

地下密度流

嶋 祐 之

地下密度流の具体的な例としては、海岸附近に現われる地下水流を挙げることができる。すなわち図-1に示すように、陸側から海岸に向かって地下水流が流出している場合、海岸附近で井戸を掘ると、ある深さまでは淡水層となっているが、それより深い層では塩水となり、塩水層がクサビ状に陸側に向かって侵入していることが観測されている。

一般に、密度差をもつ二種の流体が相接して存在し、それらが違った速度で運動している場合、たとえその密度差がきわめて小さくとも、またその境界がはっきりした境界面を持ったときでも持たないときでも、その密度差の故に単一流体の運動とは著しく異った運動を呈するような流れを密度流と呼んでいる。密度流は、開水路、管路の流れあるいは海洋、気象の分野でも数多く現われるものであるが、本文ではとくに地下水中に現われる密度流現象を対象に考察を進めて行くこととする。

海岸地下水の研究は Bordon, Glyben, Herzberg による先駆的な研究があるが、これに解析的な方法を施しその定常流としての特性を初めて明かにしたものとして Nomitsu, Toyohara & Kamimoto¹⁾の研究がある。しかしこの研究は、海岸附近で卓越する鉛直流速の処理に検討の余地を残したが、これはその後の研究²⁾によって補われている。

一方、Henry³⁾は、垂直および水平な滲潤面を有する半無限の滞水層の場合に対して hodograph 法により厳密解を与えている。この方法は、Hamel⁴⁾によって行はれた単一流体の堤体への浸透流に関する研究を地下密度流の場合に応用発展させたものである。また Glove⁵⁾は水平方向に浸潤面を有する場合の近似解を提出しているが、これは Henry が与えた解と一致するものである。

さらに Rumer & Harleman⁶⁾は有限域の場合に対し、Dupuit の仮定から出発して近似式を求め、実験と比較し良好な結果を得ている。

以上の研究はほとんどが被圧地下水の場合に限られているが、自由地下水の場合には、自由表面の形状が確定しないと境界条件が定まらないということから現在のところ厳密解はまだ求められていない。

非定常運動に関しては、一層の場合程多くの研究がなされていない。Keulegan, Rumer & Harleman⁶⁾は、鉛直な隔壁によって仕切られていた二層が、隔壁を取り除いた後に生ずる運動いわ

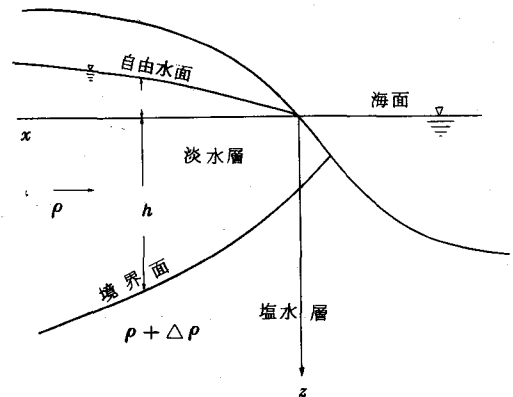


図-1 海岸地下水

ゆる逆転流について研究を行った。しかしこの研究では上層側の補給流量を考慮していないので、無限時間後には境界面は水平になってしまい、塩水楔の実状とは合致しない面も出て来る。この欠点を補うため Bear & Dagan⁷⁾ は、運動方程式および連続の方程式から出発して二層流の非定常運動を取扱っている。この解法の特色は上層の淡水流量の場所的分布を仮定し乍ら近似度を高めて行くことにある。しかし、これらの研究はいずれも被圧滞水層に対して行われ、また海岸線部における浸入する塩水層の厚さが特別の場合にしか説明できないと云う欠点がある。

以上が、これまでに行われて来た地下密度流に関する解析的な研究の概要であるが、本文ではこれらの研究を基礎に、自由水面を有する場合の地下密度流の定常および非定常運動に対する解析結果を紹介することとする。

1. 定 常 運 動

自由表面を持つ地下密度流の定常運動を取扱うにあたって、つぎのような仮定を設ける。

- ①滞水層は自由表面を有し、流れは二次元的である。
- ②滞水層にある媒体は均質かつ等方であり、滞水層は深さ一定の不透水層上に存在する。
- ③滞水層には淡水および塩水の二層が存在し、その境界面は明瞭なものであって、塩分の分散は無視する。
- ④塩水槽に接する部分を除いては、浸入した塩水層の厚さは、その長さに比べて小で、Dupuit の準一様流の仮定が成立するものとする。すなわち、鉛直速度の影響は小さいとし、圧力は静水圧分布をなし、また鉛直面内の水平速度は一様であると考ええる。

さて、以上の仮定のもとにおいて、図-2に示すように、淡水側の水位が塩水側の水位より高く、滞水層に浸入した塩水楔が平衡状態に達した時を考える。塩水楔中の流れは静止しているので、運動方程式および連続の方程式は淡水層のみに対して立てれば良い。

滞水層中の流れは緩やかであって、Darcy 法則が成立するものとすれば、運動方程式はつぎのようになる。

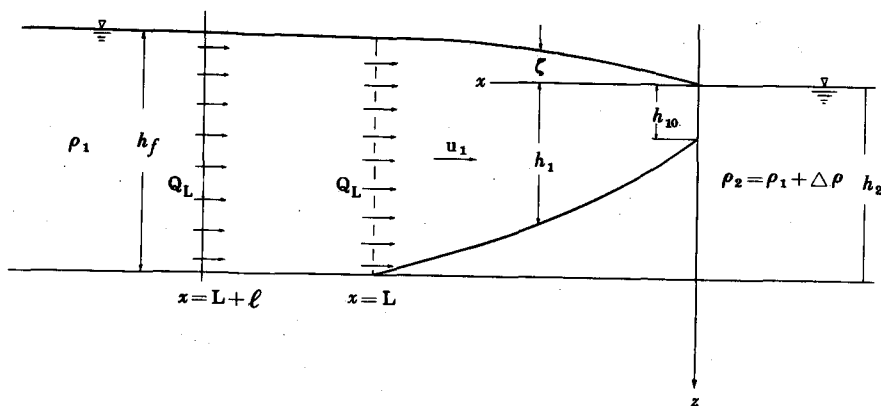


図-2 自由表面を持つ滞水層

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{g}{k} u_1 &= 0 \\ \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z} + g + \frac{g}{k} w_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

