河川の不定流について

中央大学教授工博　林　泰造

1. 緒　言

本稿はこの講義の教材として書いたものであります。皆様は既に水理学についての十分の知識を有され，深い専門的知識をもたれた方も数多くおいでのことと思いますが，この講義としては，不定流がはじめての方にもよく判るように基礎的な記述から組立ててゆきたいと思います。

極めてそうこうの間に取り纏めましたので，私のふだん考えていることだけを書き上げたような形になりました。文献は偶々それに関連するものだけをあげるに止めましたので，不定流全般についての文献としては，物部水理学第１３章　開水路の不定流（本間・嶋）または応用水理学上巻第６章水の波（林）　などを参照して載きたいと思います。

2. 予備的な記述 ── 2階の波動方程式と1階の波動方程式について

波動方程式について

河川における非定常流（ unsteady flow ）のことを土木関係ではよく河川の“不定流”と称している。

すなわち不定流とは非定常的な流れをさすのであるから，当然流れに波動としての性質が加わる。

波動の性質は明らかであっても，これに流れが加わると，場合により流れと波の性質が混同されやすくなることがある。例えば，“洪水は流れか波か”というような議論が一頃なされたことがあったが，これはそのような混同による結果の一例である。

そこで，不定流の性質を理解しやすくするために，ここに予備的な事がらとして，波動を表わす方程式について２，３調べておこう。

1）<u>$h=f_1(x-ct)$ の表わす運動</u>

$$h=f_1(x-ct) \tag{2.1}$$

がどんな運動を表わすかを考える。上式が $t=0$ において表わすものは

$$h=f_1(x)$$

となるから，水深（ h は水深とする）は初めこの式で表わされる形をしていたのである。例えば図－1の左の形をしていたとする。

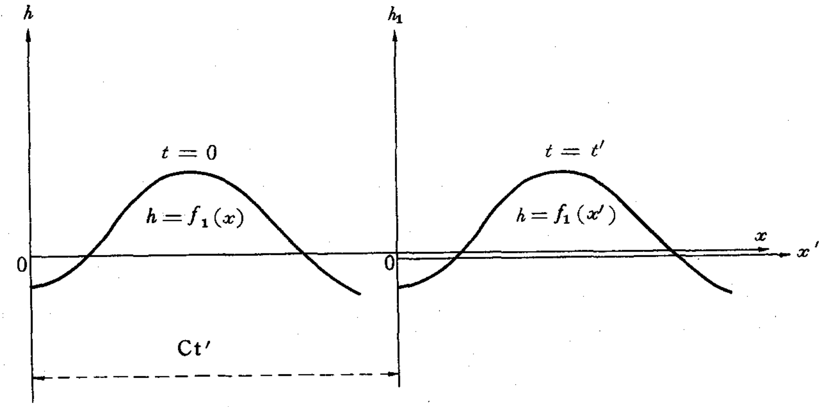
つぎに $t=t'$ のときには

$$h=f_1(x-ct') \tag{2.2}$$

となる。$x=x'+ct'$ とおけば，これは原点を ct' だけ右に動かしたことになる。このとき（2.2）は

$$h=f_1(x'+ct'-ct')=f_1(x')$$

となり，$t=0$ のときの曲線と同じ形である。すなわち時間が t' だけ経てば水面形が ct' だけ右へ進む。このことから（2.1）は $t=0$ のとき $h=f(x)$ で表わされた水面形が c なる一様な速度で右



図－1

へ伝播するもの，すなわちそのような波動を表わすものであることがわかる。同様にして

$$h = f_2 (x + c t) \tag{2.3}$$

は速度 c で進む後退波を表わすものである。

2) 2階の波動方程式

次の2階偏微分方程式を考える：

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{2.4}$$

この一般解は

$$h = f_1 (x - c t) + f_2 (x + c t) \tag{2.5}$$

で表わされる。この証明は簡単で，つぎのようにして行うことができる。

(2.5) から

$$\partial^2 h / \partial t^2 = f_1'' \cdot (-c)^2 + f_2'' \cdot c^2 = c^2 (f_1'' + f_2'')$$

$$\partial^2 h / \partial x^2 = f_1'' + f_2''$$

よって

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

となり，(2.5) は確かに(2.4) を満足するものである。

(2.5) は前進波と後退波の和として表わされており，いずれも伝播速度を c とする波動である。(2.4) はこのように，波動を表わす微分方程式で，2階の波動方程式あるいは単に波動方程式といわれる。

3) 同じく2階の波動方程式

(2.4) に1つ余分の項の加わった次の2階偏微分方程式を考える。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} - b^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \tag{2.5 a}$$

$$h = f_1 \left[x - \left\{ \sqrt{a^2 + b^2} + a \right\} t \right]$$
$$+ f_2 \left[x + \left\{ \sqrt{a^2 + b^2} - a \right\} t \right] \qquad (2.6)$$

となる。そのことはこれを直接(2.5 a)に代入してみれば(2.5 a)を満足するものであることから明らかである。(2.6)の解を導くには

$$h \propto e^{i(\lambda x - \omega t)}$$

とおいて，これを(2.5 a)に代入すると

$$\omega^2 - 2a\lambda\omega - b^2\lambda^2 = 0$$
$$\therefore \omega = \left(a \pm \sqrt{a^2 + b^2} \right) \lambda$$

よって

$$h \propto exp \left[i\lambda \left\{ x - \left(a \pm \sqrt{a^2 + b^2} \right) t \right\} \right]$$

したがって

$$h = f \left[x - \left\{ a \pm \sqrt{a^2 + b^2} \right\} t \right]$$

が解であり，(2.6)が一般解となるものであることがわかる。

4) 1階の波動方程式

次の1階偏微分方程式を考える。

$$\frac{\partial h}{\partial t} \pm c\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \qquad (2.7)$$

この一般解は

$$h = f_1 (x - ct) \qquad (2.8)$$

で表わされる。この証明も簡単であり，この式を(2.7)に直接代入してみると，解であることを検することができる。

(2.8)は伝播速度をcとする前進波(xの正の方向にすすむ波)の波動である。(2.7)はこのように，やはり波動を表わす微分方程式であるので，1階の波動方程式という。微分方程式の階数が1階であるので，一般解は1つで前進波しか出てこない点が，2階の波動方程式の場合と異なる。

