

密度流

第1章 概 説

淡水と海水 ($\Delta\rho/\rho=0.02$), 温水と冷水 ($\Delta\rho/\rho=0.003$) あるいは清水と濁水 ($\Delta\rho/\rho=0.01\sim0.02$) のように, 密度差をもつ二種の流体が相接して存在し, それらが違った速度で運動している場合, たとえその密度差がきわめて小さくとも, またその境界がはっきりした境界面を持つときでも持たないときでも, その密度差の故に単一流体の運動とは著しく異なった運動を呈する場合が多く見られる。このような流れを密度流と呼んでいる。

1 初期に注目された密度流現象

密度流の現象は, 早くから主として海洋, 気象あるいは陸水学の分野で注目され, また観測研究されてきた。それらの二, 三の例を簡単に示せば次のようである。

a 海洋 暖流, 寒流は海水の温度ならびに塩分による密度差と自球自転による偏向力が, 二流体間に働く摩擦力や海洋地形と相互に影響を及ぼし合って起こると考えられる。また安定した躍層が形成されている時, 船のスクリューが境界面に接していると, 境界面に発生する内部波によって推進のエネルギーが吸収されてしまう死水現象もその一例である。このほか, 帆のはためきや風浪の発生なども密度流的な考察の対象となるものである。

b 気象 気流は気圧, 温度, 密度および湿度, また大気中の乱れや地形の状況などにより非常に複雑な現象を呈するものと見られるが, 雲海や美しい霧雲などを見れば, 大気中に比較的安定した密度流の存在することを傾かせるものがある。雷の音がなぜゴロゴロ聞えるかは, 大気中に生じている波状境界面(大気波浪)での音波の規則的な反射によるものと説明されている。また夕風で地上は静穏であっても上層の風が強いことは, 図-5のような密度および流速分布が密度流的には安定であるからである。一方, 地上近くの空気が急冷されると, 地上からある高さまでは上空に行くにしたがって温度の上昇する逆転層が生じ, 最近では煙害問題で注目を浴びている。

c 陸水 湖沼あるいは貯水池内での年間を通しての温度分布を調べると, 夏季には水面附近の水温が高く数m程度の躍層を形成しているが, 冬季は鉛直方向にほとんど様な低い水温分布をなしている場合が多い。また池中の等温度線は一般に水平でないので, 等圧線と一致しようとする対流が起こることが想像される。

d 地下水 陸側から海岸に向かって地下水流が流出している場合, 海岸附近で井戸を掘ると, ある深さまでは淡水層となっているが, それより深い層では塩水となり, 塩水層がクサビ状に陸側に向かって侵入していることが観測される。

2 密度流の工学的な諸問題

前述のように密度流現象は理学系の分野で早くから研究されてきたが, 1950年頃より土木工学の分野でも大いに注目され活発な研究が行なわれるようになった。すなわち, 多目的ダムを有する大規模な河川開発工事や河口改修ないし干拓工事が進捗するにつれ, あるいは臨海工業地帯の著しい進展につれて, 土木工学の分野でも密度流現象が多く現われ, その研究の必要性が認識されるようになったからである。またこのような傾向は世界的なものがあり, その情勢を反映して国際水理学会(I. A. H. R.)では Minnesota (1953), Montreal (1959) の

大会で研究テーマとして密度流が取り上げられ、また国際水質汚濁会議の東京大会（1964）でも密度流に関する論文がかなり提出されている。このように土木工学の分野では、密度流の課題は比較的新しく参考書などは少ないが、この方面の研究に志す人たちは上述の大会における *Proceedings* のほか、岩波、物部水理学62年版、土木学会水理公式集63年改訂版、技報堂土木工学ハンドブック64年版などを参照されたい。

a 河口密度流 感潮河川の河口部で海水が上流に向かって遡上する現象である。これは潮位、流量、河床勾配や形状、月齢などに起因するものと考えられるが、密度流的には境界面の不安定性に伴って生ずる渦、流水自身の持つ乱れなどのため海水と淡水との間に混合が生じている。*Stommel*¹⁾ はその混合の程度に応じ、河口密度流に対し図-1に示すような、弱混合型(a)、緩混合型(b)、(c)強混合型の三種の分類を行なった。

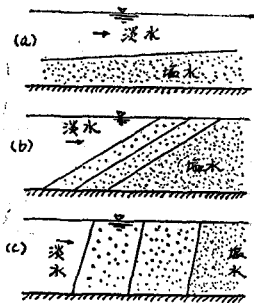


図-1 境界面での混合

れ、その形状は福島、柏村、八畝⁶⁾により超音波測深器を用いて観測されている。また潮差の大きい太平洋岸の利根川⁷⁾、長良川⁸⁾、五箇瀬川⁹⁾、川内川¹⁰⁾の観測資料では、むしろ緩混合ないし強混合型が多く見られる。さらに同一河川でも、月齢によって弱→緩→強混合、あるいはその逆経路をたどりながら、混合型式が周期的に変化する場合のあることが長良川の資料から確かめられている。