また連続の方程式は次式で示される。

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

こゝに

k : 速度の次元を持つ, 透水係数

ρ_1 : 淡水の密度, g : 重力加速度

u_1, w_1 : Darcy 的な意味での浸透流速の x, z 成分

p_1 : 淡水層の圧分の強さ

上式を解くにあたり, 前述の仮定④より $w_1/k \ll 1$ とすれば, 式(1)の第2式より直ちに

$$p_1 = \rho_1 g (\zeta + z) \quad (3)$$

が求められる。ただし, ζ は自由表面の高さを表わし, $z = -\zeta$ で $p_1 = 0$ である。式(3)を式(1)に代入すれば

$$u_1 = -k \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (4)$$

上式より, u_1 は z に無関係であることを考慮し, さらに w_1 は小さいとして式(2)を $z = -\zeta$ から $z = h_1$ まで積分すれば

$$u_1 (\zeta + h_1) = Q_L \quad (5)$$

こゝに, h_1 は境界面までの深さを表わし, また Q_L は単位巾当りの淡水流量で x 軸の正方向への流量を+と考える。一方, 境界面では圧力が連続でなければならないから, 淡水側と塩水側から考えた圧力を等置すると

$$\rho_1 g (\zeta + h_1) = (\rho_1 + \Delta\rho) g h_1$$

$$\therefore \zeta = \epsilon h_1 \quad (6)$$

こゝに, $\epsilon = \Delta\rho/\rho_1$, $\Delta\rho$ は塩水と淡水との密度差を表わす。式(6)は Herzberg の条件式と呼ばれるものである。式(4)および(6)を, 式(5)に代入して u_1 および h_1 を消去し, さらに積分を行なえば,

$$\frac{1+\epsilon}{2\epsilon} \zeta^2 = -\frac{Q_L}{k} x + C$$

こゝで, 境界条件 $x=0$ で $\zeta=0$ を考慮すれば

$$\frac{1+\epsilon}{2\epsilon} \zeta^2 = -\frac{Q_L}{k} x \quad (7)$$

となり, 淡水流量 Q_L が分れば境界面形状は式(6)を上式に代入することにより決定される筈である。

淡水流量 Q_L は, 図-2を参照してつぎのように求めることができる。すなわち, $L + \ell > x > L$ の範囲では, 淡水層のみ存在し, Dupuit - Forchheimer 式が成立するので, 次式が得られる。

$$|Q_L| = k \frac{h_f^2 - (h_s + \zeta_L)^2}{2\ell} \quad (8)$$

ここに、

h_f, h_s : それぞれ淡水および塩水側の水槽水深

ζ : 楔先端における自由表面の高さ

L, ℓ : それぞれ塩水楔および単一淡水層の長さ

一方、式(6)より $\zeta_L = \varepsilon h_s$ であることと、式(7)より

$$\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \zeta_L^2 = -\frac{Q_L}{k} L \quad (9)$$

であることを考慮して、式(8)の h_s および ζ_L を消去すれば、次式が求められる。

$$\frac{2|Q_L|}{k} \left(\ell + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} L \right) = h_f^2 \quad (10)$$

上式は淡水流量を与える式にほかならない。塩水楔の長さ L は一応式(9)より

$$L = \frac{k\varepsilon(1+\varepsilon)}{2|Q_L|} h_s^2 \quad (11)$$

として求められる。いま、塩水楔の先端が淡水側的水槽に近い場合には、式(10)の左辺カッコ内の第1項は第2項に比し省略できる。またこのような場合には、両水槽の水位差を Δh とすれば、 $h_s = \Delta h / \varepsilon$ であって

$$h_f = h_s + \Delta h = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \Delta h$$

とおけるので、式(10)から淡水流量をつぎのように近似的に表わすことが可能となる。

$$|Q_L| = \frac{k}{2L} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} (\Delta h)^2 \quad (12)$$

式(6)および(7)において $x=0$ とおくと、 $\zeta=0$ あるいは $h_1=0$ となり、海測への淡水の流出速度は無限大とする。この事は実際の現象と矛盾することとなるが、その原因は淡水層の全域にわたって単一様流の仮定を行ったためである。Henry³⁾はこの矛盾を解決するため二次元流としての厳密な解析を行っているが、いまここでは野満²⁾らの手法に従って鉛直流速の影響を考慮し、 $x=0$ の淡水層の厚さを求めることとする。 $x=0$ すなわち海岸線附近では u_1 が大きくなり、従って式(4)あるいは(6)より $\partial h / \partial x$ が大きくなって w_1 が無視出来なくなる。そこで、連続の方程式(2)を積分すると

$$w_1 = - \int_{-\zeta}^z \frac{\partial u_1}{\partial x} dz + w_{z=-\zeta} \quad (13)$$

一方、式(4)、(5)および(6)より

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{Q_L^2}{k} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \frac{1}{(h_1 + \zeta)^3} \quad (14)$$

上式を式(13)へ代入し、さらに自由表面の変化は境界面の変化に比べて小さい事を考慮し

$w_{z=-\zeta} \neq 0$ とおけば

$$w_1 = -\frac{Q_L^2}{k} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \frac{z+\zeta}{(h_1+\zeta)^3} \quad (15)$$

これを運動方程式(1)の第2式に代入すれば、 $x=0$ 附近の淡水層内の圧力分布を示す式として次式が得られる。

$$p = \rho_2 g (z+\zeta) + \frac{\rho_1 g Q_L^2}{2 k^2} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \frac{(z+\zeta)^2}{(h_1+\zeta)^3} \quad (16)$$

こゝで、 $x=0$ における淡水層の厚さ h_{10} を求めるため、淡水層と塩水層の境界面での圧力が等しいとおけば

$$\rho_1 g h_{10} + \frac{\rho_1 g Q_L^2}{2 k^2} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \frac{1}{h_{10}} = (\rho_1 + \Delta \rho) g h_{10}$$

これより、 h_{10} がつぎのように求まる。

$$h_{10} = \frac{|Q_L|}{k} \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} \div \frac{Q_L}{2 \varepsilon k} \quad (17)$$

式(12)を用いて書き直せば

$$h_{10} = 0.353 \frac{(\Delta h)^2}{\varepsilon^2 L} \quad (18)$$

また、境界面の方程式は、式(6)および(7)より ε を消去すると共に上述の事項を考慮して次のように表わすことが出来る。

$$\frac{h_1^2}{2} = -\frac{Q_L}{\varepsilon (1+\varepsilon) k} x + \frac{h_{10}^2}{2} \quad (19)$$

上式に式(17)を代入して h_{10} を消去し、 ε に関する微小項を省略すれば

$$\frac{\varepsilon k}{|Q_L|} h_1 = (2 \frac{\varepsilon k}{|Q_L|} w + 0.5)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

さらに式(12)を用いて $|Q_L|$ を消去すると

$$\frac{2 \varepsilon^2 L}{(\Delta h)^2} h_1 = (4 \frac{\varepsilon^2 L}{(\Delta h)^2} x + 0.5)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

が得られる。

Rumer & Harleman⁶⁾ は被圧地下密度流の境界面に対する近似式として

$$\frac{\varepsilon k}{|Q_L|} h_1 = (2 \frac{\varepsilon k}{|Q_L|} x + 0.55)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

を与えているが、自由地下密度流に対する式(20)と比較すれば両者は非常に良く似ていることが注目される。また Henry³⁾ が被圧された半無限滞水層に対して与えた厳密解とも良く一致するものであり、これらの関係は図-3で示されるとおりである。

