

# 粘性流体（血液流動とGroutingの水理）

伊 藤 剛

## 1 Hagen-Poiseuilleの法則

フランスの医師 Jean Poiseuille はガラス管に血液を流し、又脈搏による動脈の容積変化を測定して、血液の循環を研究した。今から 130 年以前のことである。当時血液の研究が粘性流体力学の発展を促したのであるが、今日でも血液の流動の研究は粘性流体の研究に非常に役立っている。

Poiseuille がガラス管を使った実験で見出した法則は次のようなものであった。

$$Q = C \frac{p R^4}{l} , \dots \quad Q : \text{流量} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (1.1)$$

p : 圧力  
R : 細管の半径  
l : 細管の長さ  
C : 係数

丁度同じ頃 (1839) ドイツの土木学者 Hagen が真鍮管を使って水の流動を研究し同じ関係を見出した。これらの関係の特色は流出量  $Q$  が半径  $R$  の 4 乗に比例するというところにあり、その精密な実験結果に敬服する。

医学者 Poiseuille も、土木学者 Hagen も実験を余程丁寧にやったのであろう。後から見出された理論式と寸法違はない結果を見出したのは実に見事である。

それより少し前、やはりフランスの土木学者 Girard が丁度ナポレオンの治世であったが、パリーの上水道の建設にたずさわってこの問題を研究し、1813 年に次の法則を発表している。

$$Q = G \frac{p R^3}{l} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (1.2)$$

この式の Hagen-Poiseuilles の式と違う点は、 $P$  の 3 乗に比例するというところにある。

この研究は細管中の流動を研究した最初の成果であるが残念ながら結果は間違っていた。

Navier は有名な粘性流体の運動方程式を導いた。即ち Newton の仮定

$$l = \eta \frac{du}{dy} : \dots \dots \quad l : \text{剪断応力} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (1.3)$$

$u : x$  方向の流速

$$\frac{du}{dy} : u \text{ の } y \text{ 方向の変化即ちずれ速度或は速度勾配 (rate of shear)}$$

$\eta$  : 粘度又は粘性係数

を使って

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{Du}{Dt} &= Y - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (1.4)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w$$

ここに,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , は夫々  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向の流速

$X$ ,  $Y$ ,  $Z$ :  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向の外力

$p$ : 壓力

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ : 動粘性係数

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Nairer はこの式を使って細管中の流動を研究したが, 憎しいことに間違って Girard 同様流量  $Q$  は半径  $R$  の 3 乗に比例するという結果を出してしまった。

少し遅れて Stokes も同じく細管中の流動を研究したが, もう少しというところ迄行つたがまとまつた結果は得られなかった。

以上のようなわけで, 当時は Navier とか Girard という有名な学者の導いた  $Q$  は  $R^3$  に比例するという法則の方がむしろ正しいとされていた。

細管中の流動の理論的解明は, Hagen や Poiseulles の実験におくれること約 20 年にして Wiedemann は 1856 年に, Hagenbach は 1860 年におのの独立に成し遂げた。その結果は

$$Q = \frac{\pi}{8\eta} \frac{p R^4}{l} \quad \dots \dots \dots \quad (1.5)$$

これで始めて Girard や Navier の式よりも, Hagen や Poiseulles の式の方が正しいことがわかったのである。

Wiedeman や Hagenbach と同じ頃渦動運動の理論を立てた Helmholtz もやはり生理学者で血液の運動の研究が目的で流体力学の研究をやっていたのである。

## 2 細管内の粘流体の流動

細管内の粘性流体の流動は (1.5) 式で示されたように

$$Q = \frac{\pi}{8\eta} \frac{p R^4}{l}$$

である。この式は Newton の仮説

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}$$

が基礎になっており, この関係が成立つような特殊の粘性流体でなければ成立しない。そのような流体を Newtonian fluid と云うが, 水はこの部類に属する。血液, 土木に關係の深いところでは, セメントペースト, 游泳船の吸いこむ泥流, 下水の廃液等はもはや (1.3) の関係が成立しないことがわかつて来た。セメントペーストの如き, 我々はまあまあ Newtonian fluid だと思っていたが, 近頃の精密な実験の結果は濃度が少し高くなると (1.3) の関係が成立しないことがわかつた。

さて (1.5) 式の誘導であるが, 勿論 Navier-Stokes の運動式からも導かれるが, ここでは先ず

力の平衡から導く方法を先にのべる。

図1-1のように、半径Rの細管中の流動を考える。圧力が $p$ (dyne/m<sup>2</sup>)だとした場合、半径 $r$ の液柱を考えると粘性抵抗の力(すり応力)を $p_t$ (dyne/m<sup>2</sup>)とすれば、力の平衡から次の式を得られる。

$$\pi r^2 p = p_t \times 2\pi r \times l$$

$$\therefore p_t = \frac{rp}{2l} \quad \dots \dots \dots \quad (2.1)$$

$p_t$ は管壁 $r=R$ では

$$[p_t]_{r=R} = \frac{Rp}{2l}$$

となり、最大の値をとる。

(2.1)のすり応力が $\eta \frac{du}{dr}$ と等しいのであるが、この場合 $r$ が増すほど $u$ は小さくなるのであるから負号をとる。

即ち

$$\frac{rp}{2l} = -\eta \frac{du}{dr}$$

積分して

$$u = \frac{-p}{4\eta l} r^2 + C$$

$r=R$ で $u=0$ 部管壁では液体は滑らないという条件から

$$C = \frac{p}{4\eta l} R^2$$

$$\therefore u = \frac{p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad \dots \dots \dots \quad (2.2)$$

$$\therefore Q = \int_0^R 2\pi r \cdot v \cdot dr = \frac{\pi p R^4}{8\eta l} \quad \dots \dots \dots \quad (2.3)$$

即(1.5)式を得た。

次にNavier-Stokesの式からHagen-Poiseuillesの式を誘導してみる。非圧縮性流体のNavier-Stokesの式を円筒座標で表わすと次のようになる。

$$\eta \nabla^2 v_z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (2.4)$$

この場合 $z$ は軸方向を示す。半径方向、円周方向の速度は0とし、圧力 $p$ も $r$ 方向、円周方向については一定だとしてこの式を導いた。

式中

$$\nabla^2 v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

であるが、この場合右辺第3項、第4項は0であるから

$$\nabla^2 v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial z} \dots \dots \dots \quad (2.5)$$

結局

$$\eta \frac{d^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

静水圧  $p$  は  $z$  のみの函数で  $r$  には関係しない。この式を変形すると次の関係が順次求められてゆく。

$$r \frac{d^2 v_z}{d r^2} + \frac{d v_z}{d r} = \frac{r}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z}$$

左辺第1項に部分積分法を適用する。

$$r \frac{d v_z}{d r} - \int \frac{d v_z}{d r} d r + \int \frac{d v_z}{d r} d r = \int \frac{r}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} d r = \frac{r^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1$$

$$\therefore \frac{d v_z}{d r} = \frac{r}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{C_1}{r}$$

$$\therefore v_z = \frac{r^2}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1 \log r + C_2$$