いずれの混合機構をとるにしても、農業あるいは工業用取水地点の選定にあたっては、その河川の塩分の遡上特性を調査研究しておくことが重要で、しかも、できれば長期間の観測が望ましい。観測および調査の対象としては次のようなものが挙げられる。

- 流量 ○ 潮位 ○ 塩分の遡上する状況
- 塩素イオン濃度 ○ 河床変動に関連のある各種工事、砂利採取など
- 河床の縦横断面図 ○ 地盤沈下の有無

木曾川¹¹⁾、長良川のように、塩水の遡上現象が経年的に逐次増加しつつある例が最近目立って多くなっているの、このような場合には、上記各要素の相関性について十分な解析が行なわれねばならない。一方、都市河川では工場廃水による汚染の程度がはなはだしく、当局はその対策に苦慮している。この問題は単に河道内の汚水の希釈、拡散のみならず、河口より外海に向かっての排出能力、あるいは排出された汚水の外海における拡散現象とも関連している。さらに、汚染や浄化の機構を本質的に研究するにあたっては、その研究領域が単に水理学の分野に止まらず、化学あるいは生物学の分野にも及んでいるので、この方面の研究は現在主として衛生工学の研究者によって盛んに行なわれつつある。

b 分離取水 前述のように夏季の湖、貯水池あるいは湾内では水面近くに躍層を形成する場合が多い。このような層をなしている水域より、希望する水質のものを取り出すことを分離取水 (Selective withdrawal) という。分離取水には下層取水、上層取水および中間取水がある。

i) 下層取水 工業用水、特に冷却水の取水にあたっては、当然下層にある冷水を取水したい。*Harleman*¹²⁾の研究によれば、図-2に示すような取水条件において、躍層の深さを z_0 とし、水底に直径 D の円管を据えて取水した場合、上層を吸い込まない限界流速 V_c は

$$\frac{V_c}{\sqrt{\frac{4\rho}{\rho}gz_0}} = 2.05\left(\frac{z_0}{D}\right)^{1/2} \dots\dots\dots (1)$$

で与えられている。左辺は Froude 数に似たものであるが、このような無次元数を内部 Froude 数と呼び、密度流の運動を支配する重要なパラメーターの一つである。いまこれを F_i とすると、 F_i は

$$\left. \begin{aligned} F_i &= \frac{v}{\sqrt{g'h}} \\ g' &= \frac{\Delta\rho}{\rho} g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

で示され、あたかも重力加速度が $\Delta\rho/\rho$ 倍だけ小さくなった加速度場における Froude 数と考えることができる。

したがって、密度差に起因して生ずる流体運動、すなわち密度流は、概して、きわめて緩慢な現象であり、重力場における単一流体としての運動が大きい場合にはほとんど認めがたい現象であることが容易に想像される。

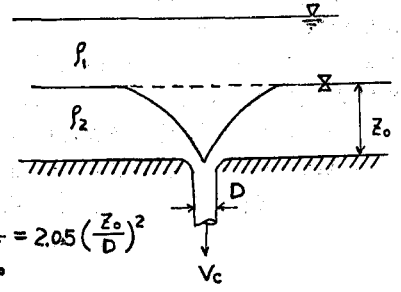


図-2 下層取水

ii) 上層取水 近年大ダムによる電源開発あるいは多目的ダムによる河川開発事業が盛んであるが、一方では農業方面よりの強い要望があって、特に寒冷地では農業用水のための温水取水が企業者に対して義務づけられている。上層取水に対しては、Craya¹³⁾、高月および南¹⁴⁾、嶋および椎貝¹⁵⁾などの基礎的な研究のほか、取水装置に関する二、三の応用的研究がある。いずれにしても、発電のための取水量は、50~60m³/sec 程度のもので、躍層を乱さない範囲の安定取水を行なうためには、取水口の位置は常に水面附近に保ち、取水口の幅は広くして、できるだけ接近流速を落としてやる必要がある。このため、取水口のゲートを可動にして表層水を取水する型式のものや、独立な取水塔を設け、円形の可動取水口が周囲からの表層水を取水する型式のものが考案されている。

iii) 中間取水 これは後述の河口湖における取水方法に関連する問題であるが、その概要を示せば次のようである。河口湖を設けた場合、下層はかなり高濃度の塩水層となる危険があり、一方上層は夏期高温の躍層が形成されることになる。したがってこのような場合には、中間取水という比較的きびしい条件下での取水方式が要求される。

c 湾内および貯水池内における密度流

i) 湾内密度流 最近、臨海工業地帯の発展は誠にめざましいものがあり、今後ますます埋立による膨大な土地造成事業が進められて行くものと考えられる。造成された工場用地には、大容量火力発電所や大製鉄所その他各種の工場群が建設されるが、泊地となる前面水域はすべて外郭防波堤によって遮蔽されたものになる。したがって、これらの工場は狭い水域内で大量の冷却水を取水しなければならない。例を 50 万 kw の火力発電所にとれば、冷却水は約 20m³/sec 常時必要となり、取水された水は Condenser を経て +7°C で放水されることになる。そこで、限定された水域内での温度密度流の諸問題が発生しつつあるが、これらの問題点を簡単に示せば次のようである。

