導入され、その結果は三階の非線型常微分方程式となる。Boussinesq や Engelund and Hansen²²はその線型化方程式(誘導過程の途中で線型化している)を解析し、波動解をえた。しかし、それらの一般的な定性理論の研究は一部²³を除いてまだ研究途上にあるといえよう。

(4) 偏微分方程式論の応用

すでにポテンシャル論とその応用の項において、楕円型偏微分方程式の数学が水理学や流体力学の多くの問題で応用されることがわかった。われわれが水理学で対象とする数学的モデルのなかで偏微分方程式として表現されるものにはさらに多くの形式のものがある。たとえば、(12)式を単純化して乱流平均場の濃度拡散を取り扱うと、周知の熱伝導や拡散の式

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} \quad \cdots \cdots \quad (9)$$

とモデル化される。ここに、 ϵ は渦拡散係数である。これと同型の方程式の例は、浸透層内の圧縮性非定常浸透流の基礎方程式にみられる。すなわち、浸透層が等方性であれば透水係数 k は一定と考えられるから、

$$\frac{\rho g \lambda}{k} \left(\beta + \frac{a}{\lambda} \right) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad \cdots \cdots \quad (10)$$

である。ここに、 $S = \rho g \lambda b (\beta + a/\lambda)$ で表わされる貯溜係数、 $T = bk$ という透水量係数、 h は地下水位である。

また、(7)および(8)あるいは(9)式によって示された開水路非定常流の数学的モデルは、 A は h の関数と考えられるから、独立変数が x と t との2個、また従属変数が h と v との2個という2独立変数、2従属変数の連立偏微分方程式である。一方、流出解析に用いられる水理学的方法や洪水の水理学的理論からも承知のように、等流や不等流を前提においた非定常的挙動を対象とする擬似等流や擬似定流の数学的モデルはつねに用いられるものである。

これらの例からもわかるように、われわれが取り扱う水理現象は偏微分方程式によって記述されていると考えるのが普通である。したがって、一階偏微分方程式、連立一階偏微分方程式あるいは高階偏微分方程式の示す数学的な性質を理解し、応用することがわれわれにとってきわめて重要なことがわかる。こうした偏微分方程式に関する一般的な理論は文献(9)に詳述されている。

洪水や感潮河川における水位変化などの開水路非定常流の現象はわれわれにとってもっとも必要なのであって、これは **Hyperbolic flow** とよばれるものである。その数学的解析法はいわゆる2独立変数、2従属変数の連立偏微分方程式に関する特性曲線法である。すなわち、(7)および(8)式からも理解されるように、

$$A_1 \frac{\partial h}{\partial x} + B_1 \frac{\partial h}{\partial t} + C_1 \frac{\partial v}{\partial x} + D_1 \frac{\partial v}{\partial t} = -E_1, \dots\dots\dots (7)$$

$$A_2 \frac{\partial h}{\partial x} + B_2 \frac{\partial h}{\partial t} + C_2 \frac{\partial v}{\partial x} + D_2 \frac{\partial v}{\partial t} = -E_2 \dots\dots\dots (8)$$

という連立偏微分方程式は、もしこれが双曲型、

$$[BD][AC] - \left(\frac{1}{2} \{[BC] + [AD]\}\right)^2 < 0 \dots\dots\dots (9)$$

であれば、

$$I_+ : \frac{dx}{dt} = \zeta_+, \dots\dots\dots (10)$$

$$I_- : \frac{dx}{dt} = \zeta_-, \dots\dots\dots (11)$$

$$II_+ : [AB] \frac{dh}{dt} + \{[AD] - [BD]\zeta_+\} \frac{dv}{dt} + \{[AE] - [BE]\zeta_+\} = 0, \dots\dots\dots (12)$$

$$II_- : [AB] \frac{dh}{dt} + \{[AD] - [BD]\zeta_-\} \frac{dv}{dt} + \{[AE] - [BE]\zeta_-\} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

によって解析される。ここに、 $[XY] = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$ 、また $\zeta_{\pm}$ はつぎの行列式を解いてえられる $(\dot{x}/\dot{t})$ である。

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \dot{x} & \dot{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{x} & \dot{t} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

