

河川の乱流現象

電力中央研究所 日 野 幹 雄

1. 序 論

1.1 乱流理論はなぜ必要か^{*)}

1.2 乱流理論の歴史と現状^{*)}

^{*)} 紙数の制約上講演時にのべる。

1.3 等方性乱流の構造^{**)}

A) 相関係数：不規則変動場 (stationary stochastic) の一点における変動量の時間的平均値が座標軸を回転させても反射させても変らない場合に、この場は統計的に等方性であるといわれる。さらに、時間平均値が空間的に均一であるとき、この場は均一等方 (homogeneous isotropic) であるといわれる。

風洞乱流などはかなり均一等方性乱流に近いけれども、粘性による乱れの減衰のために厳密には均一性を保ちえない。homogeneous isotropic turbulence は一つの理想化された場であるけれども、乱れの統計的状态を簡単化し数学的理論的取扱いが容易になる。等方性乱流で得られた乱流構造の性質や概念は、われわれが対象とする種々の実際現象を理解するのに基本となるものである。

^{**)} ここでは2以下の各章の記述に必要な最小限度の準備をするに止める。

2点 $P(x_1, y_1, z_1)$ と $Q(x_2, y_2, z_2)$ の速度変動成分 (u_1, v_1, w_1) と (u_2, v_2, w_2) の間の相関係数として9個のものがある。このテンソルを相関テンソルという。

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\overline{u_1 u_2}}{\sqrt{u_1^2} \sqrt{u_2^2}} & \frac{\overline{u_1 v_2}}{\sqrt{u_1^2} \sqrt{v_2^2}} & \frac{\overline{u_1 w_2}}{\sqrt{u_1^2} \sqrt{w_2^2}} \\ \frac{\overline{v_1 u_2}}{\sqrt{v_1^2} \sqrt{u_2^2}} & \frac{\overline{v_1 v_2}}{\sqrt{v_1^2} \sqrt{v_2^2}} & \frac{\overline{v_1 w_2}}{\sqrt{v_1^2} \sqrt{w_2^2}} \\ \frac{\overline{w_1 u_2}}{\sqrt{w_1^2} \sqrt{u_2^2}} & \frac{\overline{w_1 v_2}}{\sqrt{w_1^2} \sqrt{v_2^2}} & \frac{\overline{w_1 w_2}}{\sqrt{w_1^2} \sqrt{w_2^2}} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

ここに、 $\overline{u_i u_k}$ は

$$\overline{u_i u_k} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_i(t) u_k(t) dt \quad (1.2)$$

である。 $\overline{u_i^2}$ は乱れの強さである。

これら9個の成分2個の基本的な相関 $f(r)$ と $g(r)$ の組合せで表すことができる (図-1.1)。

また、 f と g は互に独立なのではなく、次の関係が成立する (図-1.2)。

$$g = f + \frac{r}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (1.2)$$

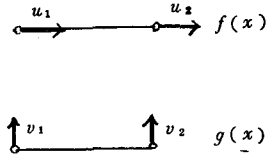


図-1.1

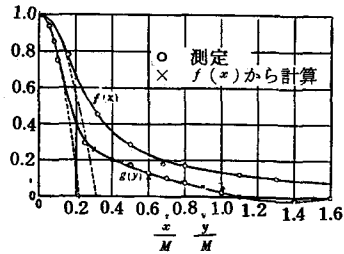


図-1.2

一点における自己相関係数 $R(\tau)$ は次のように定義される。

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t+\tau)dt \quad (1.3)$$

Taylor は平均流速 U に比べて変動が小さい場合には変動の場がそのまま平均流速で流下するものと考えて [frozen turbulence], $f(x)$ と $R(\tau)$ の間に次の関係を仮定した (Taylor's hypothesis)。

$$R(\tau) = f(x/U) \quad (1.4)$$

この関係は壁面に極く近い所以外では管内乱流や大気乱流のような非等方性剪断流についても成立することが一般に認められている。

B) 平均渦径・最小渦径：乱流場は種々の大きさの渦から成立していると考えられるが、乱流場の構造を表す目安として平均(最大)渦径 L 。最小渦径 λ が相関係数から次のように定義される。もちろん、これ以上あるいは以下の渦が存在しないという意味ではなく一つの目安である。

$$L_x = \int_0^\infty f(x)dx, \quad L_y = \int_0^\infty g(y)dy \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{\lambda_x^2} = \frac{1}{2\bar{u}^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 = -\frac{1}{2} f_0'', \quad \frac{1}{\lambda_y^2} = \frac{1}{2\bar{u}^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = -g_0'' \quad (1.5)$$

式(1.2)より $L_x = 2L_y$ の関係がある。また、乱れのエネルギー逸散率 ε は

$$\varepsilon = 15\rho\nu(\overline{\partial u/\partial x})^2 = 15\rho\nu\bar{u}^2/\lambda_y^2 \quad (1.6)$$

である。それゆえ、 λ_x, λ_y はエネルギー逸散に關係する最小渦の大きさを表す。

ある周波数の渦が自己のもつエネルギー $\bar{u}^2$ を失う時間をその渦の事命時間 τ_* という。平均渦の事命時間 τ_* は

$$\tau_* = L/\sqrt{\bar{u}^2} \quad (1.7)$$

と考えて良い。

これらの乱れの特性の間には、また次の関係がある。

$$\frac{\lambda}{L} = B \sqrt{\frac{\nu}{L \sqrt{\bar{u}^3}}} \quad (1.8)$$

C) 乱れのスペクトル：乱れの場合は種々の周波数の渦の集合と考えられる。乱れのエネルギー $\bar{u}^2$ に対する周波数が f と $f + df$ の間にある渦の寄与の割合を $\bar{u}^2 S(f) df$ で表し、 $S(f)$ を乱れの一次元スペクトルという。 $S(f)/2\sqrt{2\pi}$ と自己相関係数 $R(\tau)$ は互に Fourier 変換の関係にある。

$$R(\tau) = \int_0^\infty S(f) \cos 2\pi f \tau df \quad (1.9a)$$

$$S(f) = 4 \int_0^\infty R(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \quad (1.9b)$$

Taylor の frozen turbulence の仮定を用いて、これを波数 $k = 2\pi f/U_0$, $F(k) = U_0 S(f) / 2\pi$ に関して表すと次のようになる。

$$f(x) = \int_0^\infty F(k) \cos kx dx \quad (1.10a)$$

$$F(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos kx dx \quad (1.10b)$$

図-1.3 は上の関係を実験的に確めたものである。

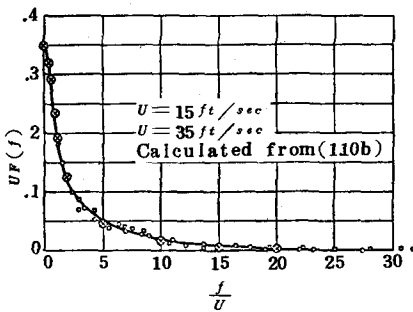


図-1.3a

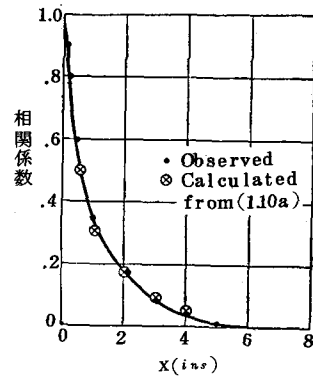


図-1.3b

われわれが実験に測定しうるのは式(1.9)(1.10)のような一次元スペクトルであるが、乱れの場合は厳密には3次元波数空間として取扱わなければならない。式(1.10)の関係では $k=0$, すなわち波長が ∞ のところでエネルギーが最大となっていて少しおかしいようであるが、これは図-1.4に示すように3次元的な波面を1次元的に観測しているためである。

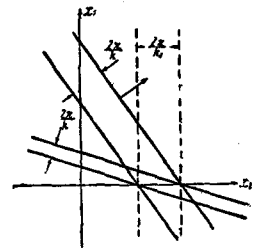


図-1.4

D) Kolmogorov の相似仮説：乱れのエネルギーはたえず波数の大きな渦のところで分子粘性によつて熱エネルギーに変り逸散されている。乱れの場合が時間的に定常であるためには外から同じ割合でエネルギーの供給が行われなければならない。これは波数の小さい渦による平均流からのエネルギー移行である。乱れのエネルギーは波数の小さな渦から順次波数の大きな渦へと手わたされ、 $\nu k^2 F(k) dk$ の割合で波数の大きい渦で逸散される(図-1.5)。

Kolmogorov(1941)は, Reynolds 数が十分大きい場合には波数が最大渦より遙かに小さい領域の乱れの構造はエネルギー逸散率 ϵ と分子粘性 ν により一義的に決定されると考えた(局所的等方性の仮説)。

すなわち, 構造関数 $Bdd(r) = \overline{[u(x) - u(x+r)]^2} = 2\bar{u}^2(1-f(r))$ は,

$$Bdd(r) = (\nu \epsilon)^{\frac{1}{3}} \beta(r/\lambda) \quad (1.11)$$

となる。こゝに, λ は

$$\lambda = (\nu^3/\epsilon)^{\frac{1}{4}} \quad (1.12)$$

はKolmogorov の最小渦径, β はuniversal function である。

もし, r が λ より大きければ, Bdd は ν に無関係であり式(1.11)は次のようになる。

$$Bdd(r) = C(\epsilon \cdot r)^{\frac{2}{3}} \quad (1.13)$$

このような ($L \gg r \gg \lambda$) 領域を慣性領域(inertial subrange)と呼び, ($r \ll \lambda$) である領域を粘性領域(viscous subrange)と云う。

式(1.11)・(1.13)のKolmogorov の理論はスペクトルで表せば次のようになる。

$$\phi(k) = \epsilon^{\frac{1}{4}} \nu^{\frac{1}{4}} F(k \nu^{\frac{1}{4}} \epsilon^{-\frac{1}{4}}) \quad (1.14)$$

$$\phi(k) = A \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \quad (1.15)$$

式(1.15)はKolmogorov の $-\frac{5}{3}$ 乗則と云われる(図-1.6)。なお, 係数 A はKolmogorov constantと呼ばれ, 実験あるいは理論から

$$A = 0.5 \quad (k : \text{rad/cm unit}) \quad (1.16)$$

である。

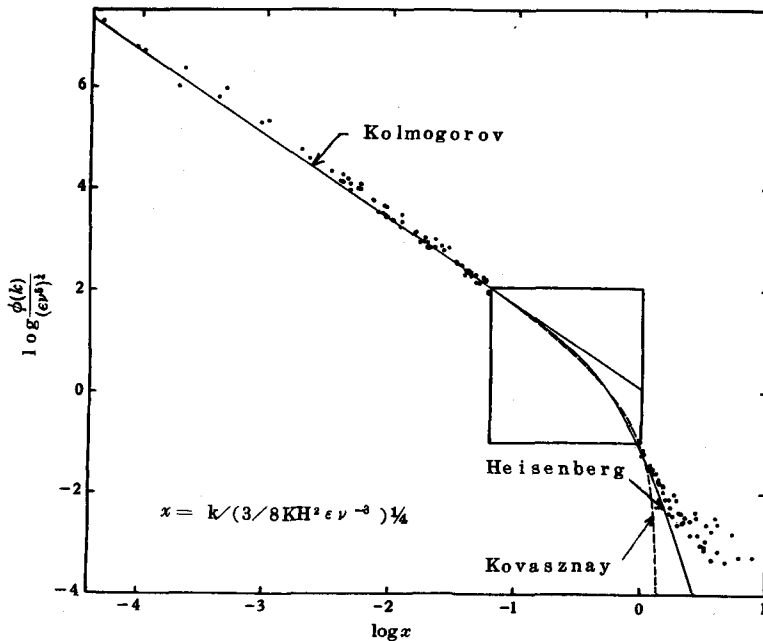


図-1.6

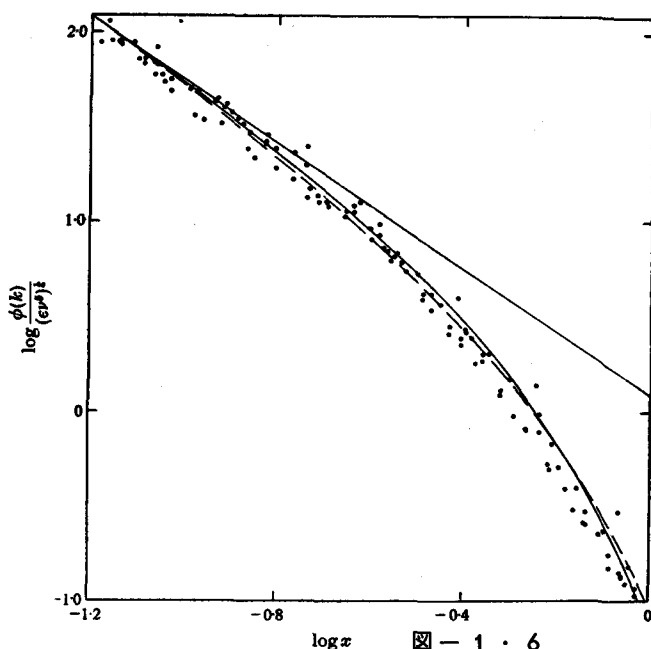


図-1.6
このようにスペクトルの関数形を決定する試みはその後の数年間に互に独立にObukov, Heisenberg, Kovasznay, Weizsäcker (inertial, viscous subrange), Batchelor, Karman & Lin (lowest frequency) らによって行われた。

1.4 スペクトルと観測時間・評価時間

われわれが乱れ（一般には定常確率過程）を測定する場合に、測定結果を評価する上で常に考えなければならないことが2つある。一つは測定器の感度（応答特性）や記録の読み取り間隔による真のスペクトルの歪であり、他の一つは記録時間が有限であることによるスペクトルの歪の問題である。

まず、簡単のために $y = a \sin 2\pi f t$ という変動を間隔 s 毎の平均として読みとる場合を考える。そのとき変動 y は

$$y' = \frac{1}{S} \int_{t' - s/2}^{t' + s/2} y dt = a \sin 2\pi f t' \left(\frac{\sin \pi f s}{\pi f s} \right) \quad (1.17)$$

となつて、振幅はもとの変動の $(\sin \pi f s / \pi f s)$ となる。これは分散に対する周波数 f の成分の寄与（あるいは変動のエネルギー）が $(\sin \pi f s / \pi f s)^2$ 倍に落ちることである。

不規則変動におけるすべての周波数成分を含む場合に一般化すれば、 $F(f)$ を真のスペクトルとして、分散は

$$\sigma_{\infty, s}^2 = \sigma_{\infty, 0}^2 \int_0^{\infty} F(f) \frac{\sin^2 \pi f s}{(\pi f s)} df \quad (1.18)$$

となる。

逆に、感度あるいは平均化時間が無限小で、記録時間が有限時間 τ である場合を考えると

$$\sigma_{\infty, 0}^2 = \sigma_{\infty, \tau}^2 + [\sigma_{\tau, 0}^2]_{\infty} \quad (1.19)$$

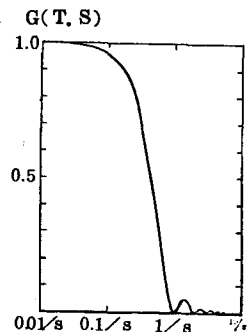


図-1.7

すなわち,

$$[\sigma_{\tau,0}^2]_{\infty} = \sigma_{\infty,0}^2 \int_0^{\infty} F(f) \left(1 - \frac{\sin^2 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2}\right) df \quad (1.20)$$

