

密度流の諸問題

東北大学教授工学博士 岩崎敏夫

1. 密度

1.1 塩分と密度

海水は塩分と水温によって密度を異にする。Knudsen (クヌーツセン) は温度 0℃ のときの関係式として次式を与えた。

$$\rho_0 = -0.069 + 1.4708 \, C\ell - 0.001570 \, C\ell^2 + 0.0000398 \, C\ell^3 \quad (1.1)$$

ここに $C\ell$ は海水 1000 質量中の塩素の質量であって、‰ (プロミル) であらわし、また ρ_0 と 0℃ における密度 ρ_0 との間には、次の関係がある。

$$\sigma_0 = (\rho_0 - 1) \times 1000 \quad (1.2)$$

温度 t ℃ のときには式 (1.2) の添字 0 を t に直したものをを用いる。このとき次式の関係がある。

$$\begin{aligned} \sigma_t &= (\rho_t - 1) \times 1000 \\ &= \Sigma_t + (\sigma_0 + 0.1324) \{1 - A_t + B_t(\sigma_0 - 0.1324)\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ここに

$$\Sigma_t = \frac{(t - 39.8^\circ\text{C})^2}{503.570} \times \frac{(t + 273^\circ\text{C})}{(t + 67.26^\circ\text{C})} \quad (1.4)$$

$$A_t = t(4.7867 - 0.098185t + 0.0010843t^2) \times 10^{-3}$$

$$B_t = t(18.030 - 0.8164t + 0.01667t^2) \times 10^{-6}$$

塩分濃度 S (‰) と $C\ell$ 濃度 (‰) との間には、

$$S = 0.030 + 1.8050 \, C\ell \quad (1.5)$$

なる関係がある。

海水の密度は普通 Mohr の銀滴定法による塩素定量法を使用する。¹⁾ 地球上の海水は大体常温で $\rho_t = 1.020 \sim 1.031 \, \text{g/cc}$ の範囲にある。

問 1: 太平洋で深さ 25 m の海水の塩素量が 1.838‰ であったという。水温が 10℃ であったとして塩分濃度および密度をもとめよ。

1.2 温度と密度

水温による密度の変化は大気圧の下で下表に掲げる変化をしめす。

表-1.1

温度 ℃	0	4	5	10	15	20	25
密度 (g/cc)	0.99987	1.00000	0.99999	0.99973	0.99913	0.99823	0.99707

温度 °C	30	35	40	45	50	60
密度 g/cc	0.99567	0.99406	0.99224	0.99024	0.98807	0.98324

温度 °C	70	80	90	100
密度 g/cc	0.97781	0.97183	0.96534	0.95838

以上のように温度による密度変化の割合は塩分による密度変化の割合に比してかなり小さい。

1.3 濁度と密度

濁度とは一定量の水中に含まれる土砂の重量であらわされる。 C (0/100) (プロミル) の濁度とは 1 ℓ の濁水中の土砂の重量が C gr である場合をいい、濁水の密度 ρ' は水と土粒子の密度を ρ および ρ_s としたときに、次式で示される。

$$\rho' = \rho \left[1 + \frac{C}{1000} \cdot \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_s} \right) \right] \quad (1.6)$$

問題 2： 下表は各河川の浮泥量の最大値である。水の密度 $\rho = 1$ gr/cc。土粒子の密度を $\rho_s = 1.18$ gr/cc と仮定して 水の密度をもとめよ。

表- 1.2 各河川の の値 (0/100)

河 川 名	C	河 川 名	C
ミシシッピー河	1.059	ド ナ ウ 河	0.301
エ ル ペ 河	0.052	ナ イ ル 河	1.492
セ ー ヌ 河	0.049	黄 河	76.6
ロ ー ヌ 河	0.135		

2. Z 成層流

2.1 定常二層流の基本方程式

弱混合型の場合密度 ρ_1, ρ_2 の二流体 ($\rho_2 > \rho_1$) は明瞭な境界面を形成して流れる。これを二層流という。Fig. 2.1 のように底勾配した水路上の二成層流で水深を h_1, h_2 、流速を u_1, u_2 とし、底面および内部境界面にはたらく剪断応力を τ_b および τ_i とすると、二次元不定常流であれば、次式が成する。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u_1}{\partial t} - i + \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_1^2}{2g} \right) + i f' = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g} \frac{\partial u_2}{\partial t} - i + (1 - \epsilon) \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + \\ & + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_2^2}{2g} \right) + i f_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

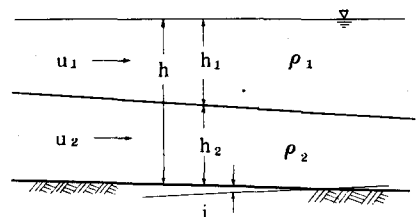


Fig.2.1 二成層流

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (2 \cdot 3)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \quad (2 \cdot 4)$$

(2・1)(2・2)は運動方程式、(2・3)(2・4)は連続方程式である。 $i f_1$, $i f_2$ は摩擦勾配であって、次式で定義される。

$$i f_1 = \frac{\tau_i}{\rho_1 g h_1} \quad (2 \cdot 5)$$

$$i f_2 = \frac{(\tau_b - \tau_i)}{\rho_2 g h_2} \quad (2 \cdot 6)$$

ただし、

$$\tau_i = f_i' \frac{\rho}{2} (u_1 - u_2) |u_1 - u_2| \quad (2 \cdot 7)$$

$$\tau_b = f_b' \rho_2 u_2 |u_2| \quad (2 \cdot 8)$$

と表現し、 f_i' , f_b' はそれぞれ境界面(Inter face)および底面の摩擦抵抗係数とよぶが、均質な流れの場合の係数と区別するために'をつけている。また、

$$\varepsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}, \quad \rho = \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) \quad (2 \cdot 9)$$

である。

定常流においては(2・1)～(2・4)で $\partial/\partial t = 0$ とおいてとけば次式をうる。

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dx} = \frac{1}{\Phi(x)} \cdot & \left[\left(1 - \frac{u_2 |u_2|}{g h_2} \right) \left\{ i - \frac{f_i'}{2g h_1} (u_1 - u_2) |u_1 - u_2| \right\} \right. \\ & \left. - \left\{ i - \frac{f_b'}{2g h_2} u_2 |u_2| + \frac{f_i'}{2g h_2} (u_1 - u_2) |u_1 - u_2| \right\} \right] \end{aligned} \quad (2 \cdot 10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_2}{dx} = \frac{1}{\Phi(x)} \cdot & \left[\left(1 - \frac{u_1 |u_1|}{g h_1} \right) \left\{ i - \frac{f_b'}{2g h_2} \cdot u_2 |u_2| + \frac{f_i'}{2g h_2} \cdot (u_1 - u_2) |u_1 - u_2| \right\} \right. \\ & \left. - (1 - \varepsilon) \left\{ i - \frac{f_i'}{2g h_1} (u_1 - u_2) \cdot |u_1 - u_2| \right\} \right] \end{aligned} \quad (2 \cdot 11)$$

ただし、

$$\Phi(x) = \frac{u_1^2}{g h_1} \cdot \frac{u_2^2}{g h_2} - \frac{u_1^2}{g h_1} - \frac{u_2^2}{g h_2} + \varepsilon \quad (2 \cdot 12)$$

そこでつぎに内部フルード数を次式で定義する。

$$F_1' = \frac{u_1}{\sqrt{\varepsilon g h_1}}, \quad F_2' = \frac{u_2}{\sqrt{\varepsilon g h_2}} \quad (2 \cdot 13)$$

すると式(2・12)はつぎの式になる。

$$\Phi(x) = \left[(F_1')^2 \cdot (F_2')^2 - (F_1')^2 - (F_2')^2 + 1 \right] \cdot \varepsilon \quad (2 \cdot 14)$$

式(2・10)(2・11)よりわかるように $\Phi(x) = 0$ ならしめる場合は均質な流れでの限界水深に相当する。そこで(2・14)より、その場合には次式が成立する。

$$(F_1')^2 + (F_2')^2 - (F_1')^2 \cdot (F_2')^2 = 1 \quad (2 \cdot 15)$$

二層流の一方が静止している場合を考えると、

$$(1) \text{ 下層静止の場合 } h_2 \neq 0 \text{ で } u_2 = 0 \text{ のとき } F_1' = 1, \quad F_2' = 0$$

$$(2) \text{ 上層静止の場合 } h_1 \neq 0 \text{ で } u_1 = 0 \text{ のとき } F_1' = 0, \quad F_2' = 1$$

(3) 二層の密度差がごくわずかでありかつ u_1^2/gh_1 と u_2^2/gh_2 とが ε に比して大きければ(2・12)において ε を無視し、かつ $u_1^2/gh_1 = u_2^2/gh_2$ とおいて、 $u_1^2/gh_1 = u_2^2/gh_2 = 2$ となる。

(4) u_1^2/gh_1 と u_2^2/gh_2 とが ε と同じ程度の大きさであれば $(u_1^2/gh_1) \cdot (u_2^2/gh_2)$ の項が省略できるので(2・15)より、

$$(F_1')^2 + (F_2')^2 = 1 \quad (2 \cdot 16)$$

問題3: $\beta = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ とおいて式(2・16)をかき直すと、

$$(F_1'')^2_c = \left(\frac{u_1^2}{\beta gh_1} \right)_c = \left[1 + \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^2 \left(\frac{\eta_1}{1 - \eta_1} \right)^3 \right]^{-1}$$

ここに q_1, q_2 は上層および下層の流量、 η_1 は h_1/h である。²⁾ この式を用いて、 $q_2/q_1 = 0.1 \sim 1.0$, $\eta = 0.1 \sim 0.9$ の範囲における $(F_1'')^2_c$ の値を計算せよ。

2.2 水面および内部境界面の性質

2.2.1 水 面

まず(2・10)と(2・11)を加え、全水深 $h = h_1 + h_2$ とおくと、次式をうる。

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} = \frac{1}{\Phi(x)} \cdot \left[\left(\varepsilon - \frac{u_2^2}{gh_2} \right) \left\{ i - \frac{f i'}{2gh_2} (u_1 - u_2) |u_1 - u_2| \right\} \right. \\ \left. - \frac{u_1^2}{gh_1} \left\{ i - \frac{f b'}{2gh_2} \cdot u_2 |u_2| + \frac{f i'}{2gh_2} (u_1 - u_2) \cdot |u_1 - u_2| \right\} \right] \quad (2 \cdot 17) \end{aligned}$$

式(2・11)と式(2・17)とを比較すると、右辺分子{ }の項が、相等しい値をしめすけれど位置が入れかわっている。そして、 $u_1^2/gh_1, u_2^2/gh_2$ が ε の程度であると式(2・11)の右辺中 $1 - u_1^2/gh_1$ と $1 - \varepsilon$ とは1の程度の大きさであり、式(2・17)の右辺中 $\varepsilon - u_2^2/gh_2$ は(2・16)より、 u_1^2/gh_1 の程度となりこれは ε の程度の大きさである。このことから、水面勾配は、内部境界面(Interface)の勾配の ε 倍であって逆勾配であることとなる。

さらに(2・17)において $u_1^2/gh_1, u_2^2/gh_2$ が ε と同じ程度で小さいと、近似的に $dh/dx = i$ 。すなわち水面は水平と考えてよい。そこで内部境界面の形状を論じる場合には、通常 $h_1 + h_2 = h =$ 一定とおく。

また u_1^2/gh_1 と u_2^2/gh_2 が ϵ に比べて大きく, $u_1^2/gh_1 = u_2^2/gh_2 = 2$ とし, かつ $u_1 = u_2$ とすると, (2・17) より

$$\frac{dh}{dx} = \left(i - \frac{fb'}{4gh_2} \cdot u^2 \right) / (1 - F^2) \quad (2 \cdot 18)$$

ただし, $F = \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{gh_1} = u_2^2/2gh_2$ となる。また $h_1 = h_2$ であるから結局 (2・18) は, 次式となる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - fb' \frac{u^2}{2gh}}{1 - \frac{u^2}{gh}} \quad (2 \cdot 18)$$

すなわち均質流れの方程式に帰着する。

2.2.2 水平床の場合の内部境界面

式 (2・11) において $i = 0$ とし, また右辺分子において $u_1^2/gh_1 < 1$, $\epsilon \ll 1$ の場合を考えると, 次式をうる。

$$\frac{dh_2}{dx} = \frac{-\frac{fb'}{2\epsilon g} \cdot \frac{u_2^2}{h_2} + \frac{fi'}{2\epsilon g} \cdot \frac{(u_1 - u_2)|u_1 - u_2|}{h_2} + \frac{fi'}{2\epsilon g} \cdot \frac{(u_1 - u_2)|u_1 - u_2|}{h_1}}{1 - (F_1')^2 - (F_2')^2} \quad (2 \cdot 19)$$

a) 下層流が $u_2 = 0$ とおける位水深 h_2 が大きい場合,

式 (2・19) はこのとき次式になる。

$$\frac{dh_2}{dx} = -\frac{dh_1}{dx} = \frac{\frac{fi'}{2\epsilon g} \cdot \frac{u_1^2}{h_1}}{1 - (F_1')^2} \quad (2 \cdot 20)$$

Fig 2-2 にこの積分曲線をしめす, 自由水面は上述のように水平であるとした。

b) 上層流が $u_1 = 0$ とおける位水深 h_1 が大である場合

式 (2・19) は次式となる。

$$\frac{dh_2}{dx} = -\frac{dh_1}{dx} = \frac{-\frac{(fb' + fi')}{2\epsilon g} \cdot \frac{u_2^2}{h_2}}{1 - (F_2')^2} \quad (2 \cdot 21)$$

Fig. 2・3 にこの積分曲線をしめす。

Fig. 2・2, Fig. 2・3 に説明されているように上層流, 下層流がそれぞれ $F_1' \geq 1$ の場合について4種の流況が示されており, 内部射流, 内部常流とでもいうべきもので

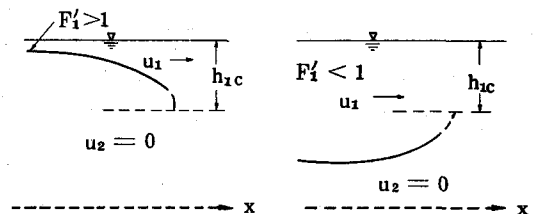


Fig.2.2 内部境界面 $u_2 = 0$ の場合

ある。

c) $u_2 > 0, u_1 < 0$ の場合

二成層流は流速の小さい場合にしか存在しない。4章でのべたように流速が大きくなると内部境界面が乱れのために消失する。そこで普通式(2・19)において分母は正と考えてよい。

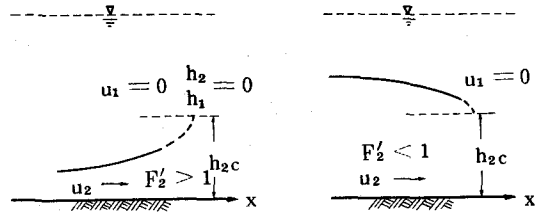


Fig. 2.3 内部境界面 $u_1 = 0$ の場合

式(2・19)より、

$$\frac{dh_2}{dx} = \frac{-\frac{fb'}{2\epsilon g} \cdot \frac{u_2^2}{h_2} - \frac{fi'}{2\epsilon g} \cdot \frac{(u_1 + u_2)^2 \cdot (h_1 + h_2)}{h_1 h_2}}{1 - (F_1')^2 - (F_2')^2} \quad (2 \cdot 22)$$

分子第二項の符号が負になるのは $u_2 > 0, u_1 < 0$ であるからである。

つぎに $\eta_2 = h_2/h, m = q_2/q_1$ とおくと、式(2・22)は、

$$\frac{d\eta_2}{dx} = \frac{fb'}{2h} \cdot \frac{(1 - \eta_2)^3 + \frac{fi'}{fb'} (m\eta_2 + 1 - \eta_2)^2}{(1 - \eta_2)^3 + m^2 \eta_2^3 - \frac{1}{(\bar{F}_2')^2} \cdot \eta_2^3 (1 - \eta_2)^3} \quad (2 \cdot 23)$$