3. 不定流の基本式

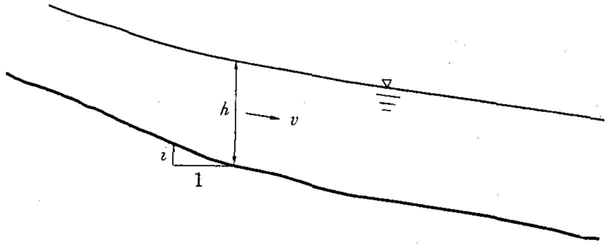
不等流のエネルギー方程式は周知のように

$$-i + \frac{dh}{dx} + \alpha\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{v^2}{C^2R} = 0$$

であるが，不定流の場合にはこれに加速度勾配($1/g$) $\partial v/\partial t$ が加わって，

$$-i + \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{v^2}{C^2R} + \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \qquad (3.1)$$

となる(記号図－2)。この式中のCにManning の公式 $C = (1/n) R^{1/6}$ を代入すると上式は



図－2

$$-i+\frac{\partial h}{\partial x}+\alpha\frac{\partial}{Dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{n^2v^2}{R^{4/3}}+\frac{1}{g}\frac{\partial v}{Dt}=0 \qquad (3.1')$$

そして，申すまでもなく，

$$\underbrace{-i}_{\text{河床勾配}}+\underbrace{\frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{水深勾配}}+\underbrace{\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2g}\right)}_{\text{速度水頭勾配}}+\underbrace{\frac{v^2}{C^2R}}_{\text{摩擦勾配}}+\underbrace{\frac{1}{g}\frac{\partial v}{Dt}}_{\text{加速度水頭勾配}}=0$$

（河床勾配＋水深勾配＝水面勾配）

である。

一方，連続の方程式は，不等流の場合には $Av=\text{const.}$ すなわち $d(Av)/dx=0$ であるが，不定流の場合にはこれに水面上昇に伴う水量貯溜の項 $\partial A/\partial t$ が加わって

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Av)=0 \qquad (3.2)$$

となる。

流水断面積Aも径深Rもxとhとの関数であり，

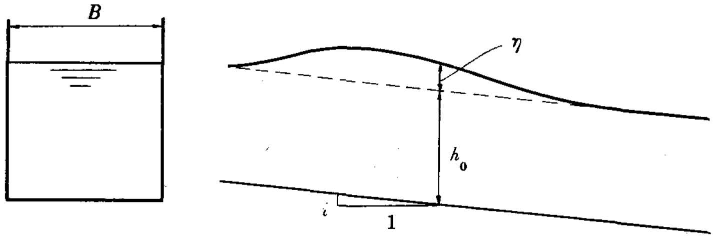
$$\left.\begin{aligned}A&=A(x,\ h)\\R&=R(x,\ h)\end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

であるから，（3.3）を（3.1′）と（3.2）とに代入すると，（3.1′）と（3.2）は2個の未知量hおよびvに対する式となるから，これを適当な方法で連立にとけば，hおよびvを求めることが出来るわけである。

4. 一様流に小さな波がのせられた場合

先ず不定流の手はじめとして，一様な長方形断面水路内の一様流（図－3）の上に，小さな波がのせられた場合を考えてみる。

長方形断面水路であるために $A=Bh$，また近似的に $R\doteqdot h$ と考えると，（3.1′）および（3.2）はそれぞれつぎのようになる。



図－3

$$-i+\frac{\partial h}{\partial x}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{n^2v^2}{h^{4/3}}+\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}=0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(hv)=0 \tag{4.2}$$

いま，

v_0，h_0 ：定常流に対する流速，水深

v_1，η ：v および h の定流値 v_0，h_0 よりの変位量とおけば，

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0+v_1 \\ h &= h_0+\eta \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

（4.3）を（4.1）および（4.2）に代入し，$\partial h_0/\partial x=0$，$\partial v_0/\partial x=0$，$\partial h_0/\partial t=0$，$\partial v_0/\partial t=0$ であることを考慮すると，（4.1）および（4.2）の両式はそれぞれ

$$-i+\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\alpha}{g}(v_0+v_1)\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{n^2(v_0+v_1)^2}{(h_0+\eta)^{4/3}}+\frac{1}{g}\frac{\partial v_1}{\partial t}=0 \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+(v_0+v_1)\frac{\partial \eta}{\partial x}+(h_0+\eta)\frac{\partial v_1}{\partial x}=0 \tag{4.5}$$

ところで，初めの仮定により

$$v_1 \ll v_0 \quad , \quad \eta \ll h_0 \tag{4.5a}$$

この関係を考慮すると（4.4）および（4.5）はそれぞれつぎのようになる。

$$-i+\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\alpha}{g}v_0\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{n^2v_0^2}{h_0^{4/3}}\left(1+2\frac{v_1}{v_0}+\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{4}{3}\frac{\eta}{h_0}-\cdots\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{g}\frac{\partial v_1}{\partial t}=0 \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+v_0\frac{\partial \eta}{\partial x}+h_0\frac{\partial v_1}{\partial x}=0 \tag{4.7}$$

（4.6）の左辺第4項は

$$\frac{n^2 v_0^2}{h_0{}^{4/3}}\left(1+2\frac{v_1}{v_0}-\frac{4}{3}\frac{\eta}{h_0}-\cdots\cdots\right)$$

となり，また，明らかに

$$-i+\frac{n^2 v_0^2}{h_0{}^{4/3}}=0 \tag{4.8}$$

であることから，（ 4.6 ）は次のようになる：

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\alpha}{g}v_0\frac{\partial v_1}{\partial x}+i\left(2\frac{v_1}{v_0}-\frac{4}{3}\frac{\eta}{h_0}\right)+\frac{1}{g}\frac{\partial v_1}{\partial t}=0 \tag{4.6'}$$

