波浪スペクトルム論とその応用

1. 序

波浪スペクトルムは確率過程の考えを用いるわけであるが，普通1次元又は2次元の定常過程（実数値過程）として用いられる。それが3次元の変換を必要とする場合も，その変換は通常の物理的意味としては2次元の過程であり，変換の数式的取扱いが3次元となっているにとどまる。

一般的取扱いとしては，相関関数を用い，その Fourier 変換からスペクトルムの密度を求める。この時注意を要するのは，その取扱い方により，相関関数が自己相関関数（auto correlation function）ともなれば，又相互相関関数（cross correlation function）ともなるものが現われることである。たとえば，水位の平均水面からの変動量を η として，$\eta(\boldsymbol{x},t)$ とすれば，その相関関数は $\eta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t+\tau)\eta^*(\boldsymbol{x},t)$ （*は複素共軛を示す）であるが，$\tau \neq 0$ として $\boldsymbol{x}$ についての相関関数（または $\boldsymbol{r} \neq 0$ としての t についての相関関数）を求める時はこれは相互相関関数であるが，$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x},t)$ を考え，$\boldsymbol{X}$ についての相関関数を求める時は，これは自己相関関数となる。

今1つ注意を要することは Fourier-Stieltjes 型の表現を行なった場合，波の進行方向についての注意をはらわねばならぬことである。これは乱流のスペクトルム理論(例えば G.K. Batchelor—Theory of homogeneous turbulence (1953) を見よ）には見られない表面波特有の取扱いである。また乱流理論で3次元のスペクトルムから1次元のスペクトルム（例えば等方性の時の f, g の変換）（Batchelor 上述書（3.1.1)式）

$$\Theta_{ij}(k_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(r_1,0,0)\,e^{-ik_1r_1}dr_1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{ij}(k_1,k_2,k_3)\,dk_2dk_3 \qquad (1)$$

を求めるこのような変換は波浪スペクトルム論においてもさかんに用いられる。ただ変換が上述のように2次元とする場合が多いわけである。

つぎに乱流スペクトルム理論の時の closure problem に相当するものが，波浪スペクトルム理論でも起こるのではないかということは，運動方程式の非線型性から予想される。ただ乱流スペクトルム理論ではこの問題は古く W. Heisenberg (1948) 以来いろいろな角度から研究されているのに対し，波浪スペクトルム理論ではこれは O.M. Phillips (1960) にはじまり，K. Hasselmann (1962, 1963), F. P. Bretherton (1964) 等が調べているが，まだ研究の最初の段階である。K. Hasselmann の得たくわしい計算の結果から考える時，非回転の波の運動のみで押しきろうとするこの closure problem に対する取扱いは，これを実際の現象と合致させるには相当の困難があるものと予想される。

また等方性に近い乱れの場合の慣性小領域の $E(k)\sim k^{-5/3}$ に対応する波浪スペクトルムの平こう状態に関するものとしては f^{-5} 則というものが得られている。$k^{-5/3}$ 則に対応するといっても，その物理的意味は全く異なっていると考えられる。これについては，O. M. Phillips (1958, 1963), G. Neumann & W. J. Pierson (1963)，筆者 (1964) 等の研究がある。

2. 有限時間で切られたデータによるスペクトルムの1つの性質

普通の波形の周波数スペクトルムをつくる場合，波形の測定時間はそれほど長くないことが多い。自由度を高くして，得られるスペクトルムの信頼限界をあげるためには，同時刻に homogeneous と考えられる水面の多数の記録をあつめればよいわけであるが，もしそれに成功しても，1つ1つの記録が有限時間できられているため，周波数の小さい部分ではどうしてもスペクトルムには歪みが生ずる。これは例えば10分間の波浪記録から周波数スペクトルムをつくり，波の beat を議論しようとする場合等に影響を及ぼす。

この計算には小倉 (1959) が乱流拡散に際して行なった計算を利用できる。その計算は簡単に概要だけ記されているが，これを追跡するのはこうした計算になれる点で意味があろう。

十分長い時間における水位の平均値を $\bar{\eta}=0$ とする。測定する時間の長さを T とすれば，本当の変位量 $\eta'(t)$ と T 時間の間の測定で変位量と考えられた量 $\eta_T'(t)$ との間には

$$\eta'_T(t) = \eta'(t) + \overline{\eta(t)} - \frac{1}{T}\int_0^T\left\{\eta'(t+\zeta) + \overline{\eta(t)}\right\} d\zeta = \eta'(t) - \frac{1}{T}\int_0^T \eta'(t+\zeta)d\zeta \tag{2}$$

$\eta'_T(t)$ を用いて作った相関関数は

$$R_T(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \eta'_T(t+\xi)\,\eta'_T(t+\xi+\tau)\,d\xi \tag{3}$$

homogeneous な状態でこのような記録を多数集めてその平均をとると

$$\overline{R_T(\tau)} = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\int_0^A \frac{1}{T}\int_0^T \eta'_T(t+\xi)\eta'_T(t+\xi+\tau)d\xi dt \tag{4}$$

(4)式に(2)式を代入する。ただし

$$\left.\begin{aligned} \eta'_T(t+\xi) &= \eta'(t+\xi) - \frac{1}{T}\int_0^T \eta'(t+\zeta)d\zeta \\ \eta'_T(t+\tau+\xi) &= \eta'(t+\tau+\xi) - \frac{1}{T}\int_0^T \eta'(t+\tau+\zeta)d\zeta \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

とする。(4)式は

$$\begin{aligned} \overline{R_T(\tau)} &= \lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\int_0^A \frac{1}{T}\int_0^T\left\{\eta'(t+\xi) - \frac{1}{T}\int_0^T \eta'(t+\zeta)d\zeta\right\} \times \left\{\eta'(t+\tau+\xi)\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{T}\int_0^T \eta'(t+\tau+\zeta)d\zeta\right\} d\xi dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left[\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\int_0^A\left\{\eta'(t+\xi)\eta'(t+\tau+\xi)\right.\right. \\ &\quad - \frac{1}{T}\int_0^T \eta'(t+\tau+\xi)\eta'(t+\zeta)d\zeta - \frac{1}{T}\int_0^T \eta'(t+\xi)\eta'(t+\tau+\zeta)d\zeta \\ &\quad \left.\left. + \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \eta'(t+\zeta')\eta'(t+\tau+\zeta)d\zeta' d\zeta\right\} dt\right] d\xi \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T\left[R_\infty(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T R_\infty(\tau+\xi-\zeta)d\zeta - \frac{1}{T}\int_0^T R_\infty(\tau+\zeta-\xi)d\zeta\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_\infty(\tau+\zeta-\zeta')d\zeta' d\zeta\right] d\xi \end{aligned} \tag{6}$$

(6)式の右辺第 2 項は, $\xi-\zeta=\xi_1$ とおき

$$\begin{aligned} -\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_\infty(\tau+\xi-\zeta)d\zeta d\xi &= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_\xi^{\xi-T} R_\infty(\tau+\xi_1)d\xi_1\,d\xi \\ &= \frac{1}{T^2}\left|\xi\int_\xi^{\xi-T} R_\infty(\tau+\xi_1)d\xi_1\right|_0^T - \frac{1}{T^2}\int_0^T \xi\{R_\infty(\tau+\xi-T) - R_\infty(\tau+\xi)\}d\xi \\ &= \frac{-1}{T^2}\int_0^T TR_\infty(\tau+\xi)d\xi - \frac{1}{T^2}\int_0^T \xi R_\infty(\tau+\xi-T)d\xi + \frac{1}{T^2}\int_0^T \xi R_\infty(\tau+\xi)d\xi \end{aligned} \tag{7}$$

(6)式の右辺第 3 項は, $\xi-\zeta=\xi_1$ として

$$\begin{aligned} -\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_\infty(\tau+\zeta-\xi)d\zeta d\xi &= -\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_\infty(\xi-\tau-\zeta)d\zeta d\xi \\ &= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_\xi^{\xi-T} R_\infty(\xi_1-\tau)d\xi_1 d\xi \\ &= \frac{-1}{T^2}\int_0^T TR_\infty(\xi-\tau)d\xi - \frac{1}{T^2}\int_0^T \xi R_\infty(\xi-\tau-T)d\xi + \frac{1}{T^2}\int_0^T \xi R_\infty(\xi-\tau)d\xi \end{aligned} \tag{8}$$

