

波 圧 論

ま え が き

波圧という言葉は水工関係の技術者や研究者にとってはきわめて親しみの深い言葉であるが、少し詳しくいえば、これは水の波動運動に附随した圧力変動を意味するものといえよう。ところで、水の波の運動を理論的に解くということは、水の運動を決定する諸量、すなわち、水中の速度の場合および圧力の場合等を、与えられた条件のもとに求めることに外ならない。この限りにおいては、波圧を議論するためには波の運動自体を議論しなければならず、波圧の問題を解くことは波の運動を解くことの一部分となる。したがって、このような観点から波圧の問題を主題として議論をするとすれば、波の運動に関する理論的解を利用して、それぞれの場合の特徴的な波による圧力変動の特性を浮かびあがらせて論ずることになるであろう。

しかしながら、波圧の問題はもう一つの重要な面をもっている。それは、海中に構造物を築造する場合それに作用する外力として波の圧力が重要な役割を果していることである。

そして、このような工学上重要な一面をもっているために、波圧を主題とした研究がかなり昔より行なわれ、それらはおびただしい数にのぼっている*。

ところで、この工学的応用に重点をおいた波圧の議論となると、従来の数多くの研究結果にもかかわらず、様々な解決困難な問題が生じて来る。問題の解決を困難にしている点を要約してみるとほぼ次のようなものがあげられるであろう。(i) 構造物に作用する波圧は来襲波と構造物との相互作用の結果として発生するものであるから、相方の特性に応じて相互作用の形式は多種多様なものとなり複雑となる。(ii) 現実の海の波は不規則な波であって流体力学的な理論解が求められている単一周期の波とはかなり異なっている。(iii) 多くの場合、海岸構造物に作用する波は、不安定な変形過程にある波、さらに極端な場合には砕けつつある波である。

このような要因が波圧の問題を理論的に厳密に解くことを極度に困難にしており、従来様々の近似的解法が考えられている。それらは各種の公式集や便覧に集約されているようなものであるが、構造物の設計に使用する波圧の決定という問題をさらに立ち入って議論すると、構造物の破損に有効な波圧の決定、あるいは経済的問題をも含んだ設計波圧の決定といった問題も入ってくるであろう。

波圧論の内容となるものと思われる問題をとりまとめてみると、ほぼ上述のようなものがあげられる。しかしながら、これらのすべての問題に立ち入って詳細な議論を行なうということはきわめて困難であるので、本項では次のような構成で議論がすすめられる。第1章においては波圧を議論する際の出発点となる基本式（それは波の運動を議論する際の基本式に外ならないが）について若干ふれた後、今までに理論的近似解が求められている安定な波による波圧の式の代表的なものを示す。ただし、その詳しい導き方は大部分省略され、進行波の波圧、重複波ならびに部分重複波（不完全重複波）による波圧などについて結果のみが示される。第2章においては、実際の場合重要であるが、十分な理論的解が求められていない不安定な変形過程にある波および砕波による波圧に関し、これまでに得られた各種の実験結果をもとにして現象論的な記述がなされる。ただし、この場合には平滑な壁面に波が真正面から作用して発生する波圧の特性に議論は限定される。第3章においては、実用的な波圧公式について若干の議論がなされる。

1. 安定な波による波圧——進行波および重複波の波圧の理論式——

1-1. 基本式¹⁾

この節では、安定した波による波圧の理論式を導く際の基礎となる式について簡単にふれる。それらは流体

*例えば本間、石原編：応用水理学(中Ⅱ)、丸善、あるいは参考文献(14)など参照。

の運動の基本方程式，あるいは波の運動を規定する基本式ともいえるものであるが，波圧の理論の基礎を明確にするため特に要約しておく。議論は，非圧縮性* で非粘性のいわゆる完全流体の枠内でなされる。

座標系

x 軸：静止水面に沿って波の進行方向に正

y 軸：波の進行方向に直角な横座標

z 軸：静止水面より鉛直上方に正

流体の運動方程式とその積分形

オイラーの運動方程式はベクトルの形式に表わすと次のようになる。

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \text{grad}) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (1)$$

ここで，

$\mathbf{V}$ は速度ベクトルでその3成分は (u, v, w)

$(\mathbf{V} \cdot \text{grad})$ は演算子で $u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$

$\mathbf{F}$ は流体の単位質量に作用する外力で (F_x, F_y, F_z) なる3成分を有する。

$\text{grad } p$ は3成分で表わせば $\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)$ で p は圧力を意味する。

(1) 式は $(\mathbf{V} \cdot \text{grad}) \mathbf{V} = \text{grad} \left(\frac{1}{2} q^2 \right) - \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V}^{**}$, ($q = |\mathbf{V}|$) なることを利用して書き直すと，次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \text{grad} \frac{q^2}{2} + \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V}. \quad (2)$$

非回転運動の場合には， $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ で

$$\mathbf{V} = \text{grad } \phi \quad (3)$$

なる速度ポテンシャルが存在するので(2)式は

$$\mathbf{F} = \text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} \right) \quad (4)$$

となり外力もポテンシャルから導びかれなければならないことになる。 $\mathbf{F} = -\text{grad } \Omega$ とおけば(4)式は結局次のようになる。

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega \right) = 0 \quad (5)$$

この式はすぐ積分できて次式が得られる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega = F(t) \quad (6-a)$$

$F(t)$ は (x, y, z) には無関係で t のみに依存する任意関数である。この式は一般に圧力方程式，あるいは，拡張されたベルヌーイの定理と呼ばれている。 $q^2 = (\text{grad } \phi)^2$ なることを考慮すると次のようにも表わすことができる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{p}{\rho} + \Omega = F(t) \quad (6-b)$$

この(6-b)式が速度ポテンシャル ϕ および外力のポテンシャル Ω が与えられたとき流体内の圧力を規定す

* 水塊の衝突により shock pressure が発生する際には圧縮性が多少問題となるかもしれないが一般には非粘性の仮定とともに十分な仮定。

** $\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V}$ は速度ベクトル $\mathbf{V}$ と $\mathbf{V}$ の回転 $\text{rot } \mathbf{V}$ とのベクトル積で，3成分で表わすと， $(\eta w - \xi v)$ ，

$(\xi u - \eta w)$ ， $(\xi v - \eta u)$ ，ただし $\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$ ， $\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$ ， $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

る基本式である。

一方、非圧縮性の流体の連続の式は(3)式を考慮すると、

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} \phi = 0 \quad (7-a)$$

または、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (7-b)$$

となりいわゆるラプラスの方程式と呼ばれるものである。

したがって、非圧縮性の完全流体の非回転な運動は、(6-b)式と(7-b)式とを与えられた条件のもとに解くことにより ϕ と p とが x, y, z , および t の関数として求まり、その解が求まることになる。このことは非回転の波の運動にも当然適用され波の運動をきめる基本式の構成は次のようになる。

波の運動および圧力をきめる基本式

(i) 速度ポテンシャル ϕ は次式を満足する。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} -h \leq z < \eta(x, y, t) \\ x^a < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{array} \right. \quad (8)$$

ここで

h : 水深

$\eta(x, y, t)$: 静水面からの水面の変位

(ii) 流体内の圧力は次式を満足する。

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + gz = F(t) \quad (9)$$

(iii) 境界条件

固定した境界面で流速の鉛直成分は0

$$(\mathbf{V})_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} z = -h \\ x = s \text{ (境界面)} \end{array} \right. \quad (10)$$

自由表面を $F = z - \eta(x, y, t) = 0$ とすると、この表面が常に同一の実質部分より構成されている条件より

$$\begin{aligned} \frac{DF}{Dt} \Big|_{z=\eta} &= w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_{z=\eta} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_{z=\eta} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

自由表面では圧力は一定値 p_0 となる条件より、 $z = \eta(x, y, t)$ で、

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta = F(t) \quad (12)$$

ただし以下の議論では便宜上 $p_0 = 0$ とする。

そこで、(iii)の境界条件ならびにその他の附加的条件を満足するような(i)の解として速度ポテンシャル ϕ を求めれば(ii)の圧力方程式により波圧 p が求まることになる。

波の運動の近似解法

ラプラスの方程式自体は線型であるが自由表面の2つの境界条件は非線型であるので、前述の基本式の厳密解を求めることはきわめて困難である。ところで、水粒子の速度 $\mathbf{V}$, 自由表面の上昇量 η およびその勾配 $\partial \eta / \partial x$, $\partial \eta / \partial y$ 等がすべて非常に小さいときにはこれらの量の高次の項を無視することができ表面条件は線型化される。この場合には容易に解を求めることができ、これが、線型理論、微小振巾波理論などと呼ばれるものである。これらの量が小さいけれど無視できない場合には、 ϕ および η が次のようにパラメーター ε に関する巾級数展開

が可能であると仮定することにより、いわゆる摂動法により解を求めることができる。

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi^{(n)} \quad (13)$$

$$\eta(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \eta^{(n)}(x, y, t) \quad (14)$$

この一次近似は上述の微小振巾波に相当し高次近似がストークス波と呼ばれているものである。そして、このような解の存在の数学的証明が Levi—Civita (1925) によりなされたことはよく知られているとおりである。

$F(t)$ の特性

$F(t)$ は $\phi^t = \phi - \int^t F(t) dt$ とおいた後、 ϕ^t をあらたに速度ポテンシャルとみなすことによって速度ポテンシャルの中に含ませることができる。また $\text{grad } F = 0$ であるから流体の運動自体には寄与しないが、波圧に関しては興味ある特性を示すので独立に考察してみることにする。

ϕ 自体も勿論 t のみの関数を含み得るが、これは ϕ の x 方向に対する一波長にわたる平均値を 0 ならしめることによって決定される。

ところで、波の運動においては ϕ は x 方向に周期性を有し、 $z > 0$ の領域では制限されていることより、 ϕ, u, v, w などはずべて水深とともに減衰することになる。したがって十分深い所では圧力方程式は次のようになる。

$$p/\rho + gz = F(t) \quad (15)$$

これより p は一般には 0 に減衰しないで、十分深い所でも空間座標に無関係な圧力変動が生じる可能性があることがわかる。ただし、進行波の場合には F が定数となることが簡単な考察により示される [Longuet—Higgins (1950)]。²⁾

すなわち、進行波では (6-b) の圧力方程式において、 F 以外の項は Ω をのぞきすべて $(x-ct)$ の関数を含むので F も $(x-ct)$ の関数ということになる。ところが F は定義により x に無関係であるから、 t にも無関係となり結局定数となる。このことは後述するように実際の計算においても示されている。実際の計算においては、 $F(t)$ は (12) 式の圧力に関する表面条件により決定されるが、簡単な物理的考察よりもその形を求めることができ、その一般形は次式で与えられる²⁾。

$$F(t) = \frac{1}{2} \frac{d^2 \bar{\eta}^2}{dt^2} + \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{w}^2) \quad (16)$$

ただし $\bar{u}^2, \bar{w}^2, \bar{\eta}^2$ はそれぞれ x 方向に関する平均値を意味する。また、 x 方向に平均化された波圧 $\bar{p}$ は圧力方程式に (16) 式を入れることにより

$$\frac{\bar{p}}{\rho} + gz = \frac{1}{2} \frac{d^2 \bar{\eta}^2}{dt^2} - \bar{w}^2 \quad (17)$$

となる。ただし、 $p_0 = 0$ とした。

水底においては $w = 0$ となるし水深が十分深いときには (16) 式および (17) 式の右辺の最後の項は消失し第 1 項のみとなる。また、右辺のこれらの項はすべて高次の項であるから 1 次近似 (微小振巾波) では無視される。一般に、重複波の場合には η, u, w は*

$$\eta = a \sin kx \cos nt + O(ak^2) \quad (18)$$

$$u = -an \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \cos kx \sin nt + O(ak^2) \quad (19)$$

$$w = -an \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \sin kx \sin nt + O(ak^2) \quad (20)$$