そこで（ 4.6′）と（ 4.7 ）の両式から v_1 を消去すると，

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+(1+\alpha)v_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial t}-\left(1-\frac{\alpha v_0^2}{g h_0}\right)g h_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

$$+\frac{2ig}{v_0}\left[\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{5}{3}v_0\frac{\partial\eta}{\partial x}\right]=0 \tag{4.9}$$

いま，0をもってOrder （大さの程度）を表わすものとすると，

$$0\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)\sim 0\left(v_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial t}\right)\sim 0\left(g h_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)$$

また

$$0\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\sim 0\left(v_0\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

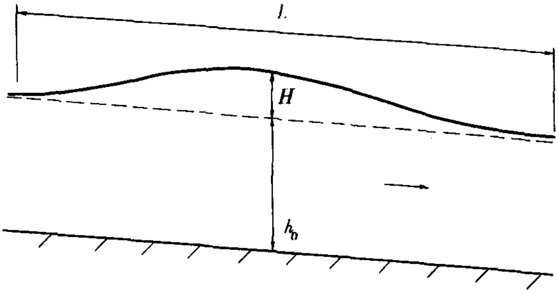
と考えられる。そこで（ 4.9 ）の2階の微係数を有する項と1階の微係数を有する項との大さの比のOrder はつぎのように表わされる。：

$$0\left(g h_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)\Big/\,0\left(ig\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=0\left(h_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\Big/\,i\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

いま，波の半波長を L とし，また図－4の記号を用いると，

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}\sim\frac{H}{L/2}\qquad\text{および}\qquad\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\sim\frac{H}{(L/2)^2} \tag{4.10}$$

$$\therefore\quad 0\left(h_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\Big/\,i\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\sim 0\left(2h_0/iL\right)\sim 0\left(h_0/iL\right)$$



図－4

よって

$$0\left(g h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) / 0\left(i g \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \sim 0\left(h_0 / i L\right) \tag{4.11}$$

1) $h_0 \gg iL$ の場合

水路勾配がほとんど水平であったり，あるいわ与えられた波が短い波長のものであるときには $h_0 \gg iL$ の仮定が成立つ。この場合には(4. 9)の中の1階の微係数をもつ項を無視することができて，近似的に

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + (1+\alpha)\, v_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} - \left(1 - \frac{\alpha v_0^2}{g h_0}\right) g h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \tag{4.12}$$

となる。これは(2. 5 a)において予め述べておいた波動方程式になる。$\alpha \fallingdotseq 1$ とおけば，この一般解は(2. 6)から

$$\eta = f_1\left[x - \left(\sqrt{g h_0} + v_0\right) t\right] + f_2\left[x + \left(\sqrt{g h_0} - v_0\right) t\right] \tag{4.13}$$

となる。上式中の $\sqrt{g h_0} + v_0$ および $\sqrt{g h_0} - v_0$ は波の伝播速度で，それぞれ下流に流下する波，および上流に遡上する波，の伝播速度を表わす。

2) $h_0 \ll iL$ の場合

洪水のように波長が長く，半波長が数十Kmないし百数十Kmにも及ぶような波形については，当然 $h_0 \ll iL$ が成立つ。例えば

$$i = 1/500 \ , \quad L = 100\,\mathrm{Km}$$

とすれば，$iL = 200\,m$ となってまずどんな場合にも $h_0 \ll iL$ は成立つ。そのような場合には(4. 9)中の2階の微係数をもつ項を無視することができて，

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{5}{3} v_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{4.14}$$

となる。これは2の4) において述べた1階の波動方程式であって，その一般解は(2. 8)から

$$\eta = f\left(x - \frac{5}{3} v_0 t\right) \tag{4.15}$$

と表わされる。上式中の($\frac{5}{3}$) v_0 はこの場合の波動の伝播速度であって，これが洪水波の伝播速度である。

3) 一般の場合

$h_0 \sim iL$ の場合には(4. 9)のどの項も無視することはできないので，(4. 9)をそのまま解いて解を求めねばならない。

また，初期条件あるいわ境界条件として与えられる波の形が x あるいわ t についていろいろのスペクトルをもつものである場合にも，$h_0 \gg iL$ または $h_0 \ll iL$ の仮定で処理することはできない。

(4. 9)を解くことは，形式的にはむづかしいことではなく，

$$\eta = A e^{\lambda x - \omega t}$$

とおいて同式に代入して解いてゆくものであることは一般の常数係数2階偏微分方程式の解法のときと変りがない。このような解で表わされる波の性質については，Deymie（デミエ）[1]，Masse（マッセ）[2]および林ら[3]が研究を行った。特に林は，長波性の波の要素が伝播とともにその波高を減衰し（これは（4.9）の1階微分の項による），次第に洪水波性の波の要素に移行してゆくという不定流における"波性の移行性"の性質を明らかにした。

5. 特性曲線の方程式

長方形断面水路の不定流の基本式は（3.1′）および（3.2）から

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \alpha \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} = i - i_f \qquad (5.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad (5.2)$$

ただし，i_f は摩擦勾配で　$i_f = n^2 v^2 / R^{4/3}$

一方，常に成り立っている関係式として

$$\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial t}dt = dh \qquad (5.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial t}dt = dv \qquad (5.4)$$

そこで，（5.1）～（5.4）の4式において i，i_f，dt，dx，dh，dv が与えられれば，これらの4式は $\partial h/\partial x$，$\partial h/\partial t$，$\partial v/\partial x$，$\partial v/\partial t$ の4個の未知量に対する連立方程式と考えられる。そこで，これを解いて，例えば $\partial h/\partial x$ に対してつぎの解が得られる。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} i-i_f & \alpha v/g & 1/g & 0 \\ 0 & h & 0 & 1 \\ dh & 0 & 0 & dt \\ dv & dx & dt & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left[-h(i-i_f) + (h/g)(dv/dt) - (\alpha v/g)(dh/dt) + (1/g)(dh/dt)(dx/dt)\right]\cdot(dt)^2/\triangle \qquad (5.5)$$

ただし

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & \alpha v/g & 1/g & 0 \\ v & h & 0 & 1 \\ dx & 0 & 0 & dt \\ 0 & dx & dt & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left[(1/g)(dx/dt)^2 - \left\{(1+\alpha)v/g\right\}(dx/dt) + (\alpha v^2/g) - h\right]\cdot(dt)^2 \qquad (5.6)$$