(6)式の右辺第 4 項は, $\zeta-\zeta'=\mu$ とおき

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_\infty(\tau+\zeta-\zeta')d\zeta' d\zeta d\xi &= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_\infty(\tau+\zeta-\zeta')d\zeta' d\zeta \\ &= \frac{-1}{T^2}\int_0^T\int_\zeta^{\zeta-T} R_\infty(\tau+\mu)d\mu d\zeta \\ &= \frac{-1}{T^2}\left|\zeta\int_\zeta^{\zeta-T} R_\infty(\tau+\mu)d\mu\right|_0^T + \frac{1}{T^2}\int_0^T \zeta\{R_\infty(\tau+\zeta-T) - R_\infty(\tau+\zeta)\}d\zeta \\ &= \frac{1}{T^2}\int_0^T TR_\infty(\tau+\zeta)d\zeta + \frac{1}{T^2}\int_0^T \zeta R_\infty(\tau+\zeta-T)d\zeta - \frac{1}{T^2}\int_0^T \zeta R_\infty(\tau+\zeta)d\zeta \\ &= \frac{1}{T^2}\int_0^T (T-\zeta)R_\infty(\tau+\zeta)d\zeta + \frac{1}{T^2}\int_0^T \xi R_\infty(\tau+\xi-T)d\xi \end{aligned}$$

$T-\zeta=\alpha$ とおき

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T \alpha R_\infty(\tau + T - \alpha)d\alpha + \frac{1}{T^2}\int_0^T \xi R_\infty(\tau + \xi - T)d\xi$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T \xi R_\infty(\xi - T - \tau)d\xi + \frac{1}{T^2}\int_0^T \xi R_\infty(\tau + \xi - T)d\xi \tag{9}$$

(7), (8)および(9)式を用いれば，(6)式は

$$\overline{R_T(\tau)} = R_\infty(\tau) - \frac{1}{T^2}\int_0^T (T-\xi)R_\infty(\tau+\xi)d\xi - \frac{1}{T^2}\int_0^T (T-\xi)R_\infty(\xi-\tau)d\xi \tag{10}$$

そこで $R_\infty(\tau)$ の Fourier 変換をとる。

$$R_\infty(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\infty(n)e^{in\tau}dn = \int_{-\infty}^{\infty} f_\infty(n)(\cos n\tau + i\sin n\tau)dn$$

$f_\infty(n)$ は偶関数であるから，

$$= 2\int_0^\infty f_\infty(n)\cos n\tau dn$$

$2f_\infty(n) = F_\infty(n)$ とすれば

$$R_\infty(\tau) = \int_0^\infty F_\infty(n)\cos n\tau dn \tag{11}$$

同様に

$$\left.\begin{aligned} R_\infty(\xi+\tau) &= \int_0^\infty F_\infty(n)\cos n(\xi+\tau)dn \\ R_\infty(\xi-\tau) &= \int_0^\infty F_\infty(n)\cos n(\xi-\tau)dn \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

よって(10)式は

$$\overline{R_T(\tau)} = \int_0^\infty F_\infty(n)\cos n\tau dn - \frac{1}{T^2}\int_0^T (T-\xi)\int_0^\infty F_\infty(n)\cos n(\xi+\tau)dnd\xi$$

$$- \frac{1}{T^2}\int_0^T (T-\xi)\int_0^\infty F_\infty(n)\cos n(\xi-\tau)dnd\xi$$

$$= \int_0^\infty F_\infty(n)\cos n\tau dn - \frac{1}{T^2}\int_0^T (T-\xi)\int_0^\infty F_\infty(n)\cos n\xi\cos n\tau dnd\xi \tag{13}$$

これの ξ についての積分を行なうと

$$\overline{R_T(\tau)} = \int_0^\infty F_\infty(n)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{nT}{2}}{\left(\frac{nT}{2}\right)^2}\right)\cos n\tau dn \tag{14}$$

(14) 式の $F_\infty(n)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{nT}{2}}{\left(\frac{nT}{2}\right)^2}\right)$ は n につき偶関数であり，実数値過程の相関関数である $\overline{R_T(\tau)}$ の変換により得られることは明らかである。

$$\frac{F_\infty(n)}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{nT}{2}}{\left(\frac{nT}{2}\right)^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{R_T(\tau)}\, e^{-in\tau}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{R_T(\tau)}\cos n\tau d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \overline{R_T(\tau)}\cos n\tau d\tau$$

したがって，

$$F_\infty(n)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{nT}{2}}{\left(\frac{nT}{2}\right)^2}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \overline{R_T(\tau)}\cos n\tau d\tau \tag{15}$$

これに対し

$$F_\infty(n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R_\infty(\tau)\cos n\tau d\tau \tag{16}$$

このようにして有限時間で切った見本を用いてつくられた相関関数から求められたスペクトルムはどのように多数の見本を用いても周波数の小さい領域ではスペクトルムの強度は低下して現われる。 $nT \to 0$ では

$$F_\infty(n)\left(1-\frac{\sin^2\frac{nT}{2}}{\left(\frac{nT}{2}\right)^2}\right) \simeq F_\infty(n)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{nT}{2}\right)^2\right)$$

となる。

3. Directional spectrum についての問題

ここでは directional spectrum につき, D. E. Cartwright (1962) の説明にしたがい, それを補足する。平均水位からの水位変動を η とする。

$$\eta(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(xk_n\cos\theta_n+yk_n\sin\theta_n-\sigma_n t+\varepsilon_n) \tag{17}$$

とおけば, $x+\gamma_1$, $y+\gamma_2$, $t+\tau$ における η の値は

$$\eta(x+\gamma_1,y+\gamma_2,t+\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\{(x+\gamma_1)k_n\cos\theta_n+(y+\gamma_2)k_n\sin\theta_n -\sigma_n(t+\tau)+\varepsilon_n\} \tag{18}$$

そこで相関関数 $\psi(\gamma_1,\gamma_2,\tau)$ を求めると

$$\psi(\gamma_1,\gamma_2,\tau)=\overline{\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(xk_n\cos\theta_n+yk_n\sin\theta_n-\sigma_n t+\varepsilon)}$$

$$\overline{\times\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos\{(x+\gamma_1)k_m\cos\theta_m+(y+\gamma_2)k_m\sin\theta_m-\sigma_m(t+\tau)+\varepsilon_m\}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{2}\cos(\gamma_1k_n\cos\theta_n+\gamma_2k_n\sin\theta_n-\sigma_n\tau) \tag{19}$$

$k\cos\theta=k_1$, $k\sin\theta=k_2$ とおき $\frac{a_n^2}{2}$ が2次元のスペクトルムとして $E(k_1,k_2)\,dk_1dk_2$ で表わしうることに注目すれば

$$\psi(\gamma_1,\gamma_2,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E(k_1,k_2)\cos(k_1\gamma_1+k_2\gamma_2-\sigma\tau)dk_1dk_2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E(k_1,k_2)\{\cos(k_1\gamma_1+k_2\gamma_2)\cos\sigma\tau+\sin(k_1\gamma_1+k_2\gamma_2)\sin\sigma\tau\}dk_1dk_2 \tag{20}$$

$E(k_1,k_2)$ は $\boldsymbol{k}(k_1,k_2)$ につき偶関数であり $\tau=0$ の時, (20) 式は $E(k_1,k_2)$ の cosine 変換となり

$$\psi(\gamma_1,\gamma_2,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E(k_1,k_2)\cos(k_1\gamma_1+k_2\gamma_2)\,dk_1dk_2 \tag{21}$$

$$E(k_1,k_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\gamma_1,\gamma_2,0)\cos(k_1\gamma_1+k_2\gamma_2)d\gamma_1d\gamma_2 \tag{22}$$

$\tau\neq0$ の時には (20) 式には $E(k_1,k_2)\sin\sigma\tau$ が含まれる。これは k_1, k_2 につき奇関数である。$(-)E(k_1,k_2)\times\sin\sigma\tau=E(-k_1,-k_2)\sin(-\sigma)\tau$ であり, k_1,k_2,σ における $E(k_1,k_2)$ に対応するものは, 波の進行方向を考えれば, $-k_1$, $-k_2$, $-\sigma$ における $E(-k_1,-k_2)$ でなれけばならぬからである*。

そこで, いますこし具体的な表現方法をとることとする。筆者 (1964) が先に示した方法では, 波が逆方向に進む波を含まない時 (すなわち x 軸 (>0) を中心として, $\pm\frac{\pi}{2}$ の範囲内に進行する波を取り扱う時), deep water では

---

* これは1つの考え方である。$E(k_1,k_2)$ を偶関数及び奇関数からなるものとし, σ の符号を変じないで取り扱っていくことも可能である。(42), (52) 式参照。

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\phi(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k}}\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}t+\varepsilon(\boldsymbol{k})\}} \tag{23}$$

とおくことができる。ただし $\boldsymbol{c}$ は波の波速ベクトルであり，今の場合その方向は x 軸 (>0) から $\pm\frac{\pi}{2}$ の範囲内に含まれているものとする。したがって波数平面の k_1 軸を x 軸と一致させ，$\boldsymbol{k}(k_1, k_2)$ で k_1 が正の場合には sgn $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{c}) = +1$，$k_1$ が負の場合には sgn $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{c}) = -1$ ととっている。

逆方向に進む波を含む時は，これと同様に $\boldsymbol{c}$ の方向が $\boldsymbol{x}(x. y)$ 平面で第2，第3象限に向うものを考えればよい。したがって一般的表現としては

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k}}\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c}^{(+)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}t+\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{k})\}}$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k}}\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c}^{(-)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}t+\varepsilon^{(-)}\}} \tag{24}$$