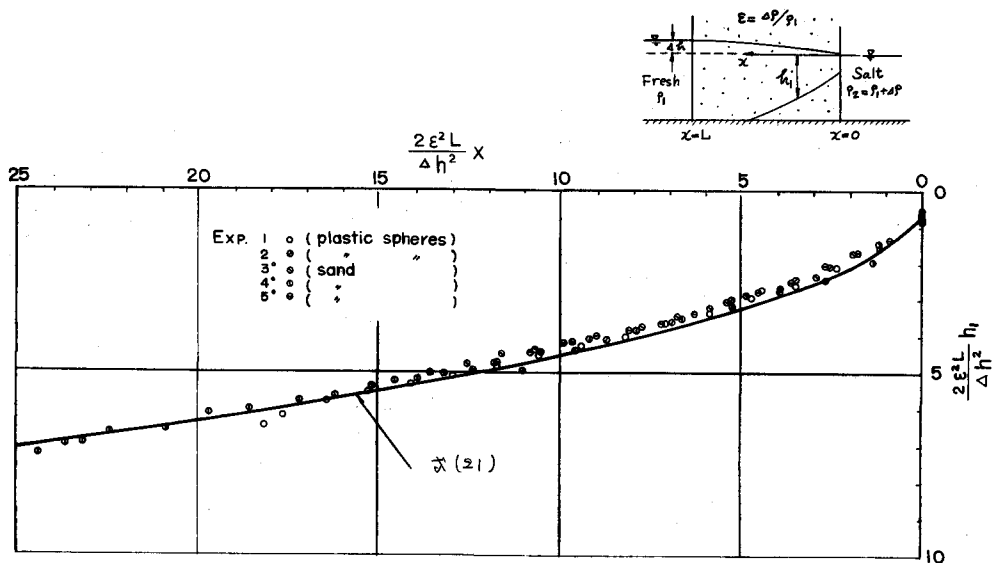


図-4 境界面形状の実験結果と解析結果との比較

図-4は、自由表面を持つ場合の定常的な塩水楔について、境界面形状の実験結果と式(21)との比較を行ったものである。実験は東大、水理研究室で行はれ、媒体としては $k = 0.5 \text{ cm/sec}$ のプラスチック球および $k = 1.45 \text{ cm/sec}$ の砂が用いられた。

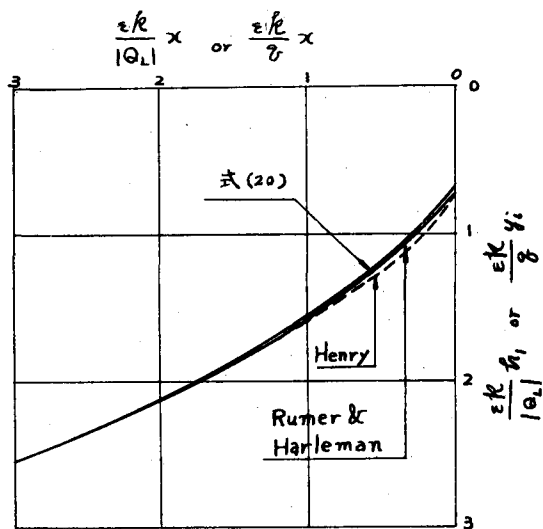


図-3 境界面形状についての各解の比較

2. 非定常運動

1) 変数変換を行う解法

地下密度流の非定常運動は、定常運動に比して複雑であるので、解析にあたっては前述の仮定①～④が満足されるものとし、海岸線付近で卓越する鉛直流速の影響については考慮しないものとする。

また塩水楔の進行速度は比較的緩慢であるとして、慣性項は無視する。さらに、上層および下層流代の持つ粘性係数は等しいとする。

上述の仮定より、運動方程

式は上層および下層に対し、それぞれ Darcy 法則が成立つので

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{k}{\rho_1 g} \frac{\partial p_1}{\partial x} \\ u_2 &= -\frac{k}{\rho_2 g} \frac{\partial p_2}{\partial x} \end{aligned} \quad (23)$$

圧力分布は静水圧分布と考えれば、 p_1 および p_2 はそれぞれ次式のように表わされる。

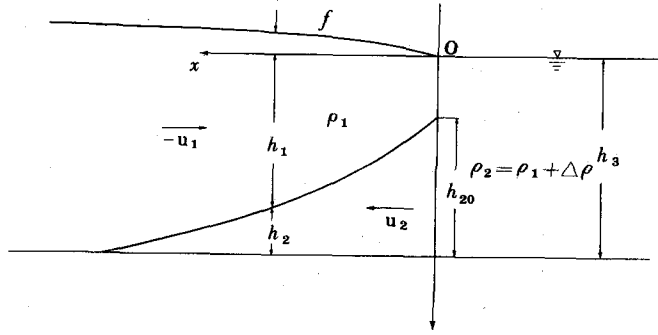


図-5 塩水楔の非定常運動

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho_1 g (z + \zeta) \\ p_2 &= \rho_1 g (h_1 + \zeta) + \rho_2 g (z - h_1) \end{aligned} \quad (24)$$

上式を式(23)に代入するにあたり、 ζ は h_1 に対し ϵ のorderであることより、 ϵ^2 のorderを省略し、さらに

$$h_1 = h_s - h_2$$

を考慮すれば次式が求められる。

$$\begin{aligned} u_1 &= -k \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ u_2 &= -k \left\{ (1 - \epsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

一方、連続の方程式は、透水層の空隙率を λ とすれば

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial}{\partial t} (\zeta + h_s - h_2) + \frac{\partial}{\partial x} \{ u_1 (\zeta + h_s - h_2) \} &= 0 \\ \lambda \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_2 h_2) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

式(25)を式(26)に代入して、 u_1 および u_2 を消去するにあたり、 ζ は h_2 に対し ϵ のorderであることを考慮し微小項を省略すると共に、 h_s ＝一定であることを考慮すれば、この場合に対する地下密度流の基礎方程式として次式が導われる。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\lambda}{k} \frac{\partial h_2}{\partial t} - h_s \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\lambda}{k} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(h_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 h_2^2}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

こゝで、上二式を和を求め、積分すれば

$$h_s \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial h_2^2}{\partial x} = C(t) \quad (28)$$

となるが、簡単のため $C(t)$ は零に等しいと仮定し、式(27)の第2式と代入すれば、次式のような h_2 のみの微分方程式が求められる。

$$\frac{\lambda}{k} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 h_2^2}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon}{2 h_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(h_2 \frac{\partial h_2^2}{\partial x} \right) = 0 \quad (29)$$

方程式が熱伝導型であることにより

$$\eta = x / m\sqrt{t} \quad (30)$$

なる変数変換を行えば、式(29)は次のように常微分化される。

$$\frac{\lambda m^2}{k \varepsilon} \eta \frac{dh_2}{d\eta} + \frac{d^2 h_2^2}{d\eta^2} - \frac{1}{h_s} \frac{d}{d\eta} \left(h_2 \frac{dh_2^2}{d\eta} \right) = 0 \quad (31)$$

さらに、 $x=0$ での h_2 の値を h_{20} とし、無次元化するため

$$\left. \begin{aligned} r &= h_2 / h_{20}, & m &= 2\sqrt{k \varepsilon h_{20} / \lambda} \\ \xi &= \sqrt{2} \eta, & p &= h_{20} / h_s \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

とおけば、式(31)は次のように変形される。

$$\frac{d^2 r^2}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dr}{d\xi} - \beta \frac{d}{d\xi} \left(r \frac{dr^2}{d\xi} \right) = 0 \quad (33)$$