ただし

*右辺の最後の項は 2 次および高次の項を意味するが u, w などを 2 乗したとき 2 次近似の範囲では消失するので具体的形は不要。

$$a = \frac{H}{2}, \quad H: \text{波高 (重複波)}$$

$$n = \frac{2\pi}{T}, \quad T: \text{周期}$$

$$k = \frac{2\pi}{L}, \quad L: \text{波長}$$

で与えられるから(18), (19), (20)式を(16)式および(17)式にそれぞれ入れて計算を実行し, 2次の位数までとると次式が得られる。

$$F(t) = \frac{a^2 k g}{4} \frac{\cosh 2k(h+z)}{\sinh 2kh} - \frac{a^2 k g}{4} \left\{ \frac{\cosh 2k(h+z)}{\sinh 2kh} + 2 \tanh kh \right\} \cos 2nt \quad (21)$$

$$\frac{\bar{p}}{\rho} + gz = -\frac{a^2 k g}{2} \frac{\sinh^2 k(h+z)}{\sinh 2kh} + \frac{a^2 k g}{2} \left\{ \frac{\sinh^2 k(h+z)}{\sinh 2kh} - \tanh kh \right\} \cos 2nt \quad (22)$$

進行波の場合には η および w は次式

$$\eta = a_1 \sin(kx - nt) + O(a_1, k^2) \quad (23)$$

$$w = a_1 n \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - nt) + O(a_1, k^2) \quad (24)$$

ただし, $a_1 = \frac{a}{2}$ とする。

によって与えられるので計算を実行し, 2次の位数までとると,

$$\frac{\bar{p}}{\rho} + gz = -a_1^2 k g \frac{\sinh^2 k(h+z)}{\sinh 2kh} \quad (25)$$

が得られる。これらはいずれも直接に2次近似の計算を行なって求めた値とまったく一致する (1-2-4. 参照)。

1-2. 進行波の波圧

進行波による水中の圧力変動と表面の水位変動との関係がわかっているならば前者を測定することによって波高を推定することができる。

水圧式波高計はこの関係を利用したものである。この節では進行波の波圧に関する代表的な理論式を, その詳しい導き方は省略して示す。

1-2-1. 微小振巾波 (単一周期の波)

1で述べたように表面条件における高次の項を無視すればすべての式は線型化され容易に解を求めることができた。すなわち,

$$\eta = a_1 \sin(kx - nt), \quad a_1 = \frac{H_1}{2} \quad (26)$$

$$\phi = -a_1 c \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - nt) \quad (27)$$

$$n^2 = gk \tanh kh \quad (28)$$

などが得られる。

圧力変動は圧力方程式で高次の項を無視して

$$\begin{aligned} p &= -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho g a_1 \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - nt) \\ &= \rho g \eta \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \end{aligned} \quad (29)$$

が求められる。

1-2-2. 微小振巾波 (不規則波)³⁾

一般に海の波はみかけ上の周期および波高が不規則に変動して, 単一周期の規則的な波とはかなり性質が異なっている。したがって, 海底の圧力変動より表面の水位変動を求めるために(29)式を利用することは問題を含んでいる。

ところで、上に述べたような不規則な海の波は、波高、周波数および進行方向を異にし位相がそれぞれランダムな多数の波を重畳することによって近似的に表現される（例えば波浪スペクトル論とその応用—本講座—参照）。線型近似の範囲では表面波形は

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{x} - n_n t + \varepsilon_n) \quad (30)$$

ε_n : 位相で $0 \sim 2\pi$ 間にランダムに様に分布している。

で表現され、単一周期の波の場合を参照すれば水中の圧力変動は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} p &= \rho g \sum_n a_n G_n(h, z, L_n) \sin(\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{x} - n_n t + \varepsilon_n) \\ G_n(h, z, L_n) &= \frac{\cosh k_n(h+z)}{\cosh k_n h}, \text{ (attenuation coefficient)} \\ k_n &= 2\pi/L_n. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

この(31)式は水中の圧力変動のスペクトル $\phi_p(f)$ より表面波形のスペクトル $\phi_\eta(f)$ を算出する際に普通使用されている。すなわち、

$$\phi_\eta(f) = \frac{1}{[G(h, z, L)]^2} \phi_p(f) \quad (32)$$

によって両者間の換算が行なわれる。しかしながら、これまでに報告されたところによると、(32)式を使用して圧力変動のスペクトルから換算された表面波形のスペクトルは、周波数の低い所では実測された表面波形のスペクトルとよい一致を示すが高い周波数(周期にして3～4秒以下)では一致が悪い⁴⁾。すなわち、(32)式で $\phi_p(f)$ より $\phi_\eta(f)$ を求めると周波数の高い所で極端に大きな値があることがある。その原因としては種々のものが考えられるが、その一つは $G(h, z, L)$ がかなり減衰の強い低域通化型のフィルターの特性を有するため高い周波数では圧力変動が非常に弱くなり、計測ならびにスペクトルの計算過程におけるノイズがかなり影響するためではないかと思われる。しかしながら、この流体力学的なフィルターの作用は問題によっては都合な場合もある。例えば津波計のように、風浪による水位変動を除去して中間の周波数帯域（約10秒～100分の周期）の水位変動をとりだしたいとき、この流体力学的フィルターの作用を高い周波数側の波を減衰させるために利用することができる⁵⁾。

また、(31)式は線型近似の範囲内で導かれたものであるから、実際の海岸の波がかなり非線型な性質を有することによっても当然多少のくい違いを生じることが予想される。

1-2-3. 有限振巾波（単一周期の波）

単一周期の波については、最近高い近似の式があいついで発表され5次近似までは具体的計算が行なわれている⁶⁾。しかしながら、5次近似の式はあまりに複雑なので Skjelbreia⁷⁾ (1958) によって求められた3次近似の式によって有限振巾の進行波の波圧の特性をみることにする。Skjelbreia (1958)⁷⁾ の計算結果のうち、波圧に関連ある式のみ示すと次のとおりである。

表 面 波 形

$$\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(3)} = a_1 \cos \theta + \frac{1}{2} a_1^2 k f_2(kh) \cos 2\theta + \frac{1}{4} a_1^3 k^2 f_3(kh) \cos 3\theta \quad (33)$$

$$\text{ただし, } f_2(kh) = \frac{\cosh kh (\cosh 2kh + 2)}{2 \sinh^3 kh} \quad (34)$$

$$f_3(kh) = \frac{3 (8 \cosh^6 kh + 1)}{16 \sinh^6 kh} \quad (35)$$

$$\theta = k(x - ct) = kx - nt \quad (36)$$

$$H = 2a_1 + \frac{1}{2} a_1^3 k^2 f_3(kh) \quad (37)$$

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh kh \left[1 + (ka_1)^2 \frac{\cosh 4kh + 8}{8 \sinh^4 kh} \right] \quad (38)$$

速度ポテンシャル

$$\begin{aligned}\phi &= \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)} \\ &= \frac{c}{k} \left\{ F_1 \cosh k(h+z) \sin \theta + \frac{1}{2} F_2 \cosh 2k(h+z) \sin 2\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} F_3 \cosh 3k(h+z) \sin 3\theta \right\}\end{aligned}\quad (39)$$

$$F_1 = ka_1 \frac{1}{\sinh kh}, \quad F_2 = \frac{3}{4} (ka_1)^2 \frac{1}{\sinh^4 kh} \quad (40)$$

$$F_3 = \frac{3}{64} (ka_1)^3 \frac{11 - 2 \cosh 2kh}{\sinh^7 kh} \quad (41)$$

波 圧

波圧の式は原論文に示されていないが、次の3次のオーダーまでとった圧力方程式に上記の速度ポテンシャルを入れて計算することにより容易に求めることができる。

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho} &= - \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial t} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left[\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \right] \right\} \\ &\quad - gz + \text{const}\end{aligned}\quad (42)$$

計算を行なうと、

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho} &= c^2 \left\{ -\frac{1}{4} F_1^2 \cosh 2k(h+z) + F_1 [\cosh k(h+z) - \frac{1}{2} F_2 \cosh 3k(h+z)] \cos \theta \right. \\ &\quad + \left[F_2 \cosh 2k(h+z) - \frac{1}{4} F_1^2 \right] \cos 2\theta \\ &\quad + \left[F_3 \cosh 3k(h+z) - \frac{1}{2} F_1 F_2 \cosh k(h+z) \right] \cos 3\theta \Big\} \\ &\quad - gz + \text{const}\end{aligned}\quad (43)$$

(38), (40)および(41)式を代入して3次の位数までとると水中圧力 p として次式が得られる。

$$\begin{aligned}p &= -\frac{1}{2} \rho g a_1^2 k \frac{\cosh 2k(h+z)}{\sinh 2kh} \\ &\quad + \rho g a_1 \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \left\{ 1 - (ka_1)^2 \left[\frac{3}{8} \frac{\cosh 3k(h+z)}{\sinh^4 kh \cosh k(h+z)} - \frac{\cosh 4kh + 8}{8 \sinh^4 kh} \right] \right\} \cos \theta \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho g a_1^2 k \left\{ \frac{3 \cosh 2k(h+z)}{\sinh^2 kh \sinh 2kh} - \frac{1}{\sinh 2kh} \right\} \cos 2\theta \\ &\quad + \frac{3}{32} \rho g a_1^3 k^2 \left\{ \frac{(11 - 2 \cosh 2kh) \cosh 3k(h+z)}{\sinh^5 kh \sinh 2kh} - 8 \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh^3 kh \sinh 2kh} \right\} \cos 3\theta \\ &\quad - \rho g z + \text{const}\end{aligned}\quad (44)$$

深海波の場合には対応する諸式は次のようになる。

$$\eta = a_1 \cos \theta + \frac{1}{2} a_1^2 k \cos 2\theta + \frac{3}{8} a_1^3 k^2 \cos 3\theta \quad (45)$$

$$H = 2a_1 \left\{ 1 + \frac{3}{8} (ka_1)^2 \right\} \quad (46)$$

$$c^2 = \frac{g}{k} \left\{ 1 + (ka_1)^2 \right\} \quad (47)$$

$$\phi = \frac{1}{2} c a_1 e^{kz} \sin \theta \quad (48)$$

$$p = \rho g a_1 \{ 1 + (ka_1)^2 \} e^{kz} \cos \theta - \frac{1}{2} \rho g a_1^2 k \{ 1 + (ka_1)^2 \} e^{2kz} - \rho g z + \text{const} \quad (49)$$

深海波の場合の有限振幅波では表面波形 η は高調波成分を含むにもかかわらず速度ポテンシャル ϕ や圧力 p

は基本周波数成分のみである。水粒子の速度の 2 成分 u および w も同様に基本周波数成分のみでこれらは興味ある事実である。もちろん、圧力や粒子速度における基本周波数成分の振巾自体は第 1 次近似のものとは異なっているがその差は 3 次の位数でわずかである。これより表面波形を別とすれば深海波では浅海波に比べて非線型の影響が少ないことがわかる。

1-2-4. 有限振巾波 (2 成分波) ⁸⁾

1-2-2. で述べたように、現実の海の波は不規則な特性を有し、その不規則波は数多くの位相が不規則に分布した要素波の重畳として表現することができる。線型近似の範囲では解の重ね合わせが可能で 1-2-2. に述べたように単に要素波の和として不規則波を表現することが可能である。しかしながら、近似度を高め波の非線型性を考慮すると事情はかなり複雑になってくる。2 次の位数までの干渉を考慮しても例えば 2 成分波の場合、後述するように要素波特有の 2 次波のほかには波数差および波数和の 2 次波がそれぞれ生じてくる。3 次またはそれ以上の位数の干渉を考慮すると要素波間の非線型干渉によるエネルギーの移送といった現象も生じてくる*。2 次干渉に関しては最近浜田により広範囲の計算が行なわれ、その結果は波圧の問題にかなり色々な面で応用がきくと考えられるので、以下その結果を簡単に述べることにする。浜田⁸⁾の結果によると、2 次の干渉を取り扱う限り多成分波の特性は 2 成分波によるものの和として表わすことができるので、結果は以下 2 成分波についてのみ示される。記号は大部分原論文に従い、右下のサフィックスは成分波の番号を意味するが、本項の他の節との関連上位数のサフィックスは右上に () をつけて記入することにする。