式(1.18)の意味は、平均化時間 s で記録を読みとることは真のスペクトルに図-1.6のような high-frequency cut-off filter $(\sin \pi f s / \pi f s)^2$ を通すことに等しいことを云っている。図-1.7の filter は近似的に $f = 1/2s$ 以上のスペクトル成分を切り捨てと考える良い。

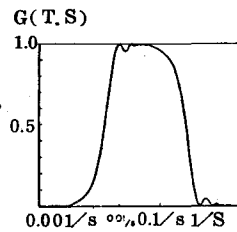


図-1.8

同じく、式(1.20)は記録時間の影響が low frequency cut-off filter の役割に等しいことを示している。近似的には $f = 1/2\tau$ 以下の周波数成分の切り捨てとみなせる。

もし、平均化時間 s ・記録時間 τ であれば、真のスペクトルは (τ/s が大きいとして)

$$F(f) \left[1 - \frac{\sin^2 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2}\right] \frac{\sin^2 \pi f s}{(\pi f s)^2} \quad (1.21)$$

のように変形する。図-1.8は $\tau/s = 100$ の場合の $G(f; \tau, s) = [1 - (\sin \pi f \tau / \pi f \tau)^2] (\sin \pi f s / \pi f s)^2$ を示す。

2. 水路流の乱流構造

水理学や河川工学上の種々の現象をさらに深く理解し、新しい角度から見直し理論を導くために、乱流理論は一つの有力な手段と思われる。われわれの対象とする乱流場は1章に述べたような等方性乱流ではないが、こゝで定義された色々の概念は当然非等方性乱流の場にもあてはまる。こゝでは基本的な非等方性剪断流の乱流構造について述べる。

2.1 壁面近くの乱れの特性

A) 底面摩擦力の変動：底面摩擦力は

$$\tau_0 = \tau_{0L} = \left(\mu \frac{dU}{dy}\right)_{y=0} = \mu \left(\frac{U}{y}\right)_{y \rightarrow 0} \quad (2.1)$$

$y=0$ の近くでは $U \sim y$ であるから u' のスペクトルを τ_0 のスペクトルと見なすことができる。

このことは簡単な Couette 流をモデルとして証明できる。底面から $y=h$ にある上の壁面が $U = U_0 + u \sin \omega t$ で運動しているとする

$$\frac{(u'/U)}{(u'/U)_h} = \frac{h}{y} \sqrt{\frac{\cosh^2 \beta y - \cos^2 \beta y}{\cosh^2 \beta h - \cos^2 \beta h}} \quad (2.2)$$

こゝに、 $(u'/U)_h = 1/\sqrt{2} \cdot (u_0/U_0)$ 、 $\beta = \sqrt{\omega/2\nu}$ 。今 ω を剪断応力 $(-\rho u v)$ をに成る渦の平均角振動数と考え、 $\omega = \nu(k_1^2)^{1/2} \cdot U_y$ 、 $y_* = hU_*/\nu = 3$ とすれば、 $(u'/U) \approx (u'/U)_h$ である。したがって、 $y_* = 3$ で流速変動は壁面での境界値に達しているとみなしうる。

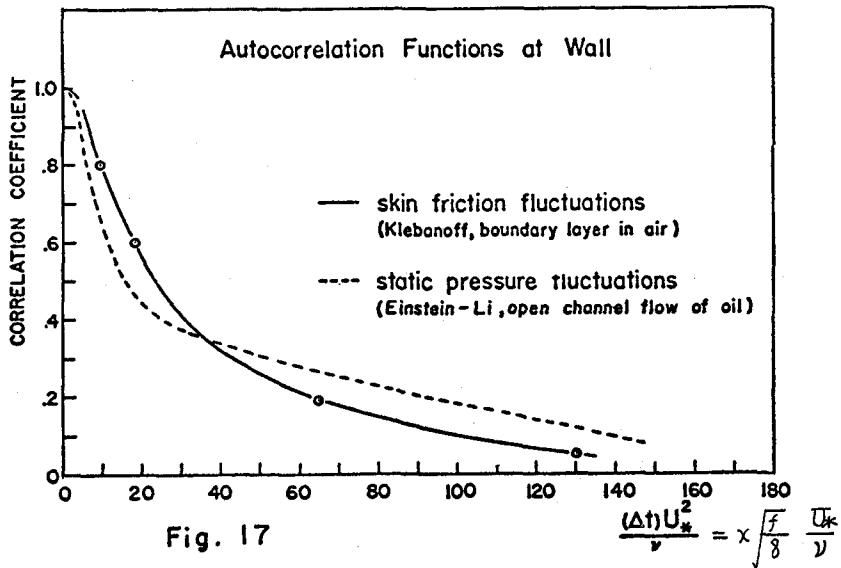


図 - 2 ・ 1

ところで、底面摩擦力の測定は大抵相似法により間接的に行われる。Preston tube はその代表的な方法である。また、運動量と熱あるいは物質の輸送の相似も利用される。底面摩擦力を直接測定する試みも Liepman & Dhawan (1951) によって行われた。底面摩擦力の変動の測定は最近では直接法により余越¹⁴⁾が、熱輸送相似 (hot film) 法により BeUhouse & Schultz¹⁶⁾が行っている (図 2.2)。実測結果と u' の測定からの推定には差異がみられる。

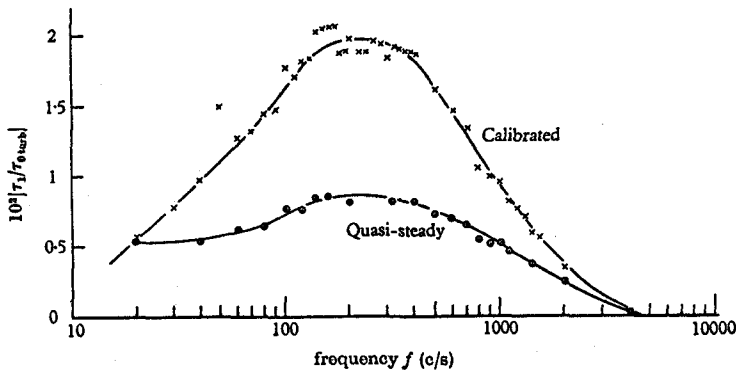


図 - 2 ・ 2

B) 底面圧力の変動：壁面に沿う乱流境界層内の圧力変動は jet noise の発生についての Lighthill の理論以来理論的実験的研究が盛んである。土木工学の分野でも、hollow dam spillwayの底床（この下にはしばしば発電機室が置かれる）の振動や風波の発生発達に関連して重要である。

底面圧力の変動の源は、壁面近くの速度勾配の大きい所と乱流境界層外縁の free turbulence の所にある。圧力の移動速度は周波数の高い渦ほど遅いが、ほぼ境界層外縁における流速 U_1 の 0.8 倍である。

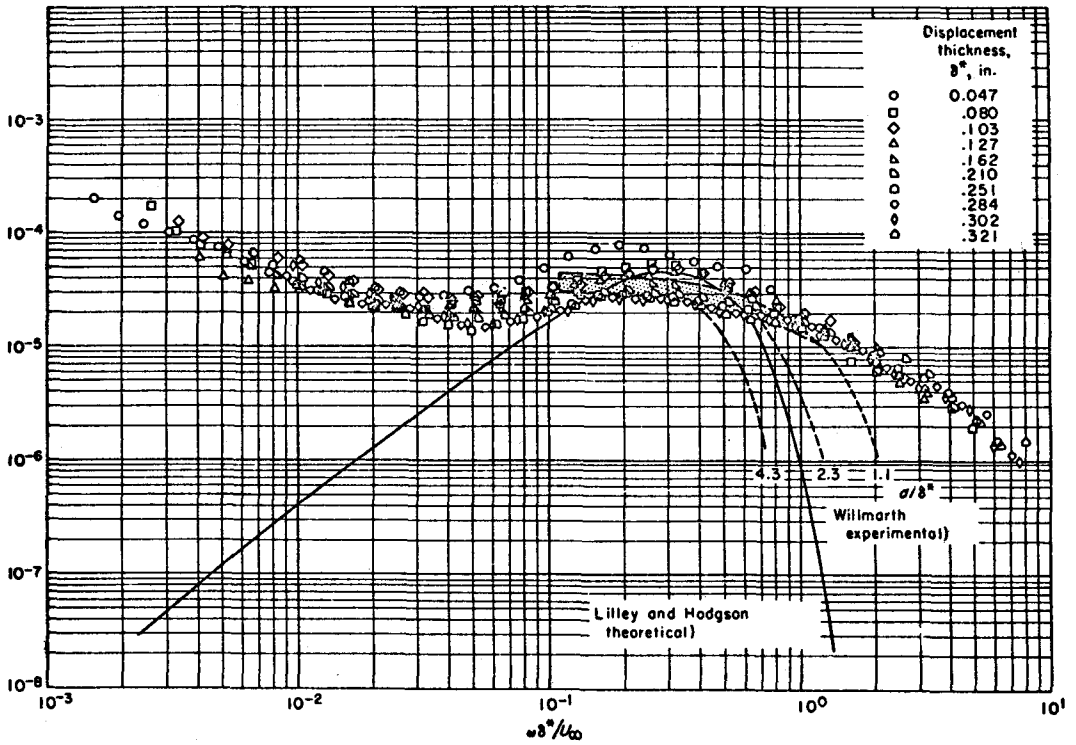


図 - 2 . 3

底面圧力変動のスペクトルについてはKraichnam や Lilley の理論, Serafini や Corcos の実験がある(図-2.3)。

C) 剪断応力のスペクトル: 剪断応力スペクトル(正しくはshear correlation spectrum) $\tau_1(k_1)$ は次式で定義される。

$$-\overline{u'v'} = \int_0^\infty \tau_1(k_1) dk_1 \quad (2.3)$$

Reynolds数が十分大きい流れで局所的等方性の成り立つ高波数域では, $\tau_1(k_1)$ は $\partial \bar{U} / \partial y$ に依存する。それゆえ, 次元的考察により,

$$\tau_1(k_1) \sim (\partial \bar{U} / \partial y)^2 k_1^{-3} \quad (2.4)$$

あるいは, $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ のスペクトルを $F_1 \sim k^{-5/3}$, $F_2 \sim k^{-5/3}$ とすれば

$$R_{uv}(R_1) \equiv \tau_1 / \sqrt{F_1 F_2} \sim R_1^{-4/3} \quad (2.5)$$

となる(図-2.4)。

なお, Tchen は $\partial \bar{U} / \partial y$ が小さい場合について次の関係を導いている。

$$\tau_1 \sim k_1^{-7/3} \quad (2.6)$$

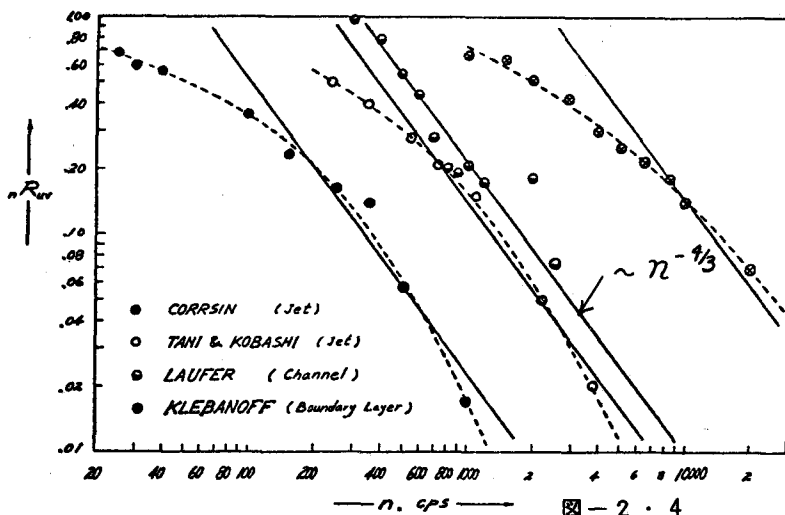


図-2.4

D) 剪断応力の変動: Reynolds 応力は x 方向の運動量の y 方向への輸送の平均値である。それゆえ、瞬間的乱流剪断力は

$$\tau_T \equiv -f [\bar{U}v' + V u' + (u'v' - \overline{u'v'})] \quad (2.7)$$

と表わされる。したがって、 $V \ll U$ を考えれば剪断力の変動 τ'_T は、次のようになる。

$$\frac{\tau'_T}{\tau_T} \approx \frac{\bar{U}v'}{u'v'} \quad (2.8)$$

この値は図-2.5 に示すように 1 より遙かに大きな値であり、平均速度勾配の方向とそれと逆方向の輸送はほとんど同じであることを意味する。

一方、層流剪断力の変動は

$$\frac{\tau'_L}{\tau_0} = \frac{u \sqrt{(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)^2}}{\mu (\partial U / \partial y)_{y=0}} \quad (2.9)$$

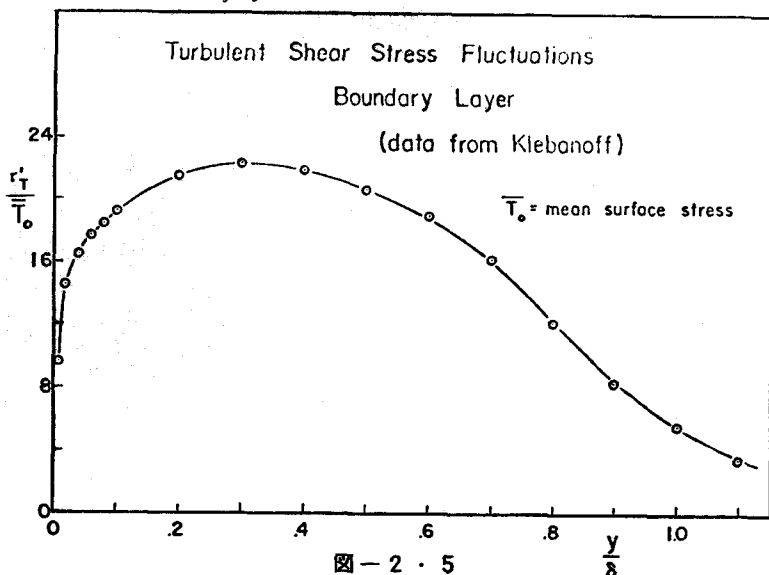


図-2.5

図-2.6は壁面近くの τ_T と τ_L の変動を示す。図によれば、 $y_* < 3$ 以外では $\tau'_L < \tau'_T$ である。このことは層流と乱流の種々な輸送量や逸散が $y_* \approx 12$ で等しく、これが“wall layer”と“outer layer”の区分であるのと多いに異っている。