上記微分方程式を解くに当って、進入する塩水楔の先端付近に注目する。塩水楔の先端では $r=0$ であるが、それに対応する ξ の値を $\xi=e$ とする。いま、 r を $\xi=e$ の近傍で Taylor 展開すれば、 $r(\xi)$ は一般に次式で表わされる。

$$r(\xi) = r(e) + \frac{\dot{r}(e)}{1!} (\xi - e) + \frac{\ddot{r}(e)}{2!} (\xi - e)^2 + \frac{\dddot{r}(e)}{3!} (\xi - e)^3 + \dots \quad (34)$$

そこで、展開式(34)が基礎方程式(33)を満足するように、 $r(e)$ 、 $\dot{r}(e)$ 、 $\ddot{r}(e)$ 、……および e の位を求めて行くこととする。

まず、 $\dot{r} \neq \infty$ 、 $\ddot{r} \neq \infty$ と考え、式(33)において $r=0$ とすれば

$$r(r+\xi) = 0$$

$\dot{r} \neq 0$ とすれば

$$\dot{r} + \xi = 0 \quad (35)$$

これより

$$r(e) = 0, \quad \dot{r}(e) = -e \quad (36)$$

つぎに、式(33)を1階微分すると

$$\ddot{r}\ddot{r} + r\ddot{\ddot{r}} + 2\dot{r}\ddot{\dot{r}} + \dot{r} + \xi\dot{r} - \beta(2\dot{r}^3 + 2r \cdot 2\dot{r}\ddot{r} + 2r\dot{r}\ddot{r} + r^2\ddot{\ddot{r}}) = 0$$

となるが、こゝで式(36)の第1式を代入すれば

$$3\dot{r}\ddot{r} + \dot{r} + \xi\dot{r} - 2\beta\dot{r}^3 = 0$$

さらに式(36)の第2式を考慮すれば

$$\ddot{r}(e) = -\frac{1}{2} + \beta e^2 \quad (37)$$

以下同様の計算を繰り返すことにより、5階の微係数までを計算すれば、式(33)を満足する級数解として次式が導かれる。

$$\begin{aligned} r(\xi) = & -e(\xi - e) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\beta e^2}{2}\right)(\xi - e)^2 + \left(-\frac{1}{72} + \frac{5}{18}\beta e - \frac{1}{2}\beta^2 e^3\right)(\xi - e)^3 \\ & + \left(\frac{1}{576e^2} + \frac{5}{96}\beta + \frac{29}{144}\beta^2 e^2 + \frac{5}{8}\beta^3 e^4\right)(\xi - e)^4 \\ & + \left(-\frac{11}{86400e^3} + \frac{7\beta}{4320 \cdot e} - \frac{2437}{10800}\beta^2 e + \frac{1}{3}\beta^2 e^3 - \frac{7}{8}\beta^4 e^5\right)(\xi - e)^5 \\ & + \dots \end{aligned} \quad (38)$$

この級数の収束性を数学的に厳密に証明することは出来ないが、然し後述の数値計算結果より e は 1 に近い値であり、また $0 < P < 1$ であるので、 $\beta e < 1$ と仮定する。そうすれば、式(38)より $(\xi - e)^n$ の係数中最大となる項でも、その値が $n(\beta e)^n$ を超えることはないと見なされるので、それらの n 項の和である係数 A の値は、たかだか n が大きくなっても $n^2(\beta e)^n$ を超えるようなことはない。したがって前記仮定、 $\beta e < 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\beta e)^n = 0$$

と考えられ、収束半径は無限大となる。

塩水楔の先端を示す $\xi = e$ の値は、境界条件

$$\xi = 0, \quad r = 1 \quad (39)$$

を式(38)に代入することにより求められる。すなわち

$$\begin{aligned} 1 = & e^2 \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} + \frac{1}{576} + \frac{11}{86400} + \dots \right) \\ & + \beta e^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{18} + \frac{5}{96} - \frac{7}{4320} + \dots \right) \\ & + \beta^2 e^6 \left(\frac{1}{2} - \frac{29}{144} + \frac{2437}{10800} + \dots \right) \\ & + \beta^3 e^8 \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{3} + \dots \right) \\ & + \beta^4 e^{10} \left(\frac{7}{8} + \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

こゝで近似的に βe^4 の項まで考えれば

$$e^2 = \frac{-2.7848 + \sqrt{7.7552 + 14.58020\beta}}{2\beta} \quad (40)$$

すなわち、 e は β の値によって異なり、次のような関係が成立する。

β :	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
e :	1.048	1.033	1.014	1.009	0.996	0.986

また、 βe^4 の項まで考慮することは、式(30)の代りに近似式として次式を採用したこととなる。

$$r(\xi) = -e(\xi - e) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\beta e^2}{2}\right)(\xi - e)^2 + \left(-\frac{1}{72} + \frac{5}{18}\beta e\right)(\xi - e)^3 + \frac{5}{96}\beta(\xi - e)^4 \quad (41)$$

図-6は、式(41)

より β を parameter として、 r と ξ との関係をグラフに表わしたものである。

進入する塩水楔の先端の位置 x_t は、式(30)および(32)において $\xi = e$ とすれば、次式で示される。

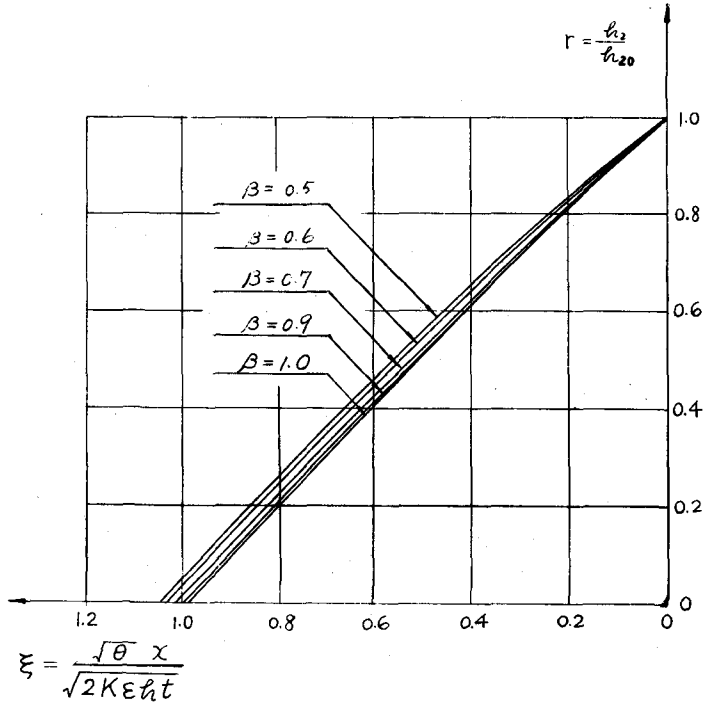


図-6 進入する塩水楔の形状

$$x_t = e \sqrt{\frac{2k\epsilon h_{20}}{\lambda}} t \quad (42)$$

ただし、 e の値は β の値に応じて前表のように定められる。Rumer & Harleman⁶⁾は、塩水と淡水とが鉛直隔壁によって仕切られていたとき、隔壁が取り除かれた後に生ずる塩水楔の進入状況を解析した。この際、 $x=0$ における境界面は常に滞水層の厚さの $1/2$ 点にあるとし($\beta=1/2$)、近似解として次式を与えている。