1 次 波

速度ポテンシャル

$$\phi^{(1)} = b_1 \frac{\cosh k_1(h+z)}{\sinh k_1 h} \sin k_1(w - c_1 t) + b_2 \frac{\cosh k_2(h+z)}{\sinh k_2 h} \sin k_2(x - c_2 t) \quad (50)$$

表面波形

$$\eta^{(1)} = a_1 \cos k_1(x - c_1 t) + a_2 \cos k_2(x - c_2 t) \quad (51)$$

ただし

$$b_1 = a_1 c_1, \quad b_2 = a_2 c_2 \quad (52)$$

$$c_1^2 = \frac{g}{k_1} \tanh k_1 h, \quad c_2^2 = \frac{g}{k_2} \tanh k_2 h, \quad k_1, k_2 > 0 \quad (53)$$

圧力

$$p_0 = -\rho g z \quad (54)$$

$$p^{(1)} = \rho b_1 k_1 c_1 \frac{\cosh k_1(h+z)}{\sinh k_1 h} \cos k_1(x - c_1 t) + \rho b_2 k_2 c_2 \frac{\cosh k_2(h+z)}{\sinh k_2 h} \cos k_2(x - c_2 t) \quad (55)$$

2 次 波

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} = & B_{21} \frac{\cosh 2k_1(h+z)}{\sinh 2k_1 h} \sin 2k_1(x - c_1 t) + B_{22} \frac{\cosh 2k_2(h+z)}{\sinh 2k_2 h} \sin 2k_2(x - c_2 t) \\ & + B_{23} \frac{\cosh (k_1 + k_2)(h+z)}{\sinh (k_1 + k_2) h} \sin \{(k_1 + k_2)x - (c_1 k_1 + c_2 k_2)t\} \\ & + B_{24} \frac{\cosh (k_1 - k_2)(h+z)}{\sinh (k_1 - k_2) h} \sin \{(k_1 - k_2)x - (c_1 k_1 - c_2 k_2)t\} + \text{const} \cdot t \end{aligned} \quad (56)$$

ただし

$$B_{21} = \frac{-\frac{3}{2} b_1^2 k_1^3 c_1 (\coth^2 k_1 h - 1)}{-4 k_1^2 c_1^2 \coth 2k_1 h + 2k_1 g} = -\frac{3}{4} a_1^2 k_1 c_1 \frac{\cosh k_1 h}{\sinh^3 k_1 h}$$

*例えば Ocean wave spectra, Prentice Hall, 1963. の諸論文参照。

$$\begin{aligned}
B_{22} &= \frac{-\frac{3}{2}b_2^2k_2^3c_2(\coth^2k_2h-1)}{-4k_2^2c_2^2\coth 2k_2h+2k_2g} = \frac{3}{4}a_2^2k_2c_2\frac{\cosh k_2h}{\sinh^3k_2h} \\
B_{23} &= \frac{b_1b_2k_1k_2(c_1k_1+c_2k_2)(1-\coth k_1h\coth k_2h)-\frac{1}{2}b_1k_1^3a_2c_1^2(\coth^2k_1h-1)}{-(c_1k_1+c_2k_2)^2\coth(k_1+k_2)h+(k_1+k_2)g} \\
&\quad -\frac{1}{2}b_2k_2^3a_1c_2^2(\coth^2k_2h-1) \\
B_{24} &= \frac{b_1b_2k_1k_2(c_2k_2-c_1k_1)(1+\coth k_1h\coth k_2h)-\frac{1}{2}b_1k_1^3a_2c_1^2(\coth^2k_1h-1)}{-(c_1k_1-c_2k_2)^2\coth(k_1-k_2)h+(k_1-k_2)g} \\
&\quad +\frac{1}{2}b_2k_2^3a_1c_2^2(\coth^2k_2h-1)
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\text{const.} = -\frac{1}{4}b_1^2k_1^2(\coth^2k_1h-1) - \frac{1}{4}b_2^2k_2^2(\coth^2k_2h-1) \tag{58}$$

$$\eta^{(2)} = \eta_{21} + \eta_{22} + \eta_{23} + \eta_{24} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{21} &= \frac{1}{g} \left\{ 2k_1c_1B_{21}\coth 2k_1h + \frac{1}{2}b_1^2k_1^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4}b_1^2k_1^2(\coth^2k_1h-1) \right\} \cos 2k_1(x-c_1t) \\
\eta_{22} &= \frac{1}{g} \left\{ 2k_2c_2B_{22}\coth 2k_2h + \frac{1}{2}b_2^2k_2^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4}b_2^2k_2^2(\coth^2k_2h-1) \right\} \cos 2k_2(x-c_2t) \\
\eta_{23} &= \frac{1}{g} \left\{ (c_1k_1+c_2k_2)B_{23}\coth(k_1+k_2)h + \frac{1}{2}(k_1^2c_1b_1a_2+k_2^2c_2b_2a_1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}b_1b_2k_1k_2(\coth k_1h\coth k_2h-1) \right\} \cos\{(k_1+k_2)x-(c_1k_1+c_2k_2)t\} \\
\eta_{24} &= \frac{1}{g} \left\{ (c_1k_1-c_2k_2)B_{24}\coth(k_1-k_2)h + \frac{1}{2}(k_1^2c_1b_1a_2+k_2^2c_2b_2a_1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}b_1b_2k_1k_2(\coth k_1h\coth k_2h+1) \right\} \cos\{(k_1-k_2)x-(c_1k_1-c_2k_2)t\}
\end{aligned} \tag{60}$$

$$p^{(2)} = p_{20} + p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
p_{20} &= -\frac{1}{2}\rho b_1^2k_1^2\frac{\sinh^2k_1(h+z)}{\sinh^2k_1h} - \frac{1}{2}\rho b_2^2k_2^2\frac{\sinh^2k_2(h+z)}{\sinh^2k_2h} \\
p_{21} &= \left\{ 2\rho k_1c_1B_{21}\frac{\cosh 2k_1(h+z)}{\sinh 2k_1h} - \frac{1}{4}\rho b_1^2k_1^2\frac{1}{\sinh^2k_1h} \right\} \cos 2k_1(x-c_1t) \\
p_{22} &= \left\{ 2\rho k_2c_2B_{22}\frac{\cosh 2k_2(h+z)}{\sinh 2k_2h} - \frac{1}{4}\rho b_2^2k_2^2\frac{1}{\sinh^2k_2h} \right\} \cos 2k_2(x-c_2t) \\
p_{23} &= \left\{ \rho(c_1k_1+c_2k_2)B_{23}\frac{\cosh(k_1+k_2)(h+z)}{\sinh(k_1+k_2)h} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\rho b_1b_2k_1k_2\frac{\cosh(k_1-k_2)(h+z)}{\sinh k_1h\sinh k_2h} \right\} \cos\{(k_1+k_2)x-(c_1k_1+c_2k_2)t\} \\
p_{24} &= \left\{ \rho(c_1k_1-c_2k_2)B_{24}\frac{\cosh(k_1-k_2)(h+z)}{\sinh(k_1-k_2)h} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\rho b_1b_2k_1k_2\frac{\cosh(k_1+k_2)(h+z)}{\sinh k_1h\sinh k_2h} \right\} \cos\{(k_1-k_2)x-(c_1k_1-c_2k_2)t\}
\end{aligned} \tag{62}$$

波全体としてはもちろん，1次波と2次波の和として表わされる。

2次波の表現式は上記のようにかなり複雑であるが，この式は例えば1方の成分波の振巾を0とすれば単一周期の進行波の2次近似の式となり前記の1-2-3.で述べた3次近似の式と2次の位数までは const. を除き完全

に一致する。また、それぞれの成分波が互に逆行するものとすれば、後述するように振巾が互に等しい場合には完全重複波の2次近似式となるし、振巾が異なっている場合には部分重複波の2次近似式となる。

1-3. 重複波の波圧

1-3-1. 微小振巾波（単一周期の波）

線型近似の範囲では解の重畳が可能である。したがって互に逆行する2つの波を重ねると重複波の式が次のように得られる。

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_1 + \eta_2 = -\frac{a}{2} \sin(kx - nt) + \frac{a}{2} \sin(kx + nt) \\ &= a \sin kx \cos nt\end{aligned}\quad (63)$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = -ac \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin kx \sin nt \quad (64)$$

対応する変動波圧は

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho g a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin kx \cos nt \quad (65)$$

となり、一次近似の範囲内では2倍周波数成分は生じない。

1-3-2. 微小振巾波（不規則波）

上記のものと同様な方法を1-2-2. で述べた微小振巾の不規則波に適用すれば表面波形は

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_1 + \eta_2 = \sum \frac{a_n}{2} \{\sin k_n x - (\sigma_n t - \varepsilon_n)\} + \sum \frac{a_n}{2} \sin \{k_n x + (\sigma_n t - \varepsilon_n)\} \\ &= \sum a_n \sin k_n x \cos (\sigma_n t - \varepsilon_n)\end{aligned}\quad (66)$$

対応する圧力変動は次のようになる。

$$p = p_1 + p_2 = \rho g \sum_n a_n G_n(h, z, L_n) \sin k_n x \cos (a_n t - \varepsilon_n) \quad (67)$$

ここで $G_n(h, z, L_n)$ は前記(31)式と同一である。

1-3-3. 有限振巾波（単一周期の波）

(a) 2次近似式（浜田の式）^{*)}

1-2-4. で述べた有限振巾の2成分波の2次近似式において $c_1 > 0$, $c_2 = -c_1 < 0$, $a_1 = a_2$ とすれば完全重複波の2次近似式が次のように得られる。

$$\begin{aligned}\eta &= \eta^{(1)} + \eta^{(2)} = 2a_1 \cos kx \cos nt \\ &+ \frac{1}{2} a_1^2 k \{3\coth^3 kh - \coth kh\} \cos 2kx \cos 2nt \\ &+ a_1^2 k \coth 2kh \cos 2kx\end{aligned}\quad (68)$$

$$\begin{aligned}p &= p^{(1)} + p^{(2)} = 2\rho g a_1 \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos kx \cos nt \\ &+ 2\rho g a_1^2 k \frac{1}{\sinh 2kh} \left\{ \frac{3}{2} \frac{\cosh 2k(h+z)}{\sinh^2 kh} - \frac{1}{2} \right\} \cos 2kx \cos 2nt \\ &- 2\rho g a_1^2 k \frac{\sinh^2 k(h+z)}{\sinh 2kh} + \rho g a_1^2 k \frac{1}{\sinh 2kh} \cos 2kx \\ &+ 2\rho g a_1^2 k \left\{ \frac{\sinh^2 k(h+z)}{\sinh 2kh} - \tanh kh \right\} \cos 2nt\end{aligned}\quad (69)$$

表面波形 η を示す(68)式の第3項は時間的平均水位が場所的に変動し、基本波の腹の位置で少し上昇し節の位

置で少し下降することを示す。また、式の形より容易にわかるようにこの平均水位の場所的変動は水深の減少とともに増強される。

波圧に関する(69)式についてみると、第1項は1次の位数の圧力変動、第2項は2次の位数の普通の圧力変動、第3項および第5項は空間座標に無関係な波圧で1節において物理的考察より導びかれた(22)式と $a_1 = a/2$ とおくことによりまったく同型となる。この第3項は重複波が生じている際には静水圧が波がないときの静水圧よりわずかに異なることを示し、第5項はいわゆる2倍周波数の圧力変動に対応し、波圧が場所に無関係に基本波の2倍の周波数で変動することを示す。第4項は表面波形にみられた時間的平均水位の場所的変動に対応した波圧で、水位変動との関係は次式のとおりで z には無関係である。

$$p = \rho g \frac{\eta_{(z)}}{\cosh 2kh} \quad (70)$$

(b) 3次近似式 (Tadjbakhsh & Keller の式)⁹⁾

重複波の3次近似の理論式が Tadjbakhsh と Keller によって摂動法を使用して求められた。その結果を表面波形と波圧のみにについて示すと次のとおりである。