ここに $(\bar{F}_2')^2 = q_2^2/\epsilon g h^3$ とおいている。また場合によると、 $n = q_2/q_1$ を用いた方が便利な場合もあり、このとき(2・23)は次式となる。

$$\frac{d\eta_2}{dx} = \frac{fb'}{2h} \cdot \frac{\frac{fi'}{fb'} \{ \eta_2 + n(1 - \eta_2) \}^2}{n^2(1 - \eta_2)^3 + \eta_2^3 - \frac{1}{(\bar{F}_1')^2} \cdot \eta_2^3 (1 - \eta_2)^3} \quad (2 \cdot 24)$$

ここに $(\bar{F}_1')^2 = q_1^2/\epsilon g h^3$ とおいている。

(1) $q_2 = 0$ で $h_2 \neq 0$ の場合

これが塩水楔の場合であって式(2・24)で $\eta = 0$ とおくと、次式をうる。

$$\frac{d\eta_2}{dx} = \frac{fi'}{2h} \cdot \frac{1}{\eta_2 - \frac{1}{(\bar{F}_1')^2} \cdot \eta_2 (1 - \eta_2)^3} \quad (2 \cdot 25)$$

fi' が一定値である時この式は容易に積分できる。この積分をおこなう前に Fig. 2・4 を説明する。Fig. 2・4 において断面 0 は川の出口に相当し、ここでは内部限界水深、すなわち $(F_1') = 1$ を満足する水深 h_{1c} になる。²⁾ また $(1 - \eta_2)^3/(\bar{F}_1')^2 = 1/(\bar{F}_1')^2$ であるから、 $d\eta_2/dx = \infty$ 。また $\eta_2 = 0$ で $d\eta_2/dx = \infty$ である。

$(F_1') = 1$ を満足する水深 h_{1c} についていえば、 $\bar{F}_1' = q_1/\sqrt{\epsilon g h^3}$ は $h = \text{一定}$ の場合上層流量 q_1 によって変化し、したがって $(F_1') = 1$ の場合には、 $\eta_{2c} = 1 - (\bar{F}_1')^2/3$ であるから $\eta_{2c} = h_{1c}/h$ もかわる。 $\eta_{2c} = 0$ の場合の q_1 は、上式より、 $q_1 = (\epsilon g h^3)^{1/3}$ によって与えられる。³⁾

あるいは均質流との類推を容易にするためにつぎのように書くと便利である。すなわち

$$\eta_2 = \frac{h - h_1}{h}, \quad (\bar{F}_1')^2 = \left(\frac{h_1 c'}{h}\right)^3 \quad (2 \cdot 26)$$

とにおいて式(2・25)を書き直すと,

$$\frac{dh_1}{dx} = \frac{f'_{i/2}}{\{1 - (\frac{h_1}{h'_{1c}})^3\} (1 - \frac{h_1}{h})} \quad (2 \cdot 27)$$

そこで $h_1 = h$ または $h_1 = h'_{1c}$ のとき $dh_1/dx = \infty$ となり, 前者は塩水楔先端に, 後者は河口断面に相当する, また, $h_1 \geq h'_{1c}$ によって $dh_1/dx \leq 0$ であり, $h_1 \rightarrow 0$ で, $dh_1/dx = f'_{i/2} > 0$ で Fig. 2・4 の形をとる。⁴⁾

式(2・27)を積分すると,

$$\frac{f'_{i/2} x}{2h} = \Phi\left(\frac{h_1}{h}\right) - \Phi\left(\frac{h_{10}}{h}\right) \quad (2 \cdot 28)$$

$$\Phi\left(\frac{h_1}{h}\right) = \left[\frac{1}{5} \left(\frac{h_1}{h'_{1c}}\right)^3 - \frac{1}{2} \right] \left(\frac{h_1}{h}\right)^2 + \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{h_1}{h'_{1c}}\right)^3 \right] \left(\frac{h_1}{h}\right) \quad (2 \cdot 29)$$

ここに x は $h_1 = h_{10}$ の地点より下流方向にはかった距離である。あるいは式(2・25)を積分して $x = 0$ で $(\eta_{1c})^3 = (\bar{F}_1')^2$ とおけば次式をうる。⁵⁾

$$x = \frac{2h}{f'_{i/2}} \left[\frac{1}{2} (1 - \eta_2)^2 - (1 - \eta_2^2) + \frac{1}{4(\bar{F}_1')^2} \cdot (1 - \eta_2)^4 - \frac{1}{5(\bar{F}_1')^2} \cdot (1 - \eta_2)^5 + \frac{3}{4} (\bar{F}_1')^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{10} (\bar{F}_1')^{\frac{4}{3}} \right] \quad (2 \cdot 30)$$

塩水楔の長さ L は,

$$L = \frac{2h}{f'_{i/2}} \left[\frac{1}{20(\bar{F}_1')^2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} (\bar{F}_1')^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{10} (\bar{F}_1')^{\frac{4}{3}} \right] \quad (2 \cdot 31)$$

これより比 x/L は $f'_{i/2}$ の値に依存しないがただ $(F_1')^2$ の値にのみ依存することを知る。Fig. 2・5 は F_1' の種々の値に対する計算値であって, Keuleganの実験値と比較されている。⁶⁾

(ii) $q_1 = 0, q_2 \neq 0$ の場合には式(2・23)中の $m = 0$ とおくと次式をうる。

$$\frac{d\eta_2}{dx} = \frac{f'_b}{2h} \cdot \frac{1 - \eta_2 + \frac{f'_{i/2}}{f'_b}}{1 - \eta_2 - \frac{1}{(\bar{F}_2')^2} \eta_2^3 (1 - \eta_2)} \quad (2 \cdot 32)$$

これは $\eta_2^3 = (\bar{F}_2')^2$ のときに $d\eta_2/dx = \infty$ をあたえる。一般に $(\bar{F}_2')^2 = \eta_2^3 (F_2')^2$ なることは定義よりただちにわかるのでこれは下層の内部境界水深たる $(F_2')^2 = 1$ に帰着する。

式(2・32)を $f'_{i/2} = \text{const}$, $f'_b = \text{const}$ として積分すると次式をうる。ただし, 原点は $h_2 = h_{2c}$ の生ずる点にとった。

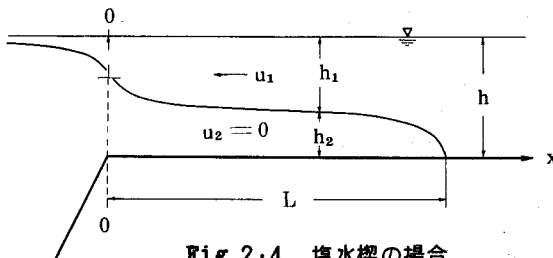


Fig.2・4 塩水楔の場合

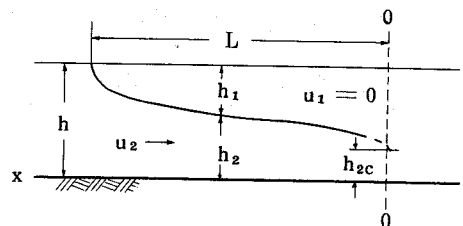


Fig.2・5 内部境界面の形状
 $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$

$$\begin{aligned}
 x = \frac{2h}{fb'} \left[\frac{1}{(\bar{F}_2')^2} \left\{ \frac{\eta_2^4 - (\bar{F}_2')^8}{4} + \frac{fi'}{3fb'} (\eta_2^3 - (\bar{F}_2')^2) + \frac{fi'}{2fb'} \left(1 + \frac{fi'}{fb'}\right) (\eta_2^2 - (\bar{F}_2')^3) \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{fi'}{fb'} \left(1 + \frac{fi'}{fb'}\right)^2 (\eta_2 - (\bar{F}_2')^{\frac{2}{3}}) + \frac{fi'}{fb'} \left(1 + \frac{fi'}{fb'}\right)^3 \log_e \frac{1 + \frac{fi'}{fb'} - \eta_2}{1 + \frac{fi'}{fb'} - (\bar{F}_2')^{\frac{2}{3}}} \right\} \right. \\
 \left. - (\eta_2 - (\bar{F}_2')^{\frac{2}{3}}) - \frac{fi'}{fb'} \log_e \frac{1 + \frac{fi'}{fb'} - \eta_2}{1 + \frac{fi'}{fb'} - (\bar{F}_2')^{\frac{2}{3}}} \right] \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

そして $\eta_2 = 1$ とおけば曲線長として、

$$\begin{aligned}
 L = \frac{2h}{fb'} \left[\frac{1}{(\bar{F}_2')^2} \left\{ \frac{1 - (\bar{F}_2')^8}{4} + \frac{fi'}{3fb'} (1 - (\bar{F}_2')^2) + \frac{fi'}{2fb'} \left(1 + \frac{fi'}{fb'}\right) (1 - (\bar{F}_2')^3) \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{fi'}{fb'} \left(1 + \frac{fi'}{fb'}\right)^2 (1 - (\bar{F}_2')^{\frac{2}{3}}) + \frac{fi'}{fb'} \left(1 + \frac{fi'}{fb'}\right)^3 \log_e \frac{fi'/fb'}{1 + \frac{fi'}{fb'} - (\bar{F}_2')^{\frac{2}{3}}} \right\} \right. \\
 \left. - (1 - (\bar{F}_2')^{\frac{2}{3}}) - \frac{fi'}{fb'} \log_e \frac{fi'/fb'}{1 + \frac{fi'}{fb'} - (\bar{F}_2')^{\frac{2}{3}}} \right] \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

(iii) $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$ のときには (2.23) あるいは (2.24) を用いて直接積分することになるが曲線は Fig. 2.6 に示す内部限界水深 h_{1c} の間に存在し二つの反曲点を有する。そして曲線の長さは m , $(\bar{F}_2')^2$ および fi'/fb' によって種々に変化する。

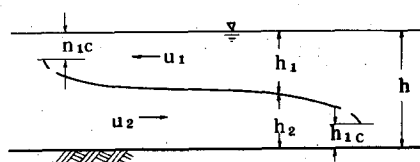


Fig.2.6 内部境界面の形状
 $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$

h_{1c} , h_{2c} の値は式 (2.23) の分母を 0 とする

η_2 によって求める。すなわち、

$$(1 - \eta_2)^3 + m^2 \eta_2^3 - \frac{1}{(\bar{F}_2')^2} \cdot \eta_2^3 (1 - \eta_2)^3 = 0 \quad (2.35)$$

あるいは, $(1 - \eta_2)^3 = x$, $\eta_2^3 = y$ とおくと (2.35) は、

$$(x - m^2 (\bar{F}_2')^2)(y - (\bar{F}_2')^2) = m^2 (\bar{F}_2')^4 \quad (2.36)$$

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1 \quad (2.37)$$

ただし

そこで Fig. 2・7に示すように2曲線の交点が解となる。図には $(F_1'^2)^2 = 0.05$ $m = 1$ の場合を示した。

式(2・37)は一定であるから交点たる解は(2・36)の $(F_2')^2$ および m^2 によって変化する。(2・36)

$(F_2')^2$ および $x = m^2 (F_2')^2$ の直線を漸近線とする直角双曲線であり、 $m = 1$ の場合には $x y = 1$ なる直線に対称な2根をうる。 $m < 1$ の場合漸近線 $x = m^2$ $(F_2')^2$ は左方へ移動するから交点たる2根はいつでも Fig. 2・7 の場合より

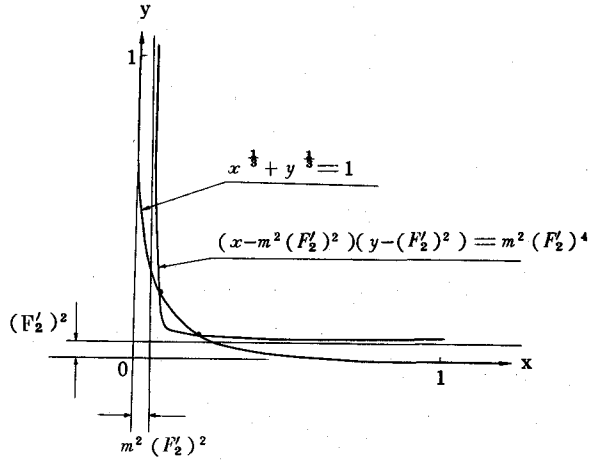


Fig. 2・7

上にうつる。また、 $m > 1$ の場合には交点は次第に近づく。両曲線が1点において接する場合に解が1つになり、 η_{2c} と $\eta_{.c}$ とはとりうる最大値に対する。点 (x_0, y_0) において(2・36)と(2・37)とが相接するという条件は、

$$[y_0 - (\bar{F}_2')^2] [x_0 - m^2 (\bar{F}_2')^2] = (x_0 / y_0)^{-\frac{2}{3}} \quad (2 \cdot 38)$$

これと、式(2・36)(2・37)の (x, y) の代りに (x_0, y_0) とおいた式の3式より $(\bar{F}_2')^2$ および x_0 を消去すると容易に、

$$y_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{1+m^2} \quad \text{又は} \quad \eta_{2cm} = \frac{1}{1+m^2} \quad (2 \cdot 39)$$

これより、

$$(\bar{F}_2')^2_{max} = \frac{1}{(1+m^2)^4} = (\eta_{2cm})^4 \quad (2 \cdot 40)$$

d) いままでは2層のうち1層が静止しているとき、とか流向が逆の場合をのべたが、流向が同じの場合には、(2・19)にたち戻らねばならない。また Fig. 2・8 のように同じ流向で底勾配がある場合にはさらに複雑になる。上層が $u_1 = 0$ の場合には(2・1) および(2・11)より

$$\frac{dh_1}{dx} = i - \frac{dh_2}{dx} + \frac{f_i'}{2g} \cdot \frac{u_2^2}{h_1} \quad (2 \cdot 41)$$

$$\frac{dh_2}{dx} = \frac{\epsilon_i - \frac{f_b' + f_i'}{2g} \cdot \frac{u_2^2}{h_2} - \frac{f_i'}{2g} \cdot \frac{u_2^2}{h_1}}{\epsilon - \frac{u_2^2}{g h_2}} \quad (2 \cdot 42)$$

上式で $\frac{f_i'}{2g} \cdot \frac{u_2^2}{h_1}$ が無視できる大きさであればさきと同様に式(2・41)は自由表面が水平であることを示す。また第2式よりは、

$$\frac{dh_2}{dx} = \frac{i - \frac{f_b' + f_i'}{2g} \cdot \frac{u_2^2}{h_2}}{1 - \frac{u_2^2}{\epsilon g h_2}} \quad (2 \cdot 43)$$

式(2・43)は均質流れにおいて重力を εg とし、抵抗係数を $f_b' + f_i'$ としたものに一致する。
これより底に平行な境界面(Interface)をもつ場合には、

$$i = \frac{f_b' + f_i'}{2qg} \frac{u_2^2}{h_2} \quad (2 \cdot 44)$$

であって、等流の流れに相当する。

以上の解析は、Poggi がおこなった。⁵⁾

Farmer と Morgan, Harleman などの解析も式(2・25)と同功異曲である。^{6) 7)}

問題4：河口において塩水楔の進入する長さを、次の諸数値を用いて計算せよ。

河巾 $B = 135 \text{ m}$ 、水深 $h = 3.20 \text{ m}$ 、水密

度 $\rho_0 = 1.000$

塩水密度 $\rho_s = 1.030$ 、河川流量 $Q = 180 \text{ m}^3/\text{sec}$ また、 $f_i' = 3 \times 10^{-4}$ とし、海水流速はないものとする。

またもし上流で取水したため $Q = 150 \text{ m}^3/\text{sec}$ になればどうなるか。

問題5：河口 estuary において河川流量がない場合に進入する海水の塩水楔長さをもとめよ。ただし、河巾 $B = 150 \text{ m}$ 、水深 $h = 3.50 \text{ m}$ 、淡水密度 $\rho_0 = 1.000$ 、塩水密度 $\rho_s = 1.015$ とし、 $f_i' = 2.6 \times 10^{-4}$ 、 $f_b' = 0.057$ また海水の侵入速さを $u_2 = 0.5 \text{ m}/\text{sec}$ とする。