$$x_t = \sqrt{\frac{k\epsilon h_s}{\lambda}} t \quad (43)$$

この場合に対する解は、前表および式(42)より

$$x_t = 1.05 \sqrt{\frac{k \varepsilon h_s}{\lambda}} t \quad (44)$$

となる。また Bear & Dagan⁷⁾ も同様な場合を $\beta = 1$ の条件で考え

$$x_t = 1.32 \sqrt{\frac{k \varepsilon h_s}{\lambda}} t \quad (45)$$

としている。これに対応する解を、前表および式(42)より求めると、次のようになる。

$$x_t = 1.39 \sqrt{\frac{k \varepsilon h_s}{\lambda}} t \quad (46)$$

すなわち、本解析の結果は、楔の進入長に関し、他の結果よりやや大き目の値を示すものであるが、 β のいかなる値に対しても楔の進入長や形状を与える事が出来る点、大きな特色を持つものである。

一方、変数変換による上述の解法は、境界条件として $\xi = 0$ で $\tau = 1$ としている。このことは、 $x = 0$ と $t = \infty$ の状態とを同時に表わしているの、淡水の補給がなく、終局的には軽い流体が重い流体の上に乗って水平な2層をなす場合にしか当てはまらない。従って、塩水楔が進入しはじめ、ある所まで行って平衡状態に達するような場合には適用できないと云う欠点がある。

2) 境界面形状を仮定する解法

侵入する塩水楔の最終的な平衡状態については、定常運動の項において述べたとおりである。ここでは、平衡状態に達するまでの塩水楔の非定常運動とくに楔先端の移動状態につき考察を行う。解析に当たっての基本的な仮定は前と同様であるとすれば、平衡状態に達した境界面形状および流量はそれぞれ

$$\frac{k \varepsilon}{|Q_L|} h_1 = \left(2 \frac{k \varepsilon}{|Q_L|} x + 0.5 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

$$Q_L = -\frac{k(1+\varepsilon)}{2L\varepsilon} (\Delta h)^2 \quad (22)$$

で示される。式(20)は放物線を表わす方程式であり、この放物線の頂点は

$$h_1 = 0 \quad x = -|Q_L| / 4k\varepsilon \quad (47)$$

にある。そこで、任意時刻においても、この最終的な頂点を頂点として共有し、放物線状をなして、塩水楔が侵入すると仮定する。そしてこの形状より動水勾配を求め、先端の位置の時間的变化を知らうとするものである。

いま楔先端の位置を $x = x_t$ で表わせば、そこでは $h_1 = h_s$ となるので、前述の仮定を満足する境界面形状の方程式は次式で表わされる。

$$h_1 = \frac{h_s}{x_t + \frac{|Q_L|}{4k\varepsilon}} \left(x + \frac{|Q_L|}{4k\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (48)$$

自由表面の変化は小さいから、直ちに最終的な状態に達した場合を考えても、動水勾配の変化に及ぼす影響は小である。従って自由表面形状は

$$\zeta = p x^{\frac{1}{2}} \quad (49)$$

$$P = \Delta h / \sqrt{L} \quad (50)$$

$$H = (1 + \varepsilon)(h_s - h_1) + (h_1 + \zeta) \quad (51)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x_t} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x=x_t} - \varepsilon \frac{\varepsilon h_1}{\partial x} \Big|_{x=x_t}$$

(52)

Darcy 法則より

$$\frac{dx_t}{dt} = - \frac{k}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial x} \quad x = x_i \quad (53)$$

図-7 境界面形状の仮定

$$\begin{aligned} \frac{dx_t}{dt} &= -\frac{k}{\lambda} \left[\frac{P}{2x_t^{1/2}} - \frac{\varepsilon h_s}{(x_t + \frac{Q_L}{4k\varepsilon})^{1/2}} \frac{1}{2(x_t + \frac{Q_L}{4k\varepsilon})^{1/2}} \right] \\ &= -\frac{k}{\lambda} \left[\frac{P(x_t + \frac{Q_L}{4k\varepsilon}) - \varepsilon h_s x_t^{1/2}}{2x_t^{1/2}(x_t + \frac{Q_L}{4k\varepsilon})} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{|Q_L|}{4 k \varepsilon} = \frac{(\Delta h)^2}{8 \varepsilon^2 L}$$
$$\frac{2\sqrt{x_t} \left\{ x_t + \frac{(\Delta h)^2}{8\varepsilon^2 L} \right\}}{\frac{\Delta h}{\sqrt{L}} x_t - \varepsilon h_s \sqrt{x_t} + \frac{1}{8L\sqrt{L}} \frac{(\Delta h)^3}{\varepsilon^2}} dx_t = -\frac{k}{\lambda} dt \quad (54)$$
$$X = \sqrt{x_i} \quad (55)$$
$$\frac{4 \frac{\sqrt{L}}{\Delta h} X^2 \left\{ X^2 + \frac{(\Delta h)^2}{8 L \varepsilon^2} \right\}}{\left(X - \frac{\varepsilon h_s \sqrt{L}^2}{2 \Delta h} \right) + \frac{(\Delta h)^4 - 2 L^2 \varepsilon^4 h_s^2}{8 L \varepsilon^2 (\Delta h)^2}} dx = - \frac{k}{\lambda} dt \quad (56)$$

こゝで、さらに次の置換を行なえば、式(56)は以下のように変形される。

$$\left. \begin{aligned} y &= X - \frac{\varepsilon h_s \sqrt{L}}{2\Delta h} ; & \eta &= \frac{\varepsilon h_s \sqrt{L}}{2\Delta h} \\ \xi &= \frac{2L^2 \varepsilon^4 h_s^2 - (\Delta h)^4}{8L\varepsilon^2 (\Delta h)^2} = \eta^2 - \frac{(\Delta h)^2}{8\varepsilon^2 L} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\frac{(y+\eta)^2 \left\{ (y+\eta)^2 + \frac{(\Delta h)^2}{8L\varepsilon^2} \right\}}{y^2 - \xi} dy = - \frac{k\Delta h}{4\lambda \sqrt{L}} dt$$

上式左辺の係数を、有理整式と分数式とに分け、さらに

$$Y = y/\eta \quad (58)$$

とにおいて式(57)第3式を考慮しながら整頓すれば次式が求められる。

$$(Y^2 + 4Y + 7) dY + \left(3 + \frac{\xi}{\eta^2}\right) \frac{2Y}{Y^2 - \frac{\xi}{\eta^2}} dY + \frac{2(1 + 3\frac{\xi}{\eta^2})}{Y^2 - \frac{\xi}{\eta^2}} dY = - \frac{k\Delta h}{4\lambda \sqrt{L} \eta^3} dt. \quad (59)$$