この計算を実際に与えられた初期条件や境界条件のもとで解く数値解析法や図式計算法はすでに多くの例題によって示されている。この方法の適用の問題点はむしろ数値解析法そのものの方に存在している。

基礎方程式(7)および(8)の微分係数にとまなり係数は未知関数を含む非線型要素をなすのが普通であるが、これらの $A_1, \dots\dots\dots, E_2$ が定数であるという特殊な場合や、変動が平衡状態からわずかな線型化がみとめられる場合には、これらの両式より、 v あるいは h を消去して2階線型方程式に帰しうる。このよ

うな近似条件のもとでは線型偏微分方程式を解く各種の方法、すなわち指数関数において解析する方法や Riemann 関数を用いるものが応用されよう。

一方、洪水現象を詳細にみれば理解されるように、たとえそれが時間的にも場所的にも変わるものであるといっても、ある特定の時間、あるいはある場所で現象をみると、その変化は比較的緩やかであるものがきわめて多い。これは海岸地下水の潮汐による変化、あるいは井戸よりの揚水または井戸への注水に伴う地下水位の変動などの現象にも認められる。すなわち、自然界における多くの現象も、その取り扱う対象が比較的長い期間などの尺度の大きいものを基準にして測定されるときには、非定常性も二次的な影響しかもたないとみなしうる。このような利点のもとで解析をおこなう非定常流体運動現象は擬似定流あるいはさらに簡単なモデルとしての擬似等流の理論によって取り扱われる。

また、現象の力学的、運動学的機構は以上に述べた例といささか異なるけれども、同様の数学的取り扱いによる一種のシミュレーションに河床変動とその解析がある。これは、河床を構成する土砂礫の連続条件は数学的にモデル化しうるけれども、その運動方程式は表現されえないため、やむをえず等流状態に対する各種の流砂量公式を運動方程式の解として用いている。

いま、⑦式を連続式の一般形と仮定すれば、⑧式は運動量あるいはエネルギー方程式に相当する。しかもこれがもっとも単純なモデルに対して成立することを前提とするから、

$$v = f(h) \cdot (i - L)^h \dots\dots\dots (10)$$

において差し支えない。ここに、 L は $\partial h / \partial t$, $\partial h / \partial x$, $\partial v / \partial t$, $\partial v / \partial x$ に関する項である。たとえば、エネルギー方程式⑧では $f(h) = C\sqrt{R}$, $n = (1/2)$, $L = (\beta/g) \partial v / \partial t \dots\dots$ であり、擬似定常浸透流では Darcy の法則より、 $f(h) = k \text{ grad } h$ である。⑩式を t および x について偏微分すれば

$$\frac{\partial v}{\partial (t, x)} = (i - L)^n \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial (t, x)} - n f (i - L)^{n-1} \frac{\partial L}{\partial (t, x)}$$

である。この関係を⑩式に代入して、 v を消去すれば、 h に関する 1 階偏微分方程式がえられる。すな

$$\begin{aligned} \text{わち、} \quad & [A_1 + C_1 (i - L)^n \frac{\partial f}{\partial h}] \frac{\partial h}{\partial x} + [B_1 + D_1 (i - L)^n \frac{\partial f}{\partial h}] \frac{\partial h}{\partial t} \\ & = n f (i - L)^{n-1} [C_1 \frac{\partial L}{\partial x} + D_1 \frac{\partial L}{\partial t}] - E_1, \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [A_1 + C_1 (i - L)^n \frac{\partial f}{\partial h}] / [B_1 + D_1 (i - L)^n \frac{\partial f}{\partial h}], \\ \frac{dh}{dt} &= n f (i - L)^{n-1} [C_1 \frac{\partial L}{\partial x} + D_1 \frac{\partial L}{\partial t}] / [B_1 + D_1 (i - L)^n \frac{\partial f}{\partial h}] \end{aligned}$$

が所要の解となる。1 階偏微分方程式の理論はよく研究されているから、これを応用すればよい。

(5) その他の方法

以上は、われわれが対象とする水理学ならびに流体運動に関する問題を数学的モデル化したとき応用される数学のなかでいくつかの代表例を採り上げて説明を加えた。しかし、その他の応用数学がうまく利用される問題も少なくない。