毛細管流動の場合

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p}{l}$$

であるし、管の中心  $r=0$  で流速有限の条件から

$$C_1 = 0$$

管壁  $r=R$  で流速0の条件から

$$C_2 = \frac{p R^2}{4\eta l}$$

これらの値を代入すると結局  $v_z$  の式が得られる。

$$v_z = \frac{p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad \therefore Q = \frac{\pi p R^4}{8\eta l}$$

これは(2.2)式と同じで、即ちNavier-Stokesの式からもHagen-Poiseulle'sの式が得られることができた。Navierは  $Q$  が  $R$  の3乗に比例する結果を導いて了ったが何處で間違ったのであるか。

ただ、この式は次の条件の下に得られたことを十分承知しておかなければならぬ。

(i) Newtonの仮説(1.3)式  $\tau = \eta \frac{du}{dy}$  が成立つこと。

(ii) 層流であること。即ちReynolds number  $R = \frac{\bar{v} R P}{\eta}$  が100以上(正確には1160以

下)であること。

(iii) 細管中の遅い定常流で半径方向、円周方向の流速が0であること。

Hagen-Poiseuilles の式を使って流量  $Q$  を測定し、逆にその流体の粘性係数  $\eta$  を測定することができるが、この場合、測定では上記(i), (ii), (iii)が成立するような方法でなければならない。実際は細管出入に当って流線が収縮したり、膨脹したりするので見かけ上細管の長が長くなったような結果を生じ、このための補正を要する。

実験で  $\eta$  を求める場合このような補正を要する。管端の補正は細管の半径  $R$  に比例すると考えられるので、次式のように細管の長さが  $nR$ だけ長くなると考える。

$$\eta = \frac{\pi p R^4}{8(l+nR)Q} \quad \dots \dots \dots \quad (2.6)$$

$n$  の値は  $0 \sim 1.2$  の範囲内にあるのが普通である。

乱流の場合即ち Reynolds number が  $1160$  を超える場合は(2.3)式はもはや成立しない。この場合、 $p$  はほぼ  $Q^2$  に比例するという。

次に断面形が円形でない場合の Newtonian Flow を調べてみよう。

### 3. 橋円断面の管中の Newtonian Fluid の流動

先づ橋円断面の Cylinder が完全流体の中で回転しているときの Stream Function を求める解法について述べる。

その理由はこの問題の解が主題の解と類似があるからである。但しそれは数式の類似で物理的の類似があるという意味ではない。

任意断面の cylinder が完全流体の中で回転しているとき、その Stream Function は水理原の教えるところにより次式で与えられる。

$$\psi = \frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) - B \quad \dots \dots \dots \quad (3.1)$$

$\omega$  は Cylinder の回転速度である。この式は Cylinder の外の流体にでも、中部の流体にでも適用される。

次に複素函数  $\omega = \Phi + i\psi$ ,  $z = x + iy$  があり、 $\Phi$  を Velocity Potential,  $\psi$  を Stream Function とするとき

$$w = -iA Z^2 \quad \dots \dots \dots \quad (3.2)$$

で表わされる完全流体の運動を調べてみる。

この式から

$$\Phi = 2Ax y, \quad \psi = -A(x^2 - y^2)$$

が得られる。

今この式を回転している Cylinder 中の液体の運動に合うよう常係数をきめてゆく。

境界面では(3.1)と一致するから

$$\frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) - B = -A(x^2 - y^2)$$

或は  $(\frac{1}{2}\omega + A)x^2 + (\frac{1}{2}\omega - A)y^2 = B$  となる。

断面の形を次式のような橍円とする。

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,$$

この関係を前の式に代入すると、

$$a^2(\frac{1}{2}\omega + A) = b^2(\frac{1}{2}\omega - A)$$

$$\text{或は } A = -\frac{1}{2}\omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\text{故に } \Phi = -\omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy, \quad = \frac{1}{2}\omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (x^2 - y^2) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (3.3)$$

以上が回転する橍円断面の Cylindeder の流体についての関係である。

これだけの前準備をしておいて本論に入つてゆく。

今 Navier-Stokes の式において  $z$  方向の速度  $w$  は  $x, y$  の函数であるが  $z$  には関係しないとし、又  $u = v = 0$  である Steady flow を考える。外力が無視できるとすれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (3.4)$$

Steady flow では pressure gradient  $\partial p / \partial z$  は constant であり、これを  $-P$  で表わす。

そうすると次の式が得られる。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{P}{\mu} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (3.4)$$

境界条件は管表面で  $w = 0$  である。

$$\text{今 } w = -\frac{P}{4\mu}(x^2 + y^2) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (3.5)$$

が求める答であるとする。そのためには、 $w$  を (3.4) に代入したとき

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (3.6)$$

が成り立たなければならない。

tube の表面では  $w = 0$  であるから次式が成り立つ。

$$\psi = \frac{P}{4\mu}(x^2 + y^2) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (3.7)$$

ここで前述の回転体中の完全流体の Stream function の式 (3.1) と較べてみると、一連の類似があるのを発見する。物理的に類似の現象があるとの意味ではなく、式の形の上において類似があるとの意味である。この場合

$$w \rightarrow \frac{P}{2\mu}$$

故に回転速度が  $P/2\mu$  である回転体（回転軸はその断面の中心にある。）中の完全流体の Stream function を求めることができれば、その式を使って、今述べた回転体と同じ形の管中の Newtonian flow の流速  $w$ （軸方向）が得られる。

即ち (3.5) 式

$$w = \psi - \frac{P}{4\mu} (x^2 + y^2)$$

において、 $\psi$  に対し回転橍円体による Stream function (3.3) を代入すれば、 $w$  は橍円形の管内を軸方向に流れる Newtonian flow の流速を与える。

$$w = \frac{1}{2} \omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (x^2 - y^2) + D - \frac{P}{4\mu} (x^2 + y^2) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (3.8)$$

$D$  は常係数で、式の一般化のために加えたものである。

管の断面形は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (3.9)$$

なる橍円とし、この上では、即ち境界上では  $w=0$  である条件から  $D$  が求められる。そして次式が導かれる。

$$w = \frac{P}{2\mu} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (3.10)$$

流量は

$$q = \iint w dx dy = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \frac{P}{4\mu} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (3.11)$$

これは橍円形管の場合であるが、四角管、三角形管、その他色々の形の管でも (3.8)、(3.9) の境界条件を適当に変えることにより解を得られるわけである。

#### 4. Non-Newtonian Fluid とレオロジー (Rheology) 方程式

今迄は (1.3) 式即ち

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}$$

が成立する Newtonian fluid の流動について論じた。この Newton の仮定に従う液体は水、薄いセメントペースト等であって濃いセメントペーストその他血液、下水処理液、油、ポンプ浚渫船の泥流等はもはやこの仮定が成立しない。

Newton の仮定が成立しない液体を Non-Newtonian fluid という。

第 4-1 図はすり応力 (shearing stress)  $\tau$  がずれ速度 (rate of shear)  $du/dy$  と直線関係にある。即ち Newtonian flow である。