とおくことができる。$\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})$ は波形についての進行波の2次元波数スペクトルムであり，$\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})$ は逆行波のそれである。そこで D. E. Cartwright と同じく相関関数を求めると

$$\overline{\eta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}, t+\tau)\eta^*(\boldsymbol{x}, t)}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(+)}(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c}^{(+)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}\tau\}}$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(-)}(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c}^{(-)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}\tau\}} \tag{25}$$

ここで $\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(-)}) = -\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})$ である。

(25) 式の逆変換を求めると

$$\phi^{(+)}(\boldsymbol{k}) e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c}^{(+)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}\tau\}} + \phi^{(-)}(\boldsymbol{k}) e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c}^{(-)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}\tau\}}$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\eta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}, t+\tau)\eta^*(\boldsymbol{x}, t)} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} \tag{26}$$

(26) 式の左辺を整理すると

$$\{\phi^{(+)}(\boldsymbol{k}) + \phi^{(-)}(\boldsymbol{k})\}\cos\{\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}\,\tau\} - i\{\phi^{(+)}(\boldsymbol{k}) - \phi^{(-)}(\boldsymbol{k})\}$$
$$\times \sin\{\mathrm{sgn}\,(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}\,\tau\} \tag{27}$$

となる。これを Co—iQu とおき，Co を Co-spectrum, Qu を Quadrature-spectrum と呼ぶ。前者は $\boldsymbol{k}$ につき偶関数であり，後者は $\boldsymbol{k}$ につき奇関数である。(26)式の変換は2次元の波数 $\boldsymbol{k}$ についてのものである。

いま，(26)，(27) 式で $\tau = 0$ とおけば

$$\phi^{(+)}(\boldsymbol{k}) + \phi^{(-)}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\eta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}, t)\eta^*(\boldsymbol{x}, t)}\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \overline{\eta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}, t)\eta^*(\boldsymbol{x}, t)}\cos\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{r} \tag{28}$$

これによれば (22) 式の $E(k_1, k_2)$ は進行波に関するスペクトルムと，逆行波に関するスペクトルムとの和となっており，もし $\phi^{(-)}(\boldsymbol{k}) = 0$ すなわち逆行波がない時は $\tau = 0$ の場合だけでスペクトルムを決定できることは D. E. Cartwright (1962) のいうとおりである。

次に (26)，(27) 式で $\tau = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}}$ の場合を考えて見よう。(26)，(27) 式のとおりにかくと

$$-i\,\{\phi^{(+)}(\boldsymbol{k}) - \phi^{(-)}(\boldsymbol{k})\}\sin\left\{\mathrm{sgn}\,(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})\frac{\pi}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\eta\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}, t+\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}}\right)\eta^*(\boldsymbol{x}, t)}\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} \tag{29}$$

これを整理すると

$$\{\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})-\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})\}\,\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \overline{\eta\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t+\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}}\right)\eta^*(\boldsymbol{x},t)}\,\sin\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r} \tag{30}$$

(30) 式の右辺は特定の $\boldsymbol{k}$ を与えれば計算することができる。(28), (30) 式を組み合わせて，たとえばベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向が第 1 象限，第 4 象限にある時は $(\mathrm{sgn}\,(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})=+1)$, (28) 式と (30) 式との和により $\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})$ を，差により $\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})$ を決定できる。

このようにして $\pi/2$ の位相差の時の相関関数を用いれば，進行波，逆行波両者のスペクトルム密度がわかることとなる。又 $\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}$ のかわりに $\sqrt{g|\boldsymbol{k}|\tanh|\boldsymbol{k}|h}$ を用いれば，水深 h の有限水深の場合に同様の計算を行ないうることは明らかである。

スペクトルム密度の決定は水位 η のかわりに，波による水の粒子速度を用いても行なうことができる。現実の問題としては波による水の粒子速度のみを広い範囲にわたってとらえることには相当の困難があるであろうが。

(24) 式の η に対応する速度ポテンシャル φ および x 方向の速度 u は

$$\varphi=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \sqrt{\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}}\;\frac{i\sqrt{g}}{\mathrm{sgn}\,(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})\sqrt{|\boldsymbol{k}|}}\;e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}}e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}t+\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{k})\}}e^{|\boldsymbol{k}|z}$$
$$+\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \sqrt{\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}}\;\frac{i\sqrt{g}}{\mathrm{sgn}\,(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(-)})\sqrt{|\boldsymbol{k}|}}\;e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}}e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(-)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}t+\varepsilon^{(-)}(\boldsymbol{k})\}}e^{|\boldsymbol{k}|z} \tag{31}$$

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \sqrt{\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}}\;\frac{\sqrt{g}}{\mathrm{sgn}\,(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})}\;\frac{k_1}{\sqrt{|\boldsymbol{k}|}}\;e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}}e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}t+\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{k})\}}e^{|\boldsymbol{k}|z}$$
$$+\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \sqrt{\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}}\;\frac{\sqrt{g}}{\mathrm{sgn}\,(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(-)})}\;\frac{k_1}{\sqrt{|\boldsymbol{k}|}}\;e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}}e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(-)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}t+\varepsilon^{(-)}(\boldsymbol{k})\}}e^{|\boldsymbol{k}|z} \tag{32}$$

$u(\boldsymbol{x},z,t)$ と $u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},z,t+\tau)$ との相関関数を求めると

$$\overline{u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},z,t+\tau)u^*(\boldsymbol{x},z,t)}=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \phi^{(+)}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}\,\frac{gk_1^2}{|\boldsymbol{k}|}e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}}e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}\tau\}}e^{2|\boldsymbol{k}|z}$$
$$+\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \phi^{(-)}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}\,\frac{gk_1^2}{|\boldsymbol{k}|}e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}}e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(-)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}\tau\}}e^{2|\boldsymbol{k}|z} \tag{33}$$

逆変換をとると

$$\frac{gk_1^2}{|\boldsymbol{k}|}e^{2|\boldsymbol{k}|z}\left[\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}\,\tau\}}+\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})e^{i\{\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}\,\tau\}}\right]$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \overline{u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},z,t+\tau)u^*(\boldsymbol{x},z,t)}\,e^{-i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r} \tag{34}$$

これは速度 u についても，(26) 式と同様の関係が成立することを示している。

したがって $\tau=0$ で

$$\{\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})+\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})\}\,\frac{gk_1^2}{|\boldsymbol{k}|}e^{2|\boldsymbol{k}|z}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \overline{u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},z,t)u^*(\boldsymbol{x},z,t)}\,\cos\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r} \tag{35}$$

又 $\tau=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}}$ で

$$\{\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})-\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})\}\,\mathrm{sgn}\,(\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}^{(+)})\frac{gk_1^2}{|\boldsymbol{k}|}e^{2|\boldsymbol{k}|z}$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \overline{u\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},z,t+\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}}\right)u^*(\boldsymbol{x},z,t)}\,\sin\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r} \tag{36}$$

(35), (36)式を $\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})$, $\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})$ の決定に用いてもよい。

これまでの計算では $\tau=0$, $\tau=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}}$ (deep water として) との相関関数を用いたが

$\tau = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}}$ における (30) 式のかわりに $\overline{\eta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)\left\{\frac{\partial\eta(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right\}^*}$ を用いることもできる。

(24) 式より

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}}\;e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}}\{-i\,\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})\}e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}t+\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{k})\}}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}}\;e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}}\{-i\,\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(-)})\}e^{i\{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(-)})\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}t+\varepsilon^{(-)}(\boldsymbol{k})\}} \tag{37}$$

$$\overline{\eta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)\left\{\frac{\partial\eta(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right\}^*} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}}i\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}^{(+)})$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}}i\mathrm{sgn}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(-)}) \tag{38}$$

したがって,

$$\{\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})-\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})\}i\mathrm{sgn}\,(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\eta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)\left\{\frac{\partial\eta(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right\}^*}e^{-i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r} \tag{39}$$

すなわち

$$\{\phi^{(+)}(\boldsymbol{k})-\phi^{(-)}(\boldsymbol{k})\}(-\mathrm{sgn}\,(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}^{(+)})) = \frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\overline{\eta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)\left\{\frac{\partial\eta(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right\}^*}\sin\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r} \tag{40}$$

(40) 式が (30) 式のかわりに用いうることはいうまでもない。

以上により波形の2次元スペトルムは進行波，逆行波ともに決定されることとなるが，この方法では広い水域にわたって η の同時記録を必要とする。ことに沿岸の水域では広い範囲にわたって homogeneous な状態をうることは困難である。これに対し N. F. Barber (W. E. Cummins (1959)) にもとづく D. E. Cartwright (1962) の次の方法は限られた点における波形の時間記録を用いて directional spectrum を求める1方法である。