① 水域内全体の熱収支 太陽の輻射熱、温水放流による熱量、気温と水温との差による熱交換、水面附近の蒸発、凝結に伴う潜熱量、水面からの逆輻射熱などを考慮し、水域内での熱量方程式を解くことにより、^{16), 17)} 冷却水の取水温度の算定を行なうものである。

② 取水および放水に伴う循環流 上記の計算は、現在の段階では、多くの仮定や平均化が行なわれているので、局所的現象を説明するまでには至っていない。一方、湾内に工場群が隣接し軒なみに取水および放水を行なう場合には、相互の流れの干渉状態が問題となる。しかしこの問題の有効な解析方法は不十分であるので、現地観測¹⁸⁾によって現象の把握に努めているのが現状である。

③ 潮汐による外海との交換機構 閉塞された水域内での水温上昇に比し、湾口あるいは港口からの潮汐による交換が許される場合の水温上昇は常識的には軽減されるものと考えられる。しかし、水域内に躍層を生じている際の潮汐による外海との交換機構には不明な点が多いので、今後の研究課題として重要なものがある。

④ 取水口附近の局所的機構 これは前述の下層取水と関連するものである。

⑤ 放水口附近の局所的機構 放水後の水脈は、水平方向にも鉛直方向にも、密度差が乱れによる拡散を抑制しやすいため、単一流体のそれに比較してあまり広がらない。一方、水域内は航行船舶への影響を考慮し、放水脈の流速は約 0.5m/sec 以下にすることが要求される。このため大容量発電所の放水口には特殊な減勢工作物¹⁹⁾が必要となる。さらに流速の緩やかな放水脈は、水平方向には海流や風あるいは海岸地形などの影響を受けやすく、非常に複雑な流路をたどりながら漸次海域中に拡散されることになる。

ii) 貯水池内の密度流 上層取水(温水取水)による取水口附近の局所的密度流のほかに、貯水池内には温度や濁度による密度差のための密度流が生ずる。Fry²¹⁾らはTVAのNorrisおよびCherokee貯水池内での水温分布を測定し、これらの池における水平および鉛直方向の密度流の運動を検討した。その結果、後者の観測では貯水池底部に沿う冷水塊の速度として 5 cm/sec 程度のものを認めている。

一方、濁水が池中へ流入する場合にも清水の下に下層流となって侵入し、Mead²¹⁾湖の観測では 20~30cm/sec 程度のものが求められている。冷水による密度流は、水面附近の気温状態と関連し貯水池内での広範囲な循環の原因となり、また濁水による密度流は貯水池内での堆砂現象²²⁾と関係するものと考えられる。

d 地下密度流

海岸附近の地下水の特色は前述のように、地表面近くでは淡水層、深部では塩水層となっていることである。さらに、両層の境界は、比較的明瞭な境界面を持つ場合と、そうでない場合とがある。前者は、たとえば上層のみが定常的な運動をし下層は静止しているような時に起こり、²³⁾ 後者は、境界面が非定常的に前進後退を繰り返すような時に起こりやすい²⁴⁾。地下密度流に関する工学的な問題としては、海岸附近の井戸に関するもの、地盤沈下と塩害、あるいは干拓地の塩遊びなどがあるが、最近河口湖への海水の浸透防止対策が注目されつつある。河口湖は、河川の流末に人工の湖を築造し、洪水時の水を貯溜してこれを工業用水に役立てようとするものである。この湖は、最近の工業用水の取得が、資源的にも水利権の設定上からも、ますます困難になりつつある現状を反映し、このような条件下での新しい水資源の開発方式の一つとして考え出され、現在その実現性を河口湖委員会²⁵⁾を中心に検討中のものである。密度流の立場から見れば、以下のような問題点が挙げられる。

① 海水の浸透 河口湖の有効貯水量を増加させるためには、水位は当然長期間海水位より低くなる。そこで堤防幅を大きくする方法²⁶⁾、止水壁を設ける方法²⁷⁾、淡水を注入する Water Curtain 工法²⁸⁾などが考えられるが、いずれにしても淡水と海水とからなる地下密度流の考察が必要となる。

② 拡散 河口湖の池底およびその周辺は、従来、海であった場所であるから、淡水を入れた時、池底からの塩分の拡散量を評価する必要がある²⁹⁾。この際、分子拡散と砂層内の流速の不均一に基づく拡散³⁰⁾とが対象となるが、地下密度流的には後者が関係している。

③ 池内の濃度分布 河口湖に淡水を導く際、技術的にはどうしても底部には塩水層が残留するし、またある程度の海水の浸透は免れがたいと考えられる。この際、塩水層と淡水層がどのように形成されるか、形成された濃度躍層は風や波、あるいは取水方式によってどの程度攪乱されるか、温度の四季を通じての変化が濃度躍層に及ぼす影響はどうかなどの問題が起こってくる。