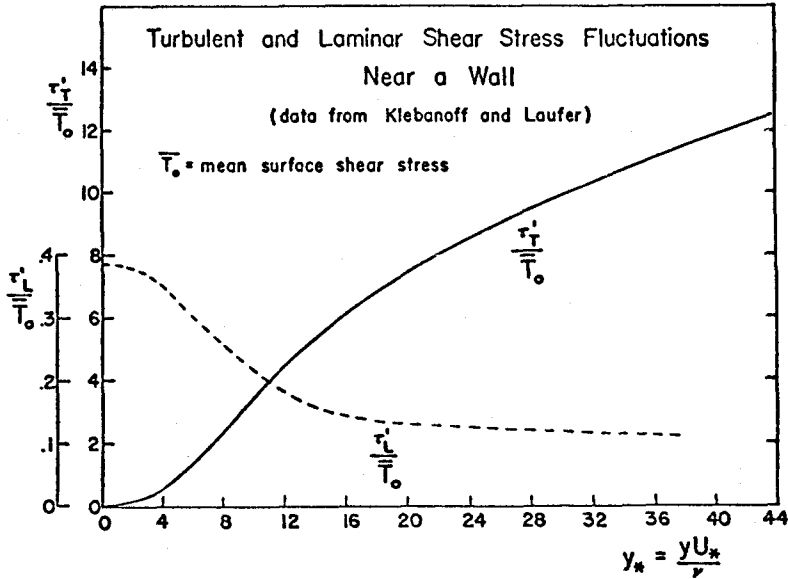


図-2.6

2.2 粘性底層の構造

A) 粘性底層の観察：Prandtl は混合距離論によって管路内の流速分布を導く際に層流底層（laminar sublayer）の概念を導入した。それ以来、壁面近くには層流ながれの層があると広く信じられて来た。古くはFage & Townsendの実験によっても、このような層の実在には疑問が出されたが、戦後間もなく発表されたhot-wireによるLauferの精密な実験によって壁面近くの流れは粘性の影響は強いけれども決して層流ではなく、激しい乱れ現象を示すことが明らかにされた。現在では、むしろこの層は粘性底層（viscous sublayer）と呼ばれている。そして、この壁面近くの底層の構造についての観察や機構の解明が行われるようになった。

Kleine & Runstadler¹⁹⁾は水路底面より色素を流して、いわゆる層流底層の大部分が乱流状態であって、所々に流れ方向に細長くのびた水路面にひばりついた層流部分（これを彼らは“island of hesitation”と呼んでいる）が点存していること、このisland of hesitationは下流部から崩壊して乱流に移ることを明らかにした（図-2.7）。

また、Schraubら²⁰⁾は水素気泡法により、水路底面の近くの縦渦の存在を示した（図-2.8）。

B) Einstein & Liの層流底層モデル²¹⁾：彼らはこの粘性底層の機構を、時間とともに壁面から成長し、その厚さが限界Reynolds数になると崩壊し流れ全体が乱流となり、再び壁面からの粘性により発達・崩壊するという周期的な層流境界層モデル（一次元）によって説明しようとした。

すなわち、運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.10)$$

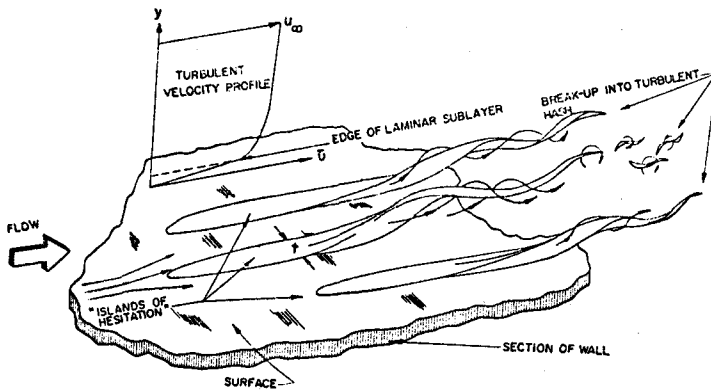


図-2・7

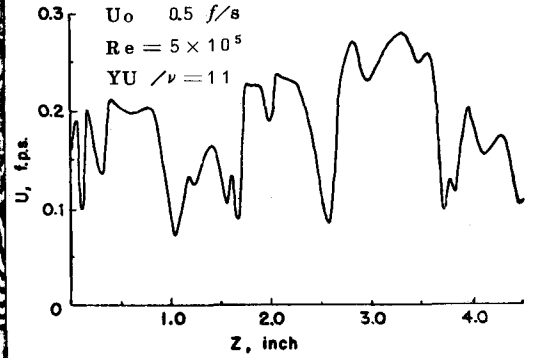
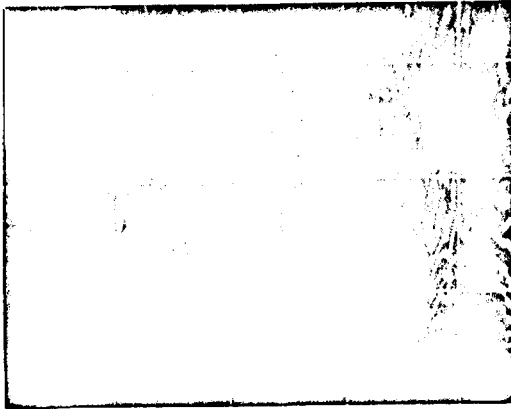


図-2・8

を, $t = 0$ ですべての y に対して $u = U_0$; $t > 0$; $Z = 0$ で $u = 0$; $t > 0$; $Z \rightarrow \infty$ で $u = U_0$ の境界条件のもとに解いて, 流速・境界層厚さ δ ($u = 0.99 U_0$ で定義)・排除厚 δ^* ・底面磨擦力 τ_0 として

$$u = (2 U_0 / \sqrt{\pi}) \int_0^H \rho^{-h^2} dh, \quad H = y/2\sqrt{\nu t} \quad (2.11)$$

$$\delta = 3.64 \sqrt{\nu t} \quad (2.12)$$

$$\delta^* = \int_0^\infty (1 - \frac{u}{U_0}) dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\nu t} \quad (2.13)$$

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{U_0}{\sqrt{\pi \nu t}} \quad (2.14)$$

$$\overline{\tau_0} = \rho U_*^2 = (2 U_0 \rho / \sqrt{\pi}) (\sqrt{\nu / T}) \quad (T: \text{境界層の発生崩壊の周期}) \quad (2.15)$$

を得る。

乱流への崩壊の起る壁面からの距離をそのときの排除厚 δ_T^* の n 倍 $y = n \delta_T^*$ とすれば、そこでの流速は

$$\frac{U_0}{U_*} = 5.75 \log_{10} \left(9.05 \frac{n \sigma_T^* U_*}{\nu} \right) \quad (2.16)$$

である。 n を仮定すれば (2.13) (2.15) (2.16) の各式から限界 Reynolds 数 $R^* = 4 \delta_T^* U_0 / \nu$ 、崩壊の周期 T 、 δ_T^* 等が求まる。

n	R^*	T	σ_T^*
0.50	525	$131 \nu / U_*^2$	$12.90 \nu / U_*$
1.0	780	$195 \nu / U_*^2$	$15.75 \nu / U_*$
2.0	1,073	$268 \nu / U_*^2$	$18.49 \nu / U_*$
3.0	1,256	$314 \nu / U_*^2$	$20.00 \nu / U_*$

このような理論により Einstein & Li は壁面近くの平均流速 $\bar{u}$ や乱れの強さ $\tilde{u}$

$$\frac{\bar{u}}{U_*} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t/T=0}^1 \int_{h=0}^{y/2\sqrt{\nu T}} e^{-h^2} dh d\left(\frac{t}{T}\right) \quad (2.17)$$

$$\tilde{u} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt - (\bar{u})^2} \quad (2.18)$$

などについて実測結果をかなり良く説明することができた (図-2.9)。

ほぼ同様に同じくして同様の理論が Hanratty²²⁾ によっても提案される。

C) Sternberg の理論²³⁾ :

Einstein & Li の理論は底層を active なものとして取扱っているが, Sternberg は底層はその外側の流れの乱れによって決定される passive なものと考えた。

彼は振動する層流中の平板近傍の流速変動についての Prandtl の計算を拡張し, 壁面近くの流動はこつに加えられ圧力場の変動によって起るとした。

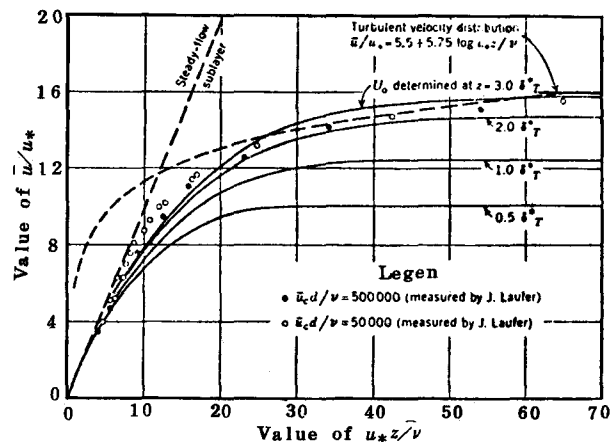


図-2.9a

流速変動 u を壁面の影響をうける成分 u_1 と影響による成分 u_2 の和と考えれば, 運動方程式は

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \quad (2.19)$$

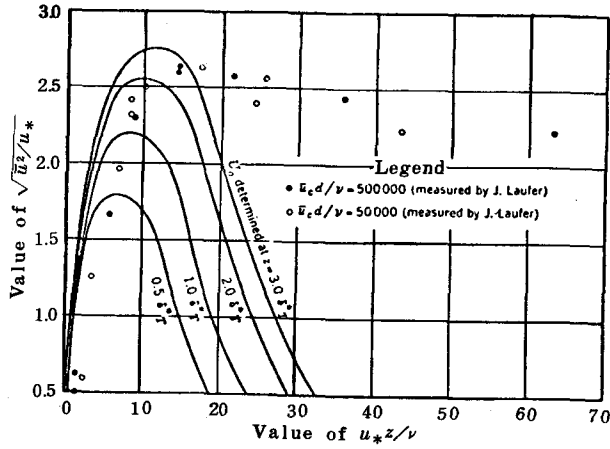


図-2.9b

となり、これを

$$\left. \begin{aligned} u &= R \cdot \{ C \cdot \exp[i(k_x x + k_z z - \beta t)] \} \\ P &= R \cdot \{ P \cdot \exp[i(k_x x + k_z z - \beta t)] \} \\ \beta &= U \cdot k_x \\ u &= 0, \quad P = P(\infty) \end{aligned} \right\} \quad y = \infty \quad (2.20)$$

$$y = 0$$

の条件のもとに解けば、次のようになる。

$$u = u_1 + u_2 = R \cdot \{ C \cdot (1 - \exp[-(1-i)(\beta/2\nu)^{1/2} y]) \exp[i(k_x x - \beta t)] \} \quad (2.21)$$

上式より各周波数毎のエネルギー $\bar{u}^2$ を求めると

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}^2 &= 1 - 2 \exp(-Y) \times \cos Y + \exp(-2Y) \\ Y &= (\beta/2\nu)^{1/2} y \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

を得る。

図-2.10, 11はSternbergの理論式(2.22)より求めた壁面近くの u' の r.m.s. とスペクトルを実測と比較したものである。現在では粘性底層の理論としてこのSternbergの理論が多く
の支持を受けているようである。

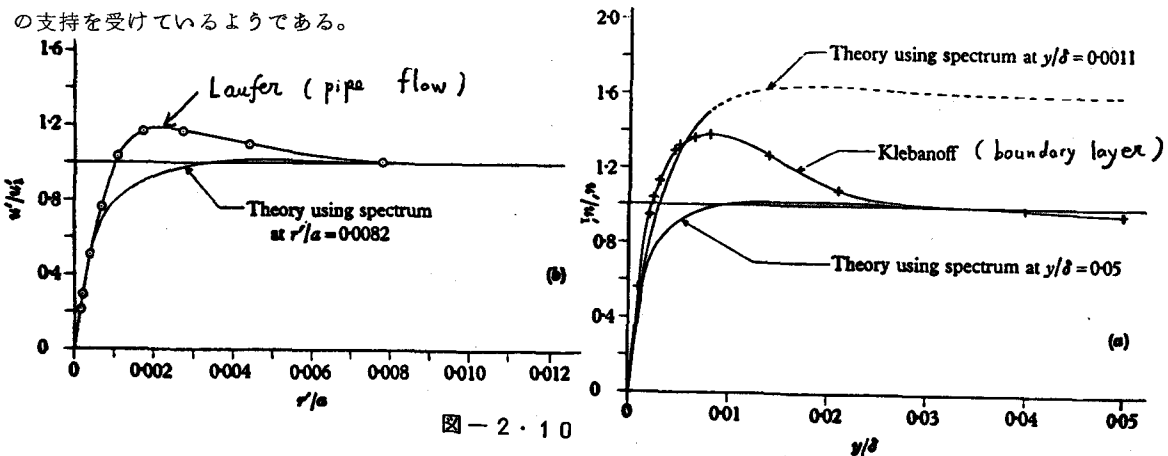


図-2.10

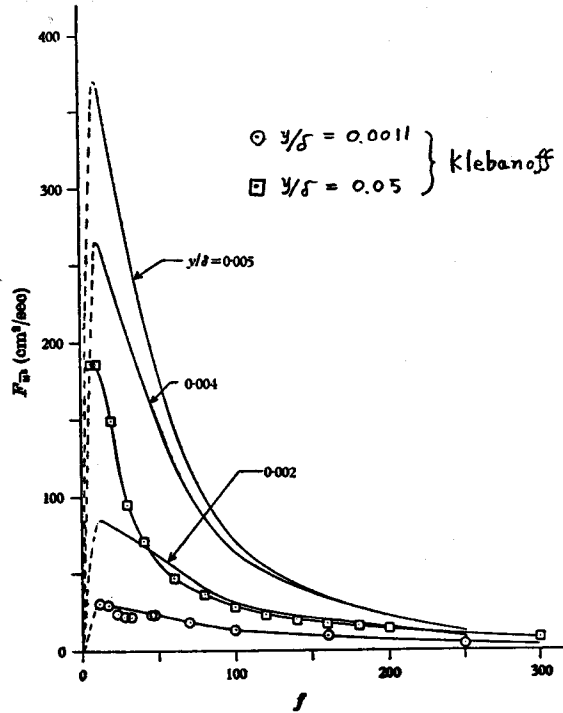


図-2・11

2.3 管路・開水路流の乱れ^{24) 25)}

A) 乱れの強さ・多重相関・スペクトル：Laufer(1954)の実験は、内径9.72 inch 長さ16 ft (これに助走部2.5 ft)の管路で、Reynolds数500,000と50,000の場合について行われた。この種の実験としては最も精密に行われた信頼しうるものと思われ、河川の流れの解明にも多に役立つであろう。

図-2.12~14は乱れの強さ $\tilde{u}'$ (x 軸方向)・ $\tilde{v}$ (半径方向-中心より壁向きを正ととる)・ $\tilde{w}$ (円周方向)、Reynolds応力・二重相関係数の測定結果である。流れの中心部では $\tilde{u}'/U_*$ 等はReynolds数であり、壁面に近づくにつれてReynolds数の影響や壁面による流速変動の束縛の影響($\tilde{u} \gg \tilde{w} > \tilde{v}$)がはっきりする。

$Re = 500,000$ の場合の u -成分のスペクトル $F_u(k_1)$ を図-2.15に示す。($r' = a - r$ は壁面からの距離)壁面に近づくにつれて波数の大きい(したがって小さな)渦の割合が多くなること、壁面近くを除けば、 $F_u(k_1)$ の高波数部($1 < k_1 < 24$)が $-5/3$ 乗則に従うことがわかる。しかし、 $v' \cdot w'$ 成分については $-5/3$ 乗則は成り立たない。

B) 乱れのエネルギー・バランス：流体の運動方程式から乱れのエネルギー・バランスを表す次のような関係が得られる。

$$\overline{u'v'} \frac{dU}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \overline{v'^2 + w'^2} + \frac{p}{\rho} \right) =$$