不定流においては，その攪乱の与え方により，攪乱の伝播と同一の速度で移動する観測者に対してはその $\partial h/\partial x$，$\partial h/\partial t$，$\partial v/\partial x$，$\partial v/\partial t$ の各微係数は連続でない場合がありうる。例えば，図－5のS点においては，水面形が折れて $\partial h/\partial x$ に2つの値が存在している。そしてその伝播と同じ速度で移動する観測者はいつまでもこの水面の折れた形を認めつつ進むことになる。この場合にはS点（観測者とともに移動する）においては，$\partial h/\partial x$ の値は不定ということになり，

$$\partial h/\partial x = 0/0 \tag{5.7}$$

と表わされるはずである。攪乱と同一の速度で移動する観測者に対しては同様にして

$$\partial h/\partial t = 0/0 \tag{5.8}$$

$$\partial v/\partial x = 0/0 \tag{5.9}$$

$$\partial v/\partial t = 0/0 \tag{5.10}$$

となる。△＝0，すなわち（5.5）の分母＝0から，

$$dx = (v \pm c)\,dt \tag{5.11}$$

ここに $c=\sqrt{gh}$。つぎに（5.5）の分子＝0から，

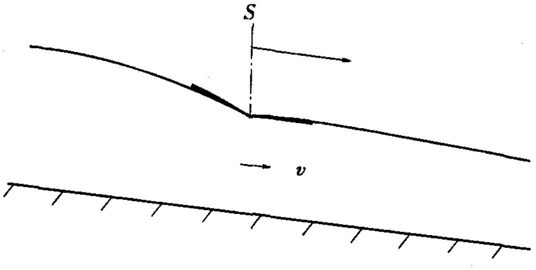
$$d(v \pm 2c) = g(i - i_f)\,dt \tag{5.12}$$

（5.8），（5.9），（5.10）の各分子＝0からも同じ（5.12）が得られる。（5.11）と（5.12）とを特性曲線の方程式という。これを書直すと，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = v + c \quad \text{の上で} \\ &d(v+2c) = g(i-i_f)\,dt \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = v - c \quad \text{の上で} \\ &d(v-2c) = g(i-i_f)\,dt \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

（5.13）および（5.14）は（5.1）および（5.2）と同一のもので，2つの偏微分方程式を4つの常微分方程式の組に書直したものに当る。不定流に対する特性曲線の方程式の使用は Massau[4] にはじまり，Craya[5]，Putman[6]，Lin[7] らにより発展せしめられた。



図－5

6. 特性曲線の作図による不定流の計算法──特性曲線法

特性曲線法

水路をいくつもの短い水域に分割して，各水域内では i_f は一様と考えると，(5.1 3) の第2式および (5.1 4) の第2式からそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} v+2c &= v_A+2c_A+g(i-i_f)\triangle t \\ v-2c &= v_B-2c_B+g(i-i_f)\triangle t \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

ただし A，B は考えている水域の上下流端断面で (図－6)，そこにおける $t=t$ における v および h (したがって c) の値は既知とする。また

$$i_f=(i_{fA}+i_{fB})/2$$

であって i_f もまた既知であり，したがって (6.1) の右辺はすべて既知である。そこで (5.1 3) および (5.1 4) を書直すと

$$x=x_A+(v_A+c_A)t \qquad (6.2)$$

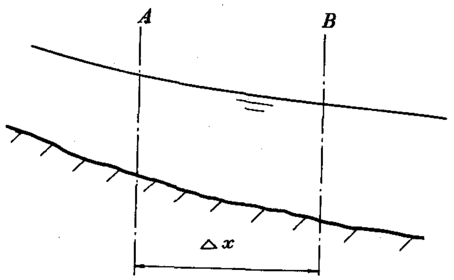
の上で

$$v+2c=v_A+2c_A+g(i-i_f)\triangle t \qquad (6.3)$$

$$x=x_B+(v_B-c_B)t \qquad (6.4)$$

の上で

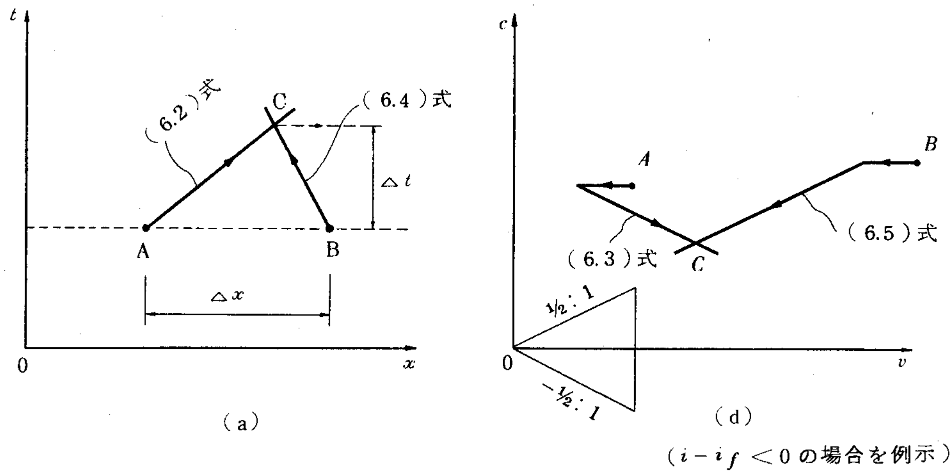
$$v-2c=v_B-2c_B+g(i-i_f)\triangle t \qquad (6.5)$$



図－6

これを図示すると図－7のようであって，同図 (a) のようにその位置が定められる断面 C 上の $t=t+\triangle t$ における v および c すなわち h の値を図 (b) のようにして求めることができる。

同様の計算をこれに連続する他の水域にも進めてゆくと，図 (a) に対応して x，t 平面の必要な範囲を特性曲線の網で覆いながら，そのすべての交点上での v と c (したがって h) との値を図 (b) 上で求めてゆくとできるはずであるが，実際には，図 (a) の方はよいが，図 (b) が混雑し，また $g(i-i_f)\triangle t$ の誤差が累積してゆくという難点がある。