こゝで係数 ξ の正負を検討する。式(57)より ξ の正である条件は

$$2L^2 \varepsilon^4 h_s^2 - (\Delta h)^4 > 0$$

或は、 $\Delta h < \sqrt{2} L h_s \cdot \varepsilon$

本解析と同時に行われた実験では、 $L = 200\text{cm}$ 、 $(h_s)_{\min} = 25\text{cm}$ であるので

$$\Delta h < 84 \varepsilon \text{ cm}$$

またこの際の Δh は、上式を十分満足する範囲にあるので、 $\xi > 0$ として計算を進める。これより、式(59)を積分すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{Y^3}{3} + 2Y^2 + 7Y + \left\{ 3 + \frac{\xi}{\eta^2} + \frac{\eta}{\sqrt{\xi}} \left(1 + 3\frac{\xi}{\eta^2}\right) \right\} \log \left| Y - \frac{\sqrt{\xi}}{\eta} \right| \\ & + \left\{ 3 + \frac{\xi}{\eta^2} - \frac{\eta}{\sqrt{\xi}} \left(1 + 3\frac{\xi}{\eta^2}\right) \right\} \log \left| Y + \frac{\sqrt{\xi}}{\eta} \right| = - \frac{k\Delta h}{4\lambda \sqrt{L} \eta^3} t + C \end{aligned} \quad (60)$$

積分定数 C を定める初期条件は、 $t = 0$ で $x_t = 0$ であるが、これは式(55)、(57)および(58)より $Y = -1$ である。そして時間の経過と共に Y は増加し、平衡状態で $Y = +1$ に達する。しかし、実験においては、 $\xi/\eta = 0.9$ であり、平衡状態に達する遙か前に(60)の左辺第3項が $-\infty$ となって不合理である。

この点を除去するため、最初の仮定に立ち戻り、放物線の頂点が $x = 0$ にあるという仮定に変更する。即ち今後は式(12)、(47)および(57)から

$$\frac{Q_L}{4k\varepsilon} \rightleftharpoons \frac{(\Delta h)^2}{8\varepsilon^2 L} \rightleftharpoons 0, \quad \xi = \eta^2 \quad (61)$$

と考えることとする。かようにすれば、式(60)は次式のように書き直される。

$$\frac{Y^3}{3} + 2Y^2 + 7Y + 8 \log |Y - 1| = - \frac{k\Delta h}{4\lambda \sqrt{L} \eta^3} t + C$$

上式に初期条件を代入すれば、 $C = 0.24$ となる。従って式(55)、(57)および(58)を考慮すれば、楔先端の移動を示す最終的な表現として次式が求められる。

$$\frac{k \Delta h}{4 \lambda \sqrt{L} \eta^3} t = -\frac{(\frac{\sqrt{x_t}}{\eta} - 1)^3}{3} - 2(\frac{\sqrt{x_t}}{\eta} - 1)^2 - 7(\frac{\sqrt{x_t}}{\eta} - 1) - 18.5 \log(2 - \frac{\sqrt{x_t}}{\eta}) + 0.24 \quad (62)$$

こゝに

$$\eta = \frac{\varepsilon h_s \sqrt{L}}{2 \Delta h}$$

上式を誘導するとき、最後の積分定数を決定する段階で、式(61)を仮定したが、このことは式(62)において

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{\eta^2} &= 1 - \frac{(\Delta h)^2}{8 \varepsilon^2 L} \frac{4 (\Delta h)^2}{\varepsilon^2 h_s^2 L} = 1 - \frac{(\Delta h)^4}{2 \varepsilon^4 h_s^2 L^2} \\ &\approx 1 - \frac{h_s^2}{2 L^2} \end{aligned}$$

となるが、こゝで

$$\frac{h_s^2}{2 L^2} \ll 1$$

としたことに相当し、このことは実験の範囲内では十分満足されている。また、解析の出発点においては海岸線の淡水層の厚さを考慮しているので、式(62)の解は上記淡水層の厚さが楔の運動に及ぼす影響が近似的に盛り込まれていると考える事が出来る。

図-8は、式(62)と実験結果との比較を行ったものである。透水層は、平均粒径 $d_m = 0.92 \text{ mm}$ のプラスチック球から成り、 $k = 0.50 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 、 $\lambda = 37.5 \%$ である。同図より、解析と実験結果とは、 x および t の全域にわたり極めて良く一致している。しかし、砂層 ($d_m = 2.40 \text{ mm}$ 、 $k = 1.45 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 、 $\lambda = 39.7 \%$)を用いて行った実験では、初期における楔の前進距離が式(62)で与えられるものより大きく目に出る事が認められている。このことは、浸入する境界面形状が、プラスチック球と砂とで相当に異っている事に因る

ものと考えられる。

すなわち、前者では現象が徐々に進行し、境界面形状が式(62)で近似できる範囲が、 $0 < x_t < L$ の領域中大部分を占めているが、後者では現象の進行が速やかで、初期の内に最終値のかなり近くまで楔は到達し、しかも境界面形状は上方に凸型を呈する領域が

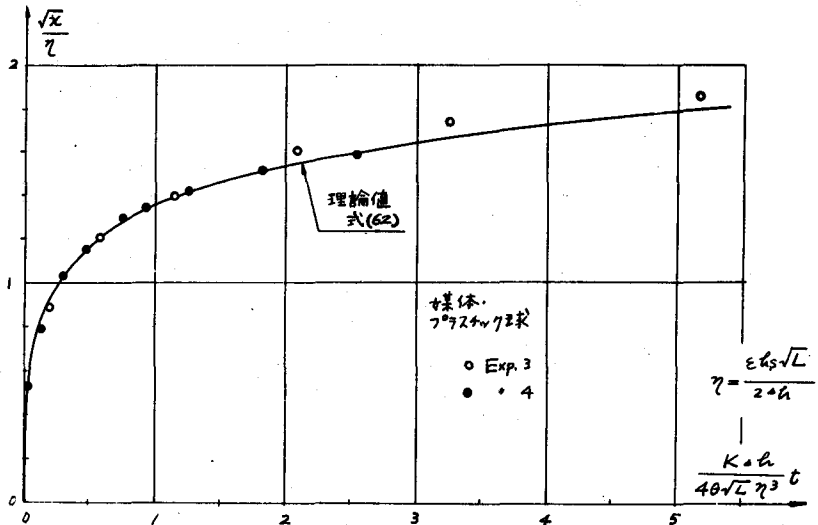


図-8 塩水楔先端の移動

大で式(6)に近似できる範囲が小である。このことより、式(2)は透水係数の小さい場合に適用されるものと見られる。

3) 淡水流量の場所的分布を仮定する方法

自由表面を持つ地下密度流の基礎方程式は、1) で示したように式(4)および(5)で表わされる。しかし、浸入する塩水楔が平衡状態に達するまでの非定常課程を、同式に基づいて厳密に解くことは甚だ困難である。そこで Bear & Dagan⁷⁾ の手法にならい、さらに海岸線における淡水層の厚さを考慮しつつ、この問題を解くこととする。