④ 水門その他 流域面積の小さい河では、小洪水の際、しばしば水門を開閉させることがあるが、淡水を効率的に貯留させると同時に、できるだけ海水の浸入を防ぐための水門構造、ならびに附属施設の研究が行なわれなければならない。また池底に停溜した海水の排除方法、池内、特に躍層より下部の水質、ならびに藻の発生など解決を要する問題が山積しているのが現状である。

以上、土木工学分野で現われる密度流の諸問題を中心に、その概要と研究状況を簡単に記載した。密度流の課題は、以前はそれほど、あまり問題とはされなかったのであるが、最近のように急速な人間社会の膨張が、その発展課程で自然条件の制約を一段と厳しく受けるようになるにつれ、また一方の利益が他方のそれと競合する程度が甚しくなるにつれ、しだいにクローズアップされてきたものの一つと考えられる。密度流の研究対象はきわめて多岐にわたるので、その詳細を網羅することは筆者の能力を超えるものであり、また本研修会の主旨でもないと思われるので、以下密度流のごく基本的なアーマをできるだけ平易に解説、紹介して行きたいと考える。

第2章 境界面の安定問題

1 完全流体としての安定条件

図-3のように、密度の異なる流体が二層をなして共存しているとす。境界面に微小振幅 $2a$ をもつ内部波が生じたときの、内部波の波速や安定条件を流体が完全流体であるとして求めよう。

記号	上層	下層
水深	h_1	h_2
流速	u_1	u_2
密度	ρ_1	ρ_2
速度ポテンシャル	ϕ_1	ϕ_2

基礎方程式

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= 0 \\ \nabla^2 \phi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

境界条件

$$\left. \begin{aligned} y = h_1, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial y} &= 0 \\ y = -h_2, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$y = 0, \quad \phi_1 = \phi_2 \dots\dots\dots (5)$$

しかるに、Bernouille の定理により

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - g\eta - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \frac{p_2}{\rho_2} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - g\eta - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

一方、境界面は同じ流質で形成されるので

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} &= - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} &= - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 η は境界面での微小変位であって、次のように仮定する。

$$\eta = a \sin m(x - ct) \dots\dots\dots (8)$$

さて、速度ポテンシャルを一様流に対応するものと波動に関係するものとに分け

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= -u_1 x + \phi_1' \\ \phi_2 &= -u_2 x + \phi_2' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

とおき、右辺第2項は第1項に比べ一次の微少項とする。式(9)を式(6)に代入し、さらに式(5)を用いて p_1 および p_2 を消去すれば、境界面上で次式が成立する。

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \phi_1'}{\partial x} \right) - \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2'}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \phi_2'}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} (\rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2) = (\rho_1 - \rho_2) g \eta \dots\dots\dots (10)$$

次に、基礎方程式(1)および境界条件(2)を考慮すれば、それらを満足する ϕ_1' および ϕ_2' は

$$\left. \begin{aligned} \phi_1' &= C_1 \cosh m(y - h_1) \cos m(x - ct) \\ \phi_2' &= C_2 \cosh m(y + h_2) \cos m(x - ct) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

となる。これらを式(10)に代入し、 $y = 0$ とおけば

$$\begin{aligned} & \{ \rho_1 (c - u_1) C_1 \cosh mh_1 - \rho_2 (c - u_2) C_2 \cosh mh_2 \} m \sin m(x - ct) \\ &= \frac{1}{2} (\rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2) + (\rho_1 - \rho_2) g \eta \end{aligned}$$

上式を x で微分すれば

$$\{\rho_1(c-u_1)C_1 \cosh mh_1 - \rho_2(c-u_2)C_2 \cosh mh_2\} m^2 \cos m(x-ct) = (\rho_1 - \rho_2)g \frac{\partial \eta}{\partial x} \dots\dots(12)$$

ここで、式(8)および式(11)を式(9)を考慮しながら式(7)へ代入すれば、 C_1 および C_2 と a との関係が次式のように求まる。

$$C_1 = \frac{-a(c-u_1)}{\sinh mh_1}, \quad C_2 = \frac{a(c-u_2)}{\sinh mh_2} \dots\dots(13)$$

さらに、式(8)および式(13)を式(12)へ代入すれば、 C_1 , C_2 , a および $\sin m(x-ct)$ などが消去され、内部波の波速 c を与える方程式が次のように求められる。

$$m\{\rho_1(c-u_1)^2 \coth mh_1 + \rho_2(c-u_2)^2 \coth mh_2\} = (\rho_2 - \rho_1)g \dots\dots(14)$$

上式は c に関する二次方程式であるので、これを解けば

$$c_{\pm} = \frac{u_2\alpha_2 + u_1\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha_2 + \alpha_1} - \frac{(u_2 - u_1)^2 \alpha_2 \alpha_1}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2}} \dots\dots(15)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \rho_1 \coth mh_1, \quad \alpha_2 = \rho_2 \coth mh_2 \\ \beta &= (\rho_2 - \rho_1)g/m \end{aligned} \right\} \dots\dots(16)$$

いま

$$\varepsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{\Delta\rho}{\rho_1} \dots\dots(17)$$