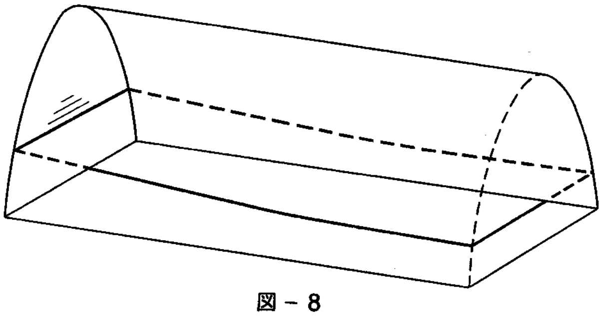
図－7

7. 洪水波(Kinematic wave)

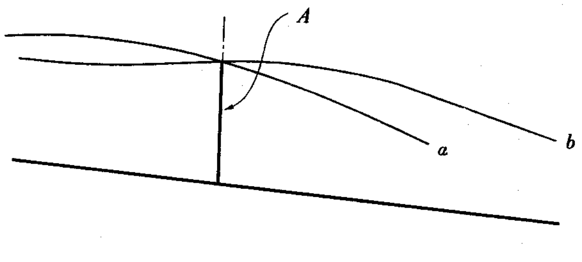
説明の簡単化のため，ここでは先ず，柱状断面水路(図－ 8)について考える。運動方程式(3.1′)の代りに流速が流水断面積の 1 価連続関数であると仮定すれば

$$v = v(A) \qquad (7.1)$$

上式が成立すれば流量 $Q = Av$ は断面 A のみの関数となる。実際には同一の流水断面積に対しても $Q = Av$ の流量が一般にいろいろ異っていることは図－ 9 からも明らかな通りであるから，この仮定



図－8



図－9

は厳密ではない。しかし，もしこの仮定を用いると，これを連続の式（ 3.2 ）に代入することにより

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{d(Av)}{dA}\frac{\partial A}{\partial x} = 0 \qquad (7.2)$$

ところで $d(Av)/dA$ は A（したがって h ）のある既知関数のはずであるから，それを

$$\frac{d(Av)}{dA} = c(h)$$

とおけば，（ 7.2 ）の一般解は（ 2.8 ）から

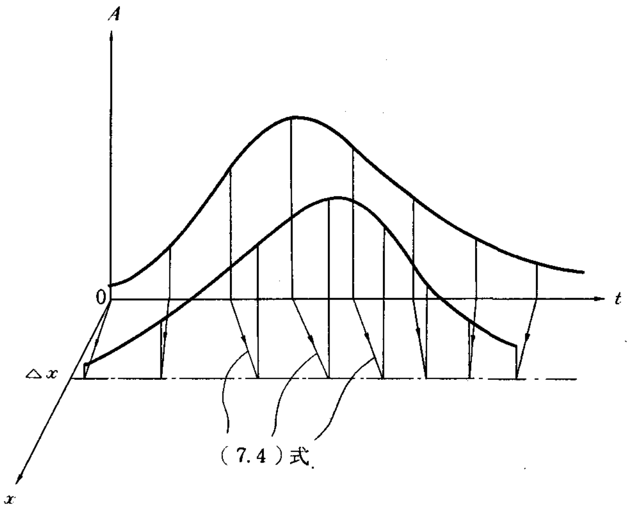
$$A = f(x - ct) \qquad (7.3)$$

であり，伝播速度 c をもって伝景する波動を表わす。このような波動を洪水波といっている。(7.2) は運動方程式を用いず連続方程式（ 3.2 ）を（ 7.1 ）を使って書直したものに過ぎないのに，連続方程式のみからこのような波動性が出てくることが河川不定流の１つの大きな特徴である。連続方程式だけから出てくる波動であるのでこれは Kinematic wave ともいわれる。５，６の両節の場合に対応して x，t 平面に（ 7.3 ）を図示することを考える。（ 7.3 ）から明らかに，

$$\frac{dx}{dt} = c \qquad (7.4)$$

の上では　$A = const.$　　(7.5)

図－１０はこの関係を図示したもので（ 7.4 ）を特性曲線という。５節の場合と異り，運動方程式を無視しているから，偏微分方程式の階数が１階低く，特性曲線が下流に向う１本しかできない。下流からの背水があるような場合には，当然上流に向う特性曲線がないと矛盾なく計算を行うことができないから，Kinematic wave 理論は背水のきくような領域については使用することができない。



図－１０

8. Kinematic wave 理論

前節（7節）の記述は柱状断面水路についてであったが本節においては自然河川に適用すべき Kinematic wave 理論について記述する。

1） 第1近似理論

（8.1）の右辺の大かっこ内は等流 $-i+n^2v^2/R^{4/3}=0$ よりの偏りを示す項であるから，これを i および $n^2v^2/B^{4/3}$ （$\equiv i_f$） に比べて無視すると，

$$i=n^2v^2/R^{4/3}$$

すなわち

$$v=(1/n)R^{2/3}i^{1/2} \qquad (8.2)$$

したがって

$$Q=Av=\frac{1}{n}AR^{2/3}i^{1/2}$$

$$\therefore A=nQ/R^{2/3}i^{1/2} \qquad (8.3)$$

いま，

$$R(x,t)=R[A(x,t),x] \qquad (8.4)$$

であり，したがって

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)_x\frac{\partial A}{\partial t} \qquad (8.5)$$

となる。ここに（$\partial R/\partial A$）$_x$ は x を一定として A のみによる微分を表わす。（8.5）を考慮して（8.3）の両辺を t で偏微分すると，

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial t}\Big/\left[\frac{1}{A}+\frac{2}{3}\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)_x\right]$$

これを連続方程式（3.2）に代入すると

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{Q}{A}\left[1+\frac{2}{3}\frac{A}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)_x\right]\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \qquad (8.6)$$