$\boldsymbol{x}(x, y)$ において (0,0) と $(d,0)$ とに直接波高をはかる波高計をおく。これにより次の2種類の記録が得られる。

$$\left.\begin{aligned} l(t) &= \eta(0,0,t) = \sum_n\sum_\theta a_n\cos(\sigma_n t-\varepsilon_n) \\ m(t) &= \eta(d,0,t) = \sum_n\sum_\theta a_n\cos(\sigma_n t-dk_n\cos\theta_n-\varepsilon_n) \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

ただし θ は $0\sim2\pi$, n は $0\sim\infty$ の間の sum up とする。$\eta(0,0,t)$ と $\eta(d,0,t+\tau)$ との相関関数を求めると

$$\begin{aligned}
&\overline{\eta(d,0,t+\tau)\eta^*(0,0,t)} \\
&=\sum_n\sum_\theta \overline{a_n^2\cos(\sigma_n t-\varepsilon_n)\cos(\sigma_n t+\sigma_n\tau-dk_n\cos\theta_n-\varepsilon_n)} \\
&=\sum_n\sum_\theta \frac{a_n^2}{2}\cos(\sigma_n\tau-dk_n\cos\theta_n) \\
&=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}E_k(\theta)\cos(\sigma\tau-dk\cos\theta)\frac{dk}{d\sigma}d\theta d\sigma \\
&=\int_0^\infty\left\{\int_0^{2\pi}E_k(\theta)\frac{dk}{d\sigma}\cos(dk\cos\theta)d\theta\right\}\cos\sigma\tau d\sigma \\
&+\int_0^\infty\left\{\int_0^{2\pi}E_k(\theta)\frac{dk}{d\sigma}\sin(dk\cos\theta)d\theta\right\}\sin\sigma\tau d\sigma
\end{aligned} \tag{42}$$

ここで { } で示される2項が何を表わすかを調べる。

いま，$\overline{\eta(d,0,t+\tau)\eta^*(0,0,t)}$ の周波数についての変換をとり，そのスペクトルムを求めると

$$\overline{Co_{lm}}-i\overline{Qu_{lm}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\eta(d,o,t+\tau)\eta^*(0,0,t)}\,e^{-i\sigma\tau}d\tau \tag{43}$$

逆変換をとれば

$$\overline{\eta(d,0,t+\tau)\eta^*(0,0,t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \{\overline{Co_{lm}} - i\overline{Qu_{lm}}\} e^{i\sigma\tau} d\sigma \tag{44}$$

$\overline{Co_{lm}}$ は σ につき偶関数，$\overline{Qu_{lm}}$ は同じく奇関数であるから，(44) 式は

$$\begin{aligned}\overline{\eta(d,0,t+\tau)\eta^*(0,0,t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{Co_{lm}} \cos\sigma\tau d\sigma + \int_{-\infty}^{\infty} \overline{Qu_{lm}} \sin\sigma\tau d\sigma \\ &= \int_0^{\infty} 2\,\overline{Co_{lm}} \cos\sigma\tau d\sigma + \int_0^{\infty} 2\,\overline{Qu_{lm}} \sin\sigma\tau d\sigma\end{aligned} \tag{45}$$

(42) 式と (45) 式とは比較することにより

$$\int_0^{2\pi} E_k(\theta) \frac{dk}{d\sigma} \cos(dk\cos\theta) d\theta = 2\overline{Co_{lm}} \tag{46}$$

$$\int_0^{2\pi} E_k(\theta) \frac{dk}{d\sigma} \sin(dk\cos\theta) d\theta = 2\overline{Qu_{lm}} \tag{47}$$

故に

$$2\,\overline{Co_{lm}}(\sigma) + i2\overline{Qu_{lm}}(\sigma) = \int_0^{2\pi} e^{idk\cos\theta} E_k(\theta) \frac{dk}{d\sigma} d\theta \tag{48}$$

ここで

$$e^{idk\cos\theta} = J_0(kd) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kd) \cos n\theta$$

と $E_k(\theta)$ の Fourier 展開

$$E_k(\theta) = \frac{1}{2} A_0(k) + \sum_{\gamma=1}^{\infty} (A_\gamma(k)\cos\gamma\theta + B_\gamma(k)\sin\gamma\theta) \tag{49}$$

とを (48) 式に代入し計算すると

$$\{2\overline{Co_{lm}}(\sigma) + i2\overline{Qu_{lm}}(\sigma)\} \frac{d\sigma}{dk} = \pi A_0(k) J_0(kd) + 2\pi \sum_{\gamma=1}^{\infty} i^\gamma A_\gamma(k) J_\gamma(kd) \tag{50}$$

ただし $\sigma = \sqrt{gk\tanh kh}$

(50) 式の左辺の $\overline{Co_{lm}}(\sigma)$ と $\overline{Qu_{lm}}(\sigma)$ は (43) 式を用いて

$$\left.\begin{aligned}\overline{Co_{lm}}(\sigma) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \{\overline{\eta(d,0,t+\tau)\eta(0,0,t)} + \overline{\eta(d,0,t-\tau)\eta(0,0,t)}\} \cos\sigma\tau d\tau \\ \overline{Qu_{lm}}(\sigma) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \{\overline{\eta(d,0,t+\tau)\eta(0,0,t)} - \overline{\eta(d,0,t-\tau)\eta(0,0,t)}\} \sin\sigma\tau d\tau\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

により求めることができる。

(50) 式は $d=0$ では $2\overline{Co_{lm}}(\sigma) = \pi A_0(k)$ となり，$A_0(k)$ は決定される。$A_1(k)$，$A_2(k)$，……の決定には数個の d を用い，(50) 式を連立させて求める。（波高計を x 軸上 0, d, $4d$, $6d$ の 4 ケ所におけば，6 個の連立方程式を得ることができる)。したがって $E_k(\theta)$ が $\theta=0$ (x 軸) につき対称であり，$B_\gamma(k)=0$ の時，例えば単一な方向の風により波が生じている時，波高計がその波の進行の主方向に並んでいるような場合には，この方法で $E_k(\theta)$ が決定される。一般の場合には，$B_1(k)$，$B_3(k)$，… の決定のためには y 方向にも波高計を並べる必要があり，さらに $B_2(k)$，$B_4(k)$，… を得るためには y 方向の水面こう配をはかる必要がある。こうした点からいえばこの方向も簡単ではなく，ことに沿岸の水域では不便である。結局 directional spectrum の概要を求めるには，次の M. S. Longuet-Higgins，D. E. Cartwright 及び N. D. Smith (1963) により発表されたものが都合がよいと思われる。

4. Directional spectrum についての問題（続）

M. S. Longuet-Higgins 等 (1963) により発表された方法は，水面の 1 点において，水位と互いに直角な 2 方向の水面こう配とを連続して測定し directional spectrum の概要を知るものである。彼等はブイの中にこれ

らの計測装置を設け，風波のある水面にそれを浮べて，波形スペクトルムを求め，さらに気圧変動を測定して，風の波に対するエネルギー供給について調べている。ここには directional spectrum の求め方について述べる。

η_1 を水位，η_2 を x 方向の水位こう配，η_3 を y 方向の水位こう配とする。η_1 をつぎのようにおく。

$$\eta_1 = \sum\sum|d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|\cos(\boldsymbol{k}.\ \boldsymbol{x} - \sigma t + \varepsilon) = \boldsymbol{R}\iint e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}-\sigma t)}d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}) \tag{52}$$

ただし $d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}) = |d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|e^{i\varepsilon}$ (53)

$$\sigma^2 = gk\tanh kh \tag{54}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(x, y),\ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}(k\cos\phi,\ k\sin\phi) \tag{55}$$

ϕ は波数 $\boldsymbol{k}$ の波が x 軸となす角である。(52)～(55) 式のようにおき，$\sigma > 0$ とすると，(52) 式の表現法が進行波，逆行波いずれをも含んでいることは明らかである。よって

$$\eta_2 = \frac{\partial\eta_1}{\partial x} = \sum\sum|d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|k\cos\phi(-1)\sin(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} - \sigma t+\varepsilon)$$

$$= \boldsymbol{R}\iint id\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}-\sigma t)}k\cos\phi \tag{56}$$

$$\eta_3 = \frac{\partial\eta_1}{\partial y} = \sum\sum|d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|k\sin\phi(-1)\sin(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} - \sigma t+\varepsilon)$$

$$= R\iint id\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}-\sigma t)}k\sin\phi \tag{57}$$

$$\overline{\eta_1{}^2} = \overline{\sum\sum|d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}')|\cos(\boldsymbol{k}'.\boldsymbol{x}' - \sigma' t + \varepsilon') \times \sum\sum|d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|\cos(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} - \sigma t + \varepsilon)}$$

$$= \sum\sum\frac{\overline{|d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|^2}}{2} = \sum\sum\frac{\overline{d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})^*}}{2} = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}E(\sigma,\phi)d\sigma d\phi \tag{58}$$

故に

$$E(\sigma,\phi) = \frac{\frac{1}{2}\overline{d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})^*}}{d\sigma d\phi} \tag{59}$$