表面波形

$$\begin{aligned} \eta &= \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(3)} \\ &= a \sin nt \cos kx \\ &\quad - \frac{1}{4} a^2 k \coth 2kh \cos 2kx - \frac{1}{8} a^2 k \{ 3 \coth^2 kh - \coth kh \} \cos 2nt \cos 2kx \\ &\quad + \frac{1}{2} a^2 k^2 \{ b_{11} \sin nt \cos kx + b_{13} \sin nt \cos 3kx + b_{31} \sin 3nt \cos kx \\ &\quad + b_{33} \sin 3nt \cos 3kx \} \end{aligned} \quad (71)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{32} \{ 3w_0^{-8} + 6w_0^{-4} - 5 + 2w_0^4 \} \\ b_{13} &= \frac{3}{128} \{ 9w_0^{-8} + 27w_0^{-4} - 15 + w_0^4 + 2w_0^8 \} \\ b_{31} &= \frac{1}{128} \{ 3w_0^{-8} + 18w_0^{-4} - 5 \} \\ b_{33} &= \frac{3}{128} \{ -9w_0^{-12} + 3w_0^{-8} - 3w_0^{-4} + 1 \} \\ w_0^2 &= \tanh kh \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

圧力変動

$$\begin{aligned} p &= -\rho g z - \frac{1}{2} \rho g a^2 k \frac{\sinh 2k(h+z)}{\sinh 2kh} \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho g a^2 k \left\{ \tanh kh - \frac{\sinh^2 k(h+z)}{\sinh 2kh} \right\} \cos 2nt \\ &\quad + \frac{1}{4} \rho g a^2 k \frac{1}{\sinh 2kh} \cos 2kx \\ &\quad + \rho g a \left\{ \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} + \frac{(ak)^2}{64} (9w_0^{-8} - 12w_0^{-4} - 3 - 2w_0^4) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{32} (ak)^2 \frac{\cosh 3k(h+z)}{\sinh kh \cosh 2kh} (w_0^2 - w_0^{-6}) \right\} \cos kx \sin nt \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho g a^2 k \frac{1}{\sinh 2kh} \left\{ \frac{3}{2} \frac{\cosh 2k(h+z)}{\sinh^2 h} - \frac{1}{2} \right\} \cos 2kx \cos 2nt \\ &\quad + \frac{3}{256} \rho g a^3 k^2 \left\{ \frac{\cosh 3k(h+z)}{\cosh 3kh} (1 + 3w_0^4) (-9w_0^{-12} + 22w_0^{-8} - 13w_0^{-4}) \right. \\ &\quad \left. - 8 \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh \cosh 2kh} (w_0^2 - w_0^{-6}) \right\} \cos 3kx \sin 3nt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{256} \rho g a^3 k^2 \left\{ \frac{\cosh 3k(h+z)}{\cosh 3kh} (1 + 3w_0^4) (3w_0^{-8} - 5 + 2w_0^4) \right. \\
& - \frac{24 \cosh k(h+z)}{\sinh kh \cosh 2kh} (w_0^2 - w_0^{-6}) \left. \right\} \cos 3kx \sin nt \\
& + \frac{3}{256} \rho g a^2 k^3 \left\{ \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} (9w_0^{-8} + 62w_0^{-4} - 31) \right. \\
& + \frac{8 \cosh 3k(h+z)}{\sinh kh \cosh 2kh} (w_0^2 - w_0^{-6}) \left. \right\} \cos kx \sin 3nt \quad (73)
\end{aligned}$$

3次の位数の項はかなり複雑な形をしているが、2次の位数の項までをみると、 $a_1=a/2$ 時間 t が浜田の式より $-\pi/2$ だけずれていることに注意すれば、浜田の式（2次近似式）とまったく同型である。

この理論式を実測値と系統的に比較した例は今のところ見当らないが、合田による2～3の比較例によると例えば Sainflou の式に比較してかなりよく実測値に一致するようにみえる*。

直立壁の場所において水面が最高水位に達した時刻における波圧の鉛直分布は (73) 式で $x=0, t=\pi/2$ とおくことにより次のように得られる。

$$\begin{aligned}
p = & -\rho g z - \frac{1}{2} \rho g a^2 k \tanh kh \\
& + \rho g a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \left\{ 1 + \frac{(ak)^2}{256} [9w_0^{-8} - 234w_0^{-4} + 81 - 8w_0^4] \right. \\
& - \frac{3}{8} \rho g a^2 k \frac{\cosh 2k(h+z)}{\cosh 2kh} (w_0^2 - w_0^{-6}) \\
& + \frac{1}{256} \rho g a^3 k^2 \frac{\cosh 3k(h+z)}{\cosh 3kh} \{ (1 + 3w_0^4) (27w_0^{-12} - 63w_0^{-8} + 39w_0^{-4} \\
& - 5 + 2w_0^4) \} \quad (74)
\end{aligned}$$

なお、深海波の重複波に関しては5次近似の式が Penney & Price¹⁰⁾ によって求められている。

1-4. 部分重複波の波圧（不完全反射）

1-4-1. 微小振巾波

来襲波のエネルギーが境界面附近で一部失われ波の完全反射が生じない場合を考える。このとき来襲波と反射波とが合成されて生じる波を部分重複波と呼ぶことにする。境界での反射係数を $\kappa (\kappa \leq 1)$ とすると次の諸式が得られる。

表面波形

$$\begin{aligned}
\eta = \eta_1 + \eta_2 = & \frac{a}{2} \sin(kx - nt) + \frac{a}{2} \kappa \sin(kx + nt) \\
= & a \kappa \sin kx \cos nt + \frac{1}{2} (1 - \kappa) a \sin(kx - nt) \quad (75)
\end{aligned}$$

速度ポテンシャル

$$\begin{aligned}
\phi = \phi_1 + \phi_2 = & -\frac{a}{2} c \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \{ \cos(kx - nt) - \kappa \cos(kx + nt) \} \\
= & -\frac{a}{2} c \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \{ 2\kappa \sin kx \sin nt + (1 - \kappa) \cos(kx - nt) \} \quad (76)
\end{aligned}$$

波圧

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \rho g a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \{ 2\kappa \sin kx \cos nt + (1 - \kappa) \sin(kx - nt) \} \quad (77)$$

もちろん、 $\kappa=1$ とすれば完全重複波の式となるし $\kappa=0$ とすれば進行波の式となる。

* 合田良実：“Tadjbakhsh と Keller による有限振巾の重複波理論とその応用について”，防波堤研究室資料 No.27, 1964（未発表）

1-4-2. 有限振巾波

1-2-4. で述べた有限振巾の2成分波に関する浜田の式⁽⁸⁾において $c_2 = -c_1$, $a_2 = \kappa a_1$ ($\kappa \leq 1$) とすれば有限振巾の部分重複波に関する2次近似の式が得られる。

2. 不安定な波および碎波による波圧——直立壁に作用する波圧に関する実験結果——

1. で述べた波圧の理論的結果は安定な波、すなわち、形が不変のまま進行する波、またはこのような波の互いに逆行するものが重畳されて生じた重複波に関するものである。しかしながら、これらの近似解は波形こう配が非常に大きくなったり、相対水深 h/L が非常に小さくなったりすると級数の収斂が次第に悪くなって来て解の精度は急激におちてくる。その限界は波形こう配にも依存するが、一般に $d/L \geq 1/7$ の領域では1. で述べたような有限振巾波理論はかなり高い精度を有する。しかし、 d/L がこれより小さくなって来ると精度は非常に悪くなって来る。一方、水深が非常に浅い場合の波については、いわゆる長波の理論がある。しかし長波の理論では多くの場合波圧に関しては静水圧分布が仮定され、この静水圧分布の仮定により理論的取り扱いが幾分簡単になっている。したがって、鉛直方向の加速度が無視できなくなって波圧の静水圧分布の仮定が許されないような場合には理論的取り扱いはかなりやっかいになってくる。

もう一つ注意しなければならないのは、1. で述べた波および波圧の理論は水深が一定(平坦)な所における波に関するものである。水底こう配がゆるやかでしかも相対水深が比較的大きい場合には各場所でその水深に等しくしかも平坦な所を進行する波の理論式を適用しても近似的には正しい結果を与えるがそうでないと傾斜水底の影響がきいて来て、これを考慮すると理論的取り扱いはかなりやっかいになってくる。

他方、実際の海の波について考えてみると(一応波が不規則性を有することは別に考えるとして)、水深がかなり深い所を進行する波形こう配の小さな波は安定であるが、波形こう配が極端に大きくなったり水深が非常に小さくなったりすると波はもはや安定ではなくなっていわゆる碎波を生じる。この安定な波から碎波に移行する中途には不安定な進行とともに波形が変化するような波の領域がある。1. で述べた波の理論、したがって波圧理論が適用できしかも高い精度を保ちうるのはこの水深が比較の深く水底が平坦か水底こう配が非常にゆるやかで波の運動が安定な場合に対してである。

ところで、実際に海岸構造物が設置されるのは海岸近くのかかなり水深の浅い傾斜水底上である場合が多い。このような場合でも、波の運動が比較的安定していれば近似的には前章の理論を適用することができるが、波が非常に不安定となってきて碎波するようになってくると厳密な理論的取り扱いは今のところ望めない。しかし実用上重要なのは多くの場合、この理論的取り扱いが極度に困難な領域の波であって、理論的研究をおきなうものとして実験的研究がかなり昔より数多く行なわれている。

このような事情で、この章では不安定な領域の波および碎波による波圧の特性を、主としてこれまでに得られた各種の実験結果をもとにして述べる。ただし、このような波による波圧のできるだけ一般的な性質を浮かび上らせるために、一様な傾斜水底上に設置された直立壁に単一周期の規則波が真正面から作用する場合について述べる。

2-1. 直立壁に対する波の作用形式

波が深海部より来襲して傾斜水底上を進行して行くと水深の減少とともに波長が減少し、波形こう配が次第に増大することになる。比較的緩やかな傾斜水底上を深海部で波形こう配が大きかった波が進行する場合には波形が比較的対称なままでこの波形こう配の増大が続くが、そうでないときには波は次第に前傾して前面が急峻になりながらこの増大が生じる。そしていずれの場合も波形こう配がある限界に達すると波は不安定となって遂には碎波する。ただし対称な波形のままで碎波する波では碎波は波の峯附近での空気混入で特徴づけられ、それはかなり継続して生じる。波が前傾して碎波する場合には波の前面が垂直に切り立ったような状態になった後、上方の部分が巻き込むように前方に突込んで碎波する。前者が崩れ波型の碎波、後者が巻波型の碎波と呼ばれるも