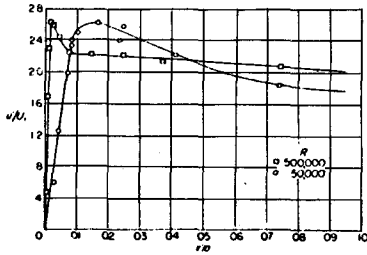
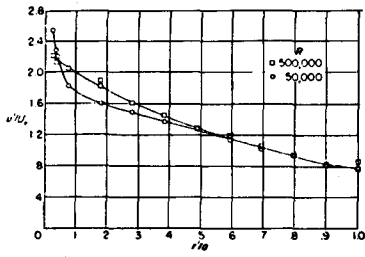


図-2・12

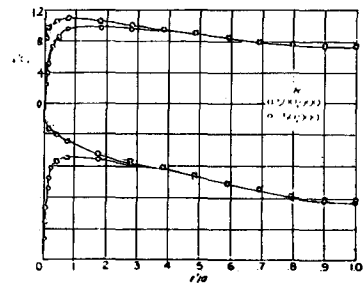


図-2・13

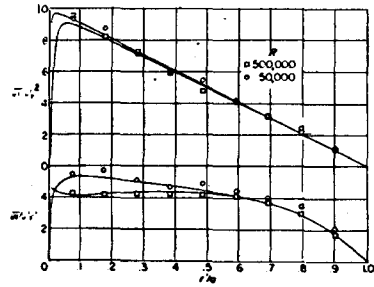


図-2・14

$$\frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (223)$$

式(2.23)の左辺の第1項は Reynolds応力が平均流からうばうエネルギー $(P_r)_\tau$: production), 第2項は半径方向の乱れによる運動・ポテンシャルエネルギーの変化率(diffusion term), 第3項はgradient type of diffusion と呼ばれ壁面近くでのみ重要である。第4項は分子粘性によって熱にかわる乱れのエネルギー $(W\tau)$: エネルギー逸散率・dissipation)を表す。

一方, 流れ全体の失うエネルギー

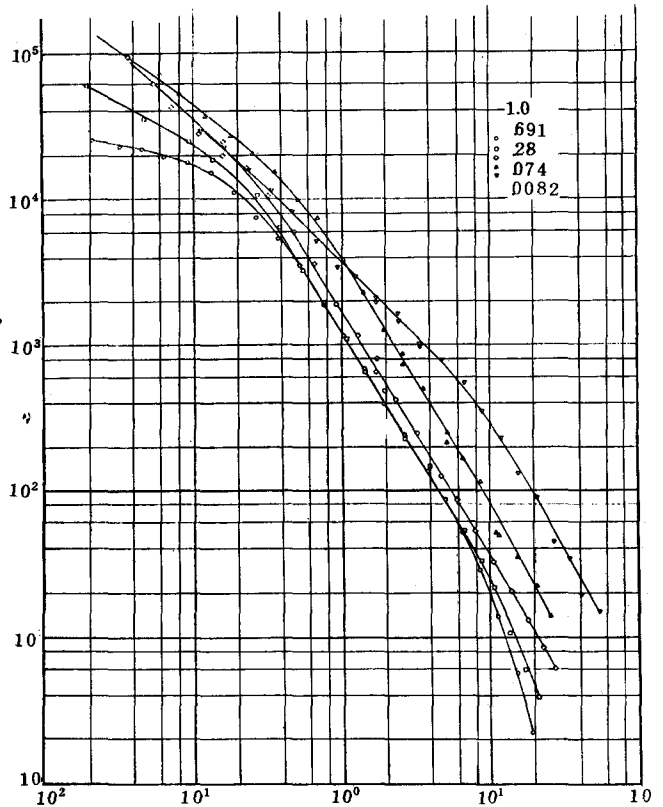
$$- \frac{r}{a} U_*^2 \frac{dU}{dr} \text{ は}$$


図-2・15

$$\frac{r}{a} U_*^2 \frac{dU}{dr} = \overline{uv} \frac{dU}{dr} - \nu \left(\frac{dU}{dr} \right)^2 \quad (2.24)$$

のように、一部は直接熱エネルギー ($\nu \left(\frac{dU}{dr} \right)^2 = W_\mu$)

に、一部は乱れのエネルギー ($\overline{uv} \frac{dU}{dr} = (P_r)_\tau$)

となる。図-2.16はこの関係を示すもので、 $W_\mu = (P_r)_\tau$ となる laminar sublayer の外縁 ($R_* = r' U_* / \nu = 115$) で production が最大となっている。

図-2.17は、式(2.23)のエネルギー・バランスの関係を示し、これから次のような結論が得られる。

a) 流れの中心部を除き、エネルギー・生産率 $(P_r)_\tau$ とエネルギー逸散率 (W_τ) がほぼ釣り合っている。

b) エネルギー・バランスに関するほとんどすべての項が laminar sublayer の外縁で最大となっている。

c) また、この床層外縁から中心部と壁面へのエネルギー輸送が起っている。

開水路流の乱れについては、日野²⁶⁾や石原・今本²⁷⁾の実験がある。最近、余越²⁸⁾は特に自由表面近くの特徴をびわ湖疏水で調べた。

3. 密度流の乱流構造

密度流は最近の水理学・海岸工学の中でも色々と新しい問題をかゝえた分野であり、前回および今回の水理研修会において論じられている。この章では、成層密度流ではなく混合型の連続的に変化する密度勾配を形成している流れの乱流構造について述べる。同じような流れの問題は気象学(大気乱流)でも取扱われており、実験資料も多い。したがって、特に水流という事にこだわらないことにする。

A) Richardson 数およびその他の安定度指数^{3), 5), 6)}。
密度(ρ)あるいは温度(T)による成層流の安定度に関する無次元数として Richardson 数がある。

$$Ri = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho/dy}{(dU/dy)^2} \quad (3.1)$$

$$Ri = \frac{g}{\theta} \frac{\partial\theta/\partial y}{(dU/dy)^2} \quad (3.2)$$

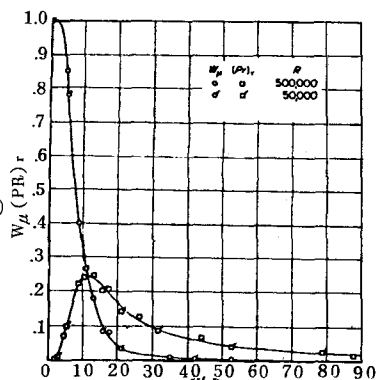


図-2.16

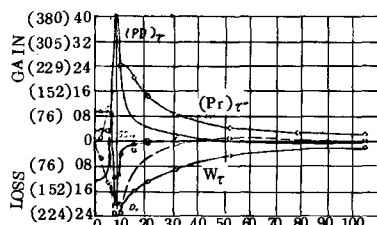
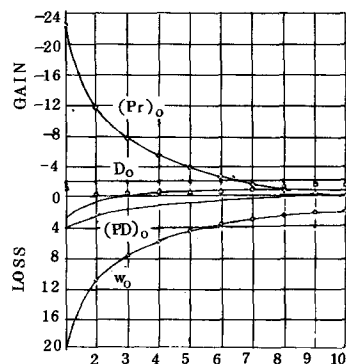


図-2.17

こゝに、 $\theta = T + \Gamma y$ はポテンシャル温度； $\Gamma = -1^\circ\text{C}/100\text{m}$ は断熱気温遞減率である。

Richardson 数の物理的な意味は、“乱れによって生ずる Reynolds 応力が平均流からうばうエネルギーと、密度差によって生ずる浮力に逆らって流体塊が鉛直方向に動くために必要な仕事との逆比”である。

もし、 $Ri > 0$ であれば流体塊が例えば上方に移動しても浮力と重力とのバランスから流体塊の運動は押えられるが、逆に $Ri < 0$ ならば一度運動を始めた流体塊はますますその方向へ加速されることになる。それゆえ、 $Ri > 0$ の場合を安定； $Ri = 0$ を中立； $Ri < 0$ の場合を不安定と呼んでいる。^{*})

$Ri < 0$ の状態は水流ではほとんど考えられないが、大気中では日中（特に風速が小さく、日射の強い場合）は普通に起る状態である。

^{*}) 成層(2)層流の境界面の安定・不安定と混同されやすいが、大気乱流におけるこの定義をここにも略襲する。境界面の安定問題では、 $Ri > 1$ 、 $Ri < 1$ によって乱れが発達するか、減衰するかの条件になる。

式(3.1)(3.2)で定義される Ri は $\partial T/\partial y$ 、 $\partial U/\partial y$ が小さい場合には測定誤差が大きく、安定度指数として適当ではない。そこで、これに代るものとして flux Richardson 数 Rf が用いられる。(C_p = 定圧比熱)

$$Rf = g y \Delta \theta / (C_p \theta U \Delta U) \quad (3.3)$$

大気乱流では安定度指数として、Monin length L ・stability ratio $(\Delta \theta/U^2)$ ・stability index $(g/\theta \cdot \Delta \theta/U^2)$ 等が用いられる。

B) Ellison - 山本 - Panofsky の理論²⁹⁾³⁰⁾³¹⁾：密度勾配をもつ流れでは流速分布がいわゆる log-law からはずれることは早くから気付かれ、色々な理論が立てられて来た。そして、すべての安定度領域に関して提出された最初の理論が Monin & Obukov の“相似理論”(1954)である。この理論は単に流速分布のみではなく、他の乱流特性についても適用され広く応用されている。これについて述べることは、あまりにも大気乱流の分野に入り込んでしまい、本研修会の目的からはははずれてしまうので、こゝでは省略する。Monin & Obukov の理論は次元解析的なものであったので、これを流体の運動方程式から導こうとする試みが行われた。[Ellison (1957), 山本 (1959), Panpfsky (1961)] これらの理論結果を要約すれば次のようになる。

a) 流速分布を $f \equiv \kappa U/U_*$ (κ = Karman 定数) と表し、壁面(地表面)からの高さ Z を Monin Length L ($\equiv U_*^3/\sigma k \frac{g}{T} \frac{q}{C_p \rho}$, σ = 定数, q = 熱輸送量) で無次元化し $\xi = Z/L$ とするとき、 f は次の微分方程式の解として与えられる。

$$\zeta^4 (f')^4 + \zeta^4 (f')^3 - 1 = 0 \quad (3.4)$$

あるいは、 $\varphi \equiv \zeta df/d\zeta = Z df/dZ$ とするとき

$$\varphi^4 + \zeta \varphi^3 - 1 = 0 \quad (3.5)$$

b) 乱れの r.m.s. や運動量の輸送係数

$$\sqrt{u'^2} \propto U_* = \kappa Z (dU/dZ) (1 - \sigma Ri)^{1/4} \quad (3.6)$$

$$K_M = k^2 Z^2 (dU/dZ) (1 - \sigma Ri)^{3/2} = k Z U_* (1 - \sigma Ri)^{3/4} \quad (3.7)$$

c) 運動量と物質(あるいは熱)の輸送係数の比

$$K_S/K_M \propto (1 - R_f/R_{fe}) (1 - R_f)^{-2} \quad (3.8)$$

ここに, R_f は flux form Richardson 数で $R_f = K_S Ri / K_M$, R_{fe} はこれ以上絶対に大きくなりえないという限界 flux Richardson 数で 0.1 ~ 0.15 と云われる。

○) Richardson 数と乱れの強さ・拡散係数: 大気の接地気層の場合には, Richardson 数あるいは(大気)安定度と乱れの強さ・風向変動・エネルギー逸散率などとの間の関係が良く調べられている。しかし, 風洞気流の場合や水の場合の密度流にも二三の実験があるが, まだ不充分である。
〔風洞: Ellison(1962), Wiskind(1962); Webster(1964), 水流: Grigg & Stewart(1963), Ellison & Turner(1959)〕

図-3.1~3は流速勾配と温度勾配とを人工的に与えた風洞気流での Webster³²⁾の実験結果の一部である。 Ri が増加し気流が安定になるにつれて, a) 乱れの強さが弱くなること, b) 鉛直方向の乱れの成分がより強く押えられて乱れの非等方向性が強くなること, c) 輸送係数が急激に減少することが明らかである。

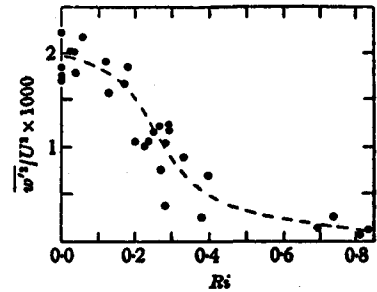


図-3.1

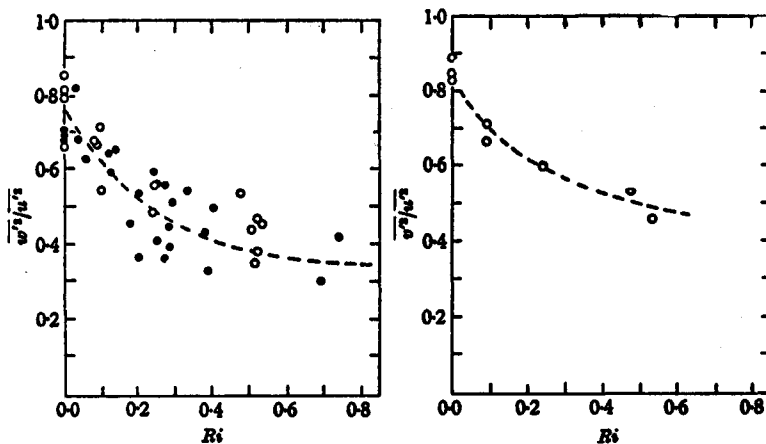


図-3.2

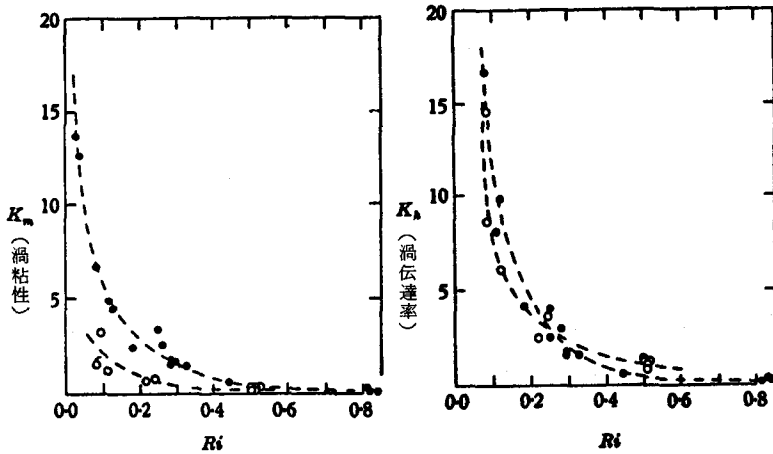


図 - 3 . 3

D) 安定度とスペクトル： $Ri > 0$
 で層が安定な場合には渦は浮力に抗して仕事をなし、エネルギーの一部を失う。これは大きな渦に著しく、その結果渦のエネルギーとスケールは減少する。すなわち、中立の場合に較べて乱れのエネルギーが少くなり、そのスペクトルの極大も高波数の方へ移行する。