(59) 式の関係を用いれば

$$\overline{\eta_2{}^2} = \sum\sum\frac{|d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|^2}{2}k^2\cos^2\phi = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}E(\sigma,\phi)k^2\cos^2\phi d\sigma d\phi \tag{60}$$

$$\overline{\eta_3{}^2} = \sum\sum\frac{|d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|^2}{2}k^2\sin^2\phi = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}E(\sigma,\phi)k^2\sin^2\phi d\sigma d\phi \tag{61}$$

(58)，(60)，(61) 式において

$$\left.\begin{aligned} C_{11} &= \int_0^{2\pi}E(\sigma,\phi)d\phi \\ C_{22} &= \int_0^{2\pi}E(\sigma,\phi)k^2\cos^2\phi d\phi \\ C_{33} &= \int_0^{2\pi}E(\sigma,\phi)k^2\sin^2\phi d\phi \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

とおく。C_{11}，C_{22}，C_{33} はそれぞれ η_1，η_2，η_3 の周波数スペクトルムの強度として求められる。

次に $\eta_1(t)$ と $\eta_2(t + \tau)$ との相互相関を調べると

$$\overline{\eta_1(t)\eta_2(t + \tau)}$$

$$= \overline{\sum\sum|d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}')|\cos(\boldsymbol{k}'.\boldsymbol{x} - \sigma' t + \varepsilon)}$$

$$\overline{\times\sum\sum|d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|k\cos\phi(-1)\sin(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} - \sigma(t + \tau)+\varepsilon)} \tag{63}$$

ところで $\sum\sum|d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|k\cos\phi(-1)\sin(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{k} - \sigma(t + \tau) + \varepsilon)$

$$= \sum\sum|d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|k\cos\phi(-1)\{\sin(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}-\sigma t+\varepsilon)\cos\sigma\tau - \cos(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}-\sigma t+\varepsilon)\sin\sigma\tau\}$$

であるから，

$$\overline{\eta_1(t)\eta_2(t + \tau)} = \sum\sum\frac{\overline{|d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|^2}}{2}\overline{k\cos\phi\sin\sigma\tau}$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi)\,k\cos\phi\sin\sigma\tau\, d\sigma d\phi \tag{64}$$

又 $\overline{\eta_2(t+\tau)\eta_1{}^*(t)}$ の周波数についての変換は

$$Co(\sigma) - iQu(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\eta_2(t+\tau)\eta_1{}^*(t)}\, e^{-i\sigma\tau}d\tau \tag{65}$$

その逆変換は

$$\overline{\eta_2(t+\tau)\eta_1{}^*(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \{Co(\sigma) - iQu(\sigma)\} e^{i\sigma\tau} d\sigma$$

$$= \int_0^{\infty} 2Co(\sigma)\cos\sigma\tau d\sigma + \int_0^{\infty} 2Qu(\sigma)\sin\sigma\tau d\sigma \tag{66}$$

(64), (66) 式から

$$2Qu(\sigma) = \int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi)\,k\cos\phi d\phi \tag{67}$$

これを　$Q_{12} = \int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi)\,k\cos\phi d\phi$　とおく。 (68)

これから Q_{12} は $\overline{\eta_1(t)\eta_2(t+\tau)}$ の周波数についての Quadrature spectrum を求めればよいことがわかる。同様にして $\eta_1(t)$ と $\eta_3(t+\tau)$ とから

$$Q_{13} = \int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi)\,k\sin\phi d\phi \tag{69}$$

又 (56), (57) 式を用いて $\overline{\eta_2(t)\eta_3(t)}$ から

$$C_{23} = \int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi)\,k^2\sin\phi\cos\phi d\phi \tag{70}$$

このようにして， 各種の周波数についての spectrum の強度 C_{11}, C_{22}, C_{33}, Q_{12}, Q_{13}, C_{23} を求め， これを directional spectrum と結びつけていく。

$E(\sigma,\phi)$ の Fourier 展開は

$$E(\sigma,\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n(\sigma)}{2} e^{-in\phi}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [\boldsymbol{R}\{\alpha_n(\sigma)\}\cos n\phi + \boldsymbol{I}\{\alpha_n(\sigma)\}\sin n\phi] \tag{71}$$

$$\boldsymbol{R}\{\alpha_0(\sigma)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi)d\phi \tag{72}$$

$$\boldsymbol{R}\{\alpha_n(\sigma)\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi)\cos n\phi d\phi \tag{73}$$

$$\boldsymbol{I}\{\alpha_n(\sigma)\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi)\sin n\phi d\phi \tag{74}$$

故に

$$\left.\begin{aligned}
n=0:\ \boldsymbol{R}\{\alpha_0(\sigma)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi)d\phi = \frac{C_{11}}{2\pi}\\
n=1:\ \boldsymbol{R}\{\alpha_1(\sigma)\} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi)\cos\phi d\phi = \frac{Q_{12}}{\pi k}\\
\boldsymbol{I}\{\alpha_1(\sigma)\} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi)\sin\phi d\phi = \frac{Q_{13}}{\pi k}\\
n=2:\ \boldsymbol{R}\{\alpha_2(\sigma)\} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi)\,(2\cos^2\phi - 1)d\phi = \frac{1}{\pi}\frac{C_{22}}{k^2} - \frac{C_{11}}{\pi}\\
\boldsymbol{I}\{\alpha_2(\sigma)\} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi)\,2\sin\phi\cos\phi d\phi = \frac{2C_{23}}{\pi k^2}
\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

以上のように $E(\sigma,\phi)$ の Fourier 展開における $n=2$ の項迄正確に求めることができる。 このようにして

決定された directional spectrum を $E_1(\sigma,\phi)$ とおくと

$$\begin{aligned}E_1(\sigma,\phi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi')d\phi' + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi')\cos\phi' d\phi' \cos\phi \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi')\sin\phi' d\phi' \sin\phi + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi')(2\cos^2\phi' - 1)d\phi' \cos 2\phi \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi') 2\sin\phi' \cos\phi' d\phi' \sin 2\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E(\sigma,\phi')d\phi' [1 + 2\cos(\phi'-\phi) + 2\cos 2(\phi'-\phi)]\end{aligned} \tag{76}$$

(76) 式は得られたスペクトルム $E_1(\sigma,\phi)$ が真のスペクトルム $E(\sigma,\phi')$ に $1+2\cos(\phi'-\phi)+2\cos 2(\phi'-\phi)$ の大いさの weight をかけて ϕ' につき平均したものであることを示している。ところがこの weight は負の値になることができる。したがって $E_1(\sigma,\phi)$ も負となり得る可能性がある。これを防ぐためには，(71) 式で $n=3, 4$ の高周波の項迄求めればよいわけであるが，それは容易ではない。したがって M. S. Longuet-Higgins 等 (1963) は (75) 式において $n=0$ の項はそのまま，$n=1$ の項には weight $\frac{2}{3}$ をかけ，$n=2$ の項には weight $\frac{1}{6}$ をかけ，高周波項の影響をおとしていくことを提案している。この場合には (76) 式の weight に相当するものは $\frac{8}{3}\cos^4\frac{1}{2}(\phi'-\phi)$ となり，負の値をとらず $|\phi'-\phi|$ の増加とともに減少していく*。

5. 1次元スペクトルムの2次干渉

表面波の表面条件の非線型性のために生ずる2次，3次，……の干渉はスペクトルムを構成する一般の波の場合に勿論存在し，殊に3次干渉においては新らしい自由波の発生が誘発される (O. M. Phillips (1960), K. Hasselmann (1962, 1963))。その計算を正確に追うことは相当の紙数を要するためここでは省略する。1次元の波の2次干渉については，L. J. Tick (1959, 1963) の計算がある。deep water の場合については詳細の計算が発表されているが (1959)，水深有限の場合については未発表となっており，結果が示されているだけである (1963)。ここではその場合の計算を行なう。こうした計算では1次波は互いに独立であると仮定する。これは O. M. Phillips, K. Hasselmann の場合も同様である。現在迄の観測結果からは線型の1次波が互いに独立であると仮定することはそれ程無理のないことであると思われている。

x 軸を波の進行方向に1次波の平均水面においてとる。波は x 軸方向の進行波のみからなるものとし，逆行波を含めない。L. J. Tick と同じく z 軸を x 軸に垂直下向きにとる。$z=d$ は水平な底面とする。

そうすると $\nabla^2\varphi=0$ と底の境界条件とより，速度ポテンシャル $\varphi\left(u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ は

$$\varphi(x,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x+\beta t)} d\xi_1(\alpha,\beta)\cosh\alpha(z-d) \tag{77}$$