そこで、

Q_L ... 楔の到達しない領域での淡水流量

$Q_s(t)$... 海岸線における淡水流量

$Q_1(x, t)$... 楔の浸入領域における淡水流量

$Q_2(x, t)$... 楔内の塩水流量

u_1, u_2 ... それぞれ上層および下層流速

$V_s(t)$... 塩水楔の容積

とし、他の量はすべて前と同一とする。

自由表面の変化は微小であるので、流量に対する z の寄与を無視すれば

$$u_1 = \frac{Q_1(x, t)}{h_1} \quad u_2 = \frac{Q_2(x, t)}{h_2} \quad (6)$$

また、その場合には式(4)は

$$-\lambda \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial x} = 0$$

$$\lambda \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial x} = 0$$

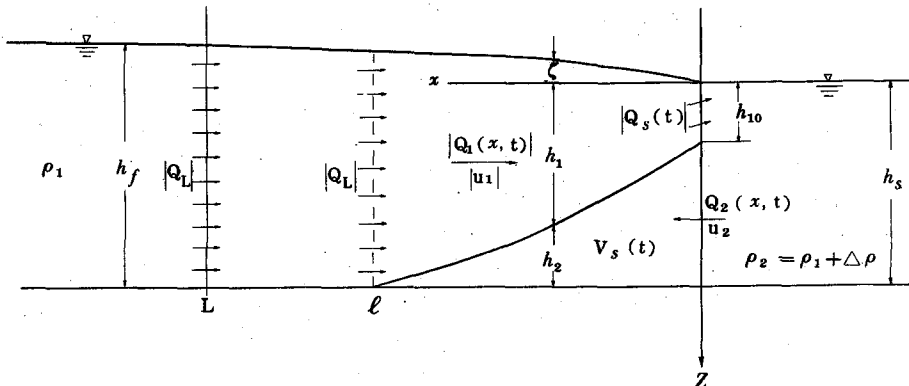


図-9 滞水層の模式図

となるので、式(63)を考慮すれば

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0$$

さらに、 $x = \ell$ において $Q_1 = Q_L$ 、 $Q_2 = 0$ を考えれば

$$Q_1 + Q_2 = Q_L(t) \quad (64)$$

一方、式(25)より

$$u_2 = -k \left\{ (1-\varepsilon) \frac{-u_1}{k} + \varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\}$$

$$\therefore \frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{u_1}{k\varepsilon} - \frac{u_2}{k\varepsilon}$$

ここで、 $h_1 + h_2 = h_s$ を考慮すると共に、上式に式(63)を代入すれば

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{Q_2}{k\varepsilon(h_s - h_1)} - \frac{Q_1}{k\varepsilon h_1} \quad (65)$$

上式に、式(64)を代入すると次式が求められる。

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{Q_L}{k\varepsilon(h_s - h_1)} - \frac{Q_1 h_s}{k\varepsilon h_1(h_s - h_1)} \quad (66)$$

一方、塩水槽の浸入側全体での連続の方程式をたてると次式のようなになる。

$$\lambda \frac{dV_s(t)}{dt} = Q_L - Q_s \quad (67)$$

しかるに $V_s(t)$ は

$$V_s(t) = \int_0^{h_s - h_{10}} x dh_2 = \int_{h_{10}}^{h_s} x(h_1, t) dh_1 \quad (68)$$

上の3つの方程式を基礎として、問題を解き度いのであるが、含まれる未知数は h_1 、 Q_s 、 V_s 、 Q_L 、 Q_1 の5箇であるので、条件としては2箇不足する。そこで、 Q_L および Q_1 に対し、以下に示すような仮定を行う。

先ず、図-10に示すように、初期には淡水、塩水を隔てておき、 $t=0$ で隔板を取り除く場合を考える。 $t=0$ では明かに $Q_L = 0$ であるが、その後 Q_L は増大するであろうが、その変化は初期に大きく以後定常状態での値に比較的早く漸近すると思はれる。

また、初期には自由表面の勾配は大きく、 Q_s は非常に大きいから、これに対する Q_L の変化は微小で無視し得るものと考え

$$Q_L = \text{一定} \quad (69)$$

とする。次に、上層流量 $Q_1(x, t)$ の場所

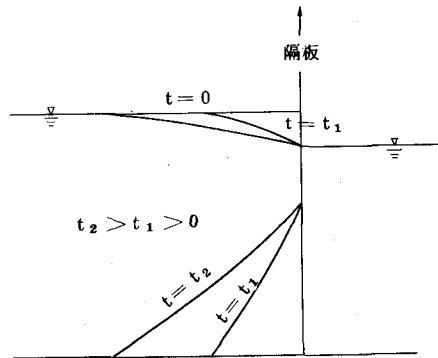


図-10 楔の進入状況

的分布について考える。

$|Q_s|$ は最初大きく、 $t \rightarrow \infty$ で $|Q_s| = |Q_L|$ に漸近する。さらに

$$Q_1 = Q_1 \{x(h_1), t\}$$

と考えれば

$$Q_L = Q_1 \{x(h_s), t\}$$

$$Q_s = Q_1 \{x(h_{10}), t\}$$

となるので、 Q_1 に対する最も単純な場所分布の仮定として、図-11の実線で表わすこととする。すなわち

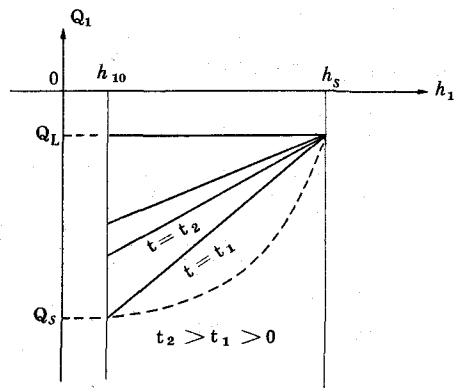


図-11 Q_1 の場所的分布

$$Q_1 = Q_L + \frac{Q_L - Q_s}{h_s - h_{10}} (h_1 - h_s) \quad (70)$$

式(69)および(70)と2箇の条件が補足されたので、式(66)、(67)および(68)と併せて解を求める。

式(70)を式(66)に代入すれば

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = - \frac{h_s Q_s - h_{10} Q_L}{k \varepsilon (h_s - h_{10}) h_1} \quad (71)$$

上式は、境界条件 $x=0$ で $h_1 = h_{10}$ の下に積分され、次のようになる。

$$h_1^2(x, t) - h_{10}^2 = - \frac{2(h_s Q_s - h_{10} Q_L)}{k \varepsilon (h_s - h_{10})} x \quad (72)$$

上式を式(68)に代入すれば、 $V_s(t)$ が次式のように求められる。

$$V_s(t) = - \frac{k \varepsilon (h_s - h_{10})^2 (h_s + 2h_{10})}{6(h_s Q_s - h_{10} Q_L)} \quad (73)$$

そこで、

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_s &= Q_s / Q_L \\ \bar{V}_s &= Q_L V_s / k \varepsilon h_s^3 \\ \alpha &= h_{10} / h_s \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

において無次元化すれば、式(73)は次のようになる。

$$\bar{V}_s = - \frac{(1-\alpha)^2 (1+2\alpha)}{6(\bar{Q}_s - \alpha)} \quad (75)$$

さらに

$$\bar{t} = \frac{Q_L^2 t}{\lambda k \varepsilon h_s^2} \quad (76)$$

とおき、これと式(74)を用いて、式(76)を無次元化すれば

$$\frac{d\bar{V}_s}{d\bar{Q}_s} \frac{d\bar{Q}_s}{d\bar{t}} = 1 - \bar{Q}_s \quad (77)$$