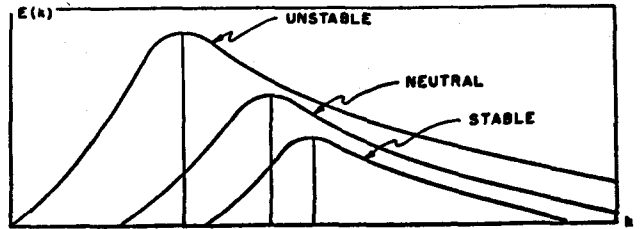


図 - 3 . 4

不安定の場合には、逆に大きな渦が外部からエネルギーの供給を受け、スペクトルの極大は低波数の方へ移る^{33) 34)} (図 - 3.4)。

スペクトルの関数形については $-5/3$ 乗則より大きいスケールでの形が議論の中心となっている。一般流のシアによる乱れの生成は無視できるくらい小さいが、浮力の影響は大きいようなスペクトル領域があるとして、これを浮力領域と呼ぶ。この浮力領域の速度スペクトルについて、Bolgianioは $-11/5$ 乗則を導き、Shur(ソ)とLumley(米)は -3 乗則を導いている。しかし、理論を検討するための実測資料は不足している。

4. 粒子浮遊流の諸特性^{*)}

4.1 土砂流の場合

A) Vanoni の実験：河川の抵抗係数が場合によっては土砂濃度の高い洪水時に小さくなることは、わりに早くから気付かれていたようである。土砂流と抵抗係数・流速分布などの関係について最初の系統的な研究はVanoni (1944)³⁵⁾によって行われた。その後、同様な実験がいくつか行われているが、Ismail (1951)³⁶⁾、Vanoni & Nomicas (1961)³⁷⁾の実験が良く知られている。

これらの実験の結果、a) 土砂流の抵抗係数は土砂濃度とともに減少すること、b) 流速分布の対数則に用いられるKarman 定数 k

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_* y}{\nu} + As \quad (4.1)$$

が土砂濃度の増加と共に減少すること；すなわち，流速分布の勾配 $dU/dy = U_*/\kappa y$ が土砂濃度の増加とともに急になることなどが明らかとなった。

Karman 定数が小さくなることは，混合距離が短くなること，渦のスケールが縮小することである。

このような新しい実験結果についての物理的解釈は次のように考えられた。“流れが土砂粒子を重力の作用に逆らって浮遊させるためには，乱れが平均流からうばうエネルギー $Pr = \tau dU/dy$ が増加しなければならない。そのためには，流速分布の勾配 dU/dy は増加し，Karman 定数は減少する。”また，同時に“乱れのエネルギーが土砂浮遊に消費されるから，土砂流の乱れの強さは減衰

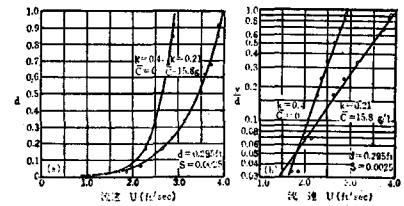


図-4・1

するであろう”と考えられて来た。それゆえ，Einstein & Chien³⁸⁾ は，土砂粒子を浮遊させるためのエネルギー P_p と流れの失う平均エネルギー P_f との比 ($P_p/P_f = (\gamma-1) m_a v_p / (\rho_p U_0 g I)$) と Karman 定数の間に一定の関係が成立することを実験データから導いた。(こゝに， γ = 粒子の比重： m_a = 土砂の断面平均重量濃度： v_p = 土粒子の沈降速度： U_0 = 断面平均流速： I = 水路勾配)

B) 椿の理論，志村の理論：土砂流の流速分布の変化を運動方程式から導こうとする試みが室田³⁹⁾，⁴⁰⁾，⁴¹⁾ 椿，志村などによって行われた。

椿は，渦の強さや大きさが変化しても，渦の寿命時間是不変であると仮定して，乱れのエネルギー平衡式より次の関係式を得た。

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1}{\psi + \{1 + \psi \xi + \psi^2\}^{3/2}} \quad (4.2)$$

こゝに， K_0 = 浮遊砂がない場合の Karman 定数； $\xi = \frac{2U/U_* I}{\alpha \beta \kappa \zeta}$ ； $\zeta = y/h$ ； h = 水深；

$\psi = (\alpha \kappa_0 / 2) (v_p \bar{C} / U_* I) (\rho_s - \rho_0) / \rho_m \cdot [(1 - \zeta) / \zeta]^{z-1} / \int_B^1 [(1 - \zeta) / \zeta]^z d\zeta$ ； $Z = v_p / \beta \kappa U_*$ ；

$\alpha \div 7.0$ (定数)； $\beta \div 1$ (定数)； B = 河床付近における浮遊限界。

これに対し，志村は粒子の浮遊によって一次的には乱れの強さは変化しないと仮定し，同じくエネルギー方程式から出発して，次の式を導いた。

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} + \frac{\beta m (\gamma - 1) g v_p (h - \delta)}{U_*^3 (\ln h / \delta - 1)} \quad (4.3)$$

(δ = 層流底層あるいは粗度の高さ， $\beta = 4.8$)

4.2 中立浮遊粒子流

A) Elata & Ippen の発見：前節に述べたような従来の考え方によれば，比重 γ が 1 に等しい

固体粒子を浮遊する流れでは、粒子を浮遊させるためのエネルギーは必要ではないから、流れの特性⁴²⁾には何んらの変化も起らないはずである。しかし、Elata & Ippen の実験はこの常識を完全に覆してしまった。こうした流れでも、やはり Karman の定数の減少が起っており、また驚くべきことに乱れの強さは普通の場合にくらべて増加しているのがあった。その上、抵抗係数は Karman 定数の減少にもかかわらず、土砂流の場合とは逆に、粒子濃度の増加とともに増加の傾向を示した。

図-4.2 は Ippen らの実験結果と次節にのべる日野の理論曲線との比較を示す。その他、MIT では同種の多数の実験が行われた。⁴³⁾

B) Daily らのファイバー流の実験：最近の MIT における中立浮遊粒子流の一

連の研究のきっかけをなしたのは、パルプ会社の依頼によって行われた Daily らのファイバー混入流の実験⁴⁴⁾である。重量濃度でわずか1%もしくはそれ以下のファイバーの混入によって、流速分布や抵抗係数に著しい変化が生じた。 R_0 が大きい場合は1%のファイバーの混入によって40%も抵抗係数が減少した。しかし、 R_0 が小さい領域では R_0 と抵抗係数 f との関係は層流的である(図-4.3)。

(このような抵抗係数の減少は、長い分子構造をもつある種の液体や、境界層内に他の流体を噴出させて被膜境界層を作る場合、flexible surface 上の流れの場合にも生ずる。この現象は層流から乱流への遷移の問題と考えられている。)

乱れのエネルギー分布をみるとファイバーの混入によって乱れの強さが減り、エネルギー分布が低周波数の領域に移行している。結局、ファイバー流の内部構造は次のようになっているであろう。

まず、 R_0 数があまり大きくない場合を考えよう。壁面近くでは、剪断力は主として層流粘性力で伝達される。一方、管の中心部では絡み合ったファイバーが剪断力の伝達に重要な役割をはたしており、流速分布は平たい型となっている。この2つの層の間に、主に乱れによって剪断力が伝達されている中間層がある。 R_0 数が増につれて、中間層の乱れが中心部のファイバーの束を解きほぐし、遂に管全体に乱れが広がり、 R_0 数と抵抗係数 f との関係はニュートン流体の場合に近づく。

4.3 粒子浮遊流の一般理論

A) 現象の物理的解釈：前節に述べた Ippen らの中立浮遊粒子流の挙動は、従来の土砂流の常識や考え方からは全く説明のしようがなかった。この現象について、日野は次のように考えた。^{45) 46)}

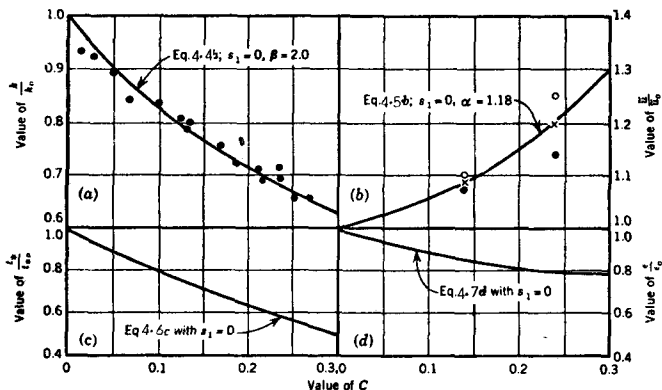


図-4.2

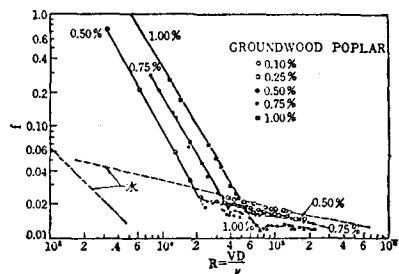


図-4.3

比重が1の粒子を浮遊させた場合には、確かに粒子を浮遊させるためのエネルギーは不要である。しかし、水の一部が固体粒子で占められるため、その体積分だけ水の粘性によるエネルギー逸散が減少する。水深と勾配を一定に保つとして、水の場合と同じだけのエネルギーを逸散させるためには、乱れの強さが増加しなければならない。（粒子の回転運動や相対運動によるエネルギーの逸散は粒子が小さい場合には無視しうることが理論的に示される。）

一般の粒子流では、a) 粒子を浮遊させるための仕事と、b) 混合長の縮少によるエネルギー生成の増加と、c) 粒子による有効逸散体積の減少とが、ある釣合の関係になって落ち着くものと考えられる。

抵抗係数の変化には、粒子浮遊による見掛けの粘性の増加と粘性底層の厚さの変化を考えなければならない。

滑面水路の中立浮遊粒子流では、見掛けの粘性係数 ν_v の増加の結果（Couette flow の安定限界 Reynolds 数に相当する $Re_* = U_* \delta / \nu_v = const$ であるから）、粘性底層の厚さが増加する。そのため、これに接する極めてエネルギー逸散率の高い領域が排除もしくは消滅することになる。粘性底層内のエネルギー逸散の総量は厚さが厚くとも一定である。壁面から離れた部分のエネルギー逸散は増加するが、粘性底層によって排除された部分を考えて、一般的には差引きエネルギーの逸散は減少する。簡単のために、水深と勾配を一定に保って（ $U_* = \sqrt{ghI}$ ）考えれば、エネルギー逸散量は $U_0 \tau_0 = \rho U_*^3 U_0$ であるから、 $f = 8 (U_* / U_0)^3$ で定義される抵抗係数は増加する。

粗面水路の中立浮遊流や土砂流では、見掛けの粘性係数の増加の影響は現れず、エネルギー逸散の総量が増加するから、やはり水深と勾配を一定に保って比較すると、抵抗係数 f は減少する（表-1）。

表-1：粒子流の濃度と諸特性の変化に関する理論的予測と実験的検証

水路の壁面		滑面		粗面	
浮遊粒子		土砂	中立浮遊粒子	土砂	中立浮遊粒子
Karman 定数		↓	⬇	⬇	↓
乱れの強さ		↘	↑	↘	↑
エネルギー逸散	流れの中心部	↑	↓	↑	↑
	“law of wall” 域	一定	一定	—	—
粒子浮遊のためのエネルギー		↑	—	↑	—
エネルギー生産		↑	⬇	⬆	↑
平均流速		↑	⬇	⬆*	↑
抵抗係数		↓	⬆	⬇*	↓

註) ⬆ = 粒子濃度の増加とともに増加
 ⬇ = 粒子濃度の増加とともに減少
 ↘ = やや減少
 ○ = 実験的に確認されたもの
 * = bed load が少ない間のみ成立

B) 日野の理論^{46) 46)}(乱流構造について) : 以上のような思想を背景に, 日野は乱れのエネルギー方程式と(椿や志村のように乱れの特性について何んらかの仮定をすることを捨てて)乱れの加速度平衡方程式から, 乱れの諸特性についての理論を導いた。この理論では, 乱れの特性間に何んら仮定をおかなかった結果, 粒子濃度とKarman 定数との関係以外に, 乱れの強さ $\sqrt{u^2} = \tilde{u}$, 渦の寿命時間 t_* , 渦粘性(輸送係数) ε の変化も与えることができた。

$$\frac{K_0}{K} = \frac{(1 + \beta C_a)}{2} \{1 + \{1 + 4 B \kappa_0 (1 + \beta C_a) s_1\}^{1/2}\} \quad (4.4)$$

$$\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_0} = \left(\frac{1}{1 - \alpha_1^2 C_a}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho_a}{\rho_0}\right)^{1/3} \left[1 - \frac{2 \kappa_0 \sigma s_1}{(1 + \beta C_a)(1 + \{1 + 4 B \kappa_0 (1 + \beta C_a) s_1\}^{1/2})}\right]^{1/3} \quad (4.5)$$

$$\frac{t_*}{t_{*0}} = \frac{2(1 - \alpha_1^2 C_a)^{1/3} (\rho_a / \rho_0)^{1/3}}{(1 + \beta C_a)(1 + \{1 + 4 B \kappa_0 (1 + \beta C_a) s_1\}^{1/2})} \times \left[1 - \frac{2 \kappa_0 \sigma s_1}{(1 + \beta C_a)(1 + \{1 + 4 B \kappa_0 (1 + \beta C_a) s_1\}^{1/2})}\right]^{1/3} \quad (4.6)$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{2(1 - \alpha_1^2 C_a)^{-1/3} (\rho_a / \rho_0)^{1/3}}{(1 + \beta C_a)(1 + \{1 + 4 B \kappa_0 (1 + \beta C_a) s_1\}^{1/2})} \times \left[1 - \frac{2 \kappa_0 \sigma s_1}{(1 + \beta C_a)(1 + \{1 + 4 B \kappa_0 (1 + \beta C_a) s_1\}^{1/2})}\right]^{1/3} \quad (4.7)$$

$$\text{よって, } s_1 = \frac{g(r-1)V_p}{U_*^3 \ln h/\delta} \int_{\delta}^h \frac{C}{\{1 + (r-1)C\}} dy \cong \frac{g(r-1)V_p C_a (h-\delta)}{U_*^3 \ln k/\delta} \quad (4.8)$$

$$\sigma = \ln(h/\delta) / [\ln(h/\delta) - 1] \quad (\text{一般に } \sigma = 1 \sim 2) \quad (4.9)$$

$$\alpha_1^2 = \alpha^2 \left\{ 1 + \int_{\delta}^h (C - C_a) / C_a dy \right\} \quad (4.10)$$

また, $\alpha = 1.18$, $\beta = 2.0$, $B = 13$ は定数; $C_a =$ 断面平均濃度, $\sigma =$ 粘性底層の厚さは粗度の高さ。

図-4.2 は Elata & Ippen の実験と式(4.5)~(4.7)において $r = 1$ とした曲線と比較したもので, 両者は良く一致している。

図-4.4 は土砂流の場合に, 上の諸式の理論結果を示すものである。乱れの強さ $\tilde{u}$ の土砂濃

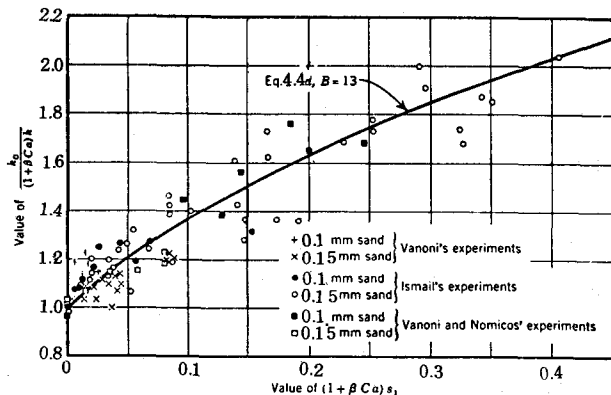


図-4.4a

度による減少は極くわずか(この点固体粒子が存在しない密度流の場合と異なる)であって;むしろ,乱れの事命時間が大きく減少する。

*) 47) 48) 49)