のである。もちろんこの両者は極端な例であって両者の間には中間的な型の碎波が存在する。

ところで、この傾斜水底上に直立壁を設置すると、その設置水深がかなり深い場合には波は比較的対称な波形のまま作用し、ほぼ完全に反射されて重複波を生じる。もちろん、来襲波の沖波波形こう配が大きい場合には重複波として碎波するときもある。直立壁の設置水深の減少とともに、前述の崩れ波形の碎波をする波の場合にはあまり前傾を生じないが、一般に波は次第に前傾にして壁に作用するようになる。波が前傾して作用すると波の運動が急激に阻止されるので壁に作用する波力がそうでない場合に比較して増大することが予想される。さらに設置水深が減少して碎波点附近となると直立壁に碎波が作用することになる。しかしこの場合も、その作用形式は碎波の形式によってかなり異なり、崩れ波型の碎波の場合には単に峯附近に気泡を多量に含んだ不安定な波が作用するのにとどまるが、巻波型の碎波では波の前面が切り立ったような状態になって壁に衝突する。強大な衝撃的波圧が発生するのは後者の場合である。設置水深が碎波点よりさらに浅くなると巻波型碎波の場合には多量の空気を巻き込んで壁に衝突するようになり、さらに一たん砕けた波による再生波が作用するようになる。崩れ波型の碎波の場合には峯附近の碎波により次第にエネルギーを失った波が作用するようになる。そしていずれの場合も波圧が減少することが予想される。このような波の作用形式を分類し、その発生の条件をあわせて示す次のようになる。

- | | | |
|----------|---|---|
| 〔A〕重 複 波 | { | (A-1) 対称な波形の完全重複波 (前面水深が十分深く来襲波の波形こう配が小さい場合) |
| | | (A-2) 多少変形した重複波 (前面水深が十分に深くないが碎波を生じるほど浅くもない場合) |
| | | (A-3) 重複波としての碎波 (前面水深は比較的深くても来襲波の波形こう配が大きい場合) |
| 〔B〕碎 波 | { | (B-1) 不完全碎波 一峯の附近のみ碎波 (前面水深が来襲波の初期碎波水深程度で碎波があまり進行していない場合) |
| | | (B-2) 崩れ波型の碎波 (壁前方の水底こう配がゆるやかで来襲波の波形こう配が大きい場合) |
| | | (B-3) 巻波型の完全碎波 (前面水深が初期碎波水深よりわずかに浅く来襲波の波形こう配が比較的小さい場合) |
| 〔C〕碎波後の波 | { | (C-1) 崩れ波型の碎波でエネルギーを失った波 |
| | | (C-2) 段波状の波 (壁の直前に巻波型の碎波が突込んでそれによって発生した波) |
| | | (C-3) 再生波 ((C-2)の波がしばらく進行して作用する場合) |

もちろん実際にはこのように不連続に分類されるものではなくて、その作用形式は連続的に移行する。

2-2. 波圧の強さを支配する要素

前述のように来襲波の特性、水底こう配、壁体の設置位置などに応じて壁体に対する波の作用形式は多種多様なものとなる。そして (A-1) の完全重複波の場合には 1. で述べた重複波の理論式を適用することができるので波力を算出することが可能であるが、その他の場合には波力の理論的算定は今のところ望めない。しかしながら原理的には、波力はこれに関係する諸量より構成される次元方程式により決定されるはずであるからその具体的な形を実験的に決定すれば実用上はほぼ満足することができる。そして、この波力の強さを支配する無次元量の選定の際、前述の波の作用形式、さらに逆のぼって碎波形式を支配する無次元量が参考になる。なぜならば、前節で述べたように波力の強さは碎波形式にかなり密接に関係していることが予想されるからである。

簡単のため、一様な水底こう配 $\tan \theta$ の傾斜水底上の水深 d の所に設置された前面が平滑で剛体的な壁に波が作用する場合を考える。壁体の設置水深における波高を H 、波長を L とすればこの波が壁に作用して発生する波圧 $p(z)$ は次元考察により次のようになる¹¹⁾。

$$p(z)/\rho g H = \phi_1(d/L, H/L, z/L, \tan \theta) \quad (1)$$

ただし、水の粘性、表面張力ならびに圧縮性の影響は 2 次的なものとして一応無視されている。このほか、壁の静水位上の高さ R が十分高くない場合には、 R/H 、壁面が鉛直でなくて傾斜している際には傾斜角 α がそれぞれ波圧に関係するであろう。

ところで、 $\tan \theta$ が 0 に近く、完全重複波が生じる場合には、(1) 式の具体的な形を理論的に導くことができ、

それらは1-3.に示されたとおりであるが、それ以外の場合はこの形を実験的に定めなければならない。ただし、砕波や砕波後の複雑な波による波力を統一的に記述するためには、 H や L を使用したのではその定義がむずかしくなるのであまり便利でない。原理的には各場所における波の特性は来襲波の沖波特性 (H_0, L_0) とその場所附近の幾何学的条件によって定まるはずであるから、むしろ H_0 および L_0 を使用した方が便利である*。また波圧の鉛直分布は砕波や砕波後の波が作用する際には非常に複雑となるので、各点における波圧のかわりに水底より波の作用する最高位置まで波圧を鉛直方向に積分して求めた単位巾に作用する全波力 f を使用した方が便利である。そうすることによってパラメーター z/L を消すことができる。これらを考慮すると (1) 式は結局次のように変形される。

$$f/\rho g H_0 d = \phi_2(d/H_0, H_0/L_0, \tan \theta) \quad (2)$$

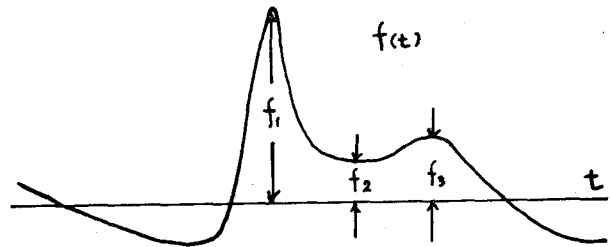
この式の左辺は壁の単位幅に作用する全波力を沖波波高に相当する水圧と壁の前面水深とで割って無次元化したものである。波の作用する高さ Y のかわりに前面水深 d を使用したのは Y の決定が一般には困難なためである。

右辺の ϕ_2 の中の d/H_0 は一種の相対水深で H_0/L_0 がきまった値をとるときには d/L_0 に相当する。このパラメーターは設置点が砕波点よりどの程度はなれているかを示すものとして重要で後述するように波力に非常に影響する。 H_0/L_0 は沖波波形こう配で、重複波の場合には波圧に対して2次的な影響しか有しないが、砕波の場合には砕波形式、したがって壁に対する波の作用形式を支配する重要なパラメーターであるから、波力に対してもかなり影響する。 $\tan \theta$ は水底こう配であり、これも H_0/L_0 とあいまって砕波形式を支配するので波力にかなり影響するものと考えられる。次節でこれら各種の無次元量の波圧に対する影響を種々の実験結果をもとにして明らかにし、 ϕ_2 の具体的性質を検討することにする。

2-3. 各種の無次元量の波圧に対する影響

前述の ϕ_2 は厳密に言えば時間のパラメーターを含むはずであるので、特定の時刻に作用する波圧についてそれぞれ ϕ_2 の特性を調べてみることにする。

右図は典型的な波圧の時間的变化 $f(t)$ を示した説明図であるが、特定時刻に作用する波圧として図に示されたように f_1, f_2, f_3 をそれぞれ選ぶことにする。 f_1 は $f(t)$ における最初のピークに相当し巻波型の砕波が衝突した瞬間には非常に大きな値となる。 f_2 は作用する波が壁のところで最高水位に達した時刻の



波圧の時間的变化

波圧で f_1 や f_3 に比較してむしろ小さい場合が多い。 f_3 は $f(t)$ における2番目のピークに対応しこの時刻には水位はすでに下降をはじめている。ある場合には非常に大きな値をとり、しかも各種のパラメーターにいちじるしく影響されるのは f_1 であるので最初に f_1 について詳しく調べてみる。

d/H_0 の影響

d/H_0 は前述のごとく一種の相対水深で、砕波が生じない領域ではそれほどいちじるしい影響を波力におよぼさないが、砕波点附近ではこれがある限界値をとるかとならないかによって砕波の発生が規定されるので波力にいちじるしく影響することが予想される。図-1は光易¹³⁾の実験結果を示し、縦軸には無次元波力 $f_1/\rho g H_0 d$ が、横軸には相対水深 d/H_0 がとられ、沖波波形こう配 H_0/L_0 がパラメーターとなっている。これより d/H_0 が無次元波力に対する影響をみることができ、波圧の面からすれば、重複波的な波圧の作用する領域 ($d/H_0 \geq 2.0$) より砕波による波圧の作用する領域 ($d/H_0 \approx 1.8 \sim 0.8$) を経て砕波後の波の作用による波圧の働らく領域 ($d/H_0 < 0.8$) にいたるまでの波圧の強さの変化を知ることができる。

* このことにより、多少粘性の影響がきいてくるという欠点はある。

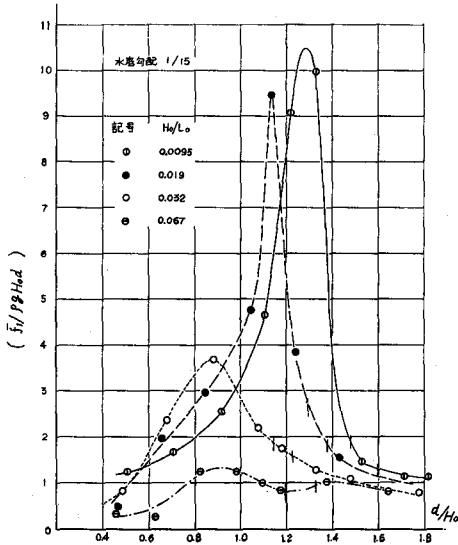


図-1-a 壁体の設置位置による波力の変化(水底こう配1/15)
 ≡ | // : 来襲波の初期碎波点 (実測)
 ≡ | // : 来襲波の初期碎波点 (Iversen の結果より求めたもの)

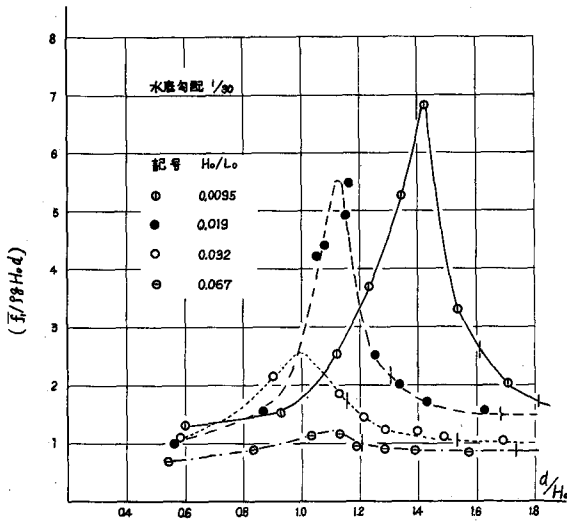


図-1-b 壁体の設置位置による波力の変化(水底こう配1/30)
 ≡ | // : 来襲波の初期碎波点 (実測)
 ≡ | // : 来襲波の初期碎波点 (Iversen の結果より求めたもの)

無次元波力が最大値をとる位置の d/H_0 の値 d_M/H_0 は、一般に碎波水深(無次元値 d_b/H_0) よりわずかに小さい。すなわち、強大な波圧は壁が来襲波の初期碎波点より少し浅いところにあるときに発生する。また図-1によると d_M/H_0 は波形こう配 H_0/L_0 や水底こう配 $\tan \theta$ に幾分依存してその相互関係は近似的に次式で表わされる¹¹⁾。

$$d_M/H_0 = C_M (H_0/L_0)^{-1/4}$$

$$C_M = 0.59 - 3.2 \tan \theta \quad (3)$$

ただし、この式は $\tan \theta = 1/50 \sim 1/10$ の範囲で近似的に成立するものでその後本間¹²⁾ により研究されたより広い範囲の資料を含めると図-2のような傾向を示す。これらの結果より、非常に強大な波力の発生する水深位置を知ることができ、その水深は波形こう配および水底こう配の増大とともに浅くなることがわかる。

H_0/L_0 の影響

図-1にみられるように、 f_1/pgH_0d の最大値 $(f_1/pgH_0d)_{max}$ は H_0/L_0 すなわち沖波波形こう配によってかなり変化している。重複波の場合にも波圧は波形こう配によって多少変化するがそれは2次的な影響しか及ぼさない*。これに反し碎波が作用する場合には H_0/L_0 の波力に対する影響は非常に顕著である。図-1の結果をもとにして求められた図-3によると $(f_1/pgH_0d)_{max}$ は H_0/L_0 の増大とともに急激に減少することがわかる。