第4-2図はすり応力が $\tau_0$ に達する迄は流動せず、 $\tau_0$ をすぎると流動を始め、以後 $(\tau - \tau_0)$ は $du/dy$ に比例する。即ち

$$\eta' \frac{du}{dy} = (\tau - \tau_0) \quad \dots \dots \quad (4.1)$$

で表わされる。

すり応力が $\tau_0$ をこえると流動を始めるような流動を塑性流動 plastic flow といい、一般式で表わすと、

$$\eta' \frac{du}{dy} = (\tau - \tau_0)^n \quad \dots \dots \quad (4.2)$$

となる。 $(4.1)$ 式は $n=1$ の場合であり、そのような流動を Bingham flow という。 $(4.1)$ 、 $(4.2)$ において、 $\tau_0$ のことを降伏値(yielding value)という。

$(4.1)$ 、 $(4.2)$ で表わされるような流動は勿論 Non-Newtonian flow で、その他 Non-Newtonian flow は色々あり、第4-3図で表わされるような $\tau$ と $du/dy$ との関係が直線関係にないものもその例である。例えば

$$\eta' \frac{du}{dy} = k \tau^n (n-1) \quad \dots \dots \quad (4.3)$$

$$\frac{du}{dy} = f(\tau) \quad \dots \dots \quad (4.4)$$

故に一般に $\frac{du}{dy}$ と $\tau$ との関係が非線型のものを総称して Non-Newtonian flow ということができる。

$\frac{du}{dy}$ と $\tau$ との関係を表わす式を Rheology equation (レオロジー方程式) と呼ぶ。レオロジ

- 方程式は一般には実験的に求める。ただ外的条件として温度を一定にしておく。

Newtonian flow の場合、 $\tau$ と $\frac{du}{dy}$ との関係は $\propto$ で結ばれ、この $\propto$ を粘度と呼んだ。これが決まれば流動曲線(直線)は一義的に決まった。Non-Newtonian ではそうはいかない。例えば $(4.1)$ では $\tau_0$ 、 $(4.2)$ 式では $\tau_0$ と $n$ が決まらなければレオロジー方程式ひいては流動曲線もきまらない。更にこの場合の $\eta'$ は Newtonian flow の粘度 $\eta$ とシメンションも違う。もはや明確な意味をもたなくなる。併し便宜上 $\eta'$ のことを見かけの粘度、その逆数の $\Phi_a$ のことを見かけの流動率という。

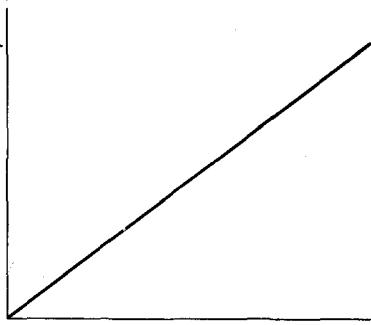


図4-1：ニュートン流体の  
流動曲線

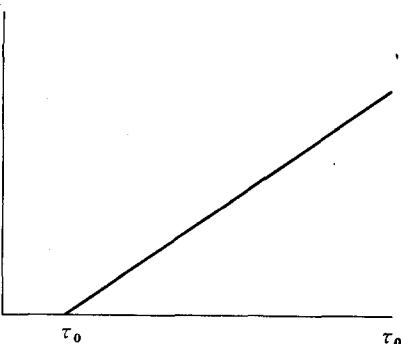


図4-2：ビンガム流体の  
流動曲線

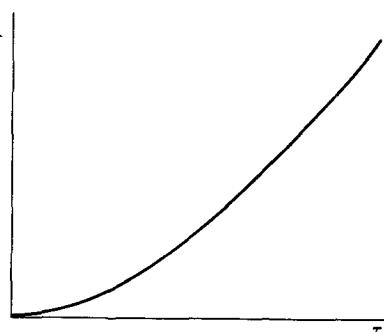


図4-3：非ニュートン流体  
の流動曲線

## 5. Non-Newtonian flow の例

### 5-1. Bingham 流体の円管流動

半径  $R$ , 長さ  $l$  の円管に圧力差  $P$  が作用して流量  $Q$  が流れる場合を考える。降伏値を  $\tau_0$  とする。

今円管内に半径  $r$  の仮想円筒を考えると、円筒上の Shearing stress は

$$\tau = \frac{r P}{2 l} \quad \dots \dots \dots \quad (5.1)$$

レオロジー方程式は

$$-\eta' \frac{d u}{d r} = \frac{r P}{2 l} - \tau_0 \quad \dots \dots \dots \quad (5.2)$$

左辺負符号は、 $r$  の増加方向に  $v$  が減少するからである。

$r = R$  で  $v = 0$  という条件で (5.2) 式を積分すれば次式を得る。

$$\eta' v = \frac{(R^2 - r^2)}{4 l} P - \tau_0 (R - r) \quad \dots \dots \dots \quad (5.3)$$

この式は  $|\tau| \geq \tau_0$  即ち

$$R \geq r \geq r_0 = \frac{2 l \tau_0}{P}$$

の範囲内で成り立つ。 $r < r_0$  の範囲内では  $dv/dr = 0$  で、流体は一体となって流れる。このような流れを栓流という。流量は  $C = \frac{r_0}{R}$  とおいて

$$Q = \int_0^R v 2 \pi r dr = \frac{\pi R^4 P}{24 \eta' l} (3 - 4 C + C^4) \quad \dots \dots \dots \quad (5.4)$$

平均流速  $v_{av}$  は

$$v_{av} = \frac{R^2 P}{24 \eta' l} (3 - 4 C + C^4) \quad \dots \dots \dots \quad (5.5)$$

### 5-2. 準粘性材料の円管流動

レオロジー方程式が次式の関係にあるものについて円管流動を調べる。

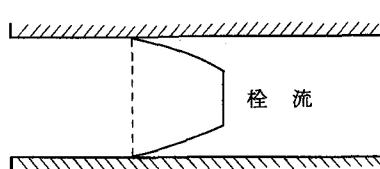
$$\frac{d v}{d r} = -(\tau/c)^n, \quad C = \eta' \frac{1}{n} \quad \dots \dots \dots \quad (5.6)$$

Shearing stress は円管流動ではみな同じく

$$\tau = \frac{r P}{2 l}$$

で表わされる。(5.6) 式を積分すれば

$$v = \left( \frac{P}{2 l c} \right)^n \frac{R^{n+1} - r^{n+1}}{n+1} \dots \dots$$



流量は

図 5-1 ピンガム流体の円管流動

$$Q = \left( \frac{P}{2 l c} \right)^n \frac{\pi R^{n+3}}{n+3} \quad \dots \dots \dots \quad (5.8)$$

### 5-3. 任意の材料の流動曲線の決定

上記の2つの例は流動曲線の型即ちレオロジー方程式が決っている場合の流動であるが、一般には実験により型を決めなければならない場合が多い。ここでは円管流動の圧力と流量が実測等で求められる場合、流動曲線を求める問題を解いてみよう。

先づ速度勾配が剪断応力 (shearing stress) の任意の函数であるとして次の如くおく。

$$\frac{dv}{dy} = g(\tau) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5.9)$$