たとえば、浸透層内の流れの数学的解析には二次元問題としての複素関数論の応用、さらに写像関数

のそれぞれ特定の問題に対するよう巧みな適用などは広く知られており、そのまとめたものとしては文献④がある。

ここでは述べなかつたいま一つの重要な数学的方法に確率統計過程がある。とくに、現代はシステムとシミュレーションの時代といわれ、多くの確率過程が種々の形で現象解析にもちこまれ、決定論的な問題もこの方法によって解析されている。これらは、5.において簡単に示すことにする。こうした確率統計的手法が単純に水理学的な問題に用いられているものに乱流拡散に関する Lagrange 的方法がある。これは粒子などの変位に関する分散 (dispersion) を対象としている。これより乱流場における乱流分散係数が定義され、特定の条件に対して拡散現象が解析される。これらの詳細は文献④を参照されたい。

5 シミュレーションとその方法

(1) シミュレーションの分類

これまでの各節で説明を加えた方程式のなかには、対象とする現象が異なるものであっても、数学的な形式ではきわめて類似したいくつかのものがあつた。また、水理解析法や流体運動を表わすいろいろのモデルとしての数式は電気系や機械振動系における数式と形式的に全く同様なものがあることも理解されよう。これらの例からもわかるように、自然現象や人工的ないしは社会現象に至るまできわめて多くの対象はその体質において異なるところがあつても、何らかの性質や関係に類似のものを持ち、数学的、物理的モデルが同じように表現される。このような事柄は広く一般にシミュレーションといわれ、現代社会におけるきわめて多くの自然科学、社会科学、技術上の諸問題を解決する有力な手段としてシステム・シミュレーション工学として登場してきた。

しかしシミュレーション技術そのものは何ら新しいものではなく、人類の歴史の始まりとともに存在していたといつて過言ではない。ただ、高速度 digital 電子計算機の使用が今日では当たり前になり、従来の概念では解かれえなかつたものも解決されるようになって、新しい技術とみなされたのである。

シミュレーションのもっとも基本はモデルの作成にある。したがつて、対象とする問題の抽象化とそれにつづく近似化ということが具体的手段としてあらわれる。ところが、水理学におけるほとんどすべての問題は一応決定論の立場に立つて抽象化と近似化とが行なわれたものであると考えられる。あるいは、与えられた問題が直接的にはモデル作成の対象とならなくても、その問題に内存する基礎原理が Newton の運動量法則より演繹された流体運動に関する各種の形式のものに一致するということが前提となっている。すなわち、モデル作成よりもいかにして解くかという方に重点が移り、水理模型実験、水理基礎実験などの方法、流体力学系、電気系、機械振動系などの各系における類似の方程式から流体運動に関する問題を電気系、機械振動系のそれにおきかえて解くというアナログ的方法、および力学的決定論によって示された対象の数学的モデルとしての数式 (大抵は微分方程式) を数値的に解決する数値的シミュレーションなどに分類される。

一方、多くの分野でいわゆる古典力学における決定論的思考だけで十分でなく、確率統計的な取り扱いが必要とされ、またそのように進展してきたことは近代物理学の示すところである。水理学においても同様であって、その動機は近代物理学と異なるところがあっても、確率統計的な思考が取り入れられることがある。この例は前項で示した乱流拡散における Lagrange 的な取り扱いにみられよう。その他の問題でも同様な取り扱いが始まってきた。これは、決定論的方法によって十分行ないえない不備、不足があるため、現象解析の要素間の従属性や確率統計的関連、相関関係が現実の現象の複雑性にもとづいて付け加える必要があるからである。一般にすべてのものは決定論的性質と確立統計的性質との二つの基本的性質によって構成されるから、問題の対象とする原型とシミュレーターとはつぎのように分類²⁵⁾される。

- 1. 決定論的（原型）— 決定論的（モデル）
- 2. 決定論的（原形）— 確率統計的（モデル）
- 3. 確率統計的（原型）— 決定論的（モデル）
- 4. 確率統計的（原型）— 確率統計的（モデル）