このような φ のうち，1次の表面条件

$$\varphi_{tt} - g\varphi_z = 0 \qquad (z=0 \text{ にて})$$

を満足するものを $\varphi^{(1)}$ とする。(77) 式を (78) 式に代入して，$\varphi^{(1)}$ については

$$\beta^2 = g\alpha\tanh\alpha d \tag{78}$$

が成立する。慣用の記号に従って $\alpha=k$, $\beta=\omega$ とする。したがって

---

* このような directional spectrum の決定法には，波による水粒子の速度を用いても行なうことができる (Y. Nagata (1964) 参照)。

$$\varphi^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(|k|x+\omega t)}d\xi_1(\omega)\cosh k(z-d)+\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(-|k|x+\omega t)}d\xi_1(\omega)\cosh k(z-d)$$
$$=\int_{-\infty}^{0}e^{i(|k|x+\omega t)}d\xi_1(\omega)\cosh k(z-d)+\int_{0}^{\infty}e^{i(|k|x+\omega t)}d\xi_1(\omega)\cosh k(z-d)$$
$$+\int_{-\infty}^{0}e^{i(-|k|x+\omega t)}d\xi_1(\omega)\cosh k(z-d)+\int_{0}^{\infty}e^{i(-|k|x+\omega t)}d\xi_1(\omega)\cosh k(z-d) \tag{79}$$

上式の第1項，第4項が進行波を示し，第2項，第3項が逆行波を示すことは容易にわかる。故に第1項，第4項をとり

$$\varphi^{(1)}=\int_{-\infty}^{0}e^{i(|k|x+\omega t)}d\xi_1(\omega)\cosh k(z-d)+\int_{0}^{\infty}e^{i(-|k|x+\omega t)}d\xi_1(\omega)\cosh k(z-d)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(-\mathrm{sgn}(\omega)|k|x+\omega t)}d\xi_1(\omega)\cosh k(z-d) \tag{80}$$

実数値定常過程の条件は

$$e^{-i\mathrm{sgn}(\omega)|k|}d\xi_1(\omega)\cosh k(z-d)$$
$$=\{e^{-i\mathrm{sgn}(-\omega)|k(-\omega)|}d\xi_1(-\omega)\cosh k(-\omega)(z-d)\}^*$$
$$=e^{-i\mathrm{sgn}(\omega)|k|}d\xi_1{}^*(-\omega)\cosh k(z-d) \tag{81}$$

故に $d\xi_1(\omega)=d\xi_1{}^*(-\omega)$ が満足されていればよい。

(78)，(80) 式より ω，k は互いに同符号でも，互いに異符号でもよいこととなる。今の場合同符号として計算していく。

1次波の表面条件

$$\eta_t{}^{(1)}=\phi_z{}^{(1)} \quad (z=0 \text{ にて}) \tag{82}$$

を用い，$\eta^{(1)}$ は

$$\eta^{(1)}=i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega}e^{i[-\mathrm{sgn}(\omega)|k|x+\omega t]}d\xi_1(\omega)\sinh kd\cdot k \tag{83}$$

$\dfrac{i}{\omega}d\xi_1(\omega)\sinh kd\cdot k=d\xi_2(\omega)$ とおき

$$\varphi^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i[-\mathrm{sgn}(\omega)|k|x+\omega t]}d\xi_2(\omega)\frac{(-1)i\omega\cosh k(z-d)}{\sinh kd\cdot k} \tag{84}$$

$$\eta^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i[-\mathrm{sgn}(\omega)|k|x+\omega t]}d\xi_2(\omega) \tag{85}$$

2次の速度ポテンシャル $\varphi^{(2)}$ は $\varphi^{(1)}$ と次の関係により結ばれる。

$$\varphi_{tt}{}^{(2)}-g\varphi_z{}^{(2)}=\varphi_{zz}{}^{(1)}\varphi_t{}^{(1)}-2\varphi_x{}^{(1)}\varphi_{tx}{}^{(1)}-\varphi_z{}^{(1)}\varphi_{zt}{}^{(1)}-\frac{1}{g}(\varphi_{tz}{}^{(1)}\varphi_{tt}{}^{(1)}+\varphi_{ttz}{}^{(1)}\varphi_t{}^{(1)})$$
$$z=0 \text{ にて} \tag{86}$$

これはたとえば浜田 (1964) の (7)，(8) 式において z 軸を垂直下向きとしてみちびけばよい。

(86) 式の右辺を $z=0$ で計算していく。

$$\varphi_{zz}{}^{(1)}\varphi_t{}^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i[-(k+k')x+(\omega+\omega')t]}d\xi_2(\omega)d\xi_2(\omega')\times\frac{(-1)i\omega\omega'^2k\cosh kd\cosh k'd}{\sinh kd\sinh k'd\cdot k'} \tag{87}$$

$$\varphi_x{}^{(1)}\varphi_{tx}{}^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}i\omega\omega'^2e^{i[-(k+k')x+(\omega+\omega')t]}d\xi_2(\omega)d\xi_2(\omega')\times\frac{\cosh kd\cosh k'd}{\sinh kd\sinh k'd} \tag{88}$$

$$\varphi_z{}^{(1)}\varphi_{zt}{}^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(-1)i\omega\omega'^2e^{i[-(k+k')x+(\omega+\omega')t]}d\xi_2(\omega)d\xi_2(\omega') \tag{89}$$

$$\varphi_{tz}{}^{(1)}\varphi_{tt}{}^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(-1)\omega^2i\omega'^3e^{i[-(k+k')x+(\omega+\omega')t]}d\xi_2(\omega)d\xi_2(\omega')\times\frac{\cosh k'd}{\sinh k'd\cdot k'} \tag{90}$$

$$\varphi_{ttz}{}^{(1)}\varphi_t{}^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(-1)i\omega'^2\omega^3e^{i[-(k+k')x+(\omega+\omega')t]}d\xi_2(\omega)d\xi_2(\omega')\times\frac{\cosh k'd}{\sinh k'd\cdot k'} \tag{91}$$

よって

$$(\varphi_{tt}{}^{(2)} - g\varphi_z{}^{(2)})_{z=0} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega\omega'^2 d\xi_2(\omega)d\xi_2(\omega')e^{i[-(k+k')x+(\omega+\omega')t]}$$
$$\times\left[\frac{-k\coth kd\coth k'd}{k'} - 2\coth kd\coth k'd + 1 + \frac{\omega(\omega'+\omega)}{\omega'^2}\right] \qquad (92)$$

これから $\varphi^{(2)}$ を求めると

$$\varphi^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-(k+k')x+(\omega+\omega')t]}d\xi_2(\omega)d\xi_2(\omega')$$
$$\times\frac{i\omega\omega'^2\left[-\dfrac{k\coth kd\coth k'd}{k'} - 2\coth kd\coth k'd + 1 + \dfrac{\omega(\omega'+\omega)}{\omega'^2}\right]}{-(\omega+\omega')^2\cosh(k+k')d + g(k+k')\sinh(k+k')d}\cosh(k+k')(z-d)$$
$$+\ \mathrm{Const.}t \qquad (93)$$

(93) 式の分母が 0 となれば，2 次近似で自由波が誘発されることとなるが，これは 0 にならない。2 次元の問題では $k+k'$ が $|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'|$ のかたちになるが，同様に 2 次近似では自由波が生じないことが示される。

次に

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{g}\varphi_t{}^{(2)} + \frac{1}{2g}\varphi_z{}^{(1)}\varphi_z{}^{(1)} + \frac{1}{2g}\varphi_x{}^{(1)}\varphi_x{}^{(1)} + \frac{1}{g^2}\varphi_{tz}{}^{(1)}\varphi_t{}^{(1)} \qquad (94)$$

を用いて，$\eta^{(2)}$ を決定する。(93)，(94) 式より明かなように，$\varphi^{(2)}$ における Const. t は $\eta^{(2)}$ の常数項に関係し，波形スペクトルムでは波数 zero の点に現われ，直接スペクトルムの具体的形状には関係しないから，Const. t を無視して計算を進める。(94) 式を計算すれば

$$\eta^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-(k+k')x+(\omega+\omega')t]}\left[\frac{gkk'}{2\omega\omega'} - \frac{\omega\omega'}{2g} - \frac{\omega^2}{g}\right.$$
$$\left.+\frac{(\omega+\omega')\left\{\dfrac{gk^2}{\omega} + \dfrac{2kk'g}{\omega} - \dfrac{\omega'^2\omega}{g} - (\omega'+\omega)\dfrac{\omega^2}{g}\right\}}{g(k+k')\tanh(k+k')d - (\omega+\omega')^2}\right]d\xi_2(\omega)d\xi_2(\omega') \qquad (95)$$

これを数値計算に便利なようにあらためると

$$\eta^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-(k+k')x+(\omega+\omega')t]}\left[\frac{gkk'}{2\omega\omega'} + \frac{\omega\omega'}{2g} - \frac{(\omega+\omega')^2}{2g}\right.$$
$$\left.+\frac{(\omega+\omega')^2\left\{\dfrac{1}{2}\dfrac{g\omega'k^2 + g\omega k'^2}{\omega\omega'(\omega+\omega')} + \dfrac{gkk'}{\omega\omega'} + \dfrac{\omega\omega'}{2g} - \dfrac{(\omega+\omega')^2}{2g}\right\}}{g|k+k'|\tanh|k+k'|d - (\omega+\omega')^2}\right]d\xi_2(\omega)d\xi_2(\omega') \qquad (96)$$