一方永井¹³⁾ の波圧公式および Minikin¹³⁾ の式によると最大波圧 p_{max} は H/L とともに増大する。これは一見相反する結果のように見えるが、比較的緩かな一様な傾斜水底(1/50~1/10)上の碎波点附近に直立壁を置いて波圧の測定を行なった光易¹¹⁾や Rundgren¹⁴⁾ の研究と、碎波が生じないようなかなり深い一様水深部に比較的急な前面こう配を有するマウンドを設け、その上で碎波が生じるようにしてマウンド上の直立壁に作用す

る波力の測定を行なった永井の研究との条件の差によるものと考えられる。

すなわち、図-4に示された Iversen¹⁵⁾ の実験結果が示すごとく水底こう配が小さいときには H_0/L_0 の大きい波は崩れ波型の碎波をするので波力は弱く H_0/L_0 の小さな波は巻波型の碎波をし前傾して壁に衝突するので、波力は強大となる。これに反し水底こう配が大きくなると H_0/L_0 の小さな波は次第に碎けにくくなる一方、 H_0/L_0

* 例えば(69)式において $a_1 \propto H$, $k \propto 1/L$ なることを考慮すれば第2項以降の項はに比例する。

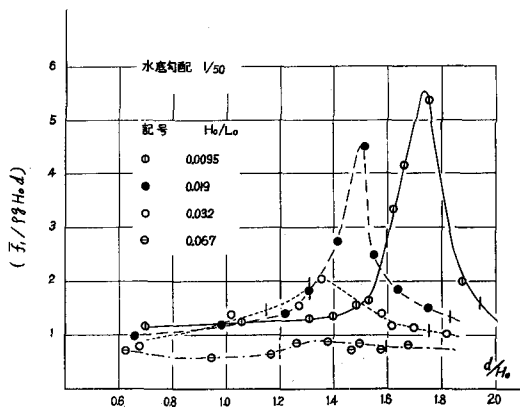


図-1-c 壁体の設置位置による波力の変化(水底こう配1/50)

— : 来襲波の初期砕波点(実測)

- - : 来襲波の初期砕波点(Iversenの大きな波の結果より求めたもの)

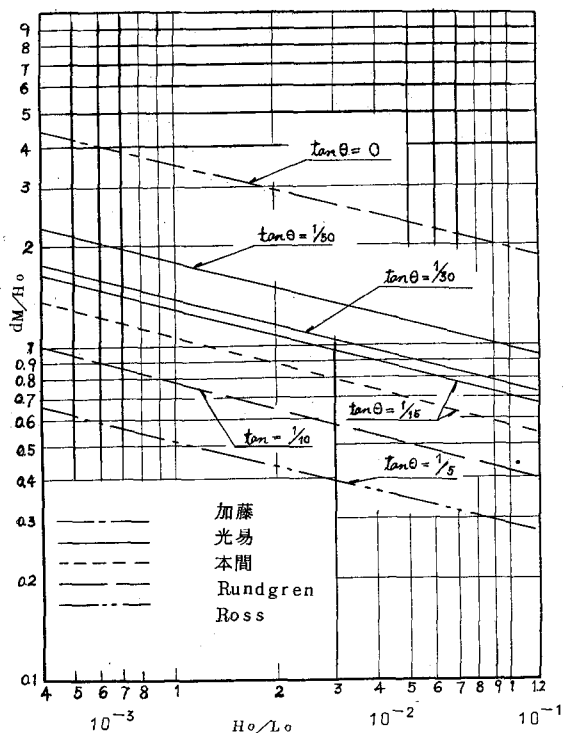


図-2-a 波形こう配による最大波力の発生する位置の変化
〔本間他(1962)より〕

は巻波型の砕波をするようになるので、波力に対する H_0/L_0 の影響の仕方がかなり異なってくるのが推定される。

$\tan \theta$ の影響

前述の Iversen の実験結果にみられるように水底こう配は砕波形式にいちじるしく影響するが、砕波の波圧に対してもこれはかなり影響し図-5に示されるごとく $(f_i/\rho g H_0 d)_{max}$ は $\tan \theta$ にほぼ比例して増大する。図-3および図-5に示された結果をもとにして $(f_i/\rho g H_0 d)_{max}$ と H_0/L_0 および $\tan \theta$ との近似的な関係式を求めると

$$(f_i/\rho g H_0 d)_{max} = -(3.00 + 140 \tan \theta) - (1.32 + 55.7 \tan \theta) \ln H_0/L_0 \quad (4)$$

となる¹⁾。

これより、推定の波が発生する波力の無次元量の最大値はその波の波形こう配 H_0/L_0 が減少するほど、また水底こう配 $\tan \theta$ が増大するほど、増加することがわかる。しかしながら、この関係式は水底こう配が一樣で1/50~1/10の範囲にあるときにのみ近似的に成立するもので、水底こう配がこれ以上に急な場合またはマウンドによって波がいちじるしく影響されて砕波するような場合にはかなり事情が異なってくるので注意しなければならない。また、 H_0/L_0 の波力に対する影響については、図-3に示された測定値が直線より系統的にずれている事実から、対数的に減少するとした仮定はかなりあらいものであることがわかる。

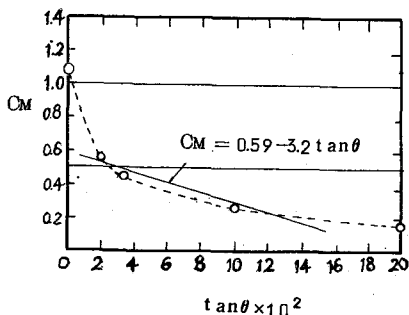


図-2-b 水底こう配による最大波力の発生する位置の変化〔本間他(1962)より〕

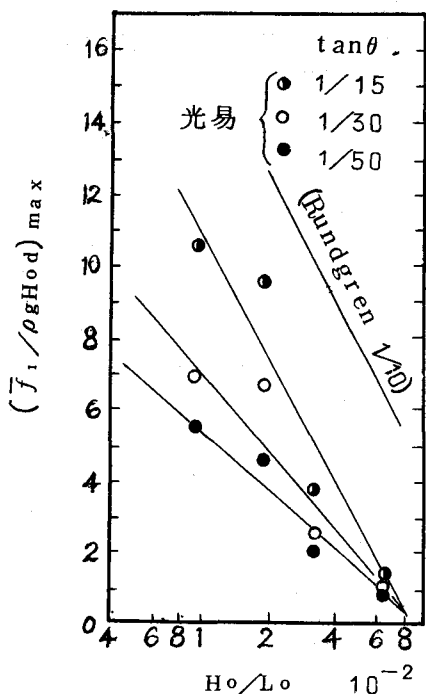


図-3 波形こう配による波力の変化

総括

以上のこの節でのべた結果を総括し、さらにその物理的意味を補足して述べると次のようになる。壁体の設置水深が比較的深い ($d/H_0 > 2.0$) ときは重複波的な波力が作用して波力は比較的弱い。しかし壁体の設置水深の減少とともに波が次第に変形し前傾して作用するようになり波力は次第に増大する。波の前傾は単に表面波形のみにとどまらず、流体内部の運動（例えば水粒子の速度変化等）においても生じているので、水平方向の運動量の変化率に比例する波圧が波の前傾とともに増大することは容易に理解される。非常に強大な衝撃的波圧が発生するのは来襲波が浅海部にきて変形し壁の直前で前傾して波の前面が垂直に切り立ったような状態になって壁に衝突するときである。このときには、衝突する水塊の水平方向の運動は瞬間的に阻止されるので強大な衝撃圧が発生するところが容易にわかる。そしてこのような状況が出現するのは (i) 壁体が来襲波の初期碎波点より少し浅い所にあって、(ii) 来襲波の波形こう配があまり大きくなく、(iii) 壁の前方の水底こう配があまり小さくない場合である。これに反し、壁体が碎波点より沖にあれば波は前傾が不完全なまま壁に作用し、逆に碎波点よりいじりく浅い所にあれば波は多量の空気を巻き込んで衝突するか、壁の前方で一たん碎けた後衝突していずれにしても波圧は減少する。

さらに逆上っていえば、波の前傾あるいは碎波形式は来襲波の沖波波形こう配ならびに海底こう配にいちじるしく影響されるので、これらのパラメーターが無次元波圧にいちじるしく影響したのである。図-1に示された結果はこれらの無次元量の波圧に対する影響の仕方を図式的に示したもので、2-1. で述べた波の各種の作用形式に対応した波圧の変化の図式的表現ともいえるものである。

2-4. 碎波による衝撃的波圧の特性

前節においては波力の最大値 f_1 のみについて議論してきたがこの節では波圧の空間的分布（圧力分布）、波圧の時間的変化、波圧の強さの統計的性質および波圧の力積など波圧の細部の性質についての議論を行なう。

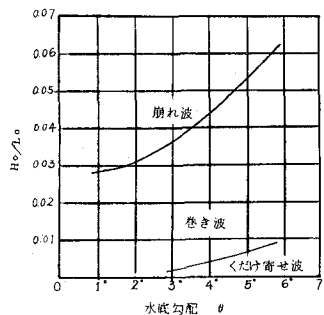


図-4 碎波の型の分類

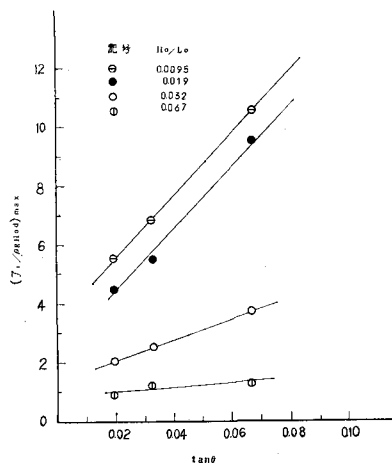


図-5 水底こう配による波力の変化

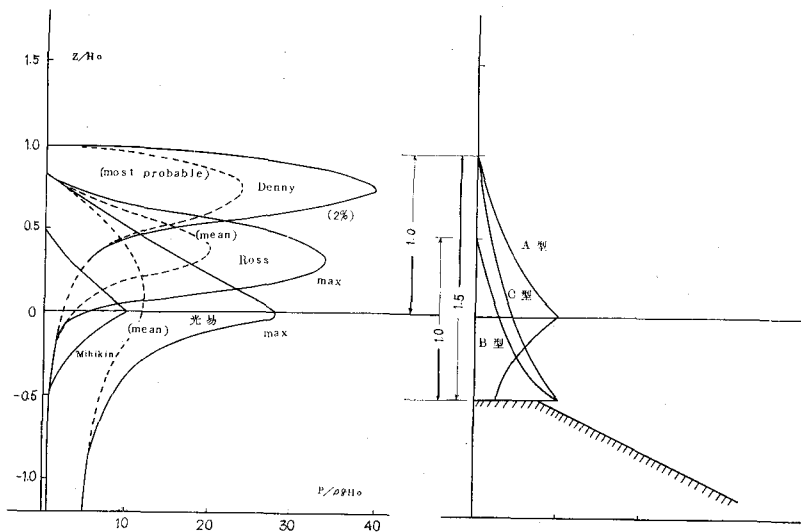


図-6a 波圧分布

図-6b 永井式の波圧分布

2-4-1. 圧力分布

圧力分布は境界条件や入射波の特性などによりいちじるしく変化するが、比較的単純な境界条件のもとにおいて衝撃的波圧が発生する場合の圧力分布の例は図-6¹³⁾に示すようなものである。図-6a は一様な傾斜水底上に設けられた直立壁に作用する波圧の分布であるが、この場合には一般に静水位附近からわずかに上方にかけて最大値が現われ上下に向かって急激に減少することがわかる。マウンド上に置かれた堤体に作用する波圧の分布を示した図-6bによると、この場合には少し事情が異なっている。これはおそらくある場合には砕波が堤体の基部に突込んでこの附近に最大波圧を生ずることを反映しているものと考えられる。