とき、 ε が比較的小さいとすれば式(15)は

$$c_{\pm} = \frac{u_1 \tanh mh_2 + u_2 \tanh mh_1}{\tanh mh_1 + \tanh mh_2} \pm \sqrt{\frac{eg \tanh mh_1 \tanh mh_2}{m(\tanh mh_1 + \tanh mh_2)} - \frac{(u_2 - u_1)^2 \tanh mh_1 \tanh mh_2}{(\tanh mh_1 + \tanh mh_2)^2}} \dots\dots(18)$$

さらに、波長 $\lambda = 2\pi/m$ が十分に大きく、長波と見なされる場合には、式(18)は次のようになる。

$$c_{\pm} = \frac{u_1 h_2 + u_2 h_1}{h_1 + h_2} \pm \sqrt{\frac{eg h_1 h_2}{h_1 + h_2} - \frac{(u_2 - u_1)^2 h_1 h_2}{(h_1 + h_2)^2}} \dots\dots(19)$$

上式中 $\pm$ は内部波のそれぞれ進行および逆行波の波速に対応する。内部波の波高 η が、伝播につれて変形しないとすれば $\eta = ae^{im(x-ct)}$ のように表わせる。

したがって、 c がもし複素数であれば、 c の虚数部は波高を伝播とともに増大させる要因となるので、これより式(18)および式(19)に対応する安定条件は、それぞれ

$$u_2 - u_1 \leq \sqrt{\frac{eg\lambda}{2\pi} \left(\tanh \frac{2\pi h_1}{\lambda} + \tanh \frac{2\pi h_2}{\lambda} \right)} \dots\dots(20)$$

$$u_2 - u_1 \leq \sqrt{eg(h_1 + h_2)} \dots\dots(21)$$

一方、 λ が h_1 および h_2 に比し十分小さい場合には、式(20)の極限として

$$u_2 - u_1 \leq \sqrt{\frac{eg\lambda}{\pi}} \dots\dots(22)$$

となる。これらの関係式はいずれも二層流の相対速度がある範囲を超えると境界面が不安定となって、両層の間で混合が起こり始めることを示すものである。しかしその限界条件は、 h_1 , h_2 および ε のみならず波長 λ にも関係する。

そこで、下層の内部 Froude 数および $2\pi h_2/\lambda$ をそれぞれ

$$F_{i2} = (u_2 - u_1)/\sqrt{egh_2}, \quad \mu = 2\pi h_2/\lambda \dots\dots(23)$$

とおけば式(20)は、

$$F_{i2} \leq \sqrt{\frac{1}{\mu} (\tanh \mu \frac{h_1}{h_2} + \tanh \mu)} \dots\dots(24)$$

となる。いま h_1/h_2 をパラメーターとして上式の関係を示せば図-4が求められる。式(24)より、波長の十分大きい内部波は、内部 Froude 数が $F_{i2} \leq \sqrt{1 + \frac{h_1}{h_2}}$ の範囲で安定であるが、波長の小さい内部波では安定領域が $F_{i2} \leq \sqrt{\frac{2}{\mu}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi h_2}}$ で示されるので、与えられた F_{i2} 対し限界波長が存在し、それ以下の波長では必ず不安定となる。いずれにせよ、境界面が不安定となる限界波長が上述の理論では規定できないので、式(20)あるいは式(24)は安定条件に対する必要条件ではあるが、必ずしも十分条件を示すものではないと考えられる。

Ippen および Harleman²¹⁾ が行なった下層流($u_1=0, h_1/h_2 \gg 1$)の実験では、内部波の安定限界は図-4の○印のようになり、 $F_{i2}=1$ or $\lambda=\pi h_2$ と式(24)の曲線の交点附近に集中することが知られている。

2 速度あるいは密度変化を考慮した場合

G.I. Taylor²²⁾ は図-5で示されるような密度および流速分布を与えた場合について、内部波の安定問題をくわしく論じた。すなわち(a)に示すように、厚さ h の中間層が存在し層内で流速は直線的に変化するが、密度は ρ_3 なる一定値を持つ場合には、 u_1-u_2

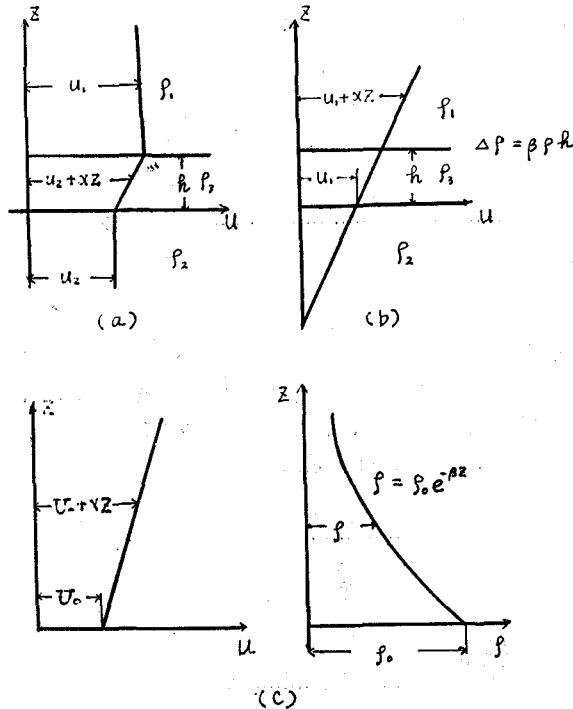
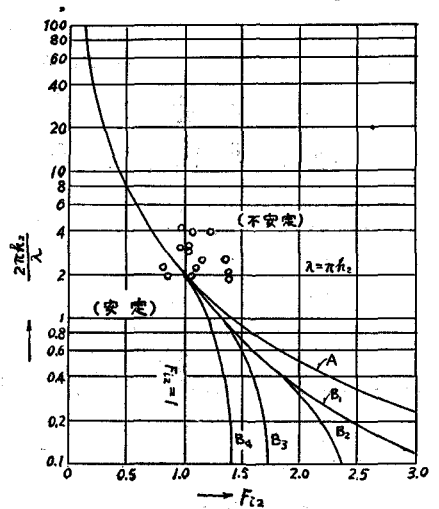