円管流動の場合はどんな流動曲線の流動でも

$$\tau = rp/2l \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5.10)$$

が成立する。故に(6.9)式は

$$-\frac{dv}{dr} = g(rp/2l) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5.11)$$

$r$ の増加方向に速度が減少するから左辺は負号をとる。一方流量については部分積分法により次の如くなる。

$$Q = \int_o^R 2\pi r v dr = \pi \left[ vr^2 \right]_o^R - \pi \int_o^R r^2 dv = \pi \int_R^o r^2 dv$$

右辺第1項は管壁  $r=R$  では速度0であるから、 $[vr^2]_o^R$  は0となる。故に

$$Q = \int_o^R \pi r^2 g(\frac{rp}{2l}) dr$$

積分数を  $r$  から  $\tau$  に変換すると(6.10)式から

$$dr = \frac{2l}{p} d\tau$$

故に

$$Q = \frac{8\pi l^3}{p^3} \int_o^{\tau_m} \tau^2 g(\tau) d\tau \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5.12)$$

ここで

$$\tau_m = \frac{p}{2l} R = 壁面における剪断応力 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5.13)$$

ここに見掛け流動度  $\Phi_a$  を考える。見掛けの粘度の逆数である。それを次の如くおく。

$$\Phi_a = \frac{8lQ}{\pi R^4 p} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5.14)$$

この式の  $Q$  に(5.12), (5.13)両式を代入すれば次の如くなる。

$$\Phi_a = \frac{4}{\tau_m^4} \int_o^{\tau_m} \tau^2 g(\tau) d\tau \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5.15)$$

この  $\Phi_a$  を  $\tau_m$  につき微分すれば

$$\frac{d\Phi_a}{d\tau_m} = -\frac{4}{\tau_m} \Phi_a + \frac{4}{\tau_m^3} g(\tau_m)$$

$$\text{或は } g(\tau_m) = \tau_m (\Phi_a + \frac{1}{4} \frac{d\Phi_a}{d \log \tau_m}) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5.16)$$

実測で圧力  $P$  と流量  $Q$  を測定すれば (5.13) により  $\tau_m$ , (5.14) により  $\Phi_a$  が計算できる。それにより  $\Phi_a - \log \tau_m$  曲線を画くことができて  $g(\tau_m) - \tau_m$  曲線が画けるが、それが求める流動曲線になる。

## 6. 回転二重円筒

粘度の測定に簡単に用いられるので説明しておく。

### 6-1. ニュートン流体の場合

勿論層流であるとする。細管流動の場合 (2.1) 式即ち

$$P_t = \frac{\tau P}{2 l}$$

がニュートン流両方を通じての共通の基本式である。回転円筒の場合は之に対応するものとして次の式がある。

$$\tau = M / 2 \pi r^2 l \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (6.1)$$

ここに  $\tau$  : すり応力

$M$  : 半径  $r$  のところのトルク

$l$  : 円筒の長さ

この式は円筒表面積  $2 \pi r l$  にはたらくすり応力  $\tau$  によるトルクは  $\tau \times 2 \pi r l \times r$  であるという表示である。一方速度勾配は角速度を  $\omega$  とすれば

$$D = dv/dy = r d\omega/dr \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (6.2)$$

である。従ってレオシージ方程式は

$$\eta r d\omega/dr = \tau = M / 2 \pi r^2 l \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (6.3)$$

積分して

$$\omega = \frac{-M}{4 \pi l \eta r^2} + A \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (6.4)$$

内筒(半径  $R_1$ )は静止しているとすれば、 $r = R_1$  のとき  $\omega$  は 0 となる。この条件から  $A$  が求められる。

$$A = \frac{M}{4 \pi l \eta} - \frac{1}{R_1^2}$$

故に (6.4) 式は

$$\omega = \frac{M}{2 \pi l \eta} \frac{r^2 - R_1^2}{r^2 R_1^2} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (6.5)$$

外筒(半径  $R_2$ )の角速度を  $\omega_2$  とすれば

$$\omega_{r=R_2} = \omega_2 = \frac{M}{2 \pi l \eta} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 R_1^2} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (6.6)$$

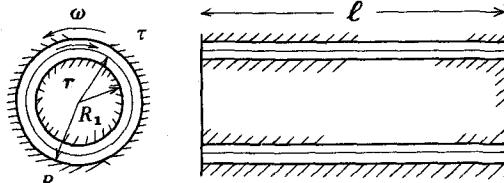


図 6-1 回転流動

この原理を使って粘度 $\eta$ を測定できる。即ち外筒を $\omega_2$ で回転し、内筒をスプリングワイヤにつないでおけば、そのねじりを測定すれば $M$ がわかる。 $\omega_2$ ,  $M$ を使って(6.6)式で $\eta$ が計算で求められる。内筒を $\omega_1$ で回転し、外筒を固定すれば(6.6)式の代りに次式を得る。

$$\omega_1 = \frac{M(R_2^2 - R_1^2)}{4\pi l \eta R_2^2 R_1^2} \dots \dots \dots \quad (6.7)$$

この式の負号は円筒の回転方向と、トルクの方向が逆になることを意味する。内筒を回転させても、外筒を回転させても式の型は同じである。

内筒回転型の粘度計は図-6-3のような構造で割合簡単で扱い易い。おもりの重さを変えて、それに応ずる回転速度をはかれば運動曲線従って粘度を測ることができる。

Non-Newtonian Fluid の粘度も測れる。ただこの種の粘度計は回転部分があるので、おもりをある程度重くしないと回転を始めない。これはビンガム流体の降伏値と混合するおそれがあるので注意を要する。回転の始動に必要な重さ即ち力を測るには、粘度既知の試験液で予め検定しておかなければならぬ。試験液は高価であるので水を使ったらどうかという考えも起るが、又水で差支えないわけだがだから測定しようとする液と粘度の似たものがよいと思われる。

回転粘度計を使う場合外筒回転型でも内筒回転型でも次の注意が必要である。

- (1) 底の影響の補正
- (2) 温度の一一定
- (3) 層流に保つ

(1)の影響については、実は上面部の影響もあるので、これを含んだものとする。内筒の高さを $h$ としたとき、上面部、下面部の影響を合計した底の影響は、あたかも $h$ が $\Delta h$ だけふえたと考え、この $\Delta h$ を求める。 $\Delta h$ は粘度、内筒の半径、内外筒の隙間等が影響する。一般的に