2-4-2. 波圧の時間的变化

図-7¹⁶⁾は重複波、不完全な砕波、完全な巻波型の砕波、砕波後の波などによる典型的な波圧の時間的变化 $f(t)$ を示したもので、これより波圧の時間的变化の一般的性質をある程度知ることができる。すなわち水深が十分深く重複波が生じる場合には波圧の波形はほぼ対称で多くの場合双峯性の山をもったものがみられる。ただしこの双峯性の山が現われるのはすべての場合ではなく、波形こう配 H/L ならびに相対水深 d/L に依存する。波が前傾して作用するようになると波圧の波形における第1のピークが次第に大きく鋭くなってゆく。波がいちじるしく前傾して壁に衝突する場合には衝撃的波圧が衝突の瞬間に発生する。しかし、衝突した波が壁に沿って上昇し最高水位に達したときには波力はすでに減少して2つのピークの間の凹部に対応した波圧となっている。衝突した波が壁に沿って下降をはじめるとき $f(t)$ における第2のピークが出現する。波が一旦砕波した後壁に作用するようになると、再び最初のピークは減少しある場合には砕波によって生じた大規模な乱れおよび空気の混入によって高い周波数の複雑な変動がこの最初のピークの附近にあらわれる。この波圧の時間的变化について興味ある事実は第2のピーク f_2 ならびに波が最高水位に達したときの波圧の強さ f_2 が波の作用形式によってあまり変化しないことである。図-8¹¹⁾はこの波圧 f_2 および f_3 の相対水深 d/H_0 による変化の1例を波形こう配 H_0/L_0 を

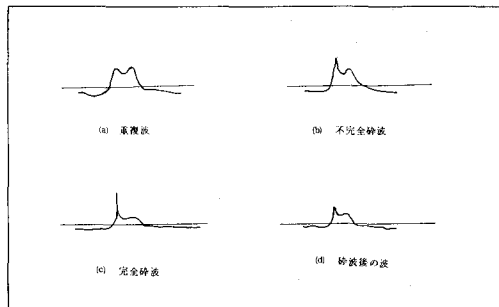


図-7 波の作用形式による波力波形の変化

パラメーターとして示したものである。最初のピーク f_1 が図-1にみられたごとく d/H_0 によっていちじるしく変化したのに反して f_2 および f_3 が d/H_0 によってあまり変化しないことがわかる。このことは、圧力波形のいわゆる腰掛部の波圧の強さを例えば比較的深い所における重複波の式より近似的に推定できることを意味するので、第1のピークをいかにとりあつかうかということに研究を集中すればよいことになる。

図-9は、光易⁽¹⁷⁾、林⁽¹⁸⁾、永井⁽¹⁹⁾、Bagnold⁽²⁰⁾、Denny⁽²¹⁾、Ross⁽²²⁾ 等の測定結果をもとにして求めた前傾した波が壁に衝突した瞬間に発生する強大な波圧の第1ピークの波形のみを拡大して示したものである。また表-1は図-9に示されたものと資料その他を使用して求めた波圧の強さのピーク値および衝撃圧の作用時間の概略の値を一括して示したものである。ただしこの τ は急激な時間変化をする第1のピークのみの作用時間である。これより衝撃的波圧の強さは極端な場合には波高に相当する水圧の100~200倍に達することもあるが多くの場合数倍から数十倍であること、衝撃的波圧の作用時間は上記の極端に強い波圧の発生する場合には1/1000秒程度の小さな値をとるが、

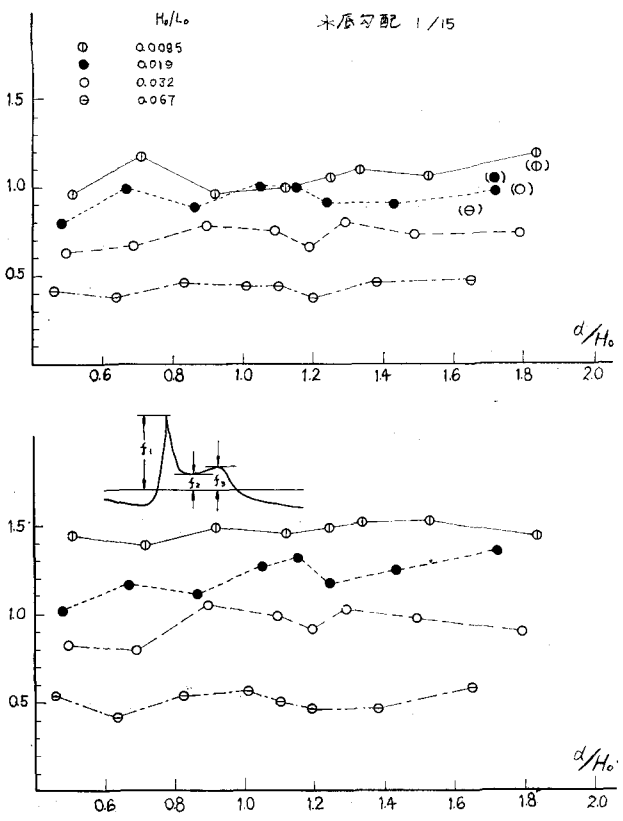


図-8 壁体の設置位置による腰掛部の波力の変化
() 内の点は Gourret の式による理論値

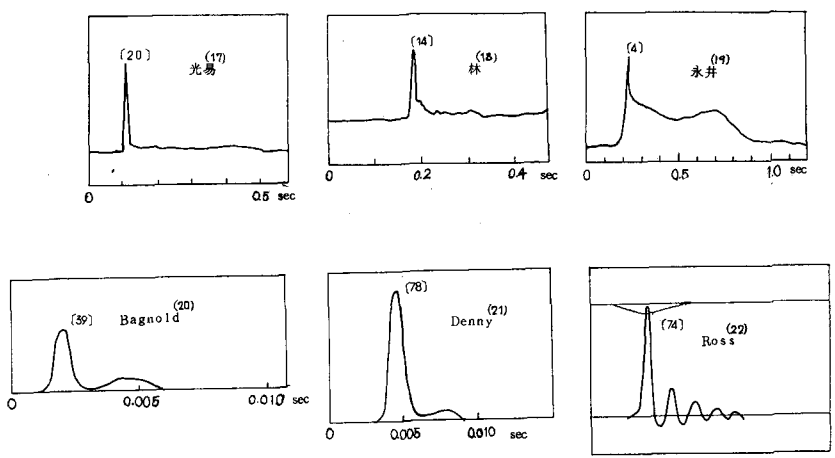


図-9 衝撃的波圧の圧力波形
[] 内の数値は $p/\rho g H$ の値
() は文献番号

表-1 衝撃的波圧の諸特性

測定者	測定場所	波の種類	$\bar{p}_{max}/\rho g H$		τ (m sec)
			一般値	最大値	
Bagnold	実験室	孤立波	20 ~ 60	224	1 ~ 5
Denny	"	"	10 ~ 60	110	1 ~ 10
林	"	"	5 ~ 40	—	7 ~ 20
Ross	"	周期的波	10 ~ 70	120	1 ~ 10
永井	"	"	3 ~ 14	—	—
光易	"	"	5 ~ 20	20	10 ~ 50
Rundgren	"	"	5 ~ 15	19.3	2 ~ 7
(Dieppe のデーター)*	海岸	海の波	1 ~ 38	38	50 ~ 100

* Bagnold の論文に記載されている Dieppe における観測記録

τ : 衝撃的波圧の作用時間

多くの場合には1/100秒~1/10秒の範囲にあることなどがわかる。この衝撃的波圧の作用時間 τ に対する scale effect は現地の資料が比較的少ないのではっきりしないが、おそらく Froude の相似則が適用できるものと思われる。

2-4-3. 波圧の強さの統計的性質

特に砕波が壁体に衝突して強大な衝撃的波圧が発生する際には、できるだけ条件を一樣にしても発生する波圧のピークの値は毎回いちじるしく変化して散乱した値を示す。したがって図-1で使用された波力 f_1 は一樣な一連の波を使用して測定した数10箇の波圧の平均値である。これは本来砕波という現象が一種の不安定現象であって、たとえ初期条件を一定にしても解はある確率的性質を含んだものとして与えられることに基因し、さらに、砕波の衝突により発生する衝撃的波圧の強さが衝突する水塊の前面のわずかの形状の差、空気の混入の仕方等によって敏感に影響されることを反映している。Denny²¹⁾により孤立波に近い波を使用し、できるだけ毎回条件を一定に保って測定された波圧の出現頻度は正規分布にきわめて近く、さらに彼の資料をもとにして波圧の値の相対標準偏差 $\sigma_p/\bar{p}$ を求めてみると0.35~0.38が得られる。周期性の波を使用して光易が測定した結果によると、頻度分布は多少歪んでいるが、相対標準偏差は一点に作用する波圧の場合0.47¹⁷⁾、広い範囲に作用する全波力の場合0.3~0.4¹¹⁾が得られた。もちろんこれらの値は非常に強大な衝撃的な波力が発生する場合について得られたものであって波力が弱くなれば当然散乱の程度は少なくなり相対標準偏差の値も多少減少する。したがって規則的な波によって発生する波力の相対標準偏差の上限 $(\sigma_p/\bar{p})_{max}$ は0.5程度と考えることができ、これより波力の強さの変動の範囲を推定することができる。

風波の場合には風波の統計的性質に関連してくるが現在のところ資料がきわめて少ないのでこれに関してはまったく不明である。

2-4-4. 波圧の力積

上述のように砕波により衝撃的波圧が発生するときには、たとえ入射波の特性がほとんど同一であっても波圧の強さはいちじるしく散乱した値を示す。このことは局部的な圧力のみならず壁の広い範囲について平均した波圧についても同様である。しかしながら、波圧の時間的積分である力積はかなり一定した値をとり、入射波の運動量の変化にはほぼ等しい¹¹⁾。これは力学的に考えれば当然予想されることであるが、この事実より近似的には孤立波理論または微小振巾波理論などを使用して力積の算定をすることができることになる。また、衝撃的に作用する部分(圧力波形における鋭い第1のピークの部分)のみに含まれる力積は全力積の20%以下であることが見出だされている¹¹⁾。ただしこの全力積は圧力波形で静水圧以上の部分を積分して求めたものである。

3. 波圧公式の諸問題

このまえの2つの章において、波により、あるいは波が剛体的な壁に作用した場合に、いかなる波圧が生じるかを調べてきた。進行波および重複波の場合には理論的解析により、変形した波および砕波の場合には実験結果にもとづいて、それぞれ発生する波圧の一般的性質をある程度明らかにすることができた。

しかしながら、これらの新しい結果をもとにして新しい波圧公式をつくるとなるとそれは必ずしも容易なことではない。本項で述べたようないわば解析的方法で進んで行って実用的な波圧公式を導びくためには、次のような諸問題を今後解決しなければならないであろう。

- (i) 同時波圧の横方向の分布
- (ii) 実際の防波堤の力学的系としての特性の決定（例えば振動特性等）
- (iii) 砕波圧に対するマウンドの形状その他防波堤の形状の影響
- (iv) 波圧に対する波の不規則性の影響