図-5 Taylor の与えた条件



$$\begin{aligned} A: F_{i2} &= \sqrt{\lambda/\pi h_2} \\ B: F_{i2} &= \sqrt{\frac{3}{\pi h_2} \frac{1}{2} (\tanh kh_1 + \tanh kh_2)} \\ B_1: h_1/h_2 &> 10 \quad B_2: h_1/h_2 = 3 \\ B_3: h_1/h_2 &= 2 \quad B_4: h_1/h_2 = 1 \end{aligned}$$

図-4 完全流体としての安全条件

を一定としたとき内部波の波長が小さくなればやはり不安定となるが、さらに小さい波長になれば再び安定となることを示した。また(b)のような条件では、各層間の密度差を $\Delta\rho = \beta\rho h$ としたときの安定条件は次の式で与えられる。

$$\alpha^2 \leq 2g\beta \dots \dots \dots (25)$$

さらに(c)は中間層の厚さを薄くし、その数を多くした極限と考えられるが、この場合の安定条件は

$$\alpha^2 \leq 4g\beta \dots \dots \dots (26)$$

となり、式(25)および式(26)では安定条件に波長が直接には関係しない。これらの関係式は

$$\alpha = \frac{du}{dz}, \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$$

ともおけるので Richardson 数で書き直せば

$$R_i = -\frac{g}{\rho} \frac{\frac{d\rho}{dz}}{\left(\frac{du}{dz}\right)^2} = \frac{g\beta}{\alpha^2} \geq \frac{1}{2} \text{ or } \frac{1}{4} \dots \dots \dots (27)$$

すなわち、Taylor の行なった研究は、密度勾配のある乱流内で乱れがエネルギー的に

減衰するという、Richardson の与えた条件と最終的にはほぼ同一の結論に達する点で興味深いものがある。

(c)に対する安定条件の誘導の概略を示せば、次のとおりである。まず連続の方程式、流れと共に移動する密度の不変を示す方程式、および x , y , z 方向の Euler の運動方程式を基礎方程式として採用し、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0 \\ \frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{Dw}{Dt} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

とおく。ここで攪乱を受けない場合の密度、圧力および流速分布を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(z) &= \rho_0 e^{-\beta z} \\ p_1(z) &= \rho_0 g \beta^{-1} e^{-\beta z} \quad \text{or} \quad g = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z} \\ U(z) &= U_0 + \alpha z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

任意点の流速、密度および圧力は微小攪乱を受け、次式で示されるような微小変動が付加されるものとする。

$$\left. \begin{aligned} u &= U(z) + \bar{u}\epsilon, \quad v = \bar{v}\epsilon, \quad w = \bar{w}\epsilon \\ \rho &= \rho_1(z) + \bar{\rho}\epsilon, \quad p = p_1(z) + \bar{p}\epsilon \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

ここに

$$\epsilon = e^{i(\kappa x + l y - \sigma t)} \dots\dots\dots (31)$$

を表わし、 $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ は z のみの関数で $U(z)$ に比し小さく、また $\bar{\rho}$ および $\bar{p}$ は z のみの関数で、それぞれ $\rho_1(z)$ および $p_1(z)$ に比し小さいものとする。式(29)および式(31)を考慮しながら式(30)を式(28)に代入し、二次以上の微小項を省略すれば次式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} i\kappa \bar{u} + i l \bar{v} + \frac{d\bar{w}}{dz} &= 0 \\ \bar{\rho} i\kappa \left(U - \frac{\sigma}{\kappa} \right) - \bar{w} \beta \rho_1 &= 0 \\ i\kappa \left(U - \frac{\sigma}{\kappa} \right) \bar{u} + \bar{w} \frac{dU}{dz} &= -\frac{i\kappa}{\rho_1} \bar{p} \\ i\kappa \left(U - \frac{\sigma}{\kappa} \right) \bar{v} &= -\frac{i l}{\rho_1} \bar{p} \\ i\kappa \rho_1 \left(U - \frac{\sigma}{\kappa} \right) \bar{w} + g \bar{\rho} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