粘度が増すと $\Delta h$ 即ち底の影響が減る。

内筒の半径が増すと稍 $\Delta h$ が増す。

内外筒の隙間が増すと $\Delta h$ が増す。

粘度の大小が $\Delta h$ に最も影響が大きい。夫々の回転粘度計には $\Delta h$ の補正表がついているのが普通である。

次に層流についてであるが、Reynold 数 $R$ を次の如くおいた場合、外筒を回転する型では、

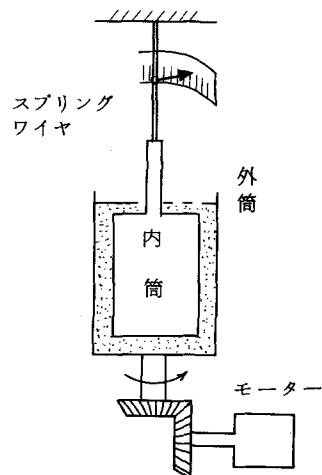


図 6-2 外筒回転型回転粘度計

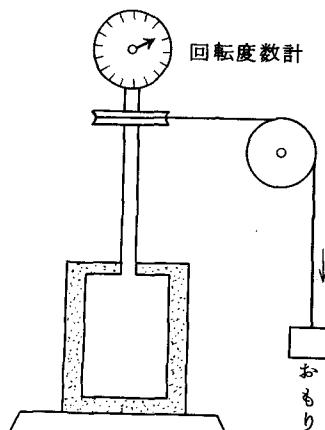


図 6-3 内筒回転型回転粘度計

$$R = \frac{\omega_1 R_2 (R_1 - R_2) p}{\eta} , \quad \text{但し } \omega_1 : \text{外筒の角速度}$$

$T$  : 外筒が一回転するに要する時間

$$= \frac{2\pi R_2 (R_1 - R^2) p}{T\eta} \dots\dots (6.8)$$

$R_1$  : 外筒の半径  
 $R_2$  : 内筒の半径

$R_2$  : 内筒の半径

$\rho$  : 流体の密度

$R$ が4,200~32,000を越すと乱流になるという。この値については色々の実験報告があり必ずしも一致していない。内筒回転型では、外筒回転型に較べ乱流になり易い。それは遠心力の影響だといわれている。

## 6-2. 非ニュートン流体の場合

ニュートン流体のレオロジー方程式は

$$D \ (\equiv d v / d y = r \, d\omega / d \, r) = \eta \, \tau \, (\equiv M / 2 \pi \, r^2 \, l)$$

であった。準粘性液体では

となり、速度  $v$ 、角速度  $w$  は次の如くなる。

$$v = r w = \frac{1}{2 \eta' n} \left( \frac{M}{2 \pi l} \right)^n \frac{r^2 n - R_1^2 n}{(r R_1)^2 n} \quad \dots \quad (6.10)$$

$$w = \frac{1}{2\eta'n} \left( \frac{M}{2\pi l} \right)^n \frac{R_1^{2n} - R_2^{2n}}{(R_2 R_1)^{2n}} \quad \dots \dots \dots \quad (6.11)$$

ビンガム材料ではレオロ-*S*-方程式は

$$D = (\tau - k) / \eta \quad \dots \dots \dots \quad (6.12)$$

$\tau \geq K$  即ち  $K_1 < r < r_o = \sqrt{\frac{M}{2\pi l K}}$  の範囲では

$$v = \frac{M}{4\pi l \eta} - \frac{r^2 - R_1^2}{r R_1^2} - r \frac{K}{\eta} \log \frac{r}{R_1} \quad \dots \dots \dots \quad (6.13)$$

$R_2 > r > r_a$  の部分では剪断応力が降伏点に達しないので角速度は一定で

$$\omega = \frac{M}{4\pi l \eta} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{2\pi l K}{M} \right) - \frac{K}{2\eta} \log \frac{M}{2\pi l K R_1} \quad \dots \dots \dots \quad (6.14)$$

もし、 $r_0 > R_2$  ならば

$$\omega = \frac{M}{4\pi l \eta} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) - \frac{K}{\eta} \log \frac{R_2}{R_1} \quad \dots \dots \dots \quad (6.15)$$

任意のリカロジニ方程式をもつ材料については

四

$$-r \frac{dw}{dz} = g(M/2\pi r^2 l)$$

$\tau = M / 2 \pi r^2 l$  の関係から

$$\frac{dr}{r} = -\frac{d\tau}{2\tau}$$

故に  $D = r dw/dr$  の関係から

$$dw = \frac{1}{2} g(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \quad \dots \quad (6.17)$$

$r = R_1$  で  $\omega = 0$ ,  $r = R_2$  で  $\omega = \Omega$  (この場合外筒回転型) とすれば

$$\tau_1 = M / 2 \pi R_1^2 l, \quad \tau_2 = M / 2 \pi R_2^2 l$$

(6.17) をこの範囲で積分すれば

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{g(\tau)}{\tau} d\tau \quad \dots \quad (6.18)$$

ここで,  $R_2^2 / R_1^2 = \tau_1 / \tau_2 = S^2$

とおけば (6.18) 式は

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_{\tau_2 S^2}^{\tau_2} \frac{g(\tau)}{\tau} d\tau$$

故に  $\tau_2$  について微分すれば

$$\frac{d\Omega}{d\tau_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{g(\tau_2)}{\tau_2} - \frac{S^2 g(S^2 \tau_2)}{S^2 \tau_2} \right) = \frac{1}{2 \tau_2} [g(\tau_2) - g(\tau_1)] \quad \dots \quad (6.19)$$

外筒の半径  $R_2$  が大きければ  $\tau_2 \neq 0$ , 故に (6.18) は

$$\Omega = -\frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} \frac{g(\tau)}{\tau} d\tau$$

$\tau_1$  について微分すれば

$$g(\tau_1) = -2 \frac{d\Omega}{d(\log \tau_1)} \quad \dots \quad (6.20)$$

従って  $\Omega$ ,  $M$  を測定し,  $\Omega - \log M$  曲線をプロットすればその曲線の切線勾配から未知函数  $g(\tau)$  を求めることができる。

## 7. 粘性（粘度）

以上で色々なレオロジー方程式で結ばれる流体の粘度の測り方を知った。粘度を求めるには流体を細管流動させたり, 二重円筒の間にいれて回転させたりするのであるが, なおその他に落体法つまり粘度を測ろうとする流体中に球形の固体を落下させ, 落下速度を測ることにより粘度を測定する方法がある。

又振動法等他にも色々の方法がある。

ここでは, 粘度の性質を分子論的に考察してみることにする。この学問をミクロレオロジーという。

### 7-1. 分子的概念としての粘度

静止している液体もその分子は激しく運動している。しかし各分子は任意の方向に勝手に運動して

いるので、巨視的にみれば流れは存在しない。

これを攪拌して、ある方向に巨視的な流れを生じさせると、各分子は勝手な運動の他に外部からの力による一定方向の運動が加わって運動し始める。攪拌をやめると、液体の巨視的運動は次第に停つて了う。それは攪拌により粘性がはたらき、各分子は互いにこすり合うようになったが攪拌をやめたのでもとの勝手な運動だけになって了つたためである。攪拌による運動エネルギーは熱になり、液体の温度を上昇させる。

これを図にかくと図 7-1 の如くである。液体では分子が密に集合しているので、平均自由行路が小さくて、互いにとびこみ合うことは少い。ただ速度の速い分子と遅い分子が互いにこすり合って、各分子の速度が一様化し速度勾配が消えていく。以上が液体の粘度の分子的意味である。気体では分子相互が離れているので、平均自由行路が大きく互いに飛びこみ合う。