この分類による例は、1.としては普通に考えられる水理解析があり、このなかには水理模型実験、各種のアナログ、デジタル解析がある。2.はその典型的な Monte Carlo 法がある。また 3.は通常の統計図表を意味し、4.は交通計画などで常用される待ち合せの問題が挙げられよう。

シミュレーションにおけるモデルがどのような形態であっても、アナログ型とデジタル型との計算過程をもっている。アナログ型の特長はモデルによる連続測定、観測にあり、またデジタル型のそれは、計算機による不連続的測定である。両者の型式のシミュレーターの分類は表-4 および表-5 のようであるが、われわれ水理技術者が行な

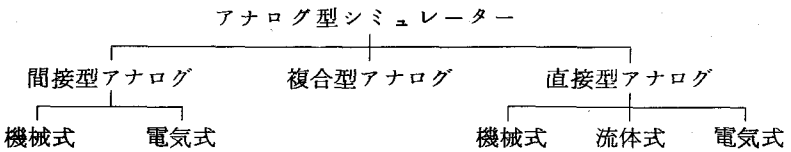
う水理模型実験やアナログ解析法などはアナログ型に属し、また数値計算法はデジタル型に属することになる。それらについては次項以下において説明を加える。

(2) 同じ物理系におけるシミュレーション

前項でも述べたように、アナログ型シミュレーションの一つに同じ物理系（ここでは流体あるいは水理系）におけるシミュレーションがある。具体的な例は水理

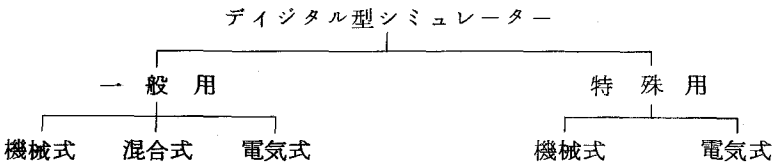
模型実験に外ならない。模型実験をこの講義の数学的手法に入れるのは奇妙に思われるかもしれないが、

表-4 アナログ型・シミュレーターの分類



- (例)
- 直接型：風洞模型実験、水理模型実験、ネットワーク解析機
 - 間接型：電気・電子管式アナログコンピュータ、計算尺

表-5 デジタル型・シミュレーターの分類



実物とモデルの間で成立する相似則は流体運動に対する Newton の運動量法則からえられるものであること、またそれは一般に微分方程式という数学的表示をとることから、この問題が取り上げられるのは何ら不思議ではない。

多くの教科書や参考書にみられるように、水理相似則は Newton の運動量法則における慣性項と各種の外力項とを等置してえられる Froude , Reynolds, Weber , Mach の法則である。しかし、これらのそれぞれの法則の示すような単純な相似関係のものは実際には稀で、少なくとも一次元解析法の示す微分方程式による相似関係が満足されなければならない。ところが一次元方程式の示す現象の数学的モデルはいくつかの仮定や近似より構成されているから、シミュレーションにはおのずから限度があり、また水理模型実験で対象とされる実物の流体運動そのものも一次元解析理論でシミュレーションされにくいものがあり、成層流の挙動を対象とする水理模型実験はこの限度を越えるもののようであり、数値的シミュレーションなどの方法を用いる必要がある。

(3) 異なった物理系におけるシミュレーション

異なった物理系におけるシミュレーションの問題は、いわゆる電気式アナログコンピューターのようないわば数値解を目的とするものを除いても、いろいろな方面に亘る応用例をもっている。

4. (1) で示したポテンシャル論にみられるように、非回転の流れや浸透層内の緩やかな流れでは、速度ポテンシャルφや地下水位hに関して Laplace の方程式が成立し、多くの問題では与えられた境界条件のφやhを求め(Dirichlet や Neumann の境界値問題)、それから速度成分をうるのが通常の解析である。このような場合、もっとも広く利用されるシミュレーションは電気模擬法であって、電位差がポテンシャルになる。とくに境界条件がいろいろと複雑にかわるときには好都合であって、外国では河域内の地下水探査法における予備調査として広く利用されている。