又

$$\overline{\eta(t+\tau)\eta^*(t)} = \overline{\{\eta_1(t+\tau) + \eta_2(t+\tau)\}\{\eta_1{}^*(t) + \eta_2{}^*(t)\}}$$
$$= \overline{\eta_1(t+\tau)\eta_1{}^*(t)} + \overline{\eta_1(t+\tau)\eta_2{}^*(t)} + \overline{\eta_2(t+\tau)\eta_1{}^*(t)} + \overline{\eta_2(t+\tau)\eta_2{}^*(t)} \qquad (97)$$

となるが，1 次波が互いに独立しているため，(97) 式の第 2 項，第 3 項は $\overline{d\xi_2(\omega)d\xi_2(\omega')d\xi_2(\omega'')} = 0$ となる。すなわち

$$\overline{\eta(t+\tau)\eta^*(t)} = R^{(1)}(\tau) + R^{(2)}(\tau) \qquad (98)$$

よって $R^{(2)}(\tau)$ の変換をとれば 2 次のスペクトルムが求められる。

計算の結果は $\omega + \omega' = \lambda$ として

$$S^{(2)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega,\lambda)S^{(1)}(\lambda-\omega)S^{(1)}(\omega)d\omega \qquad (99)$$

$$K(\omega,\lambda) = \frac{1}{4}\left[\frac{gk\,\underline{k(\lambda-\omega)}}{\omega(\lambda-\omega)} + \frac{\omega(\lambda-\omega)}{g} - \frac{\lambda^2}{g}\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda^2\left\{\dfrac{g(\lambda-\omega)k^2 + g\omega\underline{k^2(\lambda-\omega)}}{\omega(\lambda-\omega)\lambda} + \dfrac{2gk\,\underline{k(\lambda-\omega)}}{\omega(\lambda-\omega)} + \dfrac{\omega(\lambda-\omega)}{g} - \dfrac{\lambda^2}{g}\right\}}{g|k+\underline{k(\lambda-\omega)}|\tanh|k+\underline{k(\lambda-\omega)}|d}\right]^2 \qquad (100)$$

ただし

$$S^{(1)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R^{(1)}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{101}$$

この計算により得られる2次スペクトルムを実験によって得られる2次スペクトルムに比較する時，かなりよい一致が示される。2次元の計算においても，同様に1次スペクトルムから2次スペクトルムを求めることができる。

次に1次元の波群のモーメンタム輸送を考えてみる。波のみによるモーメンタム輸送を考え

$$M = \frac{1}{T}\int_0^T\int_{-h}^{\eta} udzdt = \frac{1}{T}\int_0^T\int_{-h}^{0}(u_1+u_2)dzdt + \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^{\eta} u_1dzdt \tag{102}$$

上式の第1項が0となることは明かである。第2項について考える。第2項で

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \sum a_i\cos\{k_i(x-c_it)+\varepsilon_i\} \\ u_1 &= \sum a_ik_ic_i\frac{\cosh k_i(h+z)}{\sinh k_ih}\cos\{k_i(x-c_it)+\varepsilon_i\} \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

とあらわす。$z=0$ の近傍を考えているから

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum a_ik_ic_i\frac{\cosh k_ih\cosh k_iz+\sinh k_ih\sinh k_iz}{\sinh k_ih}\cos\{k_i(x-c_it)+\varepsilon_i\} \\ &= \sum a_ik_ic_i\frac{\cosh k_ih+k_iz\sinh k_ih}{\sinh k_ih}\cos\{k_i(x-c_it)+\varepsilon_i\} \end{aligned} \tag{104}$$

もし (102) 式の第2項の積分の上限が η でなく，一定値ならば (104) 式を用うべきであるが，上限 η が1次の微小量であるから，

$$u_1 = \sum a_ik_ic_i\coth k_ih\cos\{k_i(x-c_it)+\varepsilon_i\} \tag{105}$$

を用いればよい。

$$\begin{aligned} \int_0^{\eta} u_1dz &= \left|\sum a_ik_ic_i\coth k_ih\cdot z\cos\{k_i(x-c_it)+\varepsilon_i\}\right|_0^{\eta} \\ &= \sum_i a_ik_ic_i\coth k_ih\cdot\cos\{k_i(x-c_it)+\varepsilon_i\}\cdot\sum_j a_j\cos\{k_j(x-c_jt)+\varepsilon_j\} \end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^{\eta} u_1dzdt &= \overline{\sum_i a_i^2k_ic_i\coth k_ih\cos^2\{k_i(x-c_it)+\varepsilon_i\}} \\ &= \sum_i a_i^2k_ic_i\coth k_ih\cdot\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{107}$$

$\coth k_ih = \dfrac{g}{k_ic_i^2}$ であるから

$$\sum_i M_i = \sum_i a_i^2\frac{g}{c_i}\frac{1}{2} = \sum_i\frac{E_i}{c_i} \tag{108}$$

これを連続スペクトル形式であらわせば $M_i = F(k)dk,\ E_i = E(k)dk$ として

$$M = \int_0^{\infty} F(k)dk = \int_0^{\infty}\frac{E(k)}{C(k)}dk \tag{109}$$

すなわち波群の存在する場合も，単一波によるモーメンタム輸送の総和として表わせばよい。

2次元の場合，O. M. Phillips (1960) は

$$\boldsymbol{M} = \iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{k}}{n}E(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}, \qquad \frac{\boldsymbol{k}}{n} = \frac{1}{\boldsymbol{c}} \tag{110}$$

を導いている。

6. 波の発達，減衰に対する応用

波の発達，減衰をスペクトルムを組む波として取り扱う1方法を示す（浜田 (1963)）。ここに述べるものは

deep water の場合であるが，水深有限の場合にも同様にして取り扱い，水底の粘性による摩擦抵抗を計算中に入れることができる。しかし，この場合の粘性係数は水表面から底面迄一様（たとえば分子粘性）ととられており，粘性が場所的に変化する場合の正確な解は得られていない。H. Lamb (1932) の用いた解法を水表面において周期的な垂直応力とせん断応力がかかっている場合に拡張していく。z 軸はここでは垂直上向きとする。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u \tag{111}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 w \tag{112}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{113}$$

H. Lamb (1932) と同様に

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{114}$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz \tag{115}$$

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu\nabla^2\psi \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{116}$$

水表面における dynamical な条件は

$$(p_{xz})_{\mathrm{water}} = (p_{xz})_{\mathrm{air}} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{117}$$

$$\begin{aligned}(p_{zz})_{\mathrm{water}} &= T\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - p_{\mathrm{air}} \\ &= -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = \rho g\eta - \rho\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned} \tag{118}$$

表面の kinematic な条件は

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} \tag{119}$$

水底の条件に十分深い所で

$$u = 0,\ w = 0 \tag{120}$$

ここでつぎのようにおく。進行波のみを考え k と n の real part とは異符号とする。

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx+nt)} d\xi_1(k,n,y) \tag{121}$$

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx+nt)} d\xi_2(k,n,y) \tag{122}$$

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx+nt)} d\xi_3(k,n) \tag{123}$$

$$(p_{xz})_{\mathrm{air}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx+nt)} \{N_1 d\xi_3(k,n) + d\xi_4(k,n)\} \tag{124}$$

$$p_a = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx+nt)} \{M_1 d\xi_3(k,n) + d\xi_5(k,n)\} \tag{125}$$

(124)，(125)式は水表面での表現である。

(121)式と(116)式の第1式，(120)式とより

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx+nt)} e^{|k|y} d\xi_{10}(k,n)$$

(122)式と(116)式の第2式，(120)式より

$$\left.\begin{aligned}\psi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx+nt)} e^{\lambda y} d\xi_{20}(k,n) \\ \lambda^2 &= \frac{in}{\nu} + k^2\end{aligned}\right\} \tag{127}$$

(126)式，(127)式を用い，(119)式から

$$-|k| d\xi_{10}(k,n) + ikd\xi_{20}(k,n) = ind\xi_3(k,n) \tag{128}$$

(124)式を用い(117)式は

$$\begin{aligned}N_1 d\xi_3(k,n) + d\xi_4(k,n) = -\mu\{ik|k|\, d\xi_{10}(k,n) + k^2 d\xi_{20}(k,n) \\ + ik|k|\, d\xi_{10}(k,n) + \lambda^2 d\xi_{20}(k,n)\}\end{aligned} \tag{129}$$

(125)式を用い，(118)式は

$$\begin{aligned}&-Tk^2 d\xi_3(k,n) - M_1 d\xi_3(k,n) - d\xi_5(k,n) \\ &= \rho g d\xi_3(k,n) - \rho ind\xi_{10}(k,n) - 2\mu\, |k^2|\, d\xi_{10}(k,n) + 2\mu ik\lambda d\xi_{20}(k,n)\end{aligned} \tag{130}$$