問題6： $F_2' = 0.01, 0.1$ および 1.0 の場合の $h_1 c/h$ および $h_2 c/h$ の値を、 $m = q_1/q_2 = 0, 1, 10$ の場合についてもとめよ、またそのとりうる最大値を、各々の m の値に対してもとめよ。

2.3 内部ジャンプ (Internal jump)

段波やサージに類似した現象として内部ジャンプ (Internal jump) の存在が Schijf と Schönfeld によって指摘され、ジャンプを通過する際相対的に加速される場合にはエネルギー方程式が満足されてジャンプが存在し、相対的に減速される場合にはエネルギー損失を体うるので定常的な内部ジャンプは存在し得ないとのべられている。⁸⁾ 浜田は詳細な吟味をこれに対し加えているが、エネルギー損失の存在するジャンプをもって安定であるとのべている。⁹⁾ エネルギー損失を伴うジャンプは当然、ジャンプ内で激しい攪乱が存在するはずであるが、均質流れの場合とことなつてこの攪乱が大規模な渦動拡散の原因となることは十分予想され、事実 Barr の実験においてもそのことが報告されている。¹⁰⁾ そこでここでは、エネルギーの拡得も損失もないジャンプが存在しうるかという立場から、別箇にこの問題を扱ってみる。

いま Fig. 2・9 にしめすようにジャンプの前後の量を'のあるなしで区別し、上下2層の量は添字1,2で区別する。連続方程式は上層に対し、

$$\rho_1 h_1 u_1 = \rho_1 h_1' u_1' \quad (2 \cdot 45)$$

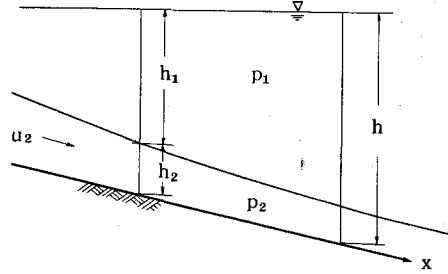


Fig.2-8 底勾配のある場合

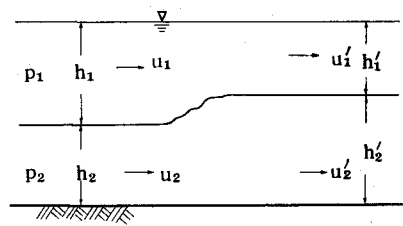


Fig.2-9 内部ジャンプ

下層流に対して

$$\rho_2 h_2 u_2 = \rho_2 h_2' u_2' \quad (2 \cdot 46)$$

運動量方程式は

$$\begin{aligned} & \rho_1 h_1' u_1'^2 + \rho_2 h_2' u_2'^2 - \rho_1 h_1 u_1^2 - \rho_2 h_2 u_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho_1 g h^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 (\rho_2 - \rho_1) - \frac{1}{2} \rho_1 g h^2 - \frac{1}{2} g h_2'^2 (\rho_2 - \rho_1) \\ &= \frac{1}{2} g (\rho_2 - \rho_1) (h_2^2 - h_2'^2) \end{aligned} \quad (2 \cdot 47)$$

ここで $u_1' = \frac{h_1}{h_1'} u_1$, $u_2' = \frac{h_2}{h_2'} u_2$ とおくと,

$$\rho_1 \left(\frac{h_1^2}{h_1'} - h_1 \right) u_1^2 + \rho_2 \left(\frac{h_2^2}{h_2'} - h_2 \right) u_2^2 = \frac{g}{2} (\rho_2 - \rho_1) (h_2^2 - h_2'^2)$$

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = q \text{ とおくと, } \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \varepsilon$$

$$\therefore \left(\frac{h_1}{h_1'} \right) (h_1 - h_1') \cdot h_1 \frac{u_1^2}{\varepsilon g h_1} + (1 + \varepsilon) \left(\frac{h_2}{h_2'} \right) (h_2 - h_2') \cdot h_2 \frac{u_2^2}{\varepsilon q h_2} = \frac{1}{2} (h_2^2 - h_2'^2)$$

また $h_1 - h_1' = h_2' - h_2$ (水深 $h = \text{一定}$) であるから, これでわると,

$$\left(\frac{h_1}{h_1'} \right) \cdot h_1 (F_1')^2 - (1 + \varepsilon) \left(\frac{h_2}{h_2'} \right) h_2 \cdot (F_2')^2 = -\frac{1}{2} (h_2 + h_2')$$

$$\therefore \frac{h_1^2}{h_1'} (F_1')^2 - (1 + \varepsilon) \left(\frac{h_2^2}{h_2'} \right) \cdot (F_2')^2 + \frac{1}{2} (h_2 + h_2') = 0 \quad (2 \cdot 48)$$

これがジャンプにおいて満足されるべき関係式である。そして Fig. 2・9 のように $h_2' > h_2$ としておく。これは, u_2 の方向を負に考えれば, 一般性を失わない。そこでまず $u_1 \neq 0$, $u_2 = 0$ の場合を考えるに, 式(2・48)より左辺各項は正項のみ残るから, 左辺 > 0 であってこれを満足せしめる関係はない。すなわち, 下層流が静止しているときにはジャンプは存在しないのである。

つぎに $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$ のときには(2・48)より,

$$\left(\frac{h_2'}{h_2} \right)^2 + \left(\frac{h_2'}{h_2} \right) - 2(1 + \varepsilon) (F_2')^2 = 0$$

$$\therefore \frac{h_2'}{h_2} = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8(1 + \varepsilon) (F_2')^2}) \quad (2 \cdot 49)$$

すなわち跳水と類似の関係式をうる。

つぎに内部ジャンプ前後のエネルギーの関係をしらべてみる。まづ Fig. 2・9 において上層流中の任意点での位置ヘッドと圧力ヘッドとの和は, $\rho_1 g y + \rho_1 g (h_1 + h_2 - y) = \rho_1 g (h_1 + h_2)$: (y : 底よりの高さ)であって, y に無関係に一定である。下層流ではこの値は, $\rho_2 g y + \rho_1 g h_1 +$

$\rho_2 g (h_2 - y) = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2$ であって、これも y に無関係に一定である。したがってジャンプの前の断面を通過する流量のもつエネルギーは、全断面について、

$$E_1 = \left[\rho_1 g (h_1 + h_2) + \frac{\rho_1}{2} u_1^2 \right] u_1 h_1 + \left[\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \frac{\rho_2}{2} u_2^2 \right] u_2 h_2$$

となる。したがって損失エネルギーは、次式で示される。

$$\begin{aligned} \Delta E = & \left[\rho_1 g (h_1 + h_2) + \frac{\rho_1}{2} u_1^2 \right] u_1 h_1 + \left[\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \frac{\rho_2}{2} u_2^2 \right] u_2 h_2 \\ & - \left[\rho_1 g (h_1' + h_2') + \frac{\rho_1}{2} u_1'^2 \right] u_1' h_1' - \left[\rho_1 g h_1' + \rho_2 g h_2' + \frac{\rho_2}{2} u_2'^2 \right] u_2' h_2' \end{aligned}$$

ところが $h_1 + h_2 = h_1' + h_2'$, $u_1 h_1 = u_1' h_1'$ であるから、上式はつぎのように書直せる。

$$\Delta E = \frac{\rho_1}{2} (u_1^2 - u_1'^2) Q_1 + \frac{\rho_2}{2} (u_2^2 - u_2'^2) Q_2 + (h_1 - h_1') (\rho_1 - \rho_2) g Q_2 \quad (2 \cdot 50)$$

ここに $Q_1 = u_1 h_1 = u_1' h_1'$, $Q_2 = u_2 h_2 = u_2' h_2'$ である。

また $u_1' = u_1 h_1 / h_1'$, $u_2' = u_2 h_2 / h_2'$, $\varepsilon = \Delta \rho / \rho_1$ の関係を用いると上の式は、

$$\Delta E = \frac{\rho_1}{2} u_1^2 Q_1 \left(1 - \left(\frac{h_1}{h_1'} \right)^2 \right) + \frac{\rho_2}{2} u_2^2 Q_2 \left(1 - \left(\frac{h_2}{h_2'} \right)^2 \right) - (h_2' - h_2) \varepsilon \rho_1 g Q_2$$

また $p = h_1' / h_1$, $q = h_2' / h_2$ を用いてかき直すと、

$$\Delta E = \rho_1 \varepsilon g h_2 (q - 1) \left[\left\{ \left(\frac{1 + \varepsilon}{2} \right) (F_2')^2 \left(\frac{1 + q}{q^2} \right) - 1 \right\} Q_2 - \frac{1}{2} (F_1')^2 \frac{1 + p}{p^2} Q_1 \right] \quad (2 \cdot 51)$$

そこで (2・51) を吟味する。

(i) まず $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$ のときには、 $Q_1 = 0$, $F_1 = 0$ であるから、

$$\Delta E = \rho_1 q g h_2 (q - 1) \left\{ \left(\frac{1 + \varepsilon}{2} \right) (F_2')^2 \left(\frac{1 + q}{q^2} \right) - 1 \right\} Q_2$$

式 (2・49) の上の式より、 $q^2 + q - 2(1 + \varepsilon)(F_2')^2 = 0$ であるから $(1 + \varepsilon)(F_2')^2$ を求めて上式を書直すと、

$$\Delta E = \rho_1 \varepsilon g h_2 \frac{(q - 1)^3}{4q} \cdot Q_2 + \rho_2 \varepsilon g \frac{(h_2' - h_2)^3}{4h_2 h_2'} \cdot Q_2 \quad (2 \cdot 52)$$

すなわち $q g$ を用いた単位重さあたり、 $(h_2' - h_2)^3 / 4 h_2 h_2'$ なる損失エネルギーがあることとなる。これは均質流れの跳水での損失エネルギーと同じ表現式である。

(ii) つぎに $u_1 \neq 0$, $u_2 = 0$ のときには $Q_2 = 0$, $F_2' = 0$ であるから、(2・51) より、

$$\Delta E = -\rho_1 \varepsilon g h_2 (q - 1) \left[\frac{1}{2} (F_1')^2 \cdot \frac{1 + p}{p^2} \right] Q_1 \quad (2 \cdot 53)$$

式 (2・48) をあわせて考えると、この場合は成立しない。

(iii) つぎに $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ のときには (2・48) より、

$$\frac{h_1^2}{h_1'} (F_1')^2 = (1 + \varepsilon) \frac{h_2^2}{h_2'} (F_2')^2 - \frac{1}{2} (h_2 + h_2') \quad (2 \cdot 54)$$

よって左辺 > 0 のときには、 $q = h_2'/h_2 > 1$ であるから

$$(1+\varepsilon) \cdot (F_2')^2 > \frac{1}{2} \frac{h_2'}{h_2} \left(1 + \frac{h_2'}{h_2}\right) = \frac{1}{2} q(1+q) > 1 \quad (2.55)$$

$$\therefore \left(\frac{1+q}{2}\right) (F_2')^2 \left(\frac{1+q}{q^2}\right) - 1 > \frac{(1+q)^2}{4q} - 1 = \frac{(1-q)^2}{4q} > 0 \quad (2.56)$$

そこで (2.51) と対照してつぎのようになる。

まず Fig. 2.10 のように $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$ のときには、 $\Delta E > 0$ で損失エネルギーがある。Fig. 2.11 のように $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$ のときには $\Delta E < 0$ となり、損失エネルギーが負すなわちエネルギーの増加となるのでこのことはあり得ない。Fig. 2.12 のように Q_1 , Q_2 がともに正か、Fig. 2.13 のように Q_1 , Q_2 がともに負の場合には式 (2.51) より

$$\left\{ \frac{1+\varepsilon}{2} (F_2')^2 \frac{1+q}{q^2} - 1 \right\} Q_2 \geq \left\{ \frac{1}{2} (F_1')^2 \frac{(1+p)}{p^2} \right\} Q_1 \quad (2.57)$$

であればエネルギー損失があるか、または不変であり、 $Q_1 < 0$, $Q_2 < 0$ のときには同様にして

$$\left\{ \frac{1+\varepsilon}{2} (F_2')^2 \frac{1+q}{q^2} - 1 \right\} Q_2 \leq \left\{ \frac{1}{2} (F_1')^2 \frac{(1+p)}{p^2} \right\} Q_1 \quad (2.58)$$

のときにエネルギー損失があるか、または不変である。

問題 7: $\rho_1 = 1.000$, $\rho_2 = 1.010$ の 2 層流で $h = 1 \text{ m}$ とする。 $h_2/h_1 = 0.5$ のとき q と F_2' との関係を $F_1' = 0.1$ の場合にもとめよ。

3. 選択取水

3.1 選択取水の問題

密度差が鉛直方向に存在している場合に希望する密度の流体を選択的に取水する問題は、農業用水としてのダム取水塔での温水取水、火力発電所冷却器用冷水取水、工業用水のための淡水取水などにおいて要求せられる。貯水池で濁水取水ができれば貯水池の寿命がのばせるし、熱をエネルギー源として用いたり、湖を大きな熱交換器としてあつかう可能性もでてくる。河口湖の淡水化のための水門の機能もこれに関連して重要な問題である。

選択取水には密度の軽い上層流体のみを取水する上層取水、密度の重い下層の流体のみを取水する下層取水およびさらに多成層域において所望の中間層の流体を取水する中間取水とにわけられる。

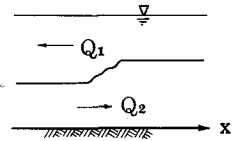


Fig. 2.10
内部ジャンプ(a)

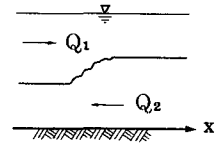


Fig. 2.11
内部ジャンプ(b)

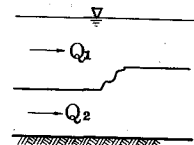


Fig. 2.12
内部ジャンプ(c)

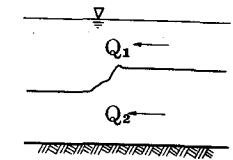


Fig. 2.13
内部ジャンプ(D)

3.2 上層取水

3.2.1 横方向取水

Fig. 3・1 はダム上流面のように垂直な壁体があって温水取水をする場合に相当し、取水しない場合当初水平であった境界面が、取水速度をましてゆくにつれて次第に上方へ曲がってきて、丁度この境界面が取水口に達した場合をしめす。このときの取水限界速度を V_c とすると、この速度に達したとき下層からの取水がはじまる。

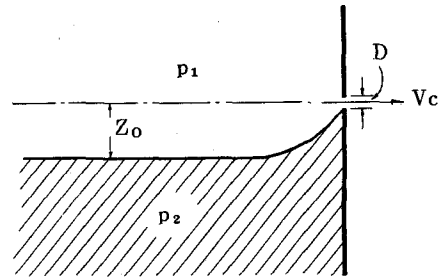


Fig. 3・1

横方向取水
スロットまたはオリフィス

Craya は上下二層の深さを無限大とし、取水口を水平な2次元流入点(スロット)および3次元流入点(オリフィス)と仮定して解析をおこなった。¹¹⁾ 内部境界面より取水口までの高さを Z_0 とすると、スロットまたはオリフィスの大きさ D は、 Z_0 に比して小さいとしている。 V_c の大きさは、次式であたえられた。

$$\text{スロットの場合: } \sqrt{\frac{V_c}{\epsilon g Z_0}} = 1.52 \left(\frac{Z_0}{D} \right) \quad (3.1)$$

$$\text{オリフィスの場合: } \sqrt{\frac{V_c}{\epsilon g Z_0}} = 3.25 \left(\frac{Z_0}{D} \right)^2 \quad (3.2)$$

この式は Gariel の実験によってたしかめられている。¹²⁾

問題8: 表面温度 20°C 、下層温度 10°C a ときに $D = 60\text{ cm}$ なる取水管によって $1\text{ m}^3/\text{sec}$ の温水を取水したい。境界面よりいくらの高さに設けたらよいか。ただしオリフィスとして計算せよ。