このように、物理的な挙動の相似性の例としてもっとも広く引用されるものに拡散輸送過程がある。問題を簡単に取り扱い、横方向のみの拡散を考えよう。N：単位時間当りの拡散物質の輸送量、D：拡散係数、n：拡散物質濃度とすると、いわゆる拡散方程式は

$$N = -D \frac{dn}{dy}$$

と表わされる。この式で、Dを渦拡散係数とすれば、乱流場におけるものとして取り扱われる。このような関係で、運動量、熱および物質に対するものが定義され、これがいわゆる輸送過程の相似性に外ならない。

Shallow water theory
として知られている非圧縮性流体の長波の運動と二次元等エントロピー流れの運動との相似性も有名であって、液体と気体の運動現象から互いに他のものの挙動を解明しよう

表-6 輸送過程の相似性

	運 動 量	熱	物 質
輸 送 量 N	せん断力 (τ)	熱 量 (H)	輸 送 量 (M)
濃 度 N	ρ v	C _p θ	C
名 称	Newton の法則	Fourier の法則	Fick の法則

C_p：比熱、θ：温度、C：濃度

表一七 浅海波理論と二次元等ポテンシャル流れ理論との相似

浅海波理論：（非圧縮性流体）

深さ方向を z 軸とする。

（基本式）

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{dw}{dt} = - \rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right.$$

↓ 連続式を境界条件（ $z=0$ で $w=0$ 、 $z=h$ で $w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}$ ）によって積分する。
↓ ただし、 u 、 v は z に無関係

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v dy = 0$$

↓ 流体圧 p は静水圧と仮定（ $p = \rho g (h-y)$ ）、 w は無視

（原式）

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) + \frac{\partial}{\partial y} (hv) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \rho g \frac{\partial h}{\partial y} \end{array} \right.$$

圧縮性流体の二次元等エントロピー流れ理論：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} = - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} = - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \end{array} \right.$$

相似性：

浅海波理論で $\rho h = \bar{\rho}$ 、 $\bar{p} = \frac{1}{2} \rho g h^2$ において、書きなおすと、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} u) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} v) = 0 \\ \bar{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ \bar{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \end{array} \right.$$

すなわち、両方の式は形式的に一緒になる。あるいは、 $\bar{\rho} \propto h$ 、 $\bar{p} \propto h^2 \propto \bar{\rho}^2$ であるから、断熱変化の式 $p v^r = \text{一定}$ において $r=2$ となることがわかる。

とする勢力的な研究が10年ぐらいまえまで行なわれた。しかし、現在ではその定量的な精度の限度からあまり行なわれていない。これらの両理論の相似性を比較したものが表-7である。

(4) 数値的シミュレーション

現在ではシミュレーションといえば、もっぱらこれを示すものと思われている。しかもそれはデジタルコンピュータによるものと解釈されている。したがって、この問題を一々取り上げて論ずる必要はないが、要するに基本はモデル作成であって、取り扱っている水理現象をどのような数学的表示として示すかがもっとも重要である。そのためには、流体運動の力学的過程を十分理解し、その抽象化には十分な注意を払う必要がある。こうしたモデルを作成することが今後の水理技術者の中心課題となることが予想されるから、われわれは与えられた課題をどのように分解し、それを統合していくかという能力を養うことが必要であるし、またそのためには基礎原理とそれから誘導される種々の力学的過程を理解し、また一般的な取り扱いをするための数学的能力をつけることが望まれる。

6 む す び

水理学における数学的手法と題するこの問題では、水理学で対象とされる流体運動を統一的にどのように表現するかということ、基礎の力学的原理より出発してあらわすとともに、とくにそれが一次元流れとなるときに有用な一次元解析法におけるものとして論じた。こうして対象となった現象の数学的表現より知られる多くの形式のなかで、ここではポテンシャル法、摂動法、常微分方程式の定性的理論、偏微分方程式などを取り上げて、その解析への方法を簡単に論じた。

さらに、近年においてきわめて広く応用される各種のシミュレーション手法の水理学的問題への適用についても若干述べた。

これらが数学的手法であるとは限らないし、こうした課題のものを十分に調べてみれば優に一冊の本となることがわかる。われわれ水理技術者がたえず進展し、変化するこの世のなかで常にその自分の専門的職業分野を守り、それを発展させるためには、水理学のもつ内容を十分理解し、時代の流れに順応した方法で客観的に眺める能力をもつ必要があろう。