となる。

$$R=A/B \qquad (8.7)$$

とおいてもよい場合には，上式は

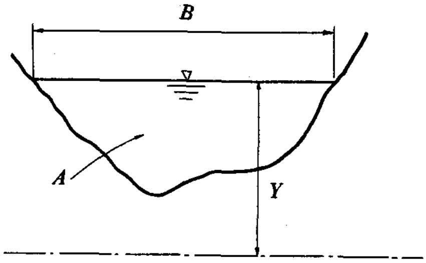
$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{Q}{A}\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\frac{A}{B^2}\frac{\partial B}{\partial y}\right)\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \qquad (8.8)$$

となる。ただし y は水位（図－11）である。したがって伝播速度は

$$C=\frac{Q}{A}\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\frac{A}{B^2}\frac{\partial B}{\partial y}\right) \qquad (8.9)$$

で洪水流量の低減はない（$dQ=0$）ことになる。

（8.9）から，



図－11

$$\left.\begin{array}{llll} \dfrac{\partial B}{\partial y} = 0 & \text{のときは} & C = \dfrac{5}{3} v_0 \\ B^2/A \geqq \dfrac{\partial B}{\partial y} > 0 & 〃 & \dfrac{5}{3} v_0 > C \geqq v \\ \dfrac{\partial B}{\partial y} > \dfrac{B^2}{A} & & v_0 > 0 \end{array}\right\} \quad (8.10)$$

であることがわかる。ただし，v_0 は考えている断面の考えている瞬間における水位に対応すべき等流流速である。

Q に対する解は（ 8. 8 ）および（ 8. 9 ）から次のように表わされる。

$$Q(x, t) = Q(0, t - \int \frac{dx}{c}) = \overline{Q}(t - \int \frac{dx}{c}) \quad (8.11)$$

ただし，$\overline{Q}(t)$ は $x = 0$ の断面において与えられる流量である。

$Q(x, t)$ が上式のように求められると，その $Q(x, t)$ を使って（ 8. 3 ）から $A(x, t)$ が求められ，従って $h(x, t)$ が求められる。

2） 第2近似理論

第1近似論から求められた h，v の値（それらを h_1，v_1 と記す）を（ 8. 1 ）の右辺に代入すると，

$$-i + \frac{n^2 v^2}{B^{4/3}} = -\left[\frac{\partial h_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_1^2}{2g}\right) + \frac{1}{g}\frac{\partial v_1}{\partial t}\right] \quad (8.12)$$

したがって

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \cdot \phi(x \cdot t) \quad (8.13)$$

ただし

$$\phi(x \cdot t) = \left[1 - \frac{1}{i}\left\{\frac{\partial h_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_1^2}{2g}\right) + \frac{1}{g}\frac{\partial v_1}{\partial t}\right\}\right]^{1/2} \quad (8.14)$$

そこで，関係式 $Q = Av$ と（ 8. 1 3 ）とを考慮すると

$$A = nQ/R^{2/3} i^{1/2} \phi(x \cdot t) \quad (8.15)$$

したがって

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\left[\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right]\Big/\frac{1}{A}\left[1+\frac{2}{3}\frac{A}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)_x\right]$$

これを(8.8)に代入すると,

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{Q}{A}\left[1+\frac{2}{3}\frac{A}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)_x\right]\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}=0 \tag{8.16}$$

この偏微分方程式の解は次の式によって与えられる。

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{\frac{Q}{A}\left[1+\frac{2}{3}\frac{A}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)_x\right]}=\frac{dQ}{Q\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}} \tag{8.17}$$

この式を書直すと

$$\frac{dx}{dt}=\frac{Q}{A}\left[1+\frac{2}{3}\frac{A}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)_x\right]$$

$$\frac{dQ}{dx}=A\cdot\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big/\left[1+\frac{2}{3}\frac{A}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)_x\right]$$

すなわち,解は次のように表わされる:

$$\frac{dx}{dt}\equiv c=\frac{Q}{A}\left[1+\frac{2}{3}\frac{A}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)_x\right] \tag{8.18}$$

の上で

$$\frac{dQ}{dx}=A\ \frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big/c \tag{8.19}$$

(8.1 8)は例の通り,洪水波に対する特性曲線であり,(8.1 9)は伝播とともに生ずる流量の変化を表わす。この両式を数値積分すれば,河道形状がどのように複雑なものであっても,洪水量の変化を追跡してゆくことができるはずである。

Qの変化が判れば(8.1 5)からAの変化が判かり,したがってhの変化が判る。

水路断面積が$A(x,\ h)=L(x)\cdot h^{r}(x)$で表わされるような場合には,(8.1 8)および(8.1 9)は,かなり簡単な形になる。[8)]

9. 電子計算機による数値積分

基本式(3.1)および(3.2)の両式は次のような差分方程式の形に書き改められる。

$$\frac{\triangle v}{\triangle t}+\frac{\triangle}{\triangle x}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+g\frac{\triangle y}{\triangle x}=G|v|v \tag{9.1}$$

および

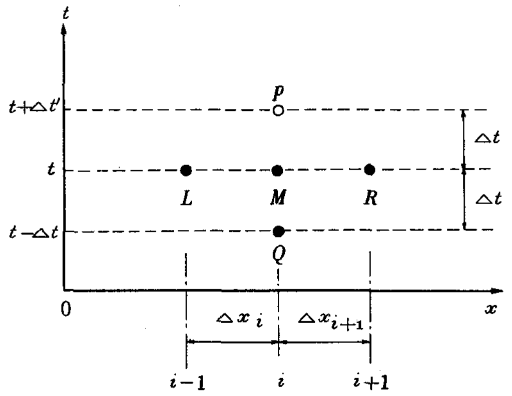
$$B\frac{\triangle y}{\triangle t}+\frac{\triangle(Av)}{\triangle x}=0 \tag{9.2}$$

ただし,yは水位,$G=gn^2/R^{4/3}$である。

上式中の$\triangle x$は微小な区間距離であり，これを小さくとる程この両辺は（ 3.1′），（ 3.2 ）の両式に近づき式の精度が高くなる。しかし，実際数値積分の手間は$\triangle x$を小さくとる程大になる（ほぼ加速度的に増大する）から，$\triangle x$を余り小さくとる訳にはいかない。