3.2.2 上方向取水

内部境界面に対し垂直上方に設けた鉛直な取水管を用いて上層水を取水するとき下層水が吸上げられる限界流速 V_c については、管径 D 、取水管下端の内部境界面よりの高さ Z_0 としたとき、つぎの式がある。¹³⁾

$$\sqrt{\frac{V_c}{\epsilon g Z_0}} = 5.70 \left(\frac{Z_0}{D} \right)^{3/2} \quad (3.3)$$

ただしこの式は、空気の場合 $D = 0.045 \sim 0.256\text{ ft}$ 、水の場合 $D = 0.045 \sim 0.125\text{ ft}$ で実験され、その結果を Harleman が整理し直したものである。

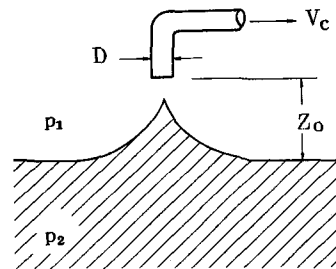


Fig. 3・2 上方向取水

3.3 下層取水

3.3.1 下方向取水

Fig. 3・3 は垂直下方に設けた取水管より下層の水を取水する場合である。いま Fig. 3・3 にしめすように、点 S より Q を取水するものとし、点 O なる遠隔点と点 a なる内部境界面の中心低下位置の点との間にベルヌイの定理を適用すると、次式をうる。

$$p_a + \rho_2 \frac{V_a^2}{2} + \rho_2 g y_a = p_o + \rho_2 g y_o \quad (3.4)$$

ただし ρ_2 は下層密度, y_o, y_a は点 o, a の床面よりの高さ, p_o, p_a は点 o, a の圧力の強さ, V_a は流速である。上層流体について同じ境界面で

$$p_a + \rho_1 g y_a = p_o + \rho_1 g y_o \quad (3.5)$$

(3.4) より (3.5) を引いて, $\beta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$ を用いると,

$$\frac{V_a^2}{2\beta g} = y_o - y_a \quad (3.6)$$

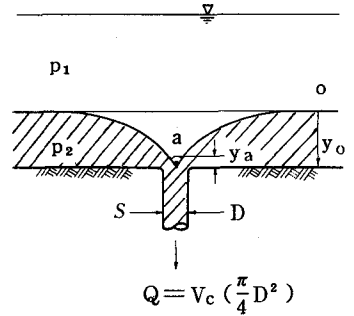


Fig. 3.3 下方向取水

流出点 S のごく近傍における流速はすべて半径方向にむかうので, 平均流速は, $\bar{V} = Q / 2\pi r^2$ 。(ただし, Q は流出量, r は半径) さらに $r = y_a$ において $\bar{V}_a = Q / 2\pi y_a^2$ とおく。さらに V_a と $\bar{V}_a$ との間に $V_a / \bar{V}_a = K$ なる関係があるとするとき (3.6) は, 次式となる。

$$Q^2 = 8\pi^2 K^2 \beta g (y_o y_a^4 - y_a^5) \quad (3.7)$$

すなわち流量 Q は y_a の大きさによって変化する。丁度上層の流体が混入するようになった状態においては, y_a のわずかな変化で Q がかわると思われる。そのために式 (3.7) を y_a で微分して 0 とおくと, $(y_a)_c = \frac{4}{5} y_o$ これを式 (3.7) に入れると限界流量 Q_c は,

$$\frac{Q_c^2}{\beta g y_o^5} = 8(0.08)\pi^2 K^2 = 6.32 K^2 \quad (3.8)$$

限界流速 V_c は直径 D とおくと, $V_c = Q_c / (\frac{\pi}{4} D^2) = (6.32 K^2 \beta g y_o^5)^{1/2} / (\pi/4) D^2$ となる。あるいは,

$$\sqrt{\frac{V_c}{\beta g y_o}} = \frac{4}{\pi} \sqrt{6.32} \cdot K \left(\frac{y_o}{D}\right)^2 = 3.20 K \left(\frac{y_o}{D}\right)^2 \quad (3.9)$$

Harleman らの実験では $K = 0.64$ となり従って次式をうる。¹⁴⁾

$$\sqrt{\frac{V_c}{\beta g y_o}} = 2.05 \left(\frac{y_o}{D}\right)^2 \quad (3.10)$$

問題 9. $\rho_1 = 1,000$, $\rho_2 = 1.030$, $y_o = 2m$ のとき, 可能な下方向取水量 Q_c をもとめよ。また, $D = 1m$ および $2m$ の場合の限界流速 V_c をもとめよ。

3.3.2 横方向取水

a. Huber の解析

Fig. 3.4 のように二成層が帯状に無限に存在するとき, 下方のかどのスリットから流出する取水法の場合についての Huber の解析をつぎにのべよう。¹⁵⁾

はじめ二層の内部境界面は水平であるが, 取水量がふえてくると次第に出口に近い部分が下方にさがりはじめ, ある下

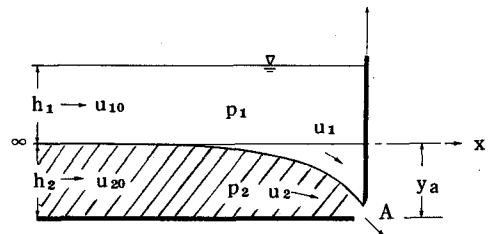


Fig. 3.4

Fig. 3.4 Huber の解析

層の限界流速 (u_{20})_c (u_{20} は下層の無限遠方における流速) に達すると上層から流出がはじまってくる。

いま境界面において点 A と ∞ との間で Bernoulli の定理を適用すると次式をうる。

$$p_{10} + \frac{\rho_1}{2} u_{10}^2 + \rho_1 g y_0 = p_1 + \frac{\rho_1}{2} u_1^2 + \rho_1 g y_a \quad (3 \cdot 11)$$

$$p_{20} + \frac{\rho_2}{2} u_{20}^2 + \rho_2 g y_0 = p_2 + \frac{\rho_2}{2} u_2^2 + \rho_2 g y_a \quad (3 \cdot 12)$$

ここに添字 0 は無限遠点に対応するものであり、添字 0 のついていない右辺の量は点 A におけるもので、 p は圧力、 u は速度ベクトルの大きさ、 y は水平境界面より垂直上方にはかった距離である。

(3・11), (3・12) を辺々さし引いて $p_{10} = p_{20}$, $p_1 = p_2$ また $y_0 = 0$ とおくと次式をうる。

$$\frac{\rho_1}{2} (u_1^2 - u_{10}^2) - \frac{\rho_2}{2} (u_2^2 - u_{20}^2) = y_a (\rho_2 - \rho_1) g \quad (3 \cdot 13)$$

そこでポテンシャル解析をおこなうためにまず内部境界面の形状を仮定し、上下二層においてこれを 2 コのポテンシャル場と考え、流関数 ψ を仮定して弛緩法 (Relaxation method) により内部の ψ 値を決定する。¹⁶⁾ 最後にえられた ψ より速度を求めて式 (3・13) の成否を検討し、もし式 (3・13) を満足しなければ内部境界面の形状を修正する。そしてこの過程を繰返すのである。

Fig. 3・5 は $\rho_1 = 1.938$ および $\rho_2 = 1.996$ で $h_1 = h_2 = 0.5$ の場合について Huber の設けた計算のメッシュであって、内部境界面の仮定にあたってはその 1 次および 2 次差分の値をプロットした場合にもなめらかな曲線を描くようにした。Fig. 3・6 は Huber のえた内部境界面の形状で、3 コの (F_1') および (F_2') の組合せ、および均質流れの場合を示しているが、このような内部境界面に対して流出する二層成分の流量の割合

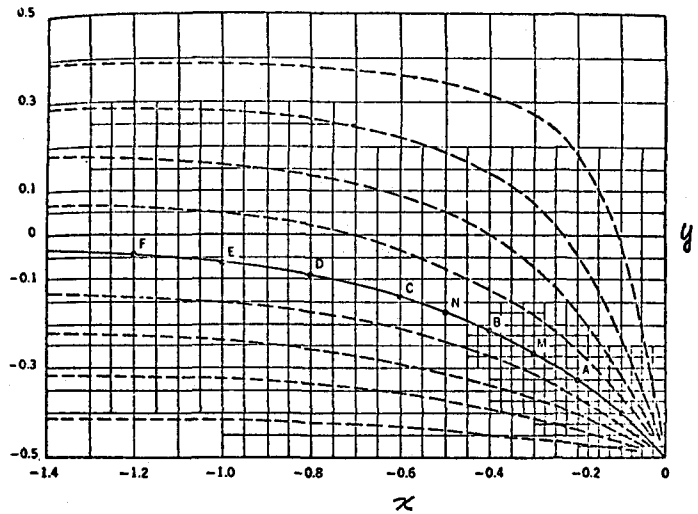


Fig. 3・5 弛緩法格子

が、(F_1') と (F_2') によって求められる。Fig. 3・7 は (F_1')² と (F_2')² との関係を図示したものであり、Fig. 3・8 は (F_1')² / (F_2')² と (F_1') + (F_2') との関係をしめす。これより (F_1') = 0 すなわち上層よりの流出のはじまる場合の (F_2') の値は 1.66 となって、したがって次式が与えられる。

$$\frac{(u_{20})}{\sqrt{\beta g h_2}} = 1.66 \quad (3 \cdot 14)$$

Fig. 3・9は $(F_2')^2$ と、内部境界面の水平床となす角度 Q_2 との関係をしめしたものであって上層からの流出が始まるころでは Q_2 は 90° である。Fig. 3・8のように $(F_1') + (F_2')$ が増加して流出がふえてゆくにつれて、次第に $(F_1')^2 / (F_2')^2$ の値がふえてゆき、上層流体の流出がふえていって、下層流体の流出は減少する。このことはFig. 3・7に容易に認められる。しかしある限界点をこすと、 $(F_1')^2$ も $(F_2')^2$ も相伴って増加してゆく。 Q_2 は当初 90° であったのが、次第に減少してゆき均質流れの 45° に達することになる。

この問題で分るように均質のポテンシャル流れの流線網をそのまま適用することはできず、一般的につぎの無次元パラメーターによって影響をうける。

$$f\left(\frac{u_{10}}{u_{20}}, (F_{10}'), (F_{20}'), \frac{x}{h_1}, \frac{y}{h_1}\right) = 0 \quad (3.15)$$

b. 水門取水

水門よりの下層取水は実用上意味があり、多くの研究がおこなわれている。ここでは、Harleman, Gooch と Ippen のおこなった研究を説明する。¹⁷⁾

いまFig. 3・10のように h_r を最初の静止した2層内部境界面の底よりの高さとし、そして下層水が何かの誘起力によって流れはじめると、Fig. 3・11に示すように流線ができる。水門のすぐ上流のところに 状に停滞した領域が下層水域内にできて、この中ではゆるやかな循環が形成される。二層の境界面はやはりほぼ水平を保っている。下層の流出速度が増大するに伴って流出流線

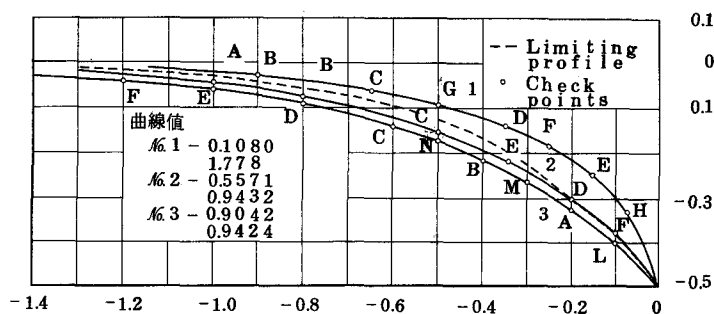


Fig.3・6 内部境界面 (Huber)

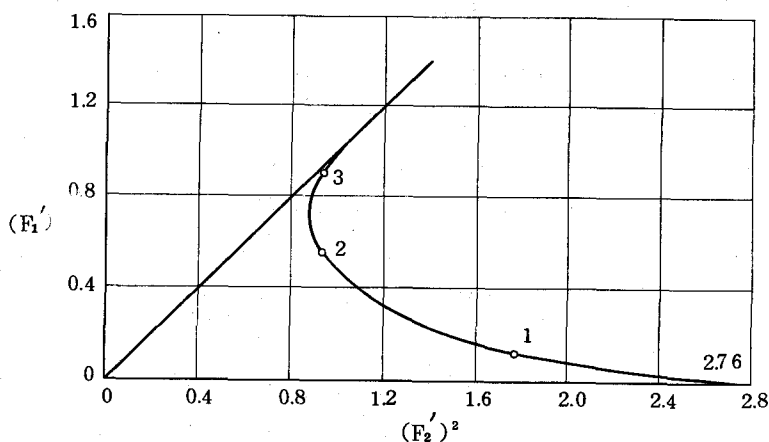


Fig.3・7 $(F_1')^2$ と $(F_2')^2$ の関係

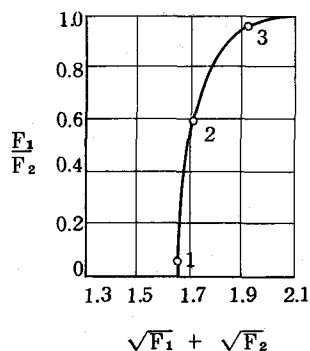


Fig.3・8 $(F_1')^2/(F_2')^2$ と $(F_1') + (F_2')$ との関係

の曲率が甚だしくなり、停滞している 状の循環の領域は塩水の吸出しにともなうて小さくなっていき、最後に極限状態として境界面と流出流線とが一致するに至り、楔の領域は消失する。

Fig. 3・10を参照し、下層流体について左方の貯水池内と水門流出口（リップ先端）とでBernoulli の定理を適用すると次式をうる。

$$\rho_1 g(y-hr) + \rho_2 g h r = \rho_1 g(\gamma-a) + \rho_2 g(a-\Delta h m) + \rho_2 \frac{\alpha}{2g} (u_a)^2 i + \rho_2 g h f \quad (3 \cdot 16)$$

ここに ρ_1 、 ρ_2 は上下層の密度、 y は貯水池内水面高、 $h r$ は貯水池内境界面高、 a は水門開き高、 u_a は流出平均速度、 $\Delta h m$ は流出口における流線の曲率による圧力減少値、 $h f$ は2点間損失ヘッド。また添字 i は限界状況であることをしめす。

(3・16) を $\rho_2 g$ でわり整理すると次式をうる。

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} h r = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} a - \Delta h m + \alpha \frac{(u_a)^2}{2g} i + h f \quad (3 \cdot 17)$$

あるいは、

$$\frac{h r}{a} = 1 - \frac{\Delta h m}{\beta a} + \frac{\alpha (u_a)^2 i}{2 \beta g a} + \frac{h f}{\beta a} \quad (3 \cdot 18)$$

ただし、 $\beta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$ である。あるいは、

$$\frac{h r}{a} = 1 - \frac{\Delta h m}{\beta a} + \frac{\alpha}{2} (F i')^2 + \frac{h f}{\beta a} \quad (3 \cdot 19)$$

ここに $(F i') = \frac{(u_a) i}{\sqrt{\beta g a}}$ である。Harleman 等は $\Delta h m$ として、

Khafagi-Hanmad らが与えた表現式

$$\Delta h m = \frac{u_a^2}{2g} (f_1(R) + f_2(\theta)) \quad (3 \cdot 20)$$

を用いた。ここに

$$f_1(R) = 1 - \left(\frac{3}{1+2e} \right)^2, \quad K = \frac{a}{2.12 R} \quad (3 \cdot 21)$$

$$f_2(\theta) = 1 - \frac{1}{\beta^2}, \quad \beta = \frac{1}{\theta} \left(\ln \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (3 \cdot 22)$$