C) 抵抗係数: 粒子混入流の抵抗係数や流速分布の対数法則の定数 (A_0 , A_r) の変化の一般式を, 乱流構造に関する理論式 (4.5) (4.6) などから導くことができる (表-1 参照)。実験値と理論式は良く一致するが (図-4.5 は一例) 紙数の関係から記述を省略する。

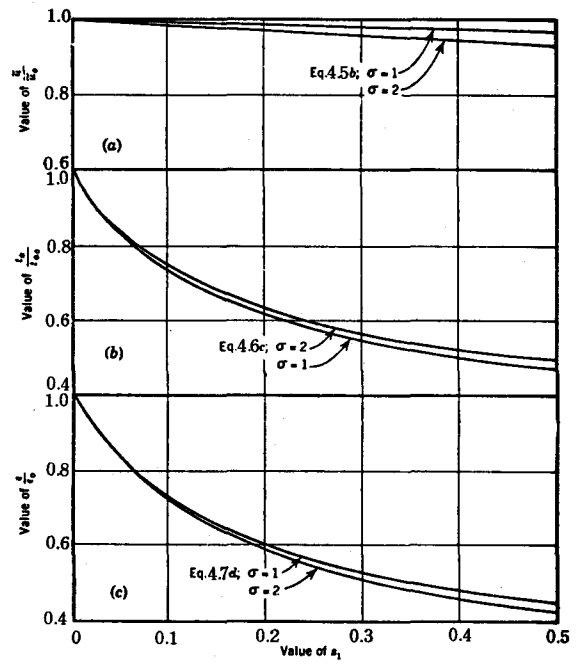


図-4.4b

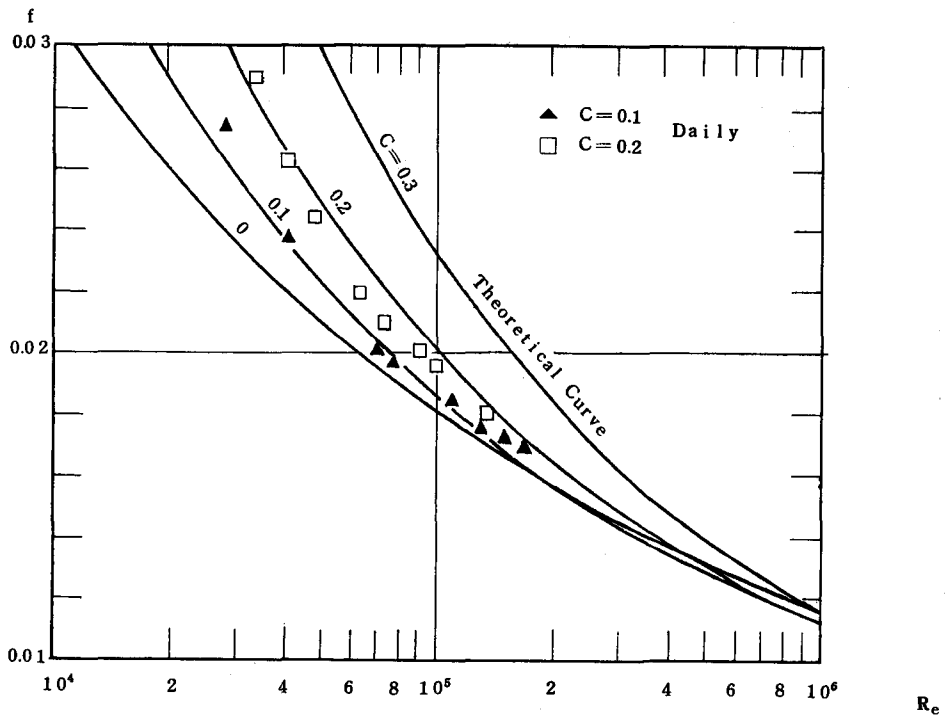


図-4.5

5. 乱流拡散

5.1 等方性乱流場の拡散理論 I 連続湧源型の拡散

A) Taylor の拡散理論⁵⁰⁾: ある乱流場の流体塊が $t = 0$ から $t = t$ までの間に y 方向に動いた距離 Y は

$$Y = \int_0^t V(t-\xi) d\xi \quad (5.1)$$

である。これを用いて流体塊の移動距離の 2 乗平均と流体塊の速度の相関係数 (Lagrange 相関) との間に次の関係が得られる。

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \bar{Y}^2 = \bar{v}^2 \int_0^t R_\xi d\xi \quad (5.2)$$

ここに, $R_\xi = \overline{v(t)v(t-\xi)}/\bar{v}^2$ は Lagrange 相関係数を表す。

Lagrange 相関係数は充分大きな ξ に対しては $R_\xi = 0$ とみなして良く, 緩和時間 (渦の寿命時間) $t_* = \int_0^\infty R_\xi d\xi$ に較べて充分大きな t に対しては, 式 (5.2) を積分して次の関係が得られる。

$$\bar{Y}^2 = 2 \bar{v}^2 t \int_0^\infty R_\xi d\xi \quad (t \gg t_*) \quad (5.3)$$

また, t が充分小さければ $R_\xi = 1$ とみなせるから

$$\bar{Y}^2 = \bar{u}^2 t^2 \quad (t \ll t_*) \quad (5.4)$$

となる。

$t = x/U$ であるから式 (5.3) (5.4) は, 煙の拡がり幅 $(\bar{Y}^2)^{1/2}$ は煙源の近くでは直線的に, 煙源から遠くでは放物線的に増加することを示している。(図-5.1)

また, 拡散係数 $K = \bar{Y}v = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \bar{Y}^2$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} K &= \bar{v}^2 \int_0^\infty R_\xi d\xi = \bar{v}^2 t_* \\ &= \text{const} \quad (t \gg t_*) \\ K &= \bar{v}^2 t / 2 \quad (t \ll t_*) \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Lagrange 相関係数は $R_\xi = \exp(-t/t_*)$ の関数型で近似しうる場合が多い。この場合には, 煙の拡がり幅および拡散係数は次のように表わされる。

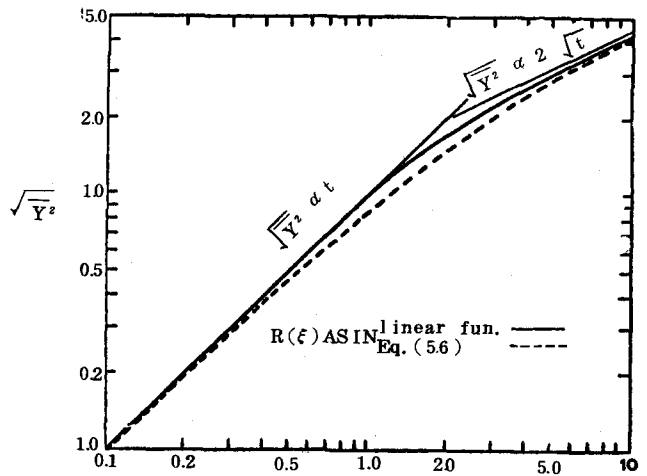


図 - 5.1

$$\bar{Y}^2 = 2\bar{v}^2 t_*^2 \left[\frac{t}{t_*} - \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{t_*}\right) \right\} \right] \quad (5.6)$$

$$K = \bar{v}^2 t_* \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{t_*}\right) \right\} \quad (5.7)$$

B) 乱流拡散のスペクトル表示⁵¹⁾：式(5.2)を積分すれば

$$\bar{Y}^2 = 2\bar{v}^2 \int_0^t (t-\xi) R\xi d\xi \quad (5.8)$$

となる。この式にLagrange 相関係数の Fourier 変換によって導入される Lagrange スペクトル $F_L(f)$ を代入すれば、Taylor 理論のスペクトル表示を得る。

$$\bar{Y}^2 = \bar{v}^2 t^2 \int_0^\infty F_L(f) \frac{\sin^2(\pi f t)}{(\pi f t)^2} df \quad (5.9)$$

上式の右辺の積分中の $\sin^2(\pi f t)/(\pi f t)^2$ は一種の high frequency cut-off filter であり、到達時間 t が大きくなるにつれて低周波域へ filter 作用が及ぶ。式(5.9)の表す物理的な意味は次のようになる(図-1.7 参照)。

「到達距離の小さい所の拡散には、すべての周波数の渦が関与するが；煙源から遠くなるにつれて拡散は周波数の低い大きい渦の作用によって行われ、小さな渦は煙粒子の小さな変動に関係するのみとなる。」

C) 乱流拡散における濃度と採取時間の関係：われわれの対象とする拡散のスケールが大きくなると(例えば、湖水・海洋・大気中での拡散)、煙の拡がり幅は観測時間(到達時間・距離を一定として) T の $\frac{1}{2}$ 乗に比例して増加する。この結果(いわゆる慣性領域 inertial subrange の時間範囲で)、煙軸上の濃度は観測・採取時間の $\frac{1}{2}$ 乗に比例して減少する。

このことは、井上⁵²⁾(1952)・小倉⁵³⁾(1959)・日野⁵⁴⁾(1965)によりそれぞれ異なる方法で理論的に導かれ、また日野によりこの理論を裏付ける実験データが得られた。

小倉は前述の B) の方法をさらに一般化し、拡散幅と到達時間 t 、観測時間 T との間に次の関係を導いた。

$$\bar{Y}_T^2(t) = \bar{v}_L^2 t^2 \int_0^\infty F_{L\infty}(f) \frac{\sin^2 \pi f t}{(\pi f t)^2} \left[1 - \frac{\sin^2 \pi f T}{(\pi f T)^2} \right] df \quad (5.10)$$

上式の右辺中の [] 内の項は、いわば low frequency cut-off filter の作用を意味するもので、観測時間 T を増すにつれて、より大きな低周波数の渦が拡散に関与することを表わしている(図-1.8 参照)

D) 乱流拡散に関する Kolmogorov の理論：乱れの局所的等方性に関する Kolmogorov の理論は Lagrange 相関あるいはスペクトルにも適用することができる。

普通の相関のかわりに速度差の分散(いわゆる構造関数 structure function)を考える。

$$D(\tau) = \overline{[v(t+\tau) - v(t)]^2} \quad (5.11)$$

$$D(\tau) = 2\bar{v}^2 - 2C(\tau) \quad (5.12)$$

$$\text{こゝに, } C(\tau) = \overline{v(t+\tau)v(t)}$$

レイノルズ数が十分大きい場合には、小さな τ に関する $D(\tau)$ は主に乱れの細部構造によって、つまり動粘性係数 ν とエネルギー逸散率 ϵ によって定まる。

$$\bar{v}^2 - C(\tau) = A\sqrt{\nu\epsilon} \beta\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}}\tau\right) \quad (\tau \ll t_*) \quad (5.13)$$

こゝに、 A は定数、 β は universal function である。

特に、 τ を粘性領域を除く慣性領域($\sqrt{\nu/\epsilon} \ll \tau \ll t_*$)に限れば、式(5.13)は次のようになる(図-5.2)。

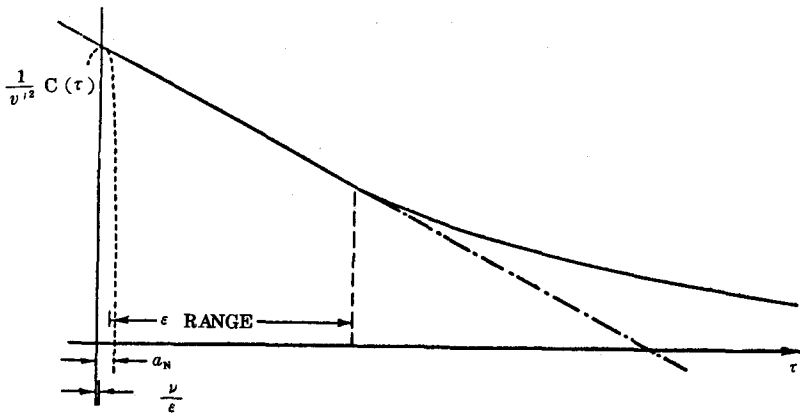


図-5.2

$$D(\tau) = \bar{v}^2 - C(\tau) = C\epsilon\tau \quad (5.14)$$

以上の式に対応するスペクトル関数は

$$S_L(\omega) = B\nu\tau\left(\sqrt{\frac{\nu}{\epsilon}}\omega\right) \quad (\omega \gg t_*^{-1}) \quad (5.15)$$

特に慣性領域($t_*^{-1} \ll \omega \ll \sqrt{\epsilon/\nu}$)に対して

$$S_L(\omega) = B\epsilon\omega^{-2} \quad (5.16)$$

となる。こゝに、 B は定数、 ν は universal function を表す。

式(5.8)と(5.14)より、慣性領域での拡散幅は

$$\bar{Y}^2 = \bar{v}^2 t^2 - \frac{C\epsilon}{3} t^3 \quad (5.17)$$

となる。

5.2 等方性乱流場の拡散理論 II 浮遊湧源型の拡散

A) 浮遊湧源型の拡散：前節でのべた拡散現象は、固定された煙源から連続的に出る煙の拡散を論じたものであるが、乱流拡散には本来2種の型があり、両者は全く別に取り扱われなければならないことが認識されたのは比較的最近のことである。固定湧源型に対するもう一つの乱流拡散は浮遊源型⁵²⁾⁵⁵⁾

拡散と呼ばれる。(また、それぞれを one-particle analysis , two-particle analysis と云うこともある。)

浮遊湧源型の拡散を Taylor 式の方法で記述すれば次のようになる。2つの粒子の相対位置 $Y_1 (=Y'' - Y')$ の2乗平均は

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{Y_1^2} = \int_0^t R(\tau, t; \mathbf{A}) d\tau \quad (5.18)$$

と表せる。ここに、 R は粒子対の速度差 $w = v'' - v'$ の Lagrange 相関 $R(\tau, t; \mathbf{A}) = \overline{w(\mathbf{A}, t) w(\mathbf{A}, t + \tau)}$ 、 $\mathbf{A}$ は粒子対の $t = 0$ における相対距離である。

$R(\tau, t; \mathbf{A})$ は t にも τ にも関係し、前節の試式のような変換はできない。

B) Richardson の法則— Obukhov , Batchelor の理論: Richardson (1926) は拡散を neibour-distance function の導入によって論じ、この拡散方程式に用いられる拡散係数が現象のスケールの $\frac{2}{3}$ 乗に比例することを経験的に導いた。(Richardson の $\frac{2}{3}$ 乗則)

さて、 $\sqrt{\overline{Y_1^2}}$ が乱れの構造にくらべて小さければ、2粒子はほぼ同一の速度で運ばれるであろうし、また逆に $\sqrt{\overline{Y_1^2}}$ が乱れの構造全体にくらべて大きければ、2粒子の運動は互に関連がないであろう。