となる。上式に式(75)を代入すれば次式が得られる。

$$\frac{d\bar{Q}_s}{d\bar{t}} = \frac{6}{(1-\alpha)^3(1+2\alpha)} (\bar{Q}_s - \alpha)^2 (1 - \bar{Q}_s) \quad (78)$$

これを初期条件、 $t=0$ で $\bar{Q}_s = \infty$ を与えて積分すれば、 $\bar{Q}_s$ と $\bar{t}$ との関係が次式のように求めることが出来る。

$$\bar{t} = \frac{(1+\alpha)(1+2\alpha)}{6} \left[\log \left| \frac{\bar{Q}_s - \alpha}{\bar{Q}_s - 1} \right| - (1-\alpha) \frac{1}{\bar{Q}_s - 1} \right] \quad (79)$$

浸入する楔先端の移動を知るには、式(72)において $h_1 = h_s$ なる点 x_t の位置の時間に対する変化を知れば良い。よって

$$\bar{x}_t = \frac{Q_L x_t}{k \varepsilon h_s^2} \quad (80)$$

なる置換を行へば、式(72)は次のようになる。

$$\bar{x}_t = - \frac{1}{2} \frac{(1+\alpha)(1-\alpha)^2}{\bar{Q}_s - \alpha} \quad (81)$$

従って、任意時刻の楔先端の位置は、式(79)および(81)において $\bar{Q}_s$ を媒介変数として求めることができる。ただし、上述の解析においては α は時間にかかわらず一定とし、平衡状態に達した際の値を使うものとすれば

$$\alpha \equiv \frac{h_{10}}{h_s} = 0.353 \frac{(\Delta h)^2}{\varepsilon^2 h_s L} \quad (82)$$

である。

図-12は、種々の α を与えた場合の $\bar{x}_t$ と $\bar{t}$ との関係を、式(79)および(81)より求めた結果である。

また図-13は、この解析結果と実験結果との比較の一例を示したものである。透水層は平均粒径 $d_m = 2.4 \text{ mm}$ 、 $k = 1.45 \text{ cm/sec}$ 、 $\lambda = 39.7\%$ の砂より成っており、その他の実験条件は同図に付記されている。この図より、理論ならびに実験結果は極めて良く一致する事が認められる。しかし、この解析結果を前述のプラスチック球から成る透水層の場合の実験結果と対比させると、2)とは逆に楔先端の移動は理論の方が実験よりかなり早いものとなっている。この理由の一つとしては、 α を一定として計算を行はざるを得ない事によるものと考えられる。透水係数の大きい砂層の場合は、前述のように初期における現象の進行が早く、 $\bar{h}_{10}$ の値も比較的早く平衡状態の値に近付くのに反し、透水係数の小さいプラスチック球の場合には $\bar{h}_{10}$ の変化は緩慢である。

従って砂層の場合は3)で行った解析が現象に良く適合し、プラスチック球の場合は2)で行ったものが良く適合すると考えられる。

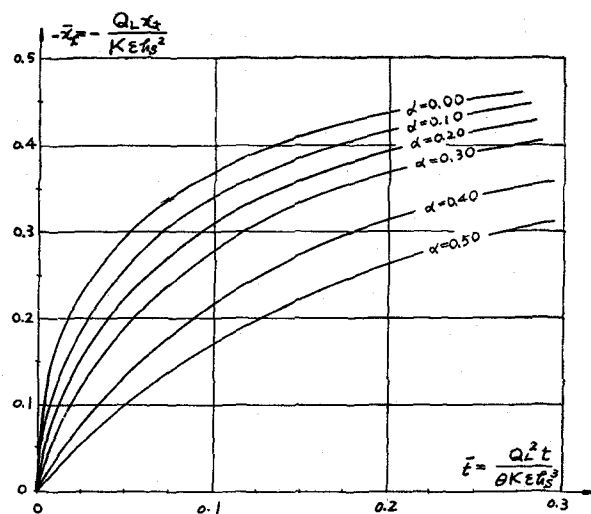


図-12 楔先端の移動に及ぼす α の影響

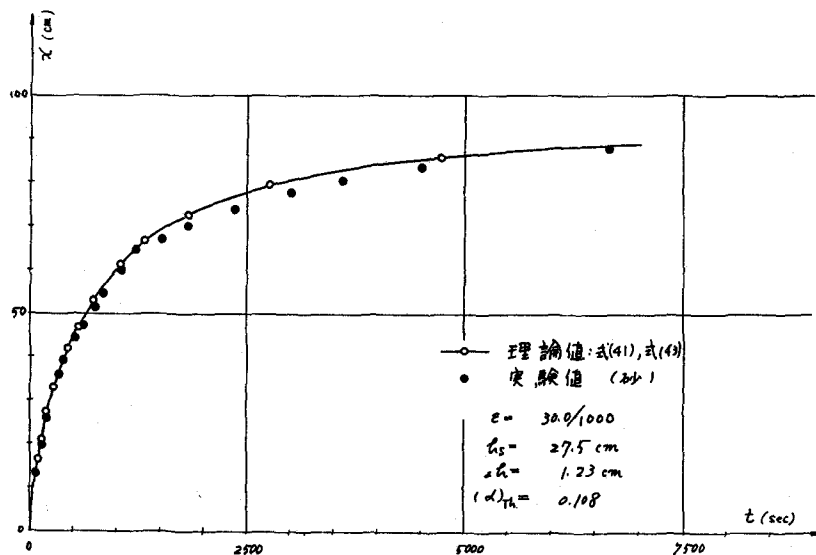


図-13 塩水楔先端の移動

脚注

本原稿は玉井伸行, 嶋祐之著 "Salt-Water Wedge in Unconfined Coastal Aquifers "

土木学会論文集投稿中

の研究を基礎に, 地下密度流の解説を行ったものである。

文 献

- 1) Nomitsu, Toyahara & Kamimoto, On the Contact Surface of Fresh and Salt — water under the Ground near a Sandy Sea Shore, Memoirs of Coll.Sci., Kyoto Imperial Univ.A.Vol.10, No.7, 279, 1927
- 2) 応用水理学Ⅱ 石原藤次郎, 本間仁節, 丸善, P.301~309, 1958
- 3) Henry, H.R. , Salt Intrusion into Fresh—Water Aquifers, Jour.Geophysics Res., Vol.64, No.11, P.1911—1919, Nov.1959
- 4) Hamel, G. , Über Grundwasserströmung, Z.A.M.M., XIV, 129, 1934.
- 5) Glover, R.E. The Pattern of Fresh—water Flow in a Coastal Aquifer, Journ.Geophysics Res., Vol.64, No.4, P.457~459 Apr.1959.
- 6) Rumer, R.R.& Harleman, D.R.F. Introduced Salt—Water Wedge in Porous Media, Proc.of A.S.C.E., Vol.89, No.HY6, Nov.1963
- 7) Bear, J.& Dagan, G. , Moving Interface in Coastal Aquifers, Proc.of A.S. C.E., Vol.90, No.HY4, July 1964.