ここでは、このような観点から水理学における数学的手法という難問を取り扱ったつもりであって、この意図が何らかの技術的進展をもたらす上の一助ともなれば幸いである。

参 考 文 献

- 1) Shames, I. H. : Mechanics of Fluids, McGraw-Hill, New York, 1962, p. 77.
- 2) 例えば、岩佐義朗：水理学、朝倉土木工学講座3、朝倉、東京、1967、pp. 173~175.
- 3) 岩佐義朗：開水路流れの基礎理論、水工学シリーズ 64-01、土木学会水理委員会、1964、p. 7.
- 4) 志村博康：浮遊砂を有する水流の諸特性について、土木学会論文集、46号、1957.
- 5) Sokolnikoff, I. S. : Mathematical Theory of Elasticity, 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, 1956, pp. 56~67.
- 6) Metzner, A. B. : Flow of Non-Newtonian Fluids, Section 7, Handbook of Fluid Dynamics, Edited by V. L. Streeter, McGraw-Hill, New York, 1961.
- 7) 本間仁、嶋祐之：開水路の不定流、本間仁、安芸咲一編「物部・水理学」、岩波、東京、1962、pp. 305~308, pp. 316~319.
- 8) Lamb, H. : Hydrodynamics, Dover, New York, 1955.
- 9) Courant, R. and D. Hilbert : Methods of Mathematical Physics, Vol. I, Partial Differential Equations, Interscience, New York, 1962.
- 10) Hubbard, P. G. : Principles of Irrotational Flow, Chapter I, Advanced Mechanics of Fluids, edited by H. Rouse, John Wiley & Sons, New York, 1959.
- 11) 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論〔増訂版〕、岩波、東京、1954.
- 12) Tricomi, F. G. : Integral Equations, Interscience, New York, 1957.
- 13) Prasil, Fr. : Technische Hydrodynamik, 2Auflage, Julius Springer Berlin, 1926.
- 14) Rogers, M. H., P. G. Brazin, D. W. Moore, and J. B. L. Powell : Mathematical Aspects, Chapter II, Research Frontiers in Fluid Dynamics, edited by R. J. Seeger and G. Temple, Interscience, New York, 1965.
- 15) Stoker, J. J. : Water Waves, The Mathematical Theory with Applications, Interscience, New York, 1957.
- 16) Dean, R. G. and P. S. Eagleson : Finite Amplitude Waves, Chapter 2, Estuary and Coastline Hydrodynamics, edited by A. T. Ippen, McGraw-Hill, New York, 1966.
- 17) Friedrichs, K. O. : On the Derivation of the Shallow Water Theory, Appendix to The Formation of Breakers and Bores, by J. J. Stoker, Comm on Pure and Applied Math., Vol. 1, 1948, pp. 81~85.
- 18) Stoker, J. J. : Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems, Interscience, New York, 1950.

- 19) Lefschetz, S. : Differential Equations : Geometric Theory, Interscience, New York, 1957
- 20) Forchheimer, Ph. : Hydraulik, 3te Auflage, Teubner, Leipzig, 1930.
- 21) Iwasa, Y. and J.F. Kennedy : Free Surface Shear Flow over a Wavy Bed, Proc., ASCE, (in printing).
- 22) Englund, F. and E. Hansen : Progress Report No. 7, Hydraulic and Coastal Eng. Laboratory, Tech. University of Denmark, 1964.
- 23) Polubarinova-Kochina, P. Ya., and S.B. Falkovich : Theory of Filtration of Liquids in Porous Media, Advances in Applied Mechanics, Vol. I., Academic Press, New York, 1951.
- 24) 今本博健 : 開水路流れにおける乱流拡散過程、水理学・水文学における最近の進歩、土木学会関西支部・中部支部、1967, pp. 79~92.
- 25) Chorafas, D. N. : Systems and Simulation, Academic Press, New York, 1965, p. 22.
- 26) 日野幹雄 : モンテ・カルロ法による乱流拡散の二、三の計算について、第9回水理講演会講演集、土木学会、1965、pp. 67~72.