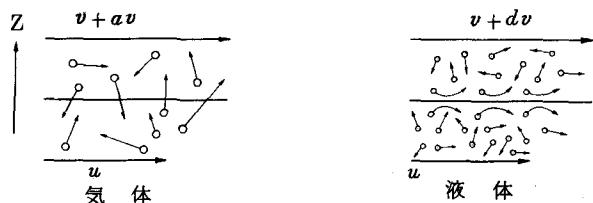


図 7-1 粘性の分子論的説明

## 7-2. 粘度と温度

液体の粘度は温度が上ると減少する。気体と逆である。液体の粘度と温度の関係につき Andrade は次の式を提示した。

$$\text{Andrade の式: } \eta = A e^{\frac{B}{T}} \quad \dots \dots \dots \quad (7.1)$$

ここに、 $A$ ,  $B$ : 常数,  $T$ : 絶対温度

水の粘度  $\eta$  (centipoise) と温度 ( $t$ ) との関係は次の表 8-1 の通りである。

表 7-1 水の粘性率と温度との関係

温 度 $t = 0$	10	20	30	40	50	60	80	100
$\eta$ (centipoise) = 1.78	1.30	1.00	0.80	0.65	0.55	0.47	0.35	0.28

一般に液体の粘度は温度の影響が甚だ大きい。

なお液体の粘度は圧力により上昇する。その関係は次式で表わされる。

$$\eta = \eta_0 e^{kP} \quad \dots \dots \dots \quad (7.2)$$

## 7-3. サスペンションの粘度

サスペンションの粘度についてはアインシュタインの学位論文で解かれている。アインシュタインも始めに出した解は間違っていて、後で訂正した。

低分子溶液の粘度は純液体のそれと変りない。コロイド溶液や高分子溶液となると、溶質の粒子が容媒分子に較べて大きいので、両者同じようには流動しない。

コロイド溶液では多くの場合、粒子自身剛体と考えられるので、流動のとき変形しない(この点高分子溶液と異なっている。)。従って溶液の中に溶質の粒子が浮遊していると見なければならない。然も溶液が速度勾配をもっているので、溶質粒子は回転する。このため全体としての、コロイド溶液の粘度は以下のべるようなものになるのである。

溶媒がニュートン流のような単純ずり流動をしていると考える。

流速成分は

$$u = gy, \quad u = 0, \quad w = 0 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (7.3)$$

$g$ ：すり角速度変化の速度＝速度勾配，

一方流体中の体積要素は一定の角速度で回転し vortex

motion をする流体では速度成分は一般に  $\frac{1}{2} \left( \frac{v_r}{x_s} + \frac{v_s}{x_r} \right)$   
(但し  $r, S = 1, 2, 3$ ) という歪速度成分と  $\frac{1}{2} \left( \frac{v_r}{x_s} - \frac{v_s}{x_r} \right)$

という渦度成分とからなっているからである。回転の角速度は  $g/2$  で与えられる。図 7-2 にみるように中心に半径  $a$  の球形粒子があり、その表面 ( $x, y, o$ ) では粒子の速度成分を  $u_1, v_1, w_1$  とすれば

$$u_1 = \frac{1}{2} gy, \quad v_1 = -\frac{1}{2} gx, \quad w_1 = 0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (7.4)$$

となる。球形粒子の表面で滑りがないものとすれば、その流速は (7.3) ではなく (7.4) で表わされる。従って流速の変化を  $u', v', w'$  とすれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} u' &= u_1 - u = -\frac{1}{2} gy \\ v' &= v_1 - v = -\frac{1}{2} gx \\ w' &= w_1 - w = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (7.5)$$

このように流動する流体中に一個の粒子があれば流体の流速は変化する。(7.5) の粒子表面での変化であるが、表面から離れてもこの変化は消えない。つまり溶媒だけの場合よりも、粒子を含む溶液の方が流速がおそくなるわけでそれだけ粘度がふえたことになる。

間隔  $h$  の平行な面の間ですり流動をしている溶液で、 $n$  個のサスペンションが半径  $a$  の球形で溶媒中に分散しているとする。この場合  $\gamma = \frac{h}{2}$  のところにある上部の面のところでのサスペンションの平均速度は次の如くなるという。

$$\bar{u} = \frac{h g}{2} \left( 1 - \frac{10\pi}{3} a^3 n \right) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (7.6)$$

この式の誘導は英文では A. Gemanit の Frictional Phenomena (1950, N. Y.) にある。

溶液のみかけの粘度を  $\eta$  とすれば平均の応力は

$$\bar{p} = \eta \frac{\bar{u}}{h/2} = \eta g \left( 1 - \frac{10\pi}{3} a^3 n \right)$$

一方溶媒の粘度を  $\eta_0$  とすれば

$$\bar{p} = \eta_0 g$$

故に

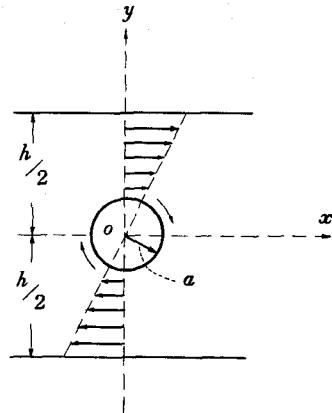


図 7-2 単純すり流動中の粒子

$$\eta = \eta_o \frac{1}{(1 - \frac{10}{3} \pi a^3 n)} \div \eta_o (1 + \frac{10}{3} \pi a^3 n) \quad \dots \dots \dots \quad (7.7)$$

これは第2式カッコ内第2項が小さいから近似的に成立つ。粒子1個の体積を $v_o$ とすれば

$$v_o = \frac{4}{3} \pi a^3$$

$$\eta = \eta_o (1 + 2.5 v_o n) = \eta_o (1 + 2.5 \Phi) \quad \dots \dots \dots \quad (7.8)$$

故に $\Phi$ は体積分率といわれるもので、溶媒と溶液との体積比である。 $(7.8)$ 式がアインシュタインの粘度式といわれ稀薄溶液ではよくあら。一般のコロイド溶液、高分子溶液の粘度は、粒子の形も球形とは限らず、又濃度も大きいものがあるので $(8.8)$ 式の関係が必ずしも成立しない。又溶液の中には分子が一定の形をもった剛体粒子ではないものがあり、或は又粒子が応力により弾性変形をするものすらある。アインシュタイン式をもととして、複雑なコロイド溶液などの粘性の研究がすすめられている。

グラウチングに使うセメントペーストや血漿中に赤血球が浮ぶ動物の血液もまさにサスペンションに他ならぬ。

## 8. 血 液 流 動

Poiseuille という医者が血液流動を研究し有名な Hagen-Poiseuille の法則をみつけたことは先にのべた通りである。

血液は血漿という、ほぼニュートン流動をする蛋白質溶媒中に、赤白球、白血球、血小板という血漿よりやや比重の重い物質がサスペンドしているもので、全体として非ニュートン流動をする。それが心臓というポンプから周期的の力で押し出され、動脈、毛細管、静脈を経て再び心臓に戻る。血压は動脈中の圧力でそれを測るには上腕をゴムバンドでしめつけ、バンドに空気を送って流動がとまるまで（脈搏がとまるまで）圧力をあげる。脈搏がとまったときの圧力をもってそこでの血压とするのである。健康人は120乃至80といわれるが、それは大気圧より120~80 mmHgだけ高いという意味である。次に血沈ということは赤血球（比重1.09）が血漿（比重1.03）中を1時間に沈降する高さを耗で表したものである。結核、疲労などで血漿中の蛋白質成分が変化すると沈降が早くなる。