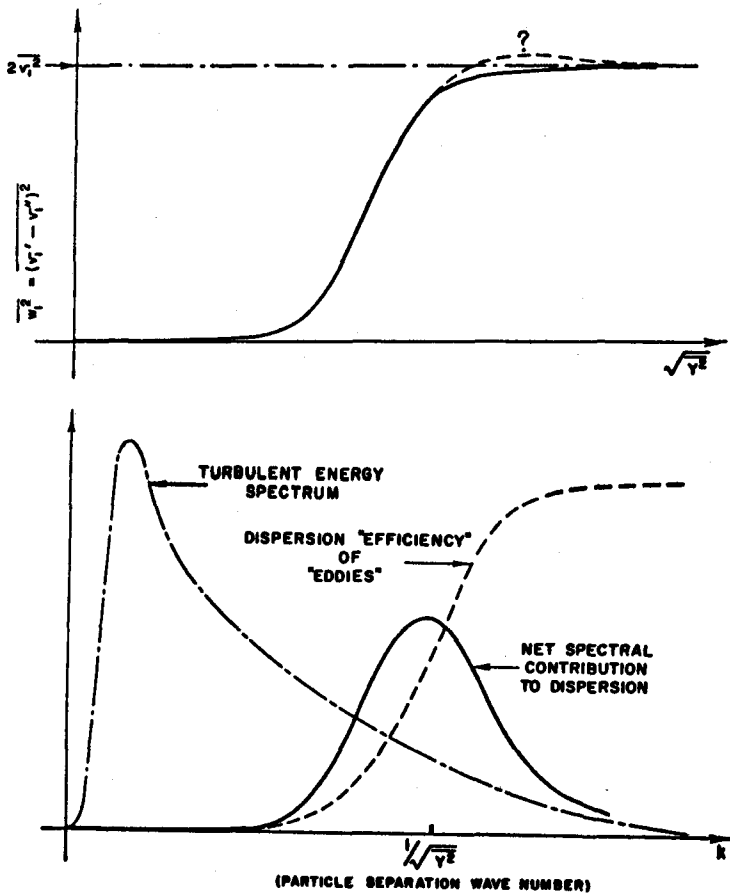


図 - 5 . 3

したがって、ある間隔の粒子の分散に対して最も有効なのは大きさが粒子間距離以下の渦である。こゝで“有効”という意味は単位運動エネルギーあたりの拡散作用をさしている。ところで、小さな渦ほど乱れのエネルギーは小さく、結局浮遊源型拡散に主に寄与するのは、粒子間距離と同じオーダーの大きさの渦である⁵⁶⁾(図-5.3)。

レイノルズ数が十分大きく、粒子間距離がKolmogorov 相似の領域 $(\nu^3/\epsilon)^{1/4} \ll \sqrt{\bar{Y}_1} \ll L$)にある場合には、粒子の相対運動もまたこれと同じ相似法則によって表される。

Obukhov⁵⁷⁾(1941)は $\bar{Y}_1^2$ が局所的等方性の慣性領域にあれば $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \bar{Y}_1^2$ は $\bar{Y}_1^2$ と ϵ のみに関係し、次元的に可能な拡散係数として次式を得た。

$$\frac{1}{2} \frac{d\bar{Y}_1^2}{dt} \sim \epsilon^{1/3} (\sqrt{\bar{Y}_1^2})^{4/3} \quad (5.18)$$

これは Richardson の法則に他ならない。

Batchelor^{55) 58)}(1952)も同じく Kolmogorov 相似を用いて、より一般的な理論を展開し、次の関係を得た。

$$\frac{d\bar{Y}_1^2}{dt} \propto t(\epsilon A)^{2/3} \quad (t \text{ が小さい}) \quad (5.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{Y}_1^2}{dt} &\sim \epsilon t^2 \\ &\sim \epsilon^{1/3} (\sqrt{\bar{Y}_1^2})^{4/3} \end{aligned} \right\} \quad (t \text{ が大きい}) \quad (5.20)$$

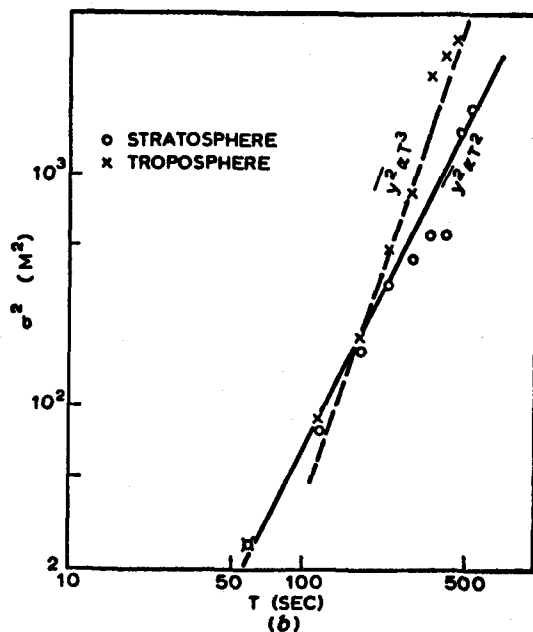
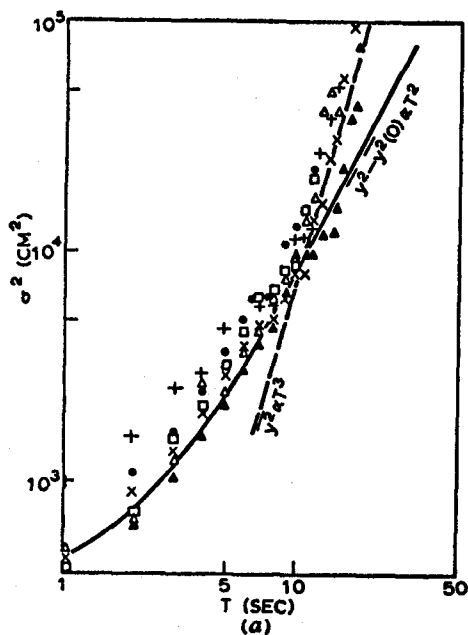


図-5.4

式(5.20)は Richardson の法則である。Richardson はわずか5種類の実測から ϵ 乗則を導いたが、この結論は幾分幸運であったと云えよう。というのは、理論上この法則が成立するには $(\bar{Y}_1^2)^{1/2}$ が乱れのスケールより小さくなければならないからである。

なお、式(5.19)(5.20)から次の関係が得られる(図-5.4)。

$$\bar{Y}_1^2 \propto (\epsilon A)^{2/3} t^2 \quad (t \text{ が小さい場合}) \quad (5.21)$$

$$\bar{Y}_1^2 \propto \epsilon t^3 \quad (t \text{ が大きい場合}) \quad (5.22)$$

C)⁵⁹⁾ 煙の蛇行運動：Gifford はモデル的に煙の運動を煙の中心の変化に関係する大きな渦の作用と、煙の中心のまわりの小さな渦の作用による拡散とに分けて論じた。Ivanov は局所的等方性理論によって、これをさらに厳密に取扱った。

5.3 剪断流場の拡散理論

A) 湧源近くの濃度分布：

2次元流を考える。時刻 t_0 に (x_0, y_0) を通った流体粒子は時刻 t には

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_{t_0}^t u(t') dt' \\ &= u(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{Du}{Dt} \right)_{t_0} (t-t_0)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{D^2u}{Dt^2} \right)_{t_0} (t-t_0)^3 + \dots \quad (5.23) \end{aligned}$$

の位置にある。同様にして、 y 方向の位置 $Y(t)$ についての表示を求め、結局両式から²⁾⁵⁸⁾

$$Y(X) = \frac{v}{u} X + \left[\frac{1}{2!} \frac{1}{u^2} \frac{Dv}{Dt} - \frac{1}{2} \frac{v}{u^3} \frac{Du}{Dt} \right] X^2 + \dots \quad (5.24)$$

X が十分小さければ、粒子の分布 $Y(X)$ は

$$Y(X) = \frac{v'}{U + u'} X \quad (5.25)$$

となる。これより分布の重心, skewness factor, flatness factor は次のようになる。

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = - \frac{\overline{u'v'}}{U^2} + \frac{\overline{u'^2 v}}{U^3} - \dots \quad (5.26)$$

$$\frac{\bar{Y}}{(\bar{Y}^2)^{1/2}} = \frac{\overline{v'^3}}{(\overline{v'^2})^{3/2}} - 3 \frac{\overline{u'v'^3}}{U(\overline{v'^2})^{3/2}} + 3 \frac{\overline{u'v'^2}}{U} \frac{\overline{v'^3}}{(\overline{v'^2})^{5/2}} + \dots \quad (5.27)$$

$$\frac{\bar{Y}^4}{(\bar{Y}^2)^2} = \frac{\overline{v'^4}}{(\overline{v'^2})^2} - 4 \frac{\overline{u'v'^4}}{U(\overline{v'^2})^2} + 4 \frac{\overline{u'v'^2}}{U} \cdot \frac{\overline{v'^4}}{(\overline{v'^2})^3} + \dots \quad (5.28)$$

式(5.26)は、剪断流では濃度分布の中心が $-u'v'/U^2$ だけ流速の大きい側へずれることを示している。

このような歪のある濃度分布を Hinze⁶⁰⁾(1952)は、 u' と v' との joint-probability-density $F(u'/U, v'/U)$ を正規分布

$$F\left(\frac{u'}{U}, \frac{v'}{U}\right) = \frac{\tilde{v}^2}{2\pi\tilde{u}\tilde{v}[1-R_{uv}^2]^{1/2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-R_{uv}^2)}\left[\frac{u'^2}{\tilde{u}} - \frac{2u'v'R_{uv}}{\tilde{u}\tilde{v}} + \frac{v'^2}{\tilde{v}}\right]\right\} \quad (5.29)$$

と仮定して次式のように求めた。こゝに、 $R_{uv} = \overline{u'v'}/\tilde{u}\tilde{v}$, $\tilde{u} = \sqrt{\overline{u'^2}}$, $\tilde{v} = \sqrt{\overline{v'^2}}$ である。

$$\frac{C(y/x)}{C(0)} = \frac{1}{\left[1 - 2\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}R_{uv} \cdot \frac{y}{x} + \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right)^2 \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{1/2}} \times \exp\left\{\frac{-\tilde{u}^2(y/x)^2}{2\tilde{v}^2\left[1 - 2\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}R_{uv} \cdot \frac{y}{x} + \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right)^2 \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}\right\} \quad (5.30)$$

この関係は 2 次元噴流^{2) 55)} (図 - 5.5) や用水路鉛直断面内の拡散実験⁶¹⁾ で確かめられている。

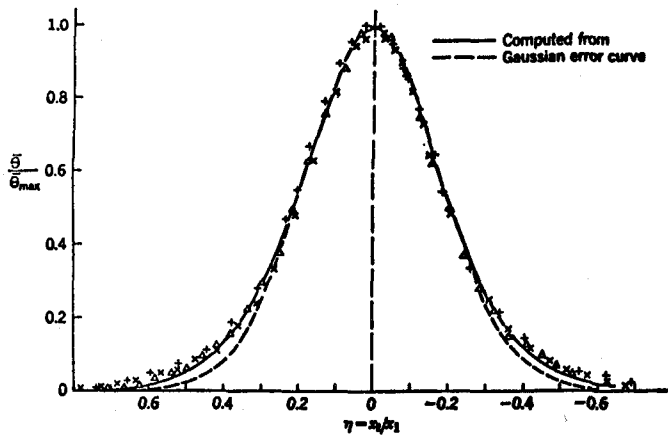


図 - 5.5

B) 相似理論⁶²⁾: 噴流や後流の乱流構造は相似に保たれるいわゆる self-preserving flow である。それゆえ、原点からの距離によって変わる長さおよび速度のスケールを適当に選んで Lagrange 相関を仮定して問題を解くことができる。

5.4 境界層内の拡散

壁面に沿う乱流境界層内では強い剪断流場のため Taylor 理論を適用することはできない。また、5.3 に述べた流速変動の確率分布による方法も壁面の存在のために適用することは難しい。このような場合の乱流拡散は相似理論によって解かれるようになって来た。

A) Euler 相似による理論⁶³⁾: 壁面から高さ h の点からの煙の拡散を考える。煙の上限の運動は次式で与えられる。(こゝでは、 Z を壁面に垂直上向きにとる。)

$$dX/dt = U(Z) \quad (5.31)$$

$$dZ/dt = w^*$$

上式中 w^* は煙の上方への拡散速度で、乱れの強さ $(\overline{w'^2})^{1/2}$ に比例する。Monin-Obukov の相似理論によれば、流速（風速） U および w^* は次式のように表せる。

$$U(Z) = \frac{V_*}{\kappa} [f(Z/L) - f(Z_0/L)] \quad (5.32)$$

$$w^* = \lambda V_* [1 - (f')^{-1}]^{1/4} \quad (5.33)$$

ここに、 L は乱流場の安定度を定義する長さ（Monin-length）； $f(Z/L)$ は風速分布の universal function で、安定度が中立に近い場合は

$$f(Z/L) = \ln(Z/L) + \beta(Z/L) \quad (5.34)$$

である。結局、煙の形は

$$\frac{dX}{dZ} = \frac{1}{\kappa \lambda} \frac{f(Z/L) - f(Z_0/L)}{[1 - (f')^{-1}]^{1/4}} \quad (5.35)$$

となる。これによれば、煙の形は風速には無関係で、乱流場の安定度によって決る。

B) Lagrange 相似による理論：^{64) 65) 66)} $t = 0$ に壁面を離れた煙の平均位置を $\bar{X}(t)$, $\bar{Y}(t)$, $\bar{Z}(t)$ とすると

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = U = (V_*/\kappa) [f(Z/L) - f(Z_0/L)]$$

$$\bar{Y} = 0 \quad (5.36)$$

$$\frac{d\bar{Z}}{dt} = w = bV_* \phi(Z/L)$$

瞬間点源からの煙の粒子の確率分布は $(x - \bar{X})/\bar{Z}$, $y/\bar{Z}$, $(Z - \bar{Z})/\bar{Z}$ の関数で

$$C_{ips}(x, y, z) = \frac{Q}{Z^3} \Psi\left(\frac{w - \bar{X}}{\bar{Z}}, \frac{y}{\bar{Z}}, \frac{Z - \bar{Z}}{\bar{Z}}\right) \quad (5.37)$$

と書ける。連続点源の場合には上式を時間に関して積分して次のようになる。

$$C_{cps} = Q \int_0^\infty \Psi/Z^3 dt$$

上式において、壁面上 $y = Z = 0$ を考え、また x 方向の拡散を y , Z 方向に較べて無視しうると仮定すれば、安定度が中立 [$\phi \equiv 1$] の場合の濃度分布は

$$\frac{C_{cps}(x, 0, 0)}{Q} bV_* \propto \frac{1}{\bar{Z}^2 [(\bar{X}/\bar{Z}) + (1/\kappa b)]} \quad (5.38)$$

$$\bar{X} = (\kappa b)^{-1} [\bar{Z} (\ln(\bar{Z}/\bar{Z}_0) - 1)] \quad (5.39)$$

で与えられる。式 (5.38) (5.39) は $\bar{Z}$ をパラメータとして、湧源からの距離と壁面上の軸上濃度の関係を与えるものである。

5.5 管路（開水路）内の拡散

A) 管路内の流体拡散：^{67) 68)} 管路内に投入された流体塊（例えば、色素・塩水）は乱れと剪断流効果（convection）のために流下につれて流軸方向に分散する。