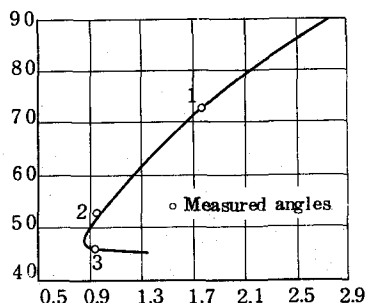


Fig. 3.9

θ_2 と $(F_2')^2$ との関係

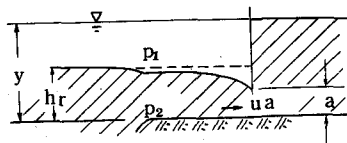


Fig. 3.10

Q はリップ先端での内部境界面の水平となす角度, また R は同じ点での曲率半径である。式 (3・20) を式 (3・19) に代入し, かつ $hf = 0$ とおくと次式をうる。

$$\frac{hr}{a} = \eta + \frac{\alpha}{2}(Fi')^2, \quad \eta = 1 - \frac{(Fi')^2}{2} \cdot (f_1(R) + f_2(\theta)) \quad (3 \cdot 23)$$

Fig. 3・12 に Harleman

らが実験的に求めた η の曲線をしめす。Fig. 3・13 は hr/a と (Fi') との関係 (3・23) にもとづいて種々の α の値に対して求めたものである。

実験の結果では水門が貯水池に近く hr が無視できる場合には実験値はよく Fig. 3・11 の曲線にのり, また (Fi') の小さいときには $\alpha = 2$, 大きいときには $\alpha = 1 \cdot 10$ となった。さらに損失水頭が無視できない場合にはこれらの曲線群は上の方へシフトする傾向があった。

問題 10: $\beta = 0.0005$ なる温度 2 成層において下層の冷水取水を行なう設備がある。水門開き $a = 3.5 \text{ m}$, 速度分布係数 $\alpha = 1.1$ 。また $hr = 6 \text{ m}$ であれば, 単位巾当り何 m^3/sec まで温水を取水しないでとれるか。

4. 混合型密度流

4.1 混合機構

密度の異なる 2 流体の混合機構には分子運動と乱れおよび流塊混合の 3 種類がある。このうち塩水の分子拡散は $10^{-8} \text{ m}^2/\text{sec}$ の程度できわめて小さい。乱れでは水粒子が小規模な塊となり拡散的にまじりあって最後に分子拡散としてまじる。流塊混合には攪拌作用などでまじる規模のものから, 大規模なものになると河水の海中への流出とか潮汐による混合とか潮流などがあり, その細部において乱れ混合がおこり最後に分子拡散となるものである。

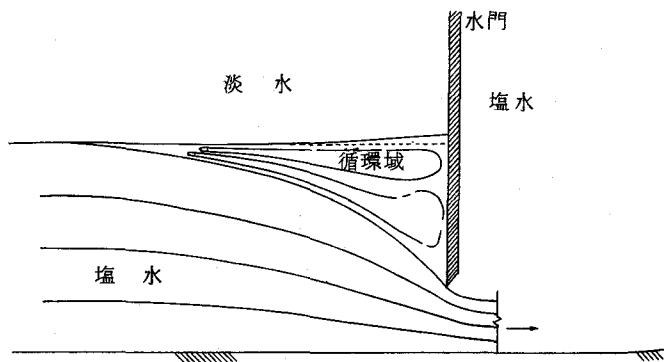


Fig.3・11 楔状の停滞域

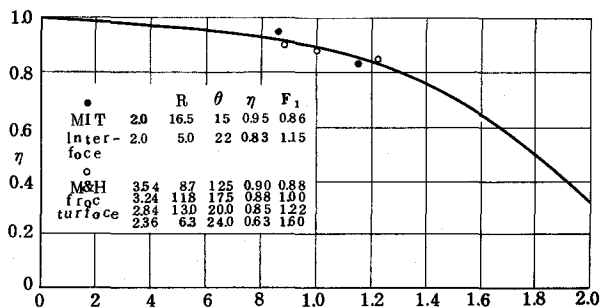


Fig.3・12 η と (Fi') との関係

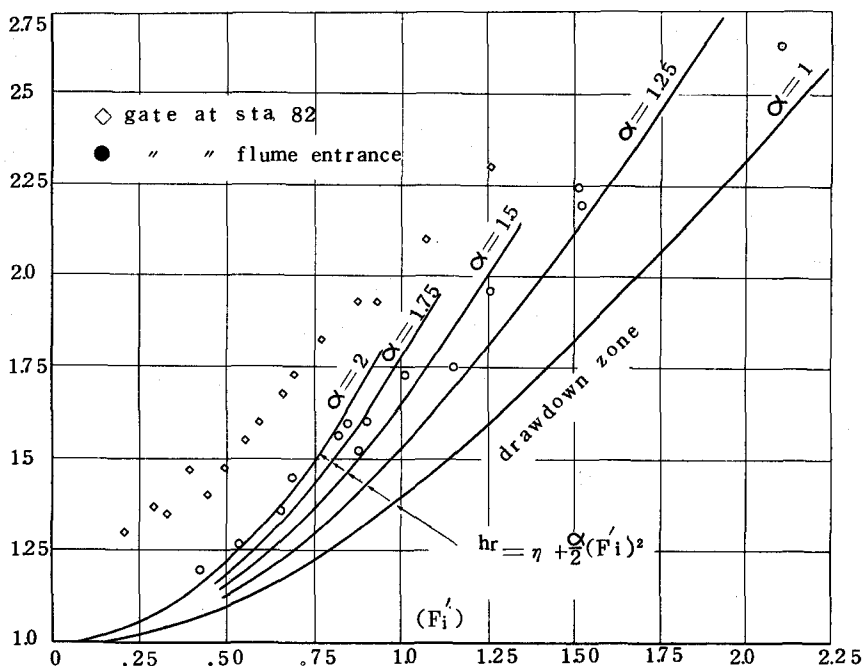


Fig. 3.13 水門取水の特性曲線
(hr/a と (F_1') との関係)

密度混合が乱れ K ともなっておく場合にその条件を規定するものにリチャードソン数 (Richardson Number) というのがある。¹⁸⁾ いま密度勾配を、重力の方向で上むきに y をとったとき $d\rho/dy$ で示し、この値が一定であるとする。このような成層中を流体小部分が最初の位置より y だけ昇るものとする、重力にさからって τ なされる仕事 W は単位体積について、

$$W = - \int_y \rho g dy = - \int_y \left(\rho_0 + \frac{d\rho}{dy} y \right) g dy = - \rho_0 g y - \frac{1}{2} g \frac{d\rho}{dy} \cdot y^2 \quad (4.1)$$

となる。このうち $\rho_0 g y$ は均質流れにおける位置エネルギーに相等するが $-\frac{1}{2} g y^2 (d\rho/dy)$ は、密度勾配のあるところを上昇する為に必要な余分のエネルギーである。そして y 軸に垂直な平面内の平均値の意味で Y を y の代りに用いることにすると、このエネルギーは乱れのレイノルズ応力によってなされねばならない。この応力を τ とするとその仕事は単位時間について $\tau (du/dy)$ (ただし u は平均的な x 方向の流速) であるので、密度勾配のあるところで乱れが起りうる為には、単位時間について

$$-\frac{1}{2} g \cdot \frac{d\bar{Y}^2}{dt} \cdot \frac{d\rho}{dy} < \tau \frac{du}{dy} \quad (4.2)$$

動粘性係数 ϵg を用いると、

$$\tau = \rho \epsilon g \frac{du}{dy} \quad (4.3)$$

また乱流理論によると拡散係数を Eg とすれば、

$$Eg = \frac{1}{2} \frac{d\bar{Y}^2}{dt} \quad \text{または} \quad \bar{Y}^2 = 2Eg t \quad (4.4)$$

であるので、式(4・2)をかき直して、

$$\frac{\varepsilon y}{E y} > Ri, \quad Ri = \frac{-\frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dy} \right)}{\left(\frac{du}{dy} \right)^2} \quad (4 \cdot 5)$$

すなわち(4・5)であたえられる Ri をリチャードソン数という。¹⁹⁾ $\varepsilon y = E y$ であれば乱れのおこる条件は $Ri < 1$ であるが、平板に沿う境界層についての Schlichting の計算では $Ri < 0.041$ 。また北欧の海流における Jacobsen の実験では $Ri < 100$ などという値がえられているそうである。

2 成層の境界面、あるいは 3 成層の境界面においては、運動量輸送による乱れ応力(4・3)が作用するとは考えられない。Keulegan の実験によるとまづ安定な内部波が境界面に発達し二層の速度差が大きくなってくると、内部波の波頂が尖ってきて砕け、このとき放り出された流体塊が上層中に拡散してゆくことによって混合が起ってゆく。そこで内部境界面における混合は、内部波の安定問題としてとかれねばならない。この点については嶋教授が水工学シリーズ 65-11 において、1965 年に詳細な解説および解析をおこなっていられるので参照されたい。²⁰⁾ それによると、密度 ρ_1 、 ρ_2 の二流体の中間に ρ_3 なる層があって速度分布が中間層内で直線変化し、上下二層で一樣な場合、および下層より y 方向に直線変化する場合については、Taylor の解析により前者で $Ri < 1/2$ 、何者で $Ri < 1/4$ 、また下層静止、上層流動の場合には嶋教授の解析により $Ri < 1/6$ といずれも形式的には Ri 数を用いることができています。しかしこれらの解析では剪断応力の作用が無視されていてただ単に運動学的な安定(微小攪乱が $\partial p / \partial y$ の場において安定であるという条件で、その攪乱に伴う剪断応力は無視されている。)を論じたものであり、力学的条件としては不満足である。

これに対し粘性を考慮した安定条件が Keulegan によって示されており、下層静止、上層流動の場合において 2 層の相対速度を u_0 、上層の密度を ρ_1 、2 層の密度差を $\Delta \rho$ 、下層の動粘性係数を D_2 、とすると、クーリガン数^⑧を用いて、次のように実験的に求められている。²¹⁾

$$\textcircled{B} = \left(\nu_2 g \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \right)^{1/3} / u_0 = (\nu_2 \varepsilon g)^{1/3} / u_0 \quad (4 \cdot 6)$$

ここに g は重力の加速度、 $\varepsilon = g \Delta \rho / \rho_1$ であって、安定した条件は、 $R'_{q1} = u_0 h_1 / D_1$ とおいて次のようになった。

$$\text{層流} : Re_1 < 1800 \text{ に対し, } \textcircled{B}_c = 0.127 \quad (4 \cdot 7)$$

$$\text{乱流} : Re_1 > 1800 \text{ に対し, } \textcircled{B}_c = 0.178 \quad (4 \cdot 8)$$

また下層の内部フルード数 Fr'_2 と内部レイノルズ数 Re'_2 をつぎのように定義する。

$$Fr'_2 = \frac{u_0}{\sqrt{\varepsilon g h_2}}, \quad Re'_2 = \frac{u_0 h_2}{\nu_2} \quad (4 \cdot 9)$$

このとき(4・6)は形式的に次式になる。

$$Q = \textcircled{B}^3 = \frac{\nu_2 \varepsilon g}{u_0^3} = \frac{1}{(Fr'_2)^2 \cdot Re'_2} = \frac{1}{\psi} \quad (4 \cdot 10)$$

ただし、

$$\psi = (Fr'_2) \cdot (Re'_2) = u_0^3 / \nu_2 \varepsilon g \quad (4 \cdot 11)$$

である。

Ippen と Harleman は上層静止，下層流動の場合について層流領域に対しては， $(Fr'_2)=1$ であるとして，(4・10)にこれを入れることにより，

$$\theta_c = \theta_c^3 = \frac{1}{R \epsilon_2} \quad (4 \cdot 12)$$

を限界条件として与えている。

つぎにこの条件をこえてさらに相対速度 u_0 が大きくなり，クーリガン数が小さくなってくると，塩水の下層より上層への移行が活発になってくる。Keulegan の与えた実験式は，境界面の単位面積あたり単位時間に塩水が上層へ混入する量を Um とすると，2 層の相対速度 u 。また式(4・8)または(4・12)を満足する限界流速 u_c を用いてつぎのようになった。

$$\bar{U}m = K(u_0 - 1.15 u_c) \quad (4 \cdot 13)$$

クーリガンは K を一応 3.5×10^{-4} とあたえかつ， $\Delta \rho / \rho_1$ の値が大きくなると減少する傾向にあることを指摘している。

内部波の生成によってエネルギーが消費される。その波長を入，振巾を a ，伝播速度を w ，粘性係数を μ とすると，内部境界面の単位面積について消費されるエネルギーは，²²⁾

$$\frac{dE}{dt} = 16 \pi^3 \mu w^2 a^2 / \lambda^3 \quad (4 \cdot 14)$$

内部境界面の波速 w は， $\rho_1 \approx \rho_2$ の半無限 2 流体の間で

$$w = \frac{u_0}{2} + \left[\frac{g}{2k} \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho_1} - \frac{u_0}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4 \cdot 15)$$

ただし $k = 2\pi / \lambda$ である。²³⁾

式(4・15)で安定な波では右辺〔 〕内が正または 0 であるから

$$(Fr'_2)^2 = \frac{u_0^2}{\epsilon g h_2} \leq \frac{\lambda}{\pi h_2} \quad (4 \cdot 16)$$

すなわち最小波長は， $\lambda_{\min} = \pi h_2 (Fr'_2)^2$ であたえられ，このとき式(4・15)より， $w = u_0 / 2$ となる。

式(2・7)において $u_2 = 0$ ， $u_1 = u_0$ において f_i' をもとめ，内部境界面にそう剪断力 τ_i によって消費されるエネルギーを $\tau_i u_0$ として式(4・14)に等しいとおき，つぎの関係がえられる。²⁰⁾
21) 24)

$$\begin{aligned} f_i' &= \frac{2\tau_i}{\rho_1 u_0^3} = 2 \frac{dE}{dt} / \rho_1 u_0^3 = 32 \pi^3 \mu w^2 a^2 / \rho_1 \lambda^3 u_0^3 \\ &= 8 \pi^2 \left(\frac{a}{\lambda_{\min}} \right)^2 \cdot \theta = 2 \pi^2 \left(\frac{H}{\lambda_{\min}} \right)^2 \cdot \theta \end{aligned} \quad (4 \cdot 17)$$

ここに H は内部波の波高で $H / \lambda_{\min}$ は最大スティーブネス，になる。椎貝は $2 \pi^2 (H / \lambda_{\min})$ は最大
12 すなわち

$$f_i' = 12 \theta = 12 / \psi \quad (4 \cdot 18)$$

を実験的に求めた。²⁴⁾ 岩崎は実験的に次式を発表している。²⁵⁾

$$f_{i'} = 7.88 \psi^{-0.8356} \quad (4 \cdot 19)$$

Keeilegan はこの外に混合によって増大する剪断力を考えている。当初静止していた密度 ρ_2 の流体が式 (4・13) の速度で上方に混入し終局速度 u_0 に達するのであるから、運動量を獲得するための混入による附加応力は、次式になる。

$$\tau_2 = \rho_2 U_m u_0$$

そこで抵抗係数は式 (4・13) を用いて次式となる。

$$f_2 = \frac{2\tau_2}{\rho_2 u_0^2} = 2 \frac{U_m}{u_0} = 2 K (1 - 1.15 \frac{u_c}{u_0}) \quad (4 \cdot 20)$$

[註：あるいは ψ を用いて形成式に

$$f_2 = 2 K \{ 1 - 1.15 (\frac{\psi_c}{\psi})^{\frac{1}{3}} \} = 7.0 \times 10^{-4} (1 - 6.461 \psi^{-0.331}) \quad (4 \cdot 21)$$

をうる。ここに $K = 3.5 \times 10^{-4}$ 、 $\psi_c^{\frac{1}{3}} = 1/\textcircled{B}_c = 5.618$ とおいたものがある。]

問題 11： $\rho_1 = 1.000$ 、 $\rho_2 = 1.030$ のとき中間層がこの間に形成されたものとする。この厚さが 1 cm, 3 cm, 5 cm のときに安定な速度勾配をもとめ、 $u_1 = 5 \text{ cm/sec}$ で、 $u_2 = 0$ の 2 1 の流況において安定かどうかを検せよ。ただしリチャードソン数が 0.5 以下のときに乱れるものとする。