(128)，(129)，(130)式から $d\xi_{10}$, $d\xi_{20}$, $d\xi_3$ を消去し，$\dfrac{d\xi_4}{d\xi_{20}} = N_2$, $\dfrac{d\xi_5}{d\xi_{20}} = M_2$, $\dfrac{T}{\rho} = T'$ として

$$\begin{aligned}&\left(-T'k^2 - \frac{M_1}{\rho}\right)\left[-|k|\left\{\frac{N_2 + \frac{N_1 k}{n} + \mu k^2 + \mu\lambda^2}{N_1|k| + 2n\mu k|k|}\right\} + \frac{k}{n}\right] \\ &= g\left[-|k|\left\{\frac{N_2 + \frac{N_1 k}{n} + \mu k^2 + \mu\lambda^2}{N_1|k| + 2n\mu k|k|}\right\} + \frac{k}{n}\right] + n^2\,\frac{N_2 + \frac{N_1 k}{n} + \mu k^2 + \mu\lambda^2}{N_1|k| + 2n\mu k|k|} \\ &+ 2\nu\left[-|k^2|\, in\left\{\frac{N_2 + \frac{N_1 k}{n} + \mu k^2 + \mu\lambda^2}{N_1|k| + 2n\mu k|k|}\right\} + ik\lambda\right] + \frac{M_2}{\rho}\end{aligned} \tag{131}$$

上式から M_2, N_2 の影響はすくないものとして除くこととする。また k の正負の２つの場合が含まれるが，結果は同様に得られるから，$k > 0$ の場合のみを計算する。このようにして(131)式から得られる関係式から高次の項を省略し，$n = in_1$ とおくと

$$\begin{aligned}in_1^3 + (-4i\nu k^2)n_1^2 + \left\{i\left(gk + T'k^3 + \frac{M_1 k}{\rho}\right) - \frac{N_1 k}{\rho}\right\} n_1 \\ + 2\nu k^3 \frac{N_1}{\rho} - 2\nu k^2 \lambda \frac{N_1}{\rho} = 0\end{aligned} \tag{132}$$

さらに $k - \lambda$ を近似値でおきかえると，$k > 0$ に対する進行波では

$$n_1^3 - 4\nu k^2 n_1^2 + \left\{(gk + T'k^3) + \frac{k}{\rho}\left(M_1 - \frac{N_1}{i}\right)\right\} n_1 + 2\nu k^2 \frac{N_1}{\rho}\left(\frac{n_1}{\nu}\right)^{1/2} = 0 \tag{133}$$

(133)式で $\nu \to 0$ の時も第３項に N_1 が残るようにみえるが，(117)，(124)式よりこの場合は $N_1 \to 0$ となる。したがって水の粘性を無視した計算では風からの垂直応力のみで波の発達を考えなくてはならない。そして現在の所波の発達は風の垂直応力によるものが支配的と考えられている。

(133)式で第１項，第３項が主要な項であることに注目して近似的に n_1 を求め，$n = in_1$ を用いると

$$\left.\begin{aligned}n = -\sigma_0 - \frac{k}{2\rho\sigma_0}(M_1 + iN_1) + \frac{1}{8}\frac{k^2}{\rho^2}\frac{1}{\sigma_0^3}(M_1 + iN_1)^2 \\ + i2\nu k^2 + i\nu^{1/2} k^2 \frac{N_1}{\rho} e^{i(\pi/4)} \sigma_0^{-1.5} \\ \sigma_0^2 = gk + T'k^3\end{aligned}\right\} \tag{134}$$

上式の右辺第３項，第５項は無視してよい。(123)式の関係に注目して，水位 η の波数スペクトルムを組むと

$$\begin{aligned}\phi(k)dk &= \overline{e^{int} d\xi_3(k,n) e^{-int} d\xi_3^*(k,n)} \\ &= e^{\frac{k}{\rho\sigma_0}(M_{12} + N_{11})t}\, e^{-4\nu k^2 t}\, \overline{|d\xi_3(k)|^2}\end{aligned} \tag{135}$$

ただし　$M_1 = M_{11} + iM_{12}$,　$N_1 = N_{11} + iN_{12}$

以上と同様な計算を水深有限の場合について行なうと

$$\left.\begin{aligned} \phi(k)dk &= e^{-k^2 C_0 \sqrt{\frac{\nu}{2kC_0}}(\coth kh - \tanh kh)t - 4\nu k^2 t} \\ &\times e^{\left(\frac{M_{12}}{\rho C_0}\tanh kh + \frac{N_{11}}{\rho C_0}\right)t}\ \overline{|d\xi_3(k)|^2} \\ C_0 &= \left\{\frac{(T'k^2+g)}{k}\tanh kh\right\}^{1/2} \end{aligned}\right\} \qquad (136)$$

(135), (136)式において $|d\xi_3(k)|^2$ は$\{\phi(k)dk\}_{t=0}$ を示している。両式から波を発達させるためには，波形のこう配と同位相の気流の垂直応力，波形と同位相の気流の切線応力が有効であることがわかる。又(136)式から水深が浅くなると，M_{12} に対する N_{11} の作用が増加することとなるが，一般に $M_{12} \gg N_{11}$ と考えられている。この計算からわかることは，M_{12}, N_{11} は波数の関数としておくことができ，したがって波数別にその値を定めることができるが，減衰をもたらす粘性係数の ν についてはそのような取り扱いはできないことである。(135), (136) 式は1次元で homogeneous な水面状態を仮定しているから，実験波の発達の問題に使用する時は，2次元のかたちにおきかえ，波の進行経路長を群速度（波のエネルギー輸送速度）で割ったものを式中の t とする（浜田 (1963) 参照)。

またM_{12}の値を水面上の風の性質と関係づけて計算するものとしては, H. Jeffreys (1925, 1926), J.W. Miles (1957, 1960) のモデルがある。

参考文献

Batchelor, G. K. (1953) Theory of homogeneous turbulence, Cambridge University Press.

Bretherton, F. P. (1964) Resonant interactions between waves. The case of discrete oscillations, Jour. Fluid Mech., Vol. 20.

Cartwright, D. E. (1962) Waves, (analysis and statistics), The sea, Vol. 1, Interscience Pub.

Cummins, W. E. (1959) The determination of directional wave spectra in the TMB maneuvering-seakeeping basin, Report 1362, David Taylor Model Basin.

Hamada, T. (1963) An experimental study of development of wind waves, Report No. 2, P. H. T. R. I.

Hamada, T. (1964) On the f^{-5} law of wind-generated waves, Report No. 6, P. H. T. R. I.

浜田徳一 (1964) 表面波の2次干渉，第11回海岸工学講演会講演集，土木学会

Hasselmann, K. (1962) On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum, Part. 1. General theory, Jour. Fluid Mech., Vol. 12.

Hasselmann, K. (1963) On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum, Part. 2. Conservation theorems; wave-particle analogy; ineversibility, Jour. Fluid Mech., Vol. 15.

Hasselmann, K. (1963) On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum, Part. 3. Evaluation of the energy flux and swell-sea interaction for a Neumann spectrum, Jour. Fluid Mech., Vol. 15.

Heisenberg, W. (1948) On the theory of statistical and isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc. A. Vol. 195

Jeffreys, H. (1925) On the formation of water waves by wind, Proc. Roy. Soc. A. Vol. 107.

Jeffreys, H. (1926) On the formation of water waves by wind (second paper), Proc. Roy. Soc. A. Vol. 110.

Lamb, H. (1932) Hydrodynamics, 6th ed., Cambridge University Press.

Longuet-Higgins, M. S., D. E. Cartwright & N. D. Smith (1963) Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy, Ocean wave spectra, Proceedings of a conference, Prentice Hall

Miles, J. W. (1957) On the generation of surface waves by shear flows, Jour. Fluid Mech., Vol. 3.

Miles, J. W. (1960) On the generation of surface waves by turbulent shear flows, Jour. Fluid Mech., Vol. 7.

Nagata, Y. (1964) The statistical properties of orbital wave motions and their application for the measurement of directional wave spectra, Jour. Oceanogr. Soc. Japan, Vol. 19.

Neumann, G. & W. J. Pierson, Jr. (1963) Known and unknown properties of the frequency spectrum of a wind-generated sea, Ocean wave spectra, Proceedings of a conference, Prentice-Hall.

Ogura, Y. (1959) Diffusion from a continuous source in relation to a finite observation interval, Advances in geophysics, Vol. 6, Academic Press.

Phillips, O. M. (1958) The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 4.

Phillips, O. M. (1960) On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude, Part, I. The elementary interaction, Jour. Fluid Mech., Vol. 9.

Phillips. O. M. (1960) The mean horizontal momentum and surface velocity of finite-amplitude random gravity waves, J. G. R., Vol. 65.

Phillips, O. M. (1963) The dynamics of random finite amplitude gravity waves, Ocean Wave Spectra, Proceedings of a conference, Prentice-Hall.

Tick, L. J. (1959) A non-linear random model of gravity waves, I, Jour. Math. Mech., Vol. 8, No. 5.

Tick, L. J. (1963) Nonlinear probability models of ocean waves, Ocean Wave Spectra, Proceedings of a conference, Prentice-Hall.