これらの各式は式(28)の各式にそれぞれ上から順に対応するものである。式中に含まれる従属変数は $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$; $\bar{\rho}$, $\bar{p}$ の5個であり、方程式の数も5個あるので適当に従属変数を消去し、たとえば $\bar{w}$ のみの1個の方程式に帰着させることができる。そこで第3、第4式を第1式に代入し $\bar{u}$ および $\bar{v}$ を消去すれば

$$\frac{d\bar{w}}{dz} - \frac{\frac{i}{\rho_1 \kappa} (\kappa^2 + l^2) \bar{p}}{U - \frac{\sigma}{\kappa}} - \frac{\bar{w} \frac{dU}{dz}}{U - \frac{\sigma}{\kappa}} = 0 \dots\dots\dots (33)$$

これを z で微分すれば

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dz^2} - \frac{\frac{i}{\kappa} (\kappa^2 + l^2)}{U - \frac{\sigma}{\kappa}} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{\bar{p}}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} \right) - \frac{\frac{d^2 U}{dz^2} \bar{w}}{U - \frac{\sigma}{\kappa}} = 0 \dots\dots\dots (34)$$

次に第2および第5式より

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = i\kappa\rho_1 \left(U - \frac{\sigma}{\kappa} \right) \bar{w} \left\{ 1 - \frac{\beta g}{\kappa^2 \left(U - \frac{\sigma}{\kappa} \right)^2} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

また式 (29) より

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = -g\beta$$

となるので、さらに式 (33) を考慮すれば

$$\begin{aligned} \frac{\frac{i}{\kappa}(\kappa^2 + l^2)}{U - \frac{\sigma}{\kappa}} \frac{\bar{p}}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} &= -\frac{\frac{i}{\kappa}(\kappa^2 + l^2)}{U - \frac{\sigma}{\kappa}} \frac{\beta \bar{p}}{\rho_1} \\ &= \frac{\beta \bar{w} \frac{dU}{dz}}{U - \frac{\sigma}{\kappa}} - \beta \frac{d\bar{w}}{dz} \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

式 (35) および (36) を式 (34) に代入すれば、結局 $\bar{w}$ に関する次のような微分方程式が誘導される。

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dz^2} - \beta \frac{d\bar{w}}{dz} + \bar{w} \left\{ \frac{\beta \frac{dU}{dz}}{U - \frac{\sigma}{\kappa}} - \frac{d^2 U}{dz^2} - (\kappa^2 + l^2) \left\{ 1 - \frac{g\beta}{\kappa^2 \left(U - \frac{\sigma}{\kappa} \right)^2} \right\} \right\} = 0 \dots\dots\dots (37)$$

ここで式 (29) の第 3 式に示す流速分布に注目することとし、さらに

$$\bar{w} = f e^{\frac{\beta z}{2}} \dots\dots\dots (38)$$

とおけば式 (37) は

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - f \left\{ \kappa^2 + l^2 + \frac{\beta^2}{4} - \frac{g\beta \left(1 + \frac{l^2}{\kappa^2} \right)}{\left(\alpha z - \frac{\sigma}{\kappa} \right)^2} - \frac{\beta \alpha}{\left(\alpha z - \frac{\sigma}{\kappa} \right)} \right\} = 0 \dots\dots\dots (39)$$

上式において波長 λ は

$$\lambda = 2\pi / \kappa \ll \beta^{-1} \text{ or } \kappa \gg \beta$$

さらに $\alpha^2 / g \ll \kappa$

と考えれば、 $\beta^2 / 4 \ll \kappa^2 + l^2$ 。また Order 的に $g\beta \approx \alpha^2$ 、 $z \approx \lambda \approx 2\pi / \kappa$ とすれば、式 (39) の最後の項の Order は $\alpha^2 \kappa / g$ 、一方、その前の項の Order は κ^2 となり最後の項は省略できる。

上記の事項を考慮すれば式 (39) は

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - f \left\{ \kappa^2 + l^2 - \frac{g\beta \left(1 + \frac{l^2}{\kappa^2} \right)}{\left(\alpha z - \frac{\sigma}{\kappa} \right)^2} \right\} = 0$$

さらに $z - \sigma / \alpha \kappa = z'$ 、 $f = h z'^{\frac{1}{2}}$

なる変数変換を行なえば

$$\frac{d^2 h}{dz'^2} + \frac{1}{z'} \frac{dh}{dz'} - (\kappa^2 + l^2) h + \left\{ \frac{g\beta}{\alpha^2} \left(1 + \frac{l^2}{\kappa^2} \right) - \frac{1}{4} \right\} \frac{h}{z'^2} = 0 \dots\dots\dots (40)$$

上式は

$$\nu = \left\{ \frac{1}{4} - \frac{g\beta}{\alpha^2} \left(1 + \frac{l^2}{\kappa^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (41)$$