問題 12： $u_2 = 0.0150 \text{ cm}^2/\text{sec}$ として乱流において安定な限界流速 $(u_0)_c$ を、 $\epsilon = 0.0005$ 、 0.001 、 0.002 、 0.003 の各場合についてもとめよ。

問題 13： 上記各場合において u_0 が $(u_0)_c$ の 1.2 倍、1.3 倍、1.5 倍に達したときの塩水混入量を計算せよ。

4.2 拡散方程式

内部波の山の先端から流体塊がまき上げられて行く場合や十分に混合した流体内部における乱れなどによって拡散が進行してゆく場合の基本的な考え方をつぎにのべよう。

いま x 方向の変動速度 u' 、単位面積について単位時間に x 方向に乱れによって輸送される塩分、浮遊土砂量など物質の濃度を Cx 、時刻 t_0 、場所 x_0 の物質濃度を $C(x_0, t_0)$ とすると、輸送物質量は $Cx = \overline{u' C(x_0, t_0)}$ である。(ここに $\overline{\quad}$ は時間的的平均量)。変動速度 u' の水塊が時間 δt の間に ℓ だけ輸送されるとすると、 $x_0 = x - \ell$ 、 $t_0 = t - \delta t$ において、

$$C(x_0, t_0) = C(x, t) - \ell \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} - \delta t \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} \quad (4 \cdot 22)$$

よって $\overline{u'} = 0$ だから、 $Cx = -\overline{u' \ell} \frac{\partial C(x, t)}{\partial t}$ となる。 $\overline{u' \ell}$ は 動拡散係数とよばれるもので

これを Ex とおく。同様に y 、 z 方向を考へると、

$$Cx = -Ex \frac{\partial c}{\partial x}, \quad Cy = -Ey \frac{\partial c}{\partial y}, \quad Cz = -Ez \frac{\partial c}{\partial z} \quad (4 \cdot 23)$$

直元面体 $\delta x \delta y \delta z$ について平均速度 (u, v, w) および物質の沈降速度 w_0 (浮遊する物質なら負の値をとる。) を考えて連続方程式として次式をうる。

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial x}(uc) + \frac{\partial}{\partial x}\left(E_x \frac{\partial c}{\partial x}\right) \right\} \delta x \delta y \delta z + \left\{ -\frac{\partial}{\partial y}(vc) + \frac{\partial}{\partial y}\left(E_y \frac{\partial c}{\partial y}\right) \right\} \delta x \delta y \delta z \\ + \left\{ -\frac{\partial}{\partial z}(w-w_0)c + \frac{\partial}{\partial z}\left(E_z \frac{\partial c}{\partial z}\right) \right\} \delta x \delta y \delta z = \frac{\partial c}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$$

上式の右辺は元面体内で増加する物質質量である。

$$\therefore \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(cu) + \frac{\partial}{\partial y}(cv) + \frac{\partial}{\partial z}(cw) \\ = \frac{\partial}{\partial x}\left(E_x \frac{\partial c}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(E_y \frac{\partial c}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(E_z \frac{\partial c}{\partial z}\right) + w_0 \frac{\partial c}{\partial z} \quad (4.24)$$

ここで連続方程式 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ を用いると、次式をうる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(E_x \frac{\partial c}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(E_y \frac{\partial c}{\partial y}\right) \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(E_z \frac{\partial c}{\partial z}\right) + w_0 \frac{\partial c}{\partial z} \quad (4.25)$$

これを拡散方程式 (Convective-diffusion equation) という。

4.3 拡散係数

式 (4.5) より密度勾配のある流体中の拡散係数 E_y は、 $E_y/\epsilon_y = c R_i^{-1}$ ($c < 1$) である。Munk と Anderson は乱れによる鉛直方向の拡散係数について理論的研究をおこない次式をえた。

$$\epsilon_y = E_0 (1 + \beta_v R_i)^{-n_v} \quad (4.26)$$

$$E_y = E_0 (1 + \beta_s R_i)^{-n_s} \quad (4.27)$$

ここに E_0 は均質流体の渦動粘性係数である。常数については、 $\beta_v = 10$, $\beta_s = 33.3$, $n_v = 0.5$, $n_s = 3/2$ をあたえる。²⁶⁾ ただし $R_i > 1$ の Stable の場合に適用できる。

さきにのべたように拡散係数 E_0 は変動速度 u' と輸送距離 ℓ との積の時間的平均値であるが、Taylor によると流体塊がある時刻 $t = 0$ より現在の時刻 $t = t$ までの間に動いた距離 $\bar{Y}$ を用いて、 $\bar{Y}u'$ であらわされる。すなわち時刻 $t - \tau$ における速度 $u_{t-\tau}$ を用いて次式であらわすことができる。²⁷⁾

$$\bar{Y} = \int_0^t u_{t-\tau} d\tau \quad (4.28)$$

均質流れの渦動拡散係数 E_0 は多くの研究によって、流体の単位質量あたりのエネルギー損失の平均割合 G と、ラグランジュの平均渦大きさ La と関連していて、

$$E_0 = 0.0136 G^{1/3} La^{4/3} \quad (4.29)$$

であたえられる。²⁸⁾ 常数 0.0136 は Orlob の与えた係数であり、 G は摩擦勾配を if とすると、 $G = u g i f$ であたえられまた、ラグランジュの平均渦大きさ La は、平均流速 $\bar{u}$ と速度変動の相関係数 $R\xi = \frac{W'_t W'_t + \xi}{W_t^2}$ の分布をしめす係数 K との比 $\bar{u}/K$ で示される。すなわち、

$$L_a = \bar{u} \int_0^t R \xi d\xi = \bar{u} \int_0^t e^{-Kt} dt = \bar{u}/K \quad (4.30)$$

σ_z を粒子の平均位置からの横方向変動の標準偏差とすると、

$$\sigma_z^2 = \frac{2\bar{w}^2}{K} \left[\frac{K}{u} x - \left(1 - e^{-\frac{K}{u} x} \right) \right] \quad (4.31)$$

そこで σ_z^2 と x の関係をしめす図を測定値よりもとめると、 $K/\bar{u}$ および $\bar{w}^2$ をうることができる。これから (4.29) が計算できる。

拡散が乱れのほかに対流によっておこることを 4.1 でのべた。この対流は重力によっておこる gravitational convection, すなわち重い流体が軽い流体の下にもぐるように進み、軽い流体が押上げられる現象である。このときみかけの拡散係数 E_x' は乱れによる E_x と重力対流による拡散係数 ΔE_x との和としてあらわされる。

$$E_x' = E_x + \Delta E_x$$

E_x は E_y とほぼ同じオーダーと考えられるが ΔE_x は流れの条件によって相当大きい範囲に変化しているようである。

水平拡散においては重力対流の外に潮流による混合が考えられる。Estuary での乱れの大きさは水深の 1/2 位の程度で、オランダでは 1 m 位とされている。しかし、Schijf と Schönfeld によると、淡水 2 層流の感潮部分では、潮汐による水平運動の流跡は上層が下層に比して非常に大きく、上層流の粒子が乱れ拡散などで下層流に移りそこにしばらくとどまってふたたび上層に戻った場合、2 層の流跡差の為に水平的にもとから非常に隔たった距離のところにもどり、この為に半潮汐週期において 10 から 100 m の程度の移動距離となる。⁶⁾ 距離が大き

くると拡散係数が大きくなることは $E_0 = \bar{y} \bar{u}$ 、によって理解できる。すなわちこの場合には $E_x' = 1 \sim 10 \text{ m}^2/\text{sec}$ である。つぎに Fig. 4-1 のように estuary のそばに流水の停滞する水域があると漲潮時に流入し、落潮時に流出し、その時間内の水路中の流跡長だけの輸送距離を生じる。この考え方から求めた E_x' によってよく実際の塩分分布が説明されるという。

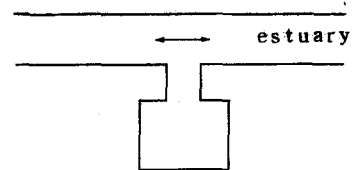


Fig.4-1
移動距離の説明

なおこれに関連して海における渦動粘性の研究結果の概要が和田明によって紹介されている。²⁹⁾ また市栄博士の解説もある。³⁴⁾

4.4 拡散問題

4.4.1 タイダル・フラッシュ

河水と海水との混合する水域を Estuary という。幅 b 、水深 H 、長さ L なる Estuary において、原点を河口に、 x 軸を下流にむけてとり、Estuary の海側の終点を $x = L$ とする。塩分を S としたとき、 $x = 0$ で $S = 0$ 、 $x = L$ で $S = \sigma$ (海洋の塩分) になりこの途中は強混合型であるとする。

Arons と Stommel はこの場合をつぎのようにしてといた。まづ長さ L が潮波の $1/4$ 波長に比して十分小さいと仮定すると潮汐はこの水路内いたるところで同じ位相で運動をすると仮定できる。式

(4・24)はこの場合に次式になる。³⁰⁾

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

定常的な拡散完成の状態においては $\partial/\partial t = 0$, すなわち, 海水と河水の混合が, 潮汐という“乱れ”によって混合したものとする。 u は平均流速で河川流量を Q とすると $u = U_0 = (Q/BH)$ であってこれは x 方向に一様であるので式(4・32)は次式になる。

$$\frac{Q}{BH} S = E_x \cdot \frac{dS}{dx} \quad (4・33)$$

ここに $x = 0$ で $S = 0$ また, $E_x (dS/dx) = 0$ とおいている。

式(4・28)より潮流という“乱れ”において $\bar{Y}$ は潮流による水平移動距離 2ξ に比例するとし“乱れ”の平均流速は, 潮流流速の最大値 U_0 に比例するものとし, 比例係数を K とすると,

$$E_x = \bar{Y} u = 2K\xi_0 U_0 \quad (4・34)$$

すなわち, 潮流運動が V_0 なる平均流にのったものと考えている。

連続方程式は, 潮位 ζ , 水深 H , 潮流流速 u とすると

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4・35)$$

水平移動距離 ξ は,

$$\xi = \int_0^t u dt = \xi_0 (1 - \cos \omega t) \quad (4・36)$$

$\zeta = \zeta_0 \cos \omega t$ とおいて式(4・35), (4・36)を利用すると次式をうる。

$$U_0 = \zeta_0 \frac{\omega x}{H}, \quad \xi_0 = \frac{\zeta_0 x}{H} \quad (4・37)$$

(4・37)を(4・34)に入れ, 無次元数 $\lambda = x/L$ およびフラッシュ係数 F を定義すると, (4・33)によって,

$$F \cdot S = \lambda^2 \frac{dS}{d\lambda} \quad (4・38)$$

をうる。ここに, F は次式で定義される。

$$F = \frac{V_0 H^2}{2K\zeta_0^2 L \omega} = \frac{QH^2}{2K\zeta_0^2 \omega S} = \frac{QH^2 T}{4\pi K\zeta_0^2 S} = \frac{RH^2}{4\pi K\zeta_0^2} \quad (4・39)$$

ここに S は Estuary の全容積, R は1周期内の河川全流量, T は周期である。

式(4・38)を積分し, $\lambda = 1$ で $S = \sigma$ を用いると,

$$\frac{S}{\sigma} = \exp \left\{ F \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right\} \quad (4・40)$$

Fig. 4・2 はこの解をしめし, $0.1 < F < 1.0$ の間で相立にかなり異なった分布をあたえる。ただし常数 K 値はなお研究の余地があるとされている。

室田も同様な解析をこころみている。³¹⁾ また非定常の場合のタイダル・フラッシュについて市栄博士

の多くの研究および解説がある。³²⁾ また湾内の拡散、混合についても詳細な解説がなされている。³³⁾ また放射性廃棄物や工場廃水の処理についても解説がおこなわれている。³⁴⁾ つぎに簡単な解析例をあげておく。

4.4.2 拡散の解析例

a) 鉛直混合のみのとき、(4.25)より、

$$\frac{\partial S}{\partial t} = E_z \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad (4.41)$$

$A = \text{常数}$, $z = z_0$ で $S = S_0$ なる半無限領域での解は、

$$\frac{S}{S_0} = 1 - \operatorname{erf} \frac{z}{2\sqrt{E_z t}} \quad (4.42)$$

ここに erf は誤差関数である。

また、 $t = 0$ で $S = S_0 e^{-\alpha z}$, $z = 0$ で $\partial S / \partial z = 0$ なる境界条件の解は、

$$S = \frac{1}{2} S_0 \exp(\alpha^2 E_z t) \left[\exp(-\alpha z) \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\alpha \sqrt{E_z t} - \frac{z}{2\sqrt{E_z t}} \right) \right\} + \exp(\alpha z) \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\alpha \sqrt{E_z t} + \frac{z}{2\sqrt{E_z t}} \right) \right\} \right] \quad (4.43)$$

Fig. 4.3 に S/S_0 の鉛直分布をしめした。

b) つぎに移流があるとき、(4.25)より、

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = E_z \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad (4.44)$$

$t = 0$ で $S = f(x) \cdot g(z)$ であつ

$z = 0$ および $z = h$ で $\partial S / \partial z = 0$ とする

とその解は

$$S = f\left(x - \int_0^t u dt\right) \cdot \frac{1}{h} \left\{ \int_0^h g(\lambda) d\lambda + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_z \cdot n^2 \pi^2 t}{h^2}\right) \cdot \cos \frac{n\pi z}{h} \cdot \int_0^t g(\lambda) \cos \frac{n\pi \lambda}{h} d\lambda \right\} \quad (4.45)$$

Fig. 4.4 に市栄が計算した結果をしめす。ただし、 $g(z) = 1.80(0/00)$, ($h_1 > z > 0$) また、 $5.0(0/00)$ ($h > z > h_1$) とし、 $h = 10 \text{ m}$, $h_1 = 8 \text{ m}$ と、 $h = 5 \text{ m}$, $h_1 = 4 \text{ m}$ の2種類について $E_z = 1$ および $10 \text{ cm}^2/\text{sec}$ に対して表層における塩分分布をしめしている。

c) 式(4.44)は汚水の河川における拡散にも用いられる。

$t = 0$, $x = 0$ における注入量を S_0 とし、 $u = u_0 = \text{一定}$ とするとその解は、

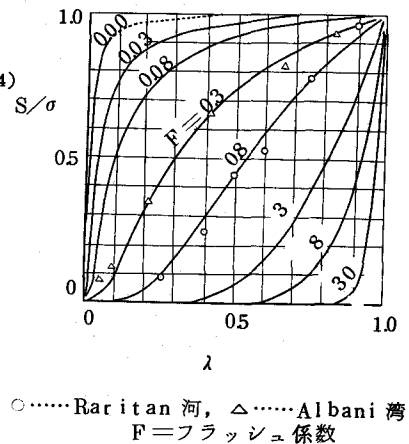


Fig.4.2 Stommelの塩分分布

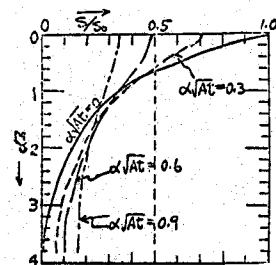


Fig.4.3 非定常鉛直拡散による濃度分布の時間的变化

$$S = \frac{S_0}{2\sqrt{\pi E_z t}} \cdot \exp \left[-\frac{(x - u_0 t)^2}{4 E_z t} \right] \quad (4.46)$$

また $t = 0$ において $\xi \geq x \geq -\xi$ の間に一様に分布する線源よりの拡散は、放流量を $V \text{ m}^3$ 、断面積を $A \text{ m}^2$ 、放流濃度を S_0 (ppm) としたとき同じ (4.44) よりつぎの解としてえられる。³⁵⁾

$$S = \frac{S_0 V}{4 E_z \xi} \{ \operatorname{erf}(X_1) - \operatorname{erf}(X_2) \} \quad (4.47)$$