1） 境界条件に接しない部分についての数値積分

１つの水域をとり，図－１２において$t = t$におけるその水域の左右端の状態をそれぞれLおよびRで表わすこととする。



図－１２

いま，この水域のほぼ中央附近に１つの断面iをとりその断面における$t + \triangle t$における状態Pのv，yをもとめることを考える。

$$\frac{\triangle v}{\triangle t} = \frac{v_P \ v_Q}{2\triangle t}, \qquad \frac{\triangle v}{\triangle x} = \frac{v_R - v_L}{\triangle x_i + \triangle x_{i+1}}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = \frac{y_P - y_Q}{2\triangle t}, \qquad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_R - y_L}{\triangle x_i + \triangle x_{i+1}} \qquad (9.3)$$

であるが，これを（ 9.1 ），（ 9.2 ）の両式に代入すると，両式はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{v_P - v_Q}{2\triangle t} + \frac{1}{\triangle x_i + \triangle x_{i+1}} \frac{v_R^2 - v_L^2}{2} + g \frac{y_R - y_L}{\triangle x_i + \triangle x_{i+1}} = -G_M |v_M| v_M \qquad (9.4)$$

$$B_M \frac{y_P - y_Q}{2\triangle t} + \frac{A_R v_R - A_L v_L}{\triangle x_i + \triangle x_{i+1}} = 0 \qquad (9.5)$$

$B_M \cdot (\triangle x_i + \triangle x_{i+1})$ はこの水域の水表面積を表わすべきものであり，これを記号$\triangle F_M$で表わす。すなわち，

$\triangle F_M$ ： Mをほぼ中間点とする水域の水表面積

この記号を使用すると，（ 9.5 ）はつぎのようになる。

$$\frac{y_P - y_Q}{2\triangle t} + \frac{A_R v_R - A_L v_L}{\triangle F_M} = 0 \qquad (9.5')$$

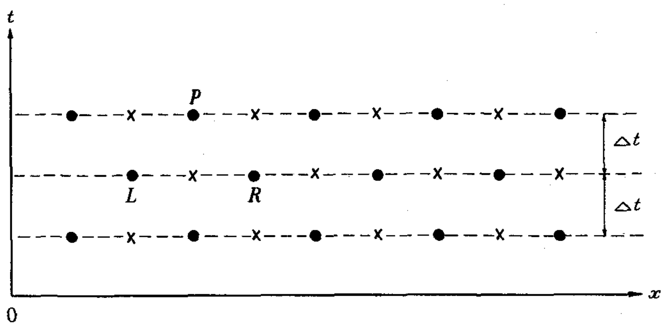
(9.4)と(9.5′)の2式から v_P と y_P を解けば，これらはつぎのようになる：

$$y_P = y_Q - \frac{A_R v_R - A_L v_L}{\triangle F_M} 2\triangle t \qquad (9.6)$$

$$v_P = v_Q - \frac{2\triangle t}{\triangle x_i + \triangle x_{i+1}} \left[\frac{v_R^2 - v_L^2}{2} + g(y_R - y_L) \right] - G_M | v_M | v_M \, 2\triangle t \qquad (9.7)$$

上2式の右辺はすべて既知量のはずであるから，これら2式から y_P および v_P を計算することができる。

同様の式によって，これに隣る水域についても $t+\triangle t$ における値の計算を行い，$x-t$ 平面上において格子点(図－13)上の諸値を求めてゆく。



図－13

2) 上流端についての数値積分

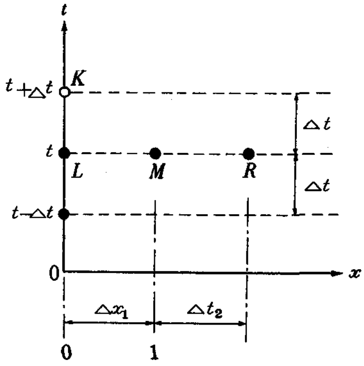
$t=\triangle t$，$t+\triangle t$ における上流端状態を表わす状態点(図－14)をそれぞれN，LおよびKとすると：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\triangle v}{\triangle t} &= \frac{v_K - v_N}{2\triangle t}, \quad & \frac{\triangle v}{\triangle x} &= \frac{v_M - v_L}{\triangle x_1} \\ \frac{\triangle y}{\triangle t} &= \frac{y_K - y_N}{2\triangle t}, \quad & \frac{\triangle y}{\triangle x} &= \frac{y_M - y_L}{\triangle x_1} \end{aligned}\right\} \qquad (9.8)$$

端における数値積分上の問題点は2つある：

a) xについての偏微分係数 $\triangle v/\triangle x$ および $\triangle y/\triangle x$ が(9.8)で見られるように一方に片寄ってとられている。

b）端では何等かの境界条件が与えられている。例えば，ハイドログラフが与えられているなら $y=y(t)$，また，流量が与えられているなら $Q=Q(t)$，ところで，端における $t=t+\triangle t$ における未知量は v_K，y_K の2個。一方，v_K，y_K をしばる方程式は，いつもの通りの運動方程式と連続方程式の外にさらに1つの境界条件の方程式の計3個あって，方程式の数の方が1個多すぎる。



図－14

このb）の点の矛盾をさけるため Stoker 等[9)]は連続方程式と運動方程式とを次元を合わせた上で辺々加え合わせて1本の式とし，これと境界条件の方程式とを解いて v_K および y_K を解くという方法をとっている。すなわち，（9.8）を（9.4）および（9.5′）に代入し，（9.5′）の両辺に $\sqrt{g/B_L A_L}$ を乗じたものを辺々（9.4）に加えると次式をうる：

$$v_K = v_N + \sqrt{\frac{g}{B_L A_L}}\left[B_L(y_K - y_N) + (A_M v_M - A_L v_L)\frac{2\triangle t}{\triangle x_1}\right]$$

$$-\frac{(v_M^2 - v_L^2)}{2}\frac{2\triangle t}{\triangle x_1} - g(y_M - y_L)\frac{2\triangle t}{\triangle x_1} - G_L|v_L|v_L\, 2\triangle t \qquad (9.9)$$