とおけば、 ν 次の Bessel 微分方程式である。したがって、この解は

$$h = B_\nu(i\sqrt{\kappa^2 + l^2} z')$$

で形式的に示される。ただし $B_\nu(x)$ は ν 次の Bessel 関数。いま運動は xz 面内に限られるとすれば $l=0$ とされる。さらに $\bar{w} \rightarrow f \rightarrow h$ 、 $z \rightarrow z'$ の変数変換を逆にたどれば、鉛直方向の変動流速 w は

$$w = \left(z - \frac{\sigma}{\alpha \kappa} \right) \frac{1}{2} e^{\frac{\beta}{2} z^2} B_v \left[i \left(\kappa z - \frac{\sigma}{\alpha} \right) \right] e^{i(\kappa x - \sigma t)} \quad (42)$$

$$\text{ただし} \quad \nu = \frac{1}{4} - \frac{g\beta}{\alpha^2} \quad (43)$$

上記の解は $\alpha^2 \geq 4g\beta$ により全く異なる型式の解を持ち、上の場合には ν は実数でかつ $-1/2 < \nu < 1/2$ 、下の場合には ν は虚数になる。ところが Bessel 関数の性質として前者の場合には流体が水平面で境され、上方に半無限状に広がっているという境界条件を満足する（換言すれば $B_v(\zeta) = 0$ となる ζ の2つの零点が存在する）ことがないので $w = \bar{w} e^{i(\kappa x - \sigma t)}$ で示される解は存在しない。したがって安定に対する必要条件として

$$\alpha^2 \leq 4g\beta$$

が示される。

一般に成層密度流が一旦形成されると、相対速度がかなり大きくなっても密度差のため境界面は比較的安定な状態を保つものである。いま安定の程度を評価するための一つの方法として、図-6 に示す (a) の状態から流れが (b) の状態に移行するときどのようなエネルギー変化が起こるかを調べてみる。現象を簡略化するため次のような仮定を設ける。

仮定：完全流体、静水圧分布

上層流速 $u_1 = \text{一定}$ ，下層流速 $u_2 = 0$

全水深 $h = h_1 + h_2 = \text{一定}$

特に (b) の状態では、厚さ $dy_1 + dy_2$ の中間層が存在し、中間層内では速度分布は直線状とし、密度はこの層の中にあった上下層の流体分子が混合して、平均密度 ρ_m となっているものとする。なお上下層の密度および水深は、それぞれ ρ_1, ρ_2 および h_1, h_2 とする。また水路床および中間層の下端よりそれぞれ鉛直上方に z および η とする。

状態 (a) の流れの持つ単位長さおよび厚さ当りの全エネルギーを E_a 、状態 (b) のそれを E_b とすれば、 E_a は次のように求められる。

$$\begin{aligned} E_a &= \int_{h_2}^{h_1+h_2} \left\{ \rho_1 g z + \rho_1 g (h_1 + h_2 - z) + \frac{\rho_1 u_1^2}{2} \right\} dz \quad \dots\dots\dots \text{上層} \\ &+ \int_0^{h_2} \{ \rho_2 g z + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g (h_2 - z) \} dz \quad \dots\dots\dots \text{下層} \\ &= \int_{h_2}^{h_1+h_2} \left\{ \rho_1 g (h_1 + h_2) + \frac{\rho_1 u_1^2}{2} \right\} dz + \int_0^{h_2} (\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2) dz \\ &= \rho_1 g h^2 + \rho_2 g h_2^2 + \frac{\rho_1 u_1^2}{2} h_1 \quad \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

次に状態 (b) の流れでは

$$E_b = \int_{h_2+dy_1}^{h_1+h_2} \left\{ \rho_1 g z + \rho_1 g (h_1 + h_2 - z) + \frac{\rho_1 u_1^2}{2} \right\} dz \quad \dots\dots\dots \text{上層}$$

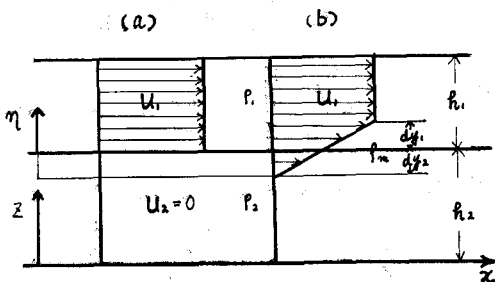


図-6 流速および密度の変化

$$\begin{aligned}
& + \int_{h_2-dy_2}^{h_2+dy_1} \{ \rho_m g z + \rho_1 g (h_1 - dy_1) + \rho_m g (h_2 + dy_1 - z) \} dz + \frac{\rho_m}{2} \int_0^{dy_1+dy_2} u^2 d\eta \quad \dots\dots \text{中間層} \\
& + \int_0^{h_2-dy_2} \{ \rho_2 g z + \rho_1 g (h_1 - dy_1) + \rho_m g (dy_1 + dy_2) + \rho_2 g (h_2 - dy_2 - z) \} dz \quad \dots \text{下層} \\
& \dots\dots\dots (45)
\end{aligned}$$

ここで前記の仮定より

$h_2 + dy_1 > z > h_2 - dy_2$ では

$$u = \frac{u_1}{dy_1 + dy_2} \eta, \quad \rho_m = \frac{\rho_