同時波圧の鉛直分布に関してはわれわれはかなり多くの知識を現在有している。また、ある程度の広がりをもった範囲（波高の2倍程度の巾）に作用する全波力に関しても例えば図-1に示されたような結果を得ている。したがってケーソン1箇程度に作用する全波力は、波の不規則性を別とすれば、ある程度推定することができる。しかしながら、実際の防波堤は多くの場合横方向にある程度連結されたような構造になっているので、その連結の程度にもよるが、波圧による防波堤の移動を考えるには横方向にかなり広い範囲にわたって同時に作用する波圧の特性を知ることが必要である。この場合には波が堤体に斜めに当たるときの波圧の特性や波の不規則の考慮も必要となるであろう。次に、砕波の衝突によって発生する強大ではあるが短時間しか作用しない衝撃的波圧の堤体の移動に対する効果を知るためには実際の防波堤の振動特性を、さらに一般的にいえば防波堤の力学系としてのモデルとその特性を決定しなければならない。剛体的な堤体が剛体的な基盤の上に設置されているときには、固体間の静止摩擦係数は急激に加速されるような力が加わった場合でもその値に変化のないことが報告されているので²³⁾、波圧が急激に変化したとしても水平波力の合力が静止摩擦に打ち勝った瞬間に堤体は滑動することになる。コンクリートの造波水槽内に木造および碎石のマウンドを設けその上にモルタル製のブロックを置いて波圧によるブロックの移動を調べた永井の研究によると、全水平波力が静止摩擦力に打勝った瞬間にブロックの滑動がはじまったことが報告されている^{24), 25)}。しかしながら実際の防波堤を前述のような剛体的な系とみなし得るかどうかには問題が残されている。堤体のロッキング運動を考慮したとき、衝撃的波圧によって生ずる堤体の滑動面におけるせん断力の詳細な計算が林によってなされた^{26), 27)}。その結果によると堤体の慣性抵抗が衝撃力を一部吸収し滑動面に伝達されるせん断力はかなり減少している。第3の問題も実用の面ではきわめて重要である。2.で述べたように砕波の波圧は来襲波の特性と同時に境界条件、すなわち防波堤附近の幾何学的形状さらに防波堤自体の形状やマウンドの形状などによっていちじるしく変化する。したがって波圧公式をより精密なものとするためには地形ならびにマウンドおよび防波堤自体の形状の波力に対する影響を明らかにし、ある場合にはこれらを波圧公式にとり入れなければならない。第4の波の不規則性に関連した問題については、孤立波または一様な周期性の波を使用して求められた砕波の圧力に関する従来の結果から推定すると、個々の波に対応する波圧としてはそれほど問題はないように思われる。すなわち、たとえ波が不規則であっても一つ一つの波による波圧は孤立波による波圧と周期性の波による波圧との中間位にあるものと考えられ、しかもこの両者によって生じる波圧にはそれほど顕著な差はないからである。むしろ問題は来襲波の特性が不規則に変動しているときに来襲波の特性をいかに記述し、どのように波圧公式にとり入れるかにある。例えば図-1に示されたような結果にしてもパラメーター d/H_0 や H_0/L_0 の値の意味があいまいになってくる。これは、現在われわれが便宜的に採用している重複波公式と砕波公式の使い分けに関してもいえるものである。一般に壁の前面水深が波高の2倍以上あれば重複波が生じるものと考えているが、有義波ではたとえその条件が満足されても、1/10最大波ではあやしくなり、長時間のうちに生ずる最大波についてはとうていその条件が満足されないというようなことが起こり得る。

このような問題をどのようにして解決していくかは波圧に関する今後の研究の重要な課題であろう。

次に少し見方を変えて、従来の波圧公式をこのまえの2つの章で述べた結果をもとにして簡単に検討してみる

ことにする。従来、重複波公式と砕波公式とを使い分ける限界として $d/H \approx 2$ が採用されているが、図-1に示された結果からすると、波の不規則性を一応除外して考えれば、これはほぼ妥当なように思われる。ただし、 $d/H < 2$ であつてもただちに砕波による衝撃的波圧が発生するというのではなく、 $dH \geq 2$ であればほぼ完全な重複波が生じるが、 $d/H < 2$ となると少なくとも完全な重複波ではなくなつて来て、波圧は重複波のそれよりも増大するという意味においてである。しかしながら、詳細にみるとこの限界は波の特性や水底こう配その他の境界条件にかなり依存するので現地の地形や支配的な波の特性が定まっているときには多少の変更は可能と考えられる。

次に波圧公式自体についてみると、重複波公式については次のようなことがいい得るであらう。まだ詳細に実験結果と比較した例がないのではっきりしたことはいえないが、少なくとも理論的には Sainflou の式¹³⁾ に比べて1.で述べた第3次近似の式の方が近似の精度は高いので、従来の Sainflou 公式に関する欠点はある程度と除かれるものと思われる。しかしながら、この高次近似の式も相対水深が小さくなってくると級数の収束が悪くなって急速に精度がおちてくるので水深が浅いときには、たとえ砕波が生じない場合でも問題が残されている。次に砕波公式についてみると、よく知られているように広井公式¹³⁾ と Minikin 公式¹³⁾ がある。これらの公式を例えば図-1に示された結果と比較してみると実測値が一見非常に大きいように思われるが実際には、特別な場合を除けば、必ずしもそうではない。

広井公式による $f/\rho g H_0 d$

よく知られているように広井公式は次のように表現される。

$$p = 1.5 \rho g H \quad (\text{ton/m}^2) \quad (5)$$

広井公式においては壁面に対する波圧の作用範囲があまりはっきりとしてないが一応水底より静水位上 $0.7H$ までの範囲に一樣に波圧が作用するものとして全水平波力を求めてみると、

$$H \div H_0 \div 1.25 H_0, H_0 \div 0.8 d_b = 0.8 d$$

なる仮定をおけば次式が得られる。

$$\begin{aligned} f &= 1.5 \rho g \times 1.25 H_0 \times (d + 0.7 H_0) \\ &= 1.5 \rho g H_0 \times 1.25 \times d(1 + 0.7 \times 0.8) = 2.92 \rho g H_0 d \end{aligned} \quad (6)$$

すなわち、 $f/\rho g H_0 d \approx 3$ となる。

Minikin 公式による $f/\rho g H_0 d$

Minikin 公式は次式で与えられ

$$\left. \begin{aligned} \text{衝撃圧: } & \left\{ \begin{aligned} p_s &= p_m \left(1 - \frac{2z}{H}\right)^2 \\ p_m &= 102.4 d \rho g \left(1 + \frac{d_1}{d}\right) \frac{H}{L} \end{aligned} \right. \quad (\text{ton/m}^2) \\ \text{静圧: } & \left\{ \begin{aligned} p/\rho g &= H/2 - z && \text{静水位上} \\ p/\rho g &= H/2 && \text{静水位下} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

これらの式を使用して全水平波力を計算すると次式が得られる。

$$\frac{f}{\rho g} = 34.1 d H \left(1 + \frac{d_1}{d}\right) \frac{H}{L} + \frac{d H}{2} \left(1 + \frac{H}{4d}\right) \quad (8)$$

ここで、次のような仮定をおくと、

$$H = 1.25 H_0, \quad \frac{d_1}{d} = 0.5, \quad H/L = 0.05, \quad H/d = 0.4$$

(8) 式は

$$\frac{f}{\rho g} = 34.1 \times 1.25 H_0 d (1 + 0.5) \times 0.05 + \frac{1.25}{2} H_0 d (1 + 0.1) \div 3.89 H_0 d$$

となり $f/\rho g H_0 d \approx 4$ が得られる。

これらの値を図-1に示された結果と比較してみると、比較的急こう配の斜面上で波形こう配の小さな波が砕波して壁に作用する場合には実測値の方がはるかに大きい、緩こう配の場合や急こう配でも波形こう配の大き

い波の場合には実測値の上限はこれらの公式の与える値に比較し得る大きさである。したがって、かなり特別の場合を除けば、広井公式や Minikin 公式は堤体に働く水平波力に関しほぼ妥当な値を与えることが本項に述べた資料よりもわかる。しかしながら、少なくとも本項に述べた室内実験の結果によると、かなり広い範囲に作用する水平波力についても広井公式や Minikin 公式による値よりはるかに大きい波圧が生じる場合もある。このような波圧が現地でも生じる可能性があるかどうか、このような波圧が構造物にいかなる影響をおよぼすか、これらについて本節のはじめに述べた諸問題とともにさらに研究をすすめて行く必要がある。

参 考 文 献

- (1) この節に関連のある主要な参考書は次のものである。
 - (a) 友近 晋：流体力学，共立社，昭.15.
 - (b) 今井 功：流体力学，岩波書店，（岩波講座，現代物理学 V.A）
 - (c) J.J. Stoker：Water Waves, Interscience Publishers, 1957.
- (2) M.S. Longuet-Higgins：A theory of the origin of microseisms, Phil. Trans. Roy. Soc. Vol. 243, A. 857, 1950.
- (3) W.J. Pierson：An electronic spectrum analyzer and its use in engineering problems, Beach Erosion Board, Tech. Memo. No.56, 1954.
- (4) 降旗常雄：Ocean Waves の沿岸観測について——問題点，ならびに二，三の知見——，沿岸海洋研究ノート，第3巻第1号，1964.
- (5) Van Dorn, Wm. G.：A new long-period wave recorder, J. Geophys. Res. 65, 1007-1012, 1960.
- (6) L. Skjelbreia, J. Hendrickson：Fifth order gravity wave theory, Proc. 7th Conf. Coast. Eng. The Hague, 1960 同じく，C.L. Bretschneider：A theory of waves for finite height, 同上文献.
- (7) L. Skjelbreia：Gravity waves, Stokes Third Order Approximation, Tables of Functions, Council of Wave Research, The Engineering Foundation, 1958.
- (8) 浜田徳一：表面波の2次干渉，第11回海岸工学講演会講演集，1964.
- (9) I. Tadjbakhsh, J.B. Keller：Standing surface waves of finite amplitude, J. Fluid Mech., Vol. 8, Part 3, pp. 442-451, 1960.
- (10) W.G. Penney, A.T. Price：Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid, Phil. Trans., Series A, Vol. 244, p. 254, 1952.
- (11) H. Mitsuyasu：Experimental study on wave force against a wall, Report of Transportation Technical Research Institute, No. 47, 1960.
- (12) 本間 仁，堀川清司，長谷直樹：護岸に働く波力について，第9回海岸工学講演会講演集，1962.
- (13) 水理公式集（昭和38年増補改訂版）
- (14) L. Rundgren：Water wave force, Stockholm, 1958.
- (15) H.W. Iversen：Waves and breakers in sholing water, Proc. Third Conf. Coast. Eng., 1952.
- (16) 文献(11)の資料より抜萃したもの。
- (17) 光易 恒，長谷直樹，柴山煒彦：壁体に作用する砕波の圧力に関する実験的研究，運輸技術研究所報告，8巻2号，1958.
- (18) 林 泰三，服部昌太郎：孤立波の砕波とその波圧について，第3回海岸工学講演会講演集，1956.
- (19) 永井莊七郎：防波堤に働く砕波の圧力に関する研究，第5回海岸工学講演会講演集，1958.
- (20) R.A. Bagnold：Interim report on wave pressure research, J. Inst. Civil Eng., Vol.12, No.7, 1939.
- (21) D.F. Denny：Further experiment on wave pressure, J. Inst. Civil Eng., 1951, pp. 330-345.
- (22) C.W. Ross：Laboratory study of shock pressure of breaking waves, Beach Erosion Board, Tech. Memo. No. 59, 1955.

- (23) 上村欣一，加賀美幾三，古賀正三：静摩擦現象の微細構造，応用物理，25巻1号，1956.
- (24) 永井莊七郎：混成防波堤直立部の滑動および底面に働く揚圧力，第7回海岸工学講演会講演集，1960.
- (25) 永井莊七郎，玉井佐一：混成防波堤直立部の滑動実験——1/10模型における実験——，第9回海岸工学講演会講演集，1962.
- (26) 林 泰三，服部昌太郎，林 憲吉：碎波の圧力と堤体の滑動，第7回海岸工学講演会講演集，1960.
- (27) 林 泰三，服部昌太郎：碎波の波圧について，第10回海岸工学講演会講演集，1963.