ここに

$$X_1 = \frac{\xi - x + V t}{2\sqrt{E_z t}}, \quad X_2 = \frac{-\xi - x + V t}{2\sqrt{E_z t}}$$

$$\operatorname{erf} X = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-z^2} dz$$

汚水の拡散にはこの外、横方向拡散係数を用いたつぎの式

$$V \frac{\partial C}{\partial x} = K_0 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

をといった例もあるが水理公式集を参照されたい。³⁵⁾ (pp. 433 ~ PP. 443)

4.4.3 入江内における冷却水の拡散

潮汐および風の影響をうける入江内に設置された火力(原子力)発電所の放水口からの放出水の拡散はとくに再取水して復水器冷却系に利用する場合に問題となる。和田・中川・片野はこの問題の解折をこころみた。³⁶⁾

熱拡散方程式は、(4.25) を若干修正した次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Kx}{\rho} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Ky}{\rho} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Kz}{\rho} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{Q}{\rho C_w H_w} \end{aligned} \quad (4.49)$$

ここに T : 水温 ($^{\circ}\text{C}$)、 Kx , Ky , Kz は渦動拡散率 ($\text{g}/\text{cm} \cdot \text{sec}$)、 ρ 海水密度 ($\equiv \rho_0 (1 - \alpha T)$) (g/cm^3)、 Q : 海表面からの表面冷却または加熱項 ($\text{cal}/\text{cm}^2 \cdot \text{sec}$)、 C_w : 海水の比熱 ($\text{cal}/\text{g} \cdot ^{\circ}\text{C}$)、 H_w : 躍層面までの深さ (cm)

入江内においても一様温度の上層と下層および大きい温度勾配をもつ中間層とがある。(Fig. 4.5) 上層については $\partial/\partial z = 0$ 、下層については、 $\partial/\partial z = 0$ 、 $Q = 0$ と考えられ、また定常的として $\partial/\partial t = 0$ とする。Fig. 4.6 は、和田らが考えた3次元熱拡散モデルである。

境界条件は

- (i) $y = 0$, $-B \leq x \leq B$, $0 \leq z \leq H$ で $T = T_0$
- (ii) $y = 0$, $x < -B$, または $x > B$, および $y = 0$, $z > H$, $-B \leq x \leq B$ で $\partial T / \partial y = 0$

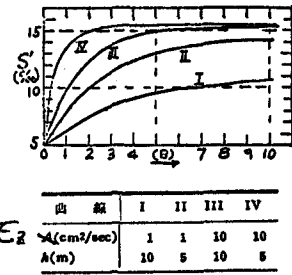


Fig.4.4 移流のある場合の非定常拡散における表面温度の時間的变化
(4.48)



Fig.4.5

(iii) 放水口からの冷却温水放出水の影響を受けない水温垂直分布を放水口無限沖に設定する。

Q としては天空よりの輻射エネルギー、海表面よりの有効逆輻射量対流による大気からの移動熱量、海面よりの蒸発熱などがあり、定数を用いて $b_0 - b_1 T$ とおくことができる。Fig. 4・7 は和田らが、数値計算をおこなった結果を $\eta(\gamma)$ 軸にそって示したものであって、水温躍層面での大きな安定度のために放温水水塊はこの躍層面を通じて下層に拡散することがなく、したがって冷却水放水による流動を躍層面までの厚さにわたって一様とした2次元模型により考える根拠をえている。

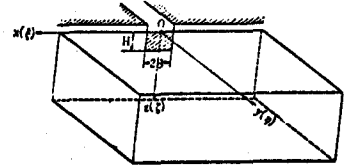


Fig.4・6

なお河口湖が最近問題になってきており、これに関する水理学的検討は大きな要請となっている。これについて、文献調査委員会が、主として奥田節夫の研究を中心として解説をおこなっているので参照されたい。
37)

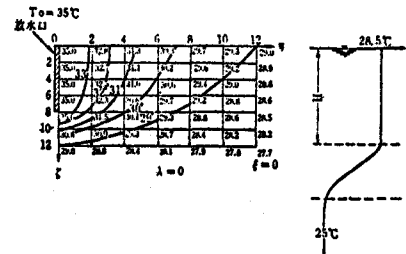


Fig.4・7

問題14：問題11の場合の $\varepsilon\gamma/E_0$ 、 $E\gamma/E_0$ の値を計算せよ。

問題15：式(4・44)を用いると $t=0$ で $S=S_0$

なる物質を $x=0$ に投入したときの拡散の状態がわかり、(4・46)では、平均流 u の効果が求められる。これらの式に各自適当な数値を入れて計算を試みよ。

5. ジェットの重力拡散

ジェットが同じ密度の流体中に噴出する場合は、Tollmienにはじまって多くの研究がなされていたが、ジェットが密度の異なる流体中に噴出する場合にこれを重力拡散 (gravitational diffusion) といい、近年かなり多く研究されるようになってきた。重い流体中を軽い流体が上方に噴出する場合とか軽い流体中へ重い流体が下方に噴出する場合などがこれにあたり、ジェットに浮力が作用するのが特徴的である。日野は安定に層化された空気層中を煙などが上昇する現象について研究し、この問題に先進的な寄与をなしている。³⁸⁾

Fig. 5-1 のようにジェットの出口から垂直上方に x 軸をとり、 x 軸に垂直にすなわち水平に半径方向の軸を r 軸とし、ジェットの密度を ρ 、周囲流体の密度を ρ_s とする。また r 軸に垂直な面内の x 方向へむかう剪断力を σ_{xr} とすると、運動方程式は次式になる。

$$\rho \left(\bar{U}_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \cdot \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{xr}) + (\rho_s - \rho) g \quad (5 \cdot 1)$$

ここに $\bar{U}$ は係数の示す軸の方向への速度の時間平均値である。式(5・1)の積分は、

$$\int_A \rho \bar{U}^2 dA = M_0 + g \int_0^x dx \int (\rho_s - \rho) dA \quad (5 \cdot 2)$$

ここに A はジェットの本に垂直な面で無限にのびてお
り、 M_0 は点 $x=0$ における初期運動量、 $M_0 = \int_A \rho u^2 dA$
である。いまフルード数として、

$$(Fr'_0)^2 = \frac{u_0^2}{\frac{\rho_s - \rho_0}{\rho_0} g D} = \frac{M_0}{\frac{\pi}{4} (\rho_s - \rho_0) g D^3} \quad (5 \cdot 3)$$

とおくと、ジェットはつぎの3種類に分類できる。た
だし D = ノズルの直径、 u_0 、 ρ_0 は $x=0$ における速
度および密度である。³⁹⁾

その第1は $Fr'_0 = \infty$ の場合で式 (5・2) の右辺
第2項が無視される。すなわち浮力の効果が無視され
るものであって、Non-buoyant jets という。第2
は $Fr'_0 = 0$ の場合で右辺第1

第1項すなわち初期運動量
量が無視される。これを
Buoyant jets という。
第3は $0 < Fr'_0 < \infty$ の
場合でノズルの近くでは
Non-buoyant jets と
同様で通常のジェットと
同じであるが、ノズルよ
りごく遠くなると
Buoyancy effectが顕
著になる。

Abraham はこれらに
ついで総合的な解説を
おこなっているが、ここ
では Fig. 5・2 を示す

にとどめる。すなわち、ジェットの中心軸にそ
う速度および密度の変化を図示したものであり、
Morton, Taylor および Turner 等の理論曲線と Abraham の実験とはよく一致したといわれる。⁴⁰⁾

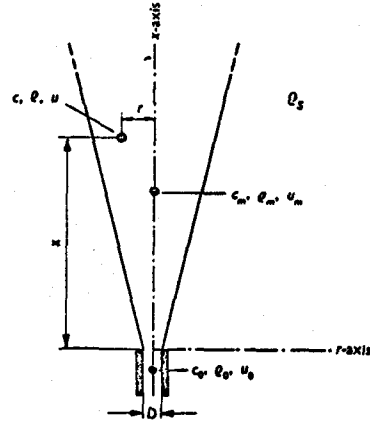


Fig. 5.1

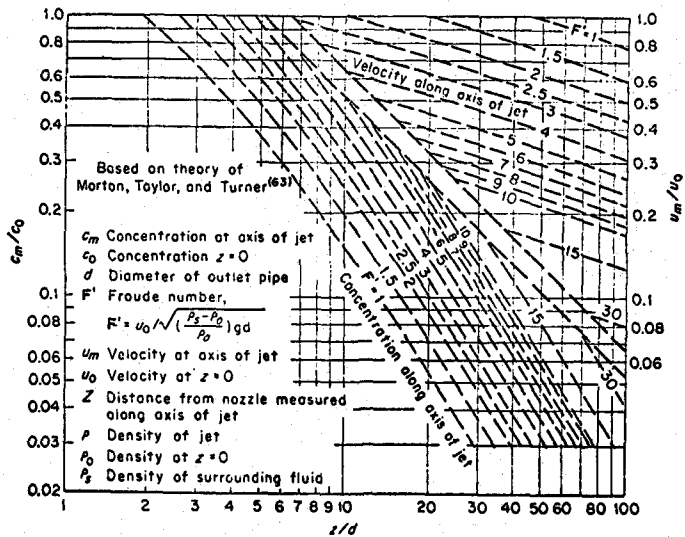


Fig. 5.2 Buoyant jet におけるジェットの中に軸にそ
う密度および濃
および濃度分布

— (終) —

参 考 文 献

- 1) 石橋雅義「基礎容量分析法」上巻, 富山房 昭和24年P. 79~88
- 2) Stommel H. and Farmer H.G., "Abrupt change in width in two-layer open channel flow," *Journal of Marine Research*, Vol. 11, No. 2, 1952.
- 3) 大坪・福島 "Density currents in a river mouth with a small tidal range." I.A.H.R. 8th Congress. 1959
- 4) 岩崎敏夫「二成層流における乱流拡散について」土木学会第19回年次学術講演会講演概要第Ⅱ部 1964
- 5) Poggi, B. "Sul moto delle correnti stratificate." *L' Energia Elettrica*, N.3, 1959
- 6) Harleman, D.R.F. "Stratified Flow" Streeter; *Handbook of fluid dynamics*, Section 26-9, 1961
- 7) Farmer H.G. and G.W. Morgan, "The Salt wedge." *Proc. of the 3rd Conference on Coastal Engineering*, " 1952
- 8) Schijf J.B. and J.C. Schönfeld "Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water" *Proc. Minnesota International Hydraulics Convention* "I.A.H.R. 1953
- 9) 浜田徳一「内部ジャンプについて」第5回海岸工学講演会講演集 1958年 P. 7~11
- 10) Barr, D.I.H. "Densimetric exchange flow in rectangular channels." *La Houille Blanche*, Nov. 1963, N -7, P. 739
- 11) Craya, A. "Theoretical research on the flow of non-homogeneous fluids." *La Houille Blanche*, January-February, 1949, PP44~45.
- 12) Gariel, P. "Experimental research on the flow on non-homogeneous fluids." *La Houille Blanche*, January, February, 1949, PP. 56~64
- 13) Davidian J. and J.E. Glover "Development of the non-circulatory waterspout." *Proc. ASCE. Journal of the Hydraulic Division*, August 1956, Vol. 82, Paper No. 1038-3.
- 14) Harleman, D.R.F., R.L. Morgan and R.A. Purple. "Selective withdrawal from a vertically stratified fluid." I.A.H.R. 8th Congress. 1959.
- 15) Huber, D.G. "Irrotational motion of two fluid strata towards a line sink." *Proc. ASCE. Journal of the Mechanical Division*, August, 1960, Vol. 86, no. EM. 4.
- 16) Mc Nown, J.S., E.Y. Hsu and C.S. Yih, "Applications of the relaxation technique in fluid mechanics." *Trans. A.S.C.E.*, Vol. 120, 1955
- 17) Harleman, D.R.F., R.S. Gooch and A.T. Ippen, "Submerged sluice control of stratified flow." *Proc. A.S.C.E. Journal of the Hydraulic Division* paper 1584 April, 1958. Vol. 84 no. HY. 2
- 18) Richardson, "The supply of energy from and to atmospheric eddies." *Proc. Roy. Soc. A*, 97(1920) P. 354~373 Prandtl, "Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete, Aachen 1929 1-7,

- 19) 谷 一郎「乱流理論」克誠堂 昭和25年版. P. 28
- 20) 嶋 祐之「密度流論」水工学シリーズ 65-11, 土木学会水理委員会 1965年8月
- 21) Keulegan, G.H. "Interfacial instability and mixing in stratified flow." Journal of Research, Nat. Bur. Standard. Vol.43. 1949
嶋 祐之「密度流論」前出20)の書 P12.
- 22) Lamb. H. "Hydrodynamics" Cambridge, University Press. 1932 6th ed. P.624.
- 23) 全上. p.373
- 24) Shi-igai H, "On the resistance coefficient at the inter-face between salt and fresh water." Trans. JSCE. №123, 1965.
- 25) Iwasaki. T, "On the shear stress at the interface and its effects in the stratified flow." Proc. of the 9th Conference on Coastal Engineering 1964.
- 26) Munk, W.H. and E.R. Anderson "Theory of the thermo-cline," Journal of Marine Research. Vol.7, №3, P376
- 27) 谷 一郎「乱流理論」前出の書P. 38
- 28) Orlobx. G.T. "Eddy Diffusion in homogeneous turbulence." Proc. ASCE. Journal of the Hydraulics Division, Sept. 1959, Hy9. P.75~101
- 29) 和田 明 "水温躍層面における風の影響" 第12回海岸工学講演会講演集 昭和40年11月 土木学会 P.138
- 30) Arons, A.B. and Henry Stommel. "Trans. AGU. Vol. 12. June, 1951.
- 31) Murota, A. "Some hydraulic studies on estuaries." Tech. Rep. of Osaka University. №175. 1955.
- 32) 市榮譽 タイダル・フラッシュについて "海岸工学研究発表会論文集" 昭和29年11月 土木学会関西支部
- 33) 市榮譽 Estuaryの水理について "海岸工学講演会講演集. 1955. 土木学会
- 34) 市榮譽 海中の拡散と混合-汚水処理の基礎資料 "海岸工学講演会講演集 1956, 昭和31年, P.55
- 35) 土木学会編 水理公式集 昭和38年 増補改訂版 P.433
- 36) 和田明・中川友康・片野尚明「入江内における冷却水取放水の研究(1)」 第12回海岸工学講演会講演集 昭和40年11月 土木学会 P.143.
- 37) 文献調査委員会「河口湖案にともなう水理学的検討」 特に炭塩水交換密度流現象について 土木学会誌: Vol. 51. 昭和46年5月号
- 38) Hino, M. "Forced plumes in a stably stratified fluid." 土木学会論文集 1962. №86 P.29~37.
- 39) Abraham, G. "Entrainment Principle and its restrictions to solve problems of jets." Journal of Hydraulic Research, Vol. 3 №2-1965. I.A. H.R. PP.1~22.
- 40) Abraham, G. "Jet diffusion in liquid of greater density." Journal of the Hydraulics Division, June, Proc. ASCE. 1960. HY.6

解 答

1. 式(1・1)より σ_0 をもとめると

$$\sigma_0 = -0.069 + 1.4708 \times 18.38 - 0.001570 \times 18.38^2 + 0.0000398 \times 18.38^3 = 26.68$$

よって温度0℃のときの密度は

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_0}{1000} + 1 = 1.027 \text{ g/c.c.}$$

$$\text{式(1.4)より } \Sigma_t = \frac{(10 - 3.98)^2}{503.570} \times \frac{283}{77.26} = 0.2636$$

$$A_t = 10 \times (4.7867 - 0.9819 + 0.1084) \times 10^{-3} = 0.03913$$

$$B_t = 10 \times (18.030 - 8.164 + 1.667) \times 10^{-6} = 0.0001153$$

よって式(1.3)より

$$\sigma_t = 0.2636 + (26.68 + 0.13) \{ 1 - 0.03913 + 0.0001153(26.68 - 0.13) \} = 26.01$$

$$\rho_t = 1.026 \text{ g/c.c.}$$

また式(1.5)より

$$S = 0.030 + 1.8050 \times 18.38 = 33.210/00 \quad \text{となる。}$$

2. 式(1.6)に入れて計算する。

$$\rho^1 = 1.00 \left[1 + \frac{C}{1000} \left(1 - \frac{1}{1.18} \right) \right]$$

上式のCに表-1.2の値を入れて計算すると表-1.のようになる。

表-1. 各河川の 水の密度 g/c.c.