赤血球は直径8μ、厚さ2μの中央のくぼんだ円板状のもので、比重1.09容積は血液全体の40~44%を占めている。白血球は数からいえば赤血球の1/1000で大きさは赤血球の3倍、血小板は逆に赤血球の1/5位の大きさである。血漿は比重1.03でニュートン流動をし粘度は1.2~1.6 c.p. で水よりやや大きい。これらの集まりの血液は比重1.06で非ニュートン流動をする。それは赤血球がサスペンドしているためである。血液の粘度は流動速度、血管の径によって変るが2.5 c.p.乃至7.5 c.p.位で、速度の大きいほど粘度は小さくなる。なお血液は0.15 dyne/cm<sup>2</sup>位の降伏値をもっている。人間の血管の流動特性は次の表の通りである。

血液のレオロジー方程式即ち応力 $\delta$ 、ずり速度 $\gamma$ との関係を表わす式として次の Casson の式がある。

$$\delta^{1/2} = \delta_y^{1/2} + b^{1/2} r^{1/2} \quad \dots \dots \dots \quad (8.1)$$

ここに  $\delta_y$  は 降伏値である。血液は Bingham型(1/2乗だから完全ではない)の流動をするサスペンションであることができる。その粘度も赤血球の体積分率  $H$  に関係し次の如くなる。

$$\eta = \eta_0 / (1 - KH) \dots (8.2)$$

ここに  $K$  は常数で、サスペンションの粘度式(7.7)と同じである。

血液が血管の中を流れるとき、血管の壁面に近く数々の所は血球のない、純血漿だけの層が生ずる。このように毛細管の中を流動するとき、血球が管軸に近く集ってくる現象を軸集中効果といい一般にコロイド溶液に起る現象である。

一方毛細管の径が小さくなると、粘度が減少してくることが知られている。これをシグマ効果という。シグマ効果は血球の軸集中効果の理論的説明はまだ未解決である。

最後の血液流動の脈搏について述べる。血液は心臓というポンクから1分72回の周期の脈搏流として押し出される。しかもそれが弾性体である血管を流れるから、水道のパイプ中の流れとは違う。

脈搏波の伝播速度を  $C_o$ 、血管壁の弾性係数を  $E$ 、壁の厚さを  $h$  (変らないとする)、血管の内径を  $R$ 、血液の密度を  $\rho$  とする時次の関係式が示されている。

$$C_o = (E h / 2 \rho R)^{1/2} \dots (8.3)$$

実際には血液には粘性があり、脈搏波の伝播とともに減衰する。動脈内の脈搏の伝播速度は平均して  $9 \text{ m/sec}$  程度であるという。

## 9. グラウチング

岩盤中の断層や亀裂、トンネル天端背後のすき間、砂層等にグラウト(注入剤)を注入し、強度を増進させたり、漏水をとめるのがグラウチングの目的である。注入するにも計画がある筈で、例えばこの孔から何mの距離までグラウトを届かせる等である。そのためには圧力をどの位かけ、時間をどの位かけたら良いかを先づ知らなければならない。

今迄といった粘性流体の解はそのまま、或は少し修正すればグラウチングの水理学上の解に使うことができる。

併しそのためにはすき間の開き等の形状を知り、又グラウト(注入剤)の粘度やレオロジー方程式を知る必要がある。

### 9-1. すき間の形状の計り方

注入する先のすき間の計り方は色々の計器ができているが精密なものはできていない。岩盤の亀裂等はボーリング孔を利用して計るボアホール探知器というものがある。アメリカ T. V. A. で開発し日本では君島博士がこれを改良し、上椎葉ダムで大いに利用した。これは孔一杯に入る円筒形のもので、側面にスプリング付きの針がついている。ボーリング孔にそう入し、底から段々引上げてゆくと、

第8-1表 人の血管の流動特性

血 管	平均圧力 (mmHg)	平均直径 (μ)	壁面ずり速度 (cm/sec)	流 動
大動脈	90～100	10000	15	乱 流
小動脈	40～70	40	50	層 流
毛細血管	25～40	16	20	"
小静脈	10～25	60	21	"
大静脈	0～5	20000	15	乱 流

もし亀裂等があるとその区域だけ針がとびだし、これが電流に通じ、外まで引き出され、灯が点めつするしかけになっている。この器械ではすき間の位置、数はわかるが寸法は正確にはわからない。

もし孔の深さが3m以上ならば、ボアスコープという器械で孔内の写真をとるとこができる、すき間の寸法もわかる。ボアスコープはもともと医者とカメラ屋の共同研究でできたもので人の胃袋の中のガンやかいようを調べるためのものだった。

トンネル天端裏のすき間は、巻立ちコンクリートに予めパイプを埋めこんでおけば、上にのべた器械ですき間を計ることができる。

問題は砂層中のすき間である。粘性流体の流動は円、橢円、同心円間のすき間等形が幾何学的に簡単なものでないと解明されていない。そこで私はMarshallが岩盤の浸透率を求める際使った考え方を利用することを提唱する。

併し即ちこれはまだ実験で確かめてない。砂層のすき間は $n$ 本の径 $d_1, d_2, \dots, d_n$ なる円管で代表できるとするのである。もしそれがよければ、漏水テストを別々の圧力で $n$ 回やれば径 $d_1$ 乃至 $d_n$ の $n$ 個の未知数が求められる。それぞれの径の円管に円管流動の公式をあてはめれば流量、流速等計算することができ問題が解決する。

## 9-2. Grouting の水理

砂層の場合は上述の通りであるが、亀裂の場合はどうしたらよいだろうか。それには§3で学んだ橢円管内の流れの式を使うことにする。

すき間の巾が $2a$ で厚さが $2b$ であるとし、グラウト液はニュートン流体だとすれば、(3.10) (3.11)式が利用できる。すき間であるから当然

$$a \gg b,$$

従って(3.10)式は次の如くなる。

$$w = \frac{p}{2\mu} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad \dots \quad (9.1)$$

流量は

$$q = \iint w dx dy = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \frac{p}{4\mu} = \pi a b^3 \frac{p}{4\mu} \quad \dots \quad (9.2)$$

$$\text{平均流速 } v_{av} = \frac{p}{4\mu b} \quad \dots \quad (9.3)$$

$L$ だけの距離に到達する所要時間は

$$L/v_{av} = \frac{4\mu L}{Pb} \quad \dots \quad (9.4)$$

次にトンネルのすき間の場合を調べてみよう。これは同心2円管の間の軸方向の流動だと考えることができる。

このような流動の解は非ニュートン流体のビンガム流体についても求められている。式が非常に長くなるので全部かくのを省略するが、次の型となる。

$$\text{流量 } q = \frac{\pi R_2^4}{24 \eta_{pl}} \cdot \frac{p}{l} \cdot D \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (9.5)$$