一方，境界条件は，例えば $Q=\overline{Q}(t)$ で与えられている場合について考えると，

$$v_K = \frac{\overline{Q}(t+\triangle t)}{A_K} \qquad (9.10)$$

である。

そこで，（9.9），（9.10）の2式から2個の未知量 v_K および y_K を解くことができて，その結果はつぎのようである。ただし，例えば v_{K_1} は v_K の第1近似値，y_{K_1} は y_K の第2近似値の意味である。

$$y_{K_1} = y_N - \frac{A_M v_M - A_L v_L}{B_L}\frac{2\triangle t}{\triangle x_1} - \sqrt{\frac{A_L}{g B_L}}\cdot\left[-v_L + v_N\right.$$

$$\left.-\frac{(v_M^2 - v_L^2}{2}\frac{2\triangle t}{\triangle x_1} - g(y_M - y_L)\frac{2\triangle t}{\triangle x_1} - G_L|v_L|v_L\, 2\triangle t\right] \qquad (9.11)$$

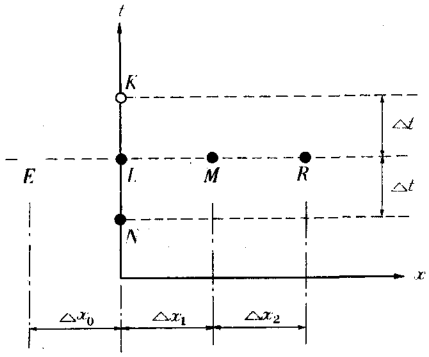
$$v_{K\,\mathrm{I}} = \overline{Q}(t+\triangle t)/A_0(y_{K\,\mathrm{I}}) \qquad (9.11a)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
y_{K\text{II}} &= y_{K\text{I}} - \sqrt{A_L / gB_L} \cdot (\, v_{L\text{I}} - v_{K\text{I}} \,) \\
v_{K\text{II}} &= \overline{Q} (\, t + \triangle t \,) / A_0 (\, y_{K\text{II}} \,)
\end{aligned}
\right\} \qquad (9.12)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
y_{K\text{III}} &= y_{K\text{II}} - \sqrt{A_L / gB_L} \cdot (\, v_{L\text{II}} - v_{K\text{II}} \,) \\
v_{K\text{III}} &= \overline{Q} (\, t + \triangle t \,) / A_0 (\, y_{K\text{III}} \,)
\end{aligned}
\right\} \qquad (9.13)
$$

一方，a）の点についての精度の悪さは我慢して（9.8）のままで計算することがふつうであったが，図－15のようにxの負の方向への外挿値Eをとり，

$$
\frac{\triangle v}{\triangle x} = \frac{v_R - v_E}{\triangle x_0 + \triangle x_1}, \qquad
\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_R - y_E}{\triangle x_0 + \triangle x_1} \qquad (9.14)
$$



図－15

として，

$$
v_K = v_N + \sqrt{\frac{g}{B_L A_L}} \left[B_L (\, y_K - y_N \,) + (\, A_R v_R - A_E v_E \,) \frac{2 \triangle t}{\triangle x_0 + \triangle x_1} \right] - \frac{(\, v_R^2 - v_E^2 \,)}{2} \frac{2 \triangle t}{\triangle x_0 + \triangle x_1} - g (\, y_R - y_E \,) \frac{2 \triangle t}{\triangle x_0 + \triangle x_1}
$$

$$
- G_L \mid v_L \mid v_L \, 2 \triangle t \qquad (9.15)
$$

を（9.9）に代えて使用することが考えられるようになってきた。[10)]

10. 結　　び

不定流を学ぶ場合の計算上の重要な手法の説明を中心にしてお話してきた。不定流計算における特徴的なものをここに振返ってみると，時間tが入るために方程式が偏微分方程式になること，基礎方程式の複雑性にかんがみ，方程式を何か適当な量について線形化するか，あるいは直線的な関係を示す量間の関係式に基本式を書き直してゆくこと，偏微分方程式であるために現われてくる2階の特性曲線とその曲線上での量の変化およびその物理的意味，同じく1階の特性曲線とその曲線の上での量の変化およびその物理的意味，電子計算機の使用に関連して微分方程式の差分関係式への合理的な書きかえ，などであろうと思われる。そしてこれらの古典的と思われるような問題のいずれをとっても，その中にはわれわれが研究すべき問題がまだまだ残されている。

ページ数の関係で，本講においては実験や実測，アナログ・コンピューター等のことがらには全く触れなかった。これらの記述については別の機会に譲りたいと思う。

文　献

1) Ph. Deymié, Propagation d'une intumescence allongée (probléme aval), Proc. Fifth Internat. Congr. of App. Mech., p. 537, John Wiley, New York, 1939

2) P. Massé, Hydrodynamique fluviale—Regimes variables, Hermann, Paris, 1935.

3) 林 泰造, Mathematical study of the motion of intumescences in open channels of uniform slope, Trans. JSCE, №11, 1951.

4) J. Massau, Mèmoire sur l'intègration graphique des èquations aux dérivées partielles, Ann. de l'Association des ingénieurs sortis des Ecoles Spéciales de Gand, Vol. 23, p. 95, 1900.

5) A. Craya, Calcul des régimes variables dans les canaux, La Houille Blanche, Vol. 1, №1, p.19, 1945—1946.

6) H. J. Putman, Unsteady flow in open channels, Trans. Amer. Geophy. Union, Vol. 29, p. 227, 1948.

7) P. N. Lin, Numerical analysis of continuous unsteady flow in open channels, Trans. Amer. Geophy. Un., Vol. 33, p. 226, 1952.

8) 林 泰造, Propagation and deformation of flood waves in natural channels, Proc. IAHR, 1965(Leningrad).

9) E. Isaacson, J. J. Stoker and A. Troesch, Numerical solution of flood prediction and river regulation problems, New York Univ. Report Ⅲ, 1956.

10) J.R. Rossiter and G.W. Lennon, Computation of tidal conditions in the Thames Estuary by the initial value method, Proc. Inst. Civ. Eng., Vol. 31, 1965, p.25.