河川名	密度	河川名	密度
ミシシッピ河	1.000162	ドナウ河	1.000046
エルベ河	1.000008	ナイル河	1.000228
セーヌ河	1.000008	黄河	1.01168
ローヌ河	1.000021		

これより黄河を除いて濁度による密度変化は極めて小さい、濁度による密度流の問題は洪水による濁流の場合を除いて平常時は大して起らないであろう。

3. 式(2.16)'を用いて計算すると表-1.をうる。

表-1 (F₁²)_cの値

×印は0.1以下

$\eta \frac{q_2}{q_1}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	.999	.999	.999
2	1	1	1	.999	.997	.996	.994	.992	.990	.987	.984
3	1	.999	.993	.993	.987	.980	.973	.962	.951	.940	.927
4	1	.997	.988	.974	.955	.931	.904	.873	.841	.807	.772
5	1	.990	.962	.917	.862	.800	.735	.671	.610	.552	.500
6	1	.967 .888	.881 .665	.767 .469	.649 .332	.543 .235	.451 .181	.377 .139	.316 .110	.268 ×	.229 ×
7	1	.610	.281	.148	×	×	×	×	×	×	×
8	1	.121	×	×	×	×		×	×	×	×
9	1										

4. まず $\varepsilon = 0.030$, $u_1 = Q/Bh = 180/135 \times 3.20 = 0.417 \text{ m/sec}$

$$\therefore \bar{F}_1' = u / \sqrt{\varepsilon gh} = 0.417 / \sqrt{0.030 \times 9.8 \times 3.20} = 0.430 \quad \therefore (\bar{F}_1')^2 = 0.185$$

そこで式(2.31)に入れると,

$$L = \frac{2 \times 3.20}{2.6 \times 10^{-4}} \left[\frac{1}{20 \times 0.185} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times (0.185)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{10} \times (0.185)^{\frac{2}{3}} \right]$$

$$= 4.11 \text{ Km}$$

また $Q = 150 \text{ m}^3/\text{sec}$ になると, $u_1 = 150/135 \times 3.20 = 0.346 \text{ /sec}$

$$\therefore \bar{F}_1' = 0.346 / \sqrt{0.030 \times 9.8 \times 3.20} = 0.357 \quad (\bar{F}_1')^2 = 0.128$$

$$\therefore L = \frac{2 \times 3.20}{2.6 \times 10^{-4}} \left[\frac{1}{20 \times 0.128} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times (0.128)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{10} \times (0.128)^{\frac{2}{3}} \right]$$

$$= 4.75 \text{ Km}$$

よって 640 m 位上流にあがってくることになる。

5. この例では式(2.34)を用いる。まず $\varepsilon = 0.015$, $u_2 = 0.5 \text{ m/sec}$ だから $F_2' = 0.5 / \sqrt{0.015 \times 9.80 \times 3.50} = 0.698$, $(F_2')^2 = 0.487$, $(F_2')^3 = 3.0340$ $f_i'/f_b' = 2.6 \times 10^{-4} / 0.057 = 4.56 \times 10^{-3}$, $1 + f_i'/f_b' = 1.0046$ だから

$$1 + \frac{f_i'}{f_b'} - (F_2')^{\frac{2}{3}} = 0.218, \quad \log_e \frac{f_i'/f_b'}{1 + \frac{f_i'}{f_b'} - (F_2')^{\frac{2}{3}}} = \log_e \frac{4.56 \times 10^{-3}}{0.218} = \log_e 0.0220$$

$$= -3.816$$

$$\therefore L = \frac{2 \times 3.50}{0.057} \cdot \left[\frac{1}{0.487} \left\{ \frac{1 - 0.382}{4} + 4.56 \times 10^{-3} \left(\frac{1 - 0.487}{3} + \frac{1.005 \times 0.660}{2} + 1.009 \times 0.213 - 1.0138 \times 3.816 \right) - 0.213 + 4.56 \times 10^{-3} \times 3.816 \right\} \right] = 1.13 \text{ m}$$

すなわち $\eta_2 c = (F_2')^{\frac{2}{3}} = 0.787$ であるのでこの曲線は極めて短くなった。 f_b' が小さければもっと長くなる。

なお $F_2' > 1$ の場合には, 式(2.33)は適用できない。

6. 式(2.36)と(2.37)の解をもとめることに帰着する。

a) $m = 0$ なら式(2.36)は, $x(y - (\bar{F}_2')^2) = 0$

$$\therefore x = 0 \quad \text{または} \quad y = (\bar{F}_2')^2$$

$$\text{そこで } x = 0 \text{ に対し, } \eta_2 = 1, \quad y = \eta_2^3 = (F_2')^2 \text{ より } \eta_2 = (F_2')^{\frac{2}{3}}$$

よって

$$\text{i) } \bar{F}_2' = 0.01 \quad \text{では} \quad \eta_{2c} = 1 \quad \text{および} \quad 0.0465$$

$$\text{ii) } \bar{F}_2' = 0.1 \quad \text{では} \quad \eta_{2c} = 1 \quad \text{および} \quad 0.215$$

$$\text{iii) } \bar{F}_2' = 1.0 \quad \text{では} \quad \eta_{2c} = 1 \quad \text{のみ}$$

となる。

b) $m = 1$ なら(2.36)より

$$(x - (\bar{F}_2')^2)(y - (\bar{F}_2')^2) = (F_2')^4$$

または

$$xy - (x + y)(F_2')^2 = 0. \quad \text{これと式(2.37)を用いる。}$$

$$\text{i) } F_2' = 0.01 \quad \text{では}$$

$$xy - 0.0001(x+y) = 0$$

試算法によりもとめる。0.0001 x が無視できるものと仮定すると、(1)より $y(x - 0.0001) = 0$ $y \neq 0$
 $\therefore x = 0.0001(2 \cdot 37)$ より、 $y = 0.981$ 。同様に 0.0001 y が無視できるものとする、 $y = 0.0001$
 $x = 0.981$ をうる。

よって $\eta_2 = y^{\frac{1}{3}} = 0.0464$ および $\eta_2 = 1 - x^{\frac{1}{3}} = 0.9536$ が、この場合の近似値である。

ii) $F_2' = 0.1$ では

$(x - 0.01)(y - 0.01) = 0.0001 \neq 0$ でやはり、 $x = 0.01$, $y = 0.01$ あるいは $\eta_2 = 1 - 0.01^{\frac{1}{3}}$
 $= 1 - 0.216 = 0.784$ および $\eta_2 = 0.01^{\frac{1}{3}} = 0.216$ となり、 $\overline{F_2}'$ が大きくなると、限界水深は中心
 に近づいてくる。

iii) $F_2' = 1.0$ では

$$(x-1)(y-1) = 1 \quad \text{or} \quad xy - (x+y) = 0$$

$\therefore x(1-y) = -y$ となるが、 $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ の範囲でこの解は存在しない。実際 $m=1$ に対する最
 大の F_2' の値は $(2 \cdot 40)$ より $1/4$ でなければならない。

c) $m=10$ の場合には上と同様に $(2 \cdot 40)$ より $(\overline{F_2}')_{\max} = 1/(1+10^{\frac{1}{2}})^2 = 0.058$ となり、 $\overline{F_2}' = 0.1$
 および 1.0 の場合の解は存在しない。 $\overline{F_2}' = 0.01$ に対しては $(2 \cdot 36)$ より $(x - 0.01)(y - 0.0001) =$
 0.000001 。さきと同様に、 x , y は同じ程度の大ききさとする、近似的に、 $x = 0.01$, $\eta_2 = 1 - 0.01^{\frac{1}{3}} =$
 0.784 。いま 1 根はまず $y = 0$ とおくと $(2 \cdot 37)$ より $x = 1$ よって、上の式より

$$y = 0.0001 + \frac{0.000001}{0.99} \approx 0.0001$$

これ以上近似度を高めてもあまり変らない。よって、 $\eta_2 = 0.0465$ となる。

7. 式 $(2 \cdot 48)$ をさらに変形する。

$$h = h_1 + h_2 = h_1' + h_2' \quad \therefore (q-1)h_2 = (1-p)h_1. \quad \text{そこで } r = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1-p}{q-1} \quad \text{とおくと,}$$

$$p = 1 + r - r q$$

式 $(2 \cdot 48)$ は

$$(F_1')^2 = \left[(1+\varepsilon)(F_2')^2 \cdot \frac{p}{q} - \frac{1}{2}(1+q)p \right] r$$

かき直して整理すると、

$$q^3 - \frac{q^2}{r} - \left[\frac{2}{r^2} (F_1')^2 + \frac{1}{r} + 2(1+\varepsilon)(F_2')^2 + 1 \right] q + 2(1+\varepsilon)(F_2')^2 \left(\frac{1+r}{r} \right) = 0$$

(2)

この式は、 $(F_1') = 0$ のとき

$$\left(q - \frac{1+r}{r} \right) (q^2 + q - 2(1+\varepsilon)(F_2')^2) = 0$$

(3)

となり $q \neq \frac{1+r}{r}$ のときに、式 $(2 \cdot 49)$ に帰着する。また $(F_1') \neq 0$ のときには

$$\left(q - \frac{1+r}{r} \right) (q^2 + q - 2(1+\varepsilon)(F_2')^2) = \frac{2}{r^2} (F_1')^2$$

(4)

そこで $r = 0.5$, $F_1' = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$ を代入すると、

$$(q-3)(q^2 + q - 2.02 \times (F_2')^2) = 0.08$$

(5)

$$q^2 + q - 2.02 \times (F_2')^2 = 0 \quad \text{の根} \quad \text{すなわち, } q = -\frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 + 8.08(F_2')^2})$$

を q_1 , q_2 とおくと、

$$(q-3)(q-q_1)(q-q_2)=0.08 \quad (6)$$

となり、式(6)を満足する q の値を求めればよいが、式(5)が解となる。ただし、えられた q について、式(2・57)、(2・58)によって吟味する必要がある。

$$8. \text{ 流量を } Q_c \text{ とおくと, } Q_c = \frac{\pi}{4} D^2 V_c \text{ であるから, } V_c = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 1}{3.14 \times 0.6^2} = 3.54 \text{ m/sec}$$

表1・1より $\rho_1 = 0.99823 \text{ g/cc}$, $\rho_2 = 0.99973 \text{ g/cc}$ であって $\Delta\rho = 0.00150$

$$\therefore \frac{\Delta\rho}{\rho_2} = 0.00150 \quad \varepsilon g = 0.00150 \times 9.80 = 0.0147 \text{ (m/sec}^2\text{)} \quad \text{そこで式(3・2)より,}$$

$$\frac{3.54}{\sqrt{0.0147 z_0}} = 3.25 \left(\frac{z_0}{0.6} \right)^2 \quad \therefore z_0 = 1.600 \text{ m}$$

すなわち、1.60 m以上の高さに設ければよい。

$$9. \beta = 0.030 / 1.030 = 0.0291. \text{ 式(3・8)より } K = 0.64 \text{ とおくと,}$$

$$Q_c^2 = 6.32 K^2 \cdot \beta g y_0^5 = 6.32 \times 0.64^2 \times 0.0291 \times 9.80 \times 2^5 = 23.6$$

$$\therefore Q_c = 4.86 \text{ m}^3/\text{sec}$$

限界流速は

$$V_c = \frac{Q_c}{\frac{\pi}{4} D^2} = \frac{4.86}{\frac{3.14}{4} \times D^2} = \frac{6.19}{D^2}$$

$D=1.0 \text{ m}$ では $V_c = 6.19 \text{ m/sec}$, $D=2.0 \text{ m}$ では $V_c = 1.55 \text{ m/sec}$ となる。すなわち取水管径によって、限界流速が異なる点は注目すべき点である。

$$10. \text{ Fig. 3・11 を利用する。まず } h_r/a = 613.5 = 1.71. \text{ そこで Fig. 3・11 で } \alpha = 1.1 \text{ の場合には,}$$

$Fi' = 1.29$, よって,

$$(u a)_i = (Fi') \cdot \sqrt{\beta g a} = 1.29 \times \sqrt{0.0005 \times 9.80 \times 3.50} = 0.169 \text{ m/sec}$$

$$\therefore Q a = 0.169 \times 3.5 \times 1.0 = 5.92 \text{ m}^3/\text{sec}$$

$$11. \text{ 式(4・5)を用いる。 } \Delta\rho/\Delta y = -0.030/\Delta y. \text{ よって式(4・5)より,}$$

$$\left(\frac{du}{dy} \right)^2 = -\frac{g}{\rho} \left(\frac{\Delta\rho}{\Delta y} \right) \cdot Ri = \frac{2 \times 980}{1.000} \times \frac{0.030}{\Delta y} = 58.8/\Delta y$$

あるいは $du/dy = 7.688/(\Delta y)^{1/2}$ となるので次表をうる。

中間層の厚さ	1 cm	3 cm	5 cm
du/dy	7.688	4.438	3.438
$d\rho/dy$	0.030	0.010	0.006

これから、中間層の厚さが厚くなるほどゆるい速度勾配で乱れやすくなる。間隙の場合には

$$du/dy \quad 5.000, \quad 1.667, \quad 1.000$$

であるから、安定であるといえよう。もし、上層速度が 8 cm/sec であれば、中間層が 1 cm のときに不安定、 3 cm , 5 cm のときに安定であるという結果をうる。

12. 式(4・8)を用いる。

$$\begin{aligned} \textcircled{H}_c &= 0.178 (\nu_2 \varepsilon g)^{\frac{1}{3}} / u_0 \\ \therefore (u_0)_c &= (\nu_2 \varepsilon g)^{\frac{1}{3}} / 0.178 = 5.618 \times (0.0150 \times 980)^{\frac{1}{3}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{3}} = 13.8 \varepsilon^{\frac{1}{3}} \\ \therefore \varepsilon &= 0.0005 \quad \text{では} (u_0)_c = 1.095 \text{ cm/sec} \\ \varepsilon &= 0.001 \quad \quad \quad = 1.380 \text{ cm/sec} \\ \varepsilon &= 0.002 \quad \quad \quad = 1.740 \text{ cm/sec} \\ \varepsilon &= 0.003 \quad \quad \quad = 1.990 \text{ cm/sec} \end{aligned}$$

となる。

13. (4・13)を用いる。

$$\left. \begin{aligned} Um &= 3.5 \times 10^{-4} (1.20 - 1.15) u_c = 1.75 \times 10^{-4} u_c \\ Um &= 3.5 \times 10^{-4} (1.30 - 1.15) u_c = 5.25 \times 10^{-4} u_c \\ Um &= 3.5 \times 10^{-4} (1.50 - 1.15) u_c = 1.225 \times 10^{-4} u_c \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{となるので1.2} \\ \text{の各場合を計算} \\ \text{して} \end{array}$$

次表をうる。

表 U_m (cm/sec)

ε		0.0005	0.001	0.002	0.003
u_c cm/sec		0.0005	0.001	1.740	1.990
u_0 cm	1.2 u_c	1.916×10^{-5}	2.415×10^{-5}	3.045×10^{-5}	3.483×10^{-5}
	1.3 u_c	5.749	7.245	9.135	10.448
	1.5 u_c	13.413	16.905	21.315	24.378

14. リチャードソン数は $Ri = -\frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dy} \right) / \left(\frac{du}{dy} \right)^2$ で求める。

式(4・26)(4・27)を用いて計算すると次表をうる。

中間層の厚さ (cm)	Ri	$1+10Ri$	$\varepsilon y/E_0$	$1+3.33Ri$	Ey/E_0
1	1.18	12.8	0.28	4.93	0.091
3	10.2	103	0.098	34.97	0.005
5	28.3	284	0.059	95.24	0.001