但し  $R_2$  : 外円の半径

$\eta_{pl}$  : ピンガム流体の見かけの粘度

$p/l$  : pressure gradient

$D$  : 内円, 外円の径やピンガム流体の降伏値に関する常数

### 9-3 粘度の測り方

以上のべたところで、グラウチングの水理もほぼ解かれたやに見えるが実はそうではない。ニュートン流体や特別の非ニュートン流体についてのみ解かれているだけであって、各種のグラウト（注入剤）の粘度やレオロジー方程式がまだ十分わかっていないのである。

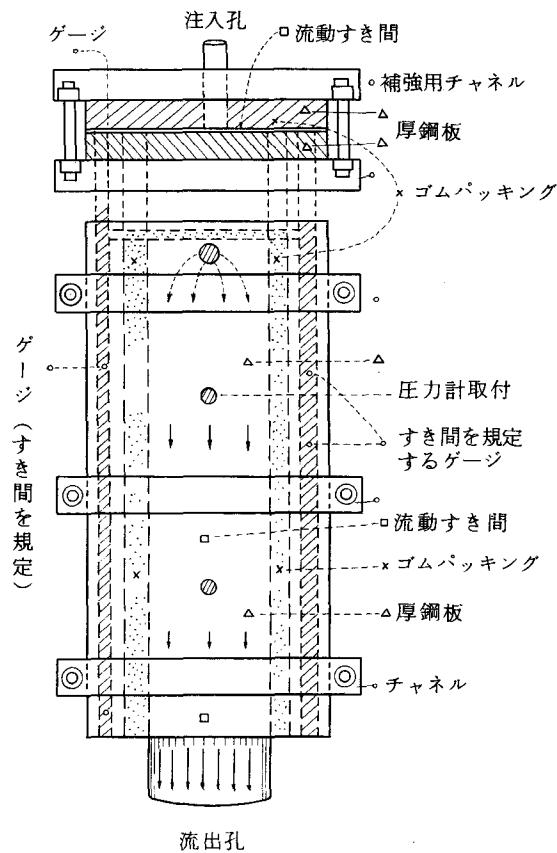


図 9-1 層流の流動実験設備

未知の材料の流動曲線を求める方法は先にのべた。これでレオロジー方程式も見つかるわけであるが、粘度をはかるのに毛細管粘度計とか、回転粘度計等を使う。

その原理は § 6 等で説明した通りである。ただ測定がなかなか精密にゆかないのと、粘度が求められたところで数学的に必ずしも解けないので、むしろ模型試験はできないだろうかとの考察が浮ん

でくる。

例えば砂層の注入の模型試験は簡単であるし、すき間の注入試験も図9-1や写真9-1の如くすればできないことはない。ただ相当高圧を使うことになるので設備をこれに耐えるようにする必要がある。グラウチングの場合模型試験といつても縮尺からいえば実物大のものとなる。

第9-1表は各種注入剤の粘度を示す。

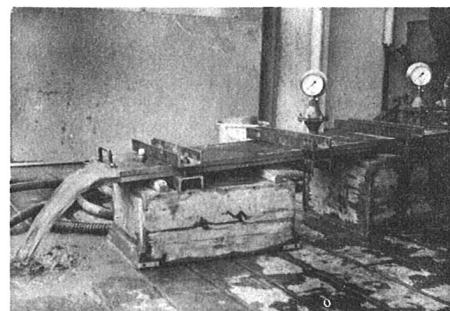


写真9-1 層流の流動実験

第9-1表 各種注入剤の粘度( $c, p, s$ )( $20^{\circ}\text{C}$ )

注入剤	使用材料製品名	標準濃度	初期粘度( $c, p, s$ )	価格	注
セメントペースト	セメント、メントナイト	水セメント比1~10	AINシユタイン式によるとほぼ10以上	安	
アスファルト	メチルエチルケトンを加える。	メチル/アスファルト容積25%~30	25%~10.0 30%~3.0	安	電研パテント
ケイ酸ソーダ	セメントを加える	水/水ガラス8.0	5.0	中	
リグニン系	サングラウト マスター・ソイル		2.5 2.5	中 中	山陽パルプ 日曹マスター・ビルダース
アクリルアマイド	日東SS スミソイル		1.2~1.5 1.2~1.5	高 〃	日東化学 住友化学
アクリルアシット	アロンA-40 ~A-43	10% 20%	1.3~1.5 2.4~3.6	高	東亜合成化学
水			10°C 20°C 50°C	1.3 1.0 0.55	無料

粘度は温度、濃度によるほか時間(硬化が始まると高くなる)およびセメントペーストは混合時間、混合速度にもよる。

#### 9-4. セメントミルクの性質

セメントミルクは薄いうちはほぼニュートン流であるがサスペンションの性質をおびている。濃くなると降伏値をもつ塑性流動をするようになる。同じ濃度でも、ねり混ぜの速度や時間により粘度がちがう。その他 Thixotropy の性質を表わす。

図9-2はセメントミルクの代表的の流動曲線を示す。即ち始めA点からずり応力 $\tau$ を増してゆきB点に達したとき、逆に直ぐ下げてゆくとB C曲線を画くが、B点で rate of shear を暫らく一定にしておいてD点に至って下げてゆくと今度はD E曲線を画く。

A B C曲線は thixotropy の性質を示し、D Eは時間の影響を示す。

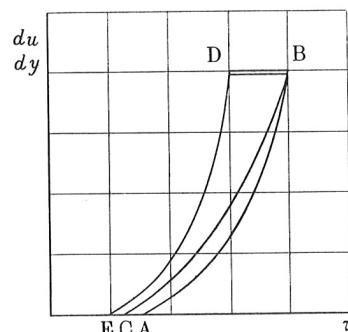


図9-2 セメントミルクの流動曲線

図9-3は水セメント比0.31の濃いセメントミルクの粘度(ボイズ)と回転速度および回転時間との関係を示す。

長く回転しているとセメント分子のかたまりがこわれて粘度が減少することを示す。

最後にセメント粒子の大きさと注入し得るすき間との関係について述べる。

一般にセメント粒子の最大径の3倍以上のすき間でないと注入できないといわれている。それは粒子がすき間をbridgeするためで水理学上の問題ではない。カルソンによれば200meshのスクリーンを通るセメントならば $1/4\text{ mm}$ のすき間に注入することができたという。

我々の血液中の赤血球が(径 $8\mu$ , 厚さ $2\mu$ )平均直径 $1.6\mu$ の毛細管を通過するのだから、圧力をあげればセメントミルクでもすき間を押しひろげてもっとよく入るのであるまい。セメント協会粉末度委員会の報告によれば、 $5\mu$ 以下の粒径のものが普通セメントですら10%程度あるのであるから、混合の回転速度を大きく且つ時間をかけければ相当粘度の低い溶液ができ、狭いすき間にも入ってゆくのであるまい。