塩水濃度を S ，その変動分を s' ，流速変動を u' ，分子拡散係数を k_1 とすれば，拡散方程式は次式で表される。

$$\frac{DS}{Dt} + \nabla \cdot (\overline{u's'}) = k_1 \nabla^2 S \quad (5.40)$$

Taylor はこの式を解いて，流れの方向の拡散係数として

$$K_1 = -a^2 \int_0^\infty \left(2 \frac{y}{a}\right)^n \hat{U} d\left(\frac{y}{a}\right) \left[\int_0^{y/a} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{y}{a}\right)^{-n} \right. \\ \left. \left\{ \int_0^{y/a} \left(\frac{y}{a}\right)^n \hat{U} d\left(\frac{y}{a}\right) \right\} d\left(\frac{y}{a}\right) \right] \quad (5.41)$$

を得た。ここに， a は円管の半径または 2 次元水路の水深・ n は円管の場合 $n=1$ ，2 次元水路の場合に $n=0$ ， $\hat{U} = U - U_0$ ， U_0 は断面平均流速， $\varepsilon = \varepsilon_2 + k_1$ ， ε_2 は壁面に垂直な方向の変換係数を表す。濃度と運動量の変換係数を等しい（ $\varepsilon_2 = -\overline{v's'}/\frac{\partial S}{\partial y} = -u'v'/(\frac{\partial U}{\partial y}) = U_* y/\rho a (\frac{\partial U}{\partial y})$ ）と仮定し，対数速度分布則を用いれば拡散係数 K は次のようになる。

$$K_1 = 5.86 U_* a \quad (5.42)$$

$$K_1 = 10.06 U_* a$$

さらに，流れ方向の乱れによる拡散項を加えると，上式の係数はそれぞれ $5.93 \cdot 10.1$ となる。

以上のような剪断流場には Taylor の理論（5.1 A）が適用しうることは Batchelor によって証明されている。それゆえ， t 時間後の流体塊の位置 $X(t)$ は

$$\overline{X^2} - \{\overline{X}\}^2 = 2 \overline{u'^2} \left[\int_0^t t R_\xi d\xi - \int_0^t \xi R_\xi d\xi \right] \quad (5.43)$$

と表される。ここに， u' は流速の変動分である。 $t \rightarrow \infty$ の場合には， $A = 2 \overline{u'^2} \int_0^\infty R_\xi d\xi$ ，

$B = 2 \overline{u'^2} \int_0^\infty \xi R_\xi d\xi$ として

$$\overline{X^2} - (U_0 t)^2 = At - B \quad (5.44)$$

となる。式（5.42）の K は $K = A/2$ の関係にある。

^{*)} B) 管路内の固体粒子の拡散^{69) 70)}

管路内の固体粒子の拡散では，粒子の大きさや重さの影響が問題となる。これらの問題については Batchelor, Binnie and Phillips により理論と実験が行われている。

参 考 文 献

一般的な参考書

- 1) Batchelor, G.K. : The homogeneous turbulence, Cambridge University Press (1953)
 - 2) Hinze, J.O. : Turbulence, An Introduction to its Mechanism and Theory, McGraw-Hill (1959)
 - 3) Lumley, J.L. & Panofsky, H.A. : The Structure of Atmospheric Turbulence, Interscience Publishers (1964)
 - 4) 小倉義光: 大気乱流理論, 地人書館 (1955)
 - 5) Pasquill, F. : Atmospheric Diffusion, van Nostrand (1962)
 - 6) Priestley, C.H.B. : Turbulent transfer in the Lower Atmosphere, The University of Chicago Press (1959)
 - 7) 巽 友正: 乱流, 槇書店 (1962)
 - 8) 谷 一郎: 乱流理論, 金原出版 (1950)
 - 9) Townsend, A.A. : The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge University Press (1956)
 - 10) Colloques Internationaux du Centre Nationale de la Recherche Scientifique, Mecanique de la Turbulence, Editions du CNRS Paris (1962)
 - 11) IUGG & IUTAM : Fundamental problems in turbulence and their relation to Geophysics, J. Geophysical Research, vol. 67, No. 8 (1962)
 - 12) 日野幹雄: 最近における乱流理論の工学への応用, 日本機械学会誌, 第66巻, 第539号 (1963)
- ### 第 2 章
- 13) Corrsin, S. : Some Current problems in turbulent shear flows, Symposium on Naval Hydrodynamics, National Academy of Science - National Research Council, Washington, 377-407 (1956)
 - 14) 余越正一郎: 開水路底面摩擦変動スペクトルの測定, 京都大学防災研究所年報 第8号 429-437 (1965)
 - 15) Bellhouse, B.J. & Schultz, D.L. : Determination of mean and dynamic skin friction, separation and transition in low speed flow with a thin-film heated element, J. Fluid Mech. vol. 24, part 2, 379-400 (1966)
 - 16) Serafini, J.S. : Wall-pressure fluctuations and pressure-velocity correlations in a turbulent boundary layer, NASA TR R-165 (1962)
 - 17) 安芸周一: 発電所直上にシュートを設けたスキー・ジャンプ式洪水吐の水理解析, 電力中央研究所 技術報告 依頼 65022 (1965)
 - 18) 土木学会: 土木技術者のための振動学ハンドブック, 第4章 第6節 (1966)
 - 19) Kleins, S.J. & Runstadler, P.W. : Some preliminary results of visual studies of the flow model of the wall layers of the turbulent boundary layer, Trans. ASME J. Appl. Mech. vol. 26, 166-170 (1959)

- 20) Schraub, F.A., Kleine, S.J., Henry, J., Runstadler, Jr., P.W. & Littell, A. : Use of hydrogen bubbles for quantitative determination of time-independent velocity fields in low-speed water flows, Trans.ASME, I. Basic Eng. vol. 429 - 444, (1965)
- 21) Einstein, H.A. & Li, H. : The viscous sublayer along a smooth boundary, Proc. ASCE vol.82 No. EM2, 945 (1956)
- 22) Hanratty, T.J. : Turbulent exchange of mass and momentum with a boundary, Amer. Inst. Chem. Engr., J. vol.2, No.3, 359 (1956)
- 23) Sternberg, J. : A theory for the viscous sublayer of a turbulent flow, J. Fluid Mech. vol.13, No.2, 241 - 271, (1962)
- 24) Laufer, J. : Investigation of turbulent flow in a two-dimensional Channel, NACA TN 2123 (1950)
- 25) Laufer, J. : The structure of turbulence in fully developed pipe flow, NACA R 1174 (1954)
- 26) 日野幹雄 : The structure and diffusion coefficient of turbulent shear flow, Tech.Lab., Cent.Res.Inst.Elec.Pow-Ind., Tech.Rep. C-6103 (1961)
- 27) 石原藤次郎, 今本博健 : 開水路流れの乱れ計測について(第2報), 土木学会第18回年次学術講演会 第Ⅱ部 前刷 (1963)
- 28) 余越正一郎 : びわ湖疏流水における乱れの観測, 京都大学防災研究所年報 第9号 513-523 (1966)
第3章
- 29) Ellison, T.H. : Turbulent transport of heat and momentum from an infinite rough plane, J. Fluid Mech. vol.2, 456-466 (1957)
- 30) 山本義一 : Theory of turbulent transfer in non-neutral conditions, J. Met. Soc. Japan, vol.37, 60-69 (1959)
- 31) Panofsky, H.A. : Alternative derivation of the diabatic wind profile, Q.J. Roy. Met. Soc., vol.87, 109-110 (1961)
- 32) Webster, O.A.G. : An experimental study of turbulence in a density - stratified shear flow, J. Fluid Mech. vol.19, 221-245 (1964)
- 33) Monin, A.S. : Turbulence in shear flow with stability, J. Geophys. Res., vol.64, No.12, 2224-2225 (1959)
- 34) Deacon, E.L. : The problem of atmospheric diffusion, Int. J. Air Poll., vol.2, 92-108 (1959)
- 35) Vanoni, V.A. : Transportation of suspended sediment by water, Proc. ASCE, vol.70 (1944)
- 36) Ismail, H.M. : Turbulent transfer mechanism and suspended sediment in closed channel, Proc. ASCE, vol.77 (1951)
- 37) Vanoni, V.A. & Nomicos, G.N. : Resistance properties of sediment-laden strcams, Trans. ASCE, vol. 1140-1175 (1961)
- 38) Einstein, H.A. & Chien, N. : Second approximation of the suspended

lood theory, Series 47, Issure No.2, Univ. of California, Berkley,
(1952)

- 39) 室田 明：浮遊濃度と流速分布の関連について，土木学会誌，38巻 11号 (1953)
- 40) 椿 東一郎：浮遊流砂が流れにおよぼす影響について，土木学会誌 40巻 9号 449-458 (1955)
- 41) 志村博康：浮遊砂を有する水流の諸特性について，土木学会論文集 第46号 (1957)
- 42) Elata, C. & Ippen, A.T. : The dynamics of open channel flow with suspensions of neutrally buoyant particles, Tech. Report No.45, Hydrodynamics Lab., MIT (1961)
- 43) Daily, J.W. & Chu, T.K. : Rigid particle suspensions in turbulent shear flow; Some concentration effects, Tech. Rep. No.48 MIT Hydrodynamics Lab. (1961)
- 44) Daily, J.W. : 粒子を懸した水の流れ - 非ニュートン流の力学の展望から -, 土木学会誌 49巻 6号 42-47 (1964)
- 45) 日野幹雄：粒子流の性質と乱流構造について，土木学会誌 49巻 7号 123-124 (1964)
- 46) 日野幹雄：Turbulent flow with suspended particles, Proc. ASCE, vol.89, No.HY4, 161-185 (1963)
- 46a) 日野幹雄：固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化，土木学会論文集 92号 11-20 (1963)
- 47) 日野幹雄：粗面水路における土砂流の抵抗法則およびその応用，土木学会論文集，95号，1-8 (1963)
- 48) 日野幹雄：Turbulent characteristics of solid-liquid two-phase flow, Proc. 8th Japan Nat. Cong. Appl. Mech. 148-156 (1963)
- 49) 日野幹雄：Note on Frictional coefficient of solid-liquid two-phase flow, Proc. 15th Japan Nat. Cong. Appl. Mech. (1965)

第5章

- 50) Taylor, G.I. : Diffusion by continuous movements, Proc. London Math. Soc., Ser.2, vol.20, 196 (1921)
- 51) Kampé de Fériet, M.J. : Les fonctions aléatoires stationnaires et la turbulence homogène, Ann. Soc. Sci. Brux., vol.59, 145 (1939)
- 52) 井上栄一：地表風の構造，農業技術研究所報告，A(物理・統計)，第2号，(1952)
- 53) 小倉義光：Diffusion from a continuous source in relation to a finite observation interval, "Atmospheric Diffusion and Air Pollution, Advances in Geophysics, vol.6, 149 Academic Press (1959)
- 55) Batchelor, G.K. : Diffusion in a field of homogeneous turbulence, II. The relative motion of particles, Proc. Camb. Phil. Soc., vol.48, 345 (1952)
- 56) Corrsin, S. : Theories of turbulent dispersion, Mécanique de la turbulence, Centre National de Recherche Scientifique, 27-52 (1962)
- 57) Obukhov, A.M. : Energy distribution in the spectrum of turbulent flow, Izv. Akad. Nauk, Ser. Geogr. i. Geofiz. (1941)
- 58) Batchelor, G.K. & Townsend, A.A. : Turbulent diffusion, Surveys in Mechanics, p.352, Cambridge Univ. Press. (1956)

- 59) Gifford, F. : Peak to average concentration ratios according to a fluctuating plume dispersion model, Int. J. Air Poll. vol.3, No.4, 253-260 (1960)
- 60) Hinze, J.O. & van der Hegge Zijnen, B.G. : Heat and mass transfer in the turbulent mixing zone of an axially symmetrical jet. "General Discussion on Heat Transfer" Inst. of Mech. Eng. (1951)
- 61) 岩佐義朗：今本博健：開水路せん断乱流場における拡散現象について，第10回水理講演会講演集，土木学会（1966）
- 62) Batchelor, G.K. : Diffusion in free turbulent shear flows, J. Fluid Mech., vol.3, 67-80 (1958)
- 63) Monin, A.S. : Smoke propagation in the surface layer of the atmosphere, Advances in Geophysics, vol.6, 331-344, Academic Press (1959)
- 64) Ellison, T.H. : Meteorology, Sci. Progress, vol.47, 495-506, (1959)
- 65) Gifford, F.A. : Diffusion in the diabatic surface layer. Proc. Symposium on Fundamental Problems in Turbulence and Their Relation to Geophysics, J. Geophys. Res., vol.67, 3207-3212 (1962)
- 66) Cermak, J.E. : Lagrangian similarity hypothesis applied to diffusion in turbulent shear flow, J. Fluid Mech. vol.15, 49-64 (1963)
- 67) Taylor, G.I. : The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe, Proc. Roy. Soc. A, vol.223, 446 (1954)
- 68) Elder, J.W. : The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow, J. Fluid Mech., vol.5, 544-560 (1959)
- 69) Batchelor, G.K., Binnie, A.M. & Phillips, O.M. : The mean velocity of discrete particles in turbulent flow in a pipe, Proc. Phys. Soc., Ser. B, vol.68, 1095-1104 (1955)
- 70) Binnie, A.M. & Phillips, O.M. : The mean velocity of slightly buoyant and heavy particles in turbulent flow in a pipe, J. Fluid Mech., vol. , 87-96 (1958)

演 習 問 題

- 1) 世界でも5指に入る大河の一つX江で，かってかなり精密な乱れの測定が行われたことがあった。残念なことに現在ではデータのほとんどが失われてしまっている。残存する次のデータから，この河のその時点での④河床勾配，⑤流量，⑥河床粗度および抵抗係数を求めよ。（ただし，浮遊砂の影響は考えなくて良い。）

測定器の感度 = 2 sec , 1点の測定時間 = 1 min
 水深 $h = 1.5 m$, 測定点の河床よりの高さ $y_1 = 4 m$
 測定点の流速 = 1.2 m/sec , 乱れの強さ $\sqrt{\frac{u^2}{u_*^2}} = 10 cm/sec$

〔ヒント〕 ④大河であり Reynolds 数が十分大きいと考えて良いから，Kolmogorov の $-\frac{5}{3}$ 乗則，式(1.15)を利用し，かつ計器感度についての1.4の結果を使って，エネルギー逸散率 ϵ を求める。⑤測定点の高さから考えてエネルギー逸散率 ϵ とエネルギー生成率 $P_T = \tau \frac{dU}{dy} = \rho U_*^2 \left(1 - \frac{y_1}{h}\right) \frac{U_*}{\kappa y_1}$ が等しいと考えられる。したがって，摩擦速度 U_* が求まり，これから河床勾配がわかる。⑥流速の対数分布式において U_* , κ , $U(y_1)$,

y_1 , A_r が決ったから粗度 k_s が求まる。

- 2) 幅の広い勾配 $I = 0.002$ の水路がある。水深 1 m のときの平均流速は 1.2 m である。洪水時に、この水路に濃度 8 g/l の土砂混入流 ($v = 2.6$) が流れるとして、単位幅あたりの最大流量が $2.5\text{ m}^3/\text{sec}/\text{m}$ の洪水流を流下させるために必要な最小の側壁高さを検討せよ。
- 3) 上記の水路 (水深 1 m) の上流で、誤って毒性のある薬品をこぼしてしまった。 1000 m 下流の地点では最大濃度はどの程度薄められているか。(水路幅を 8 m とする。また、水路は真直であるとする。弯曲部があると拡散は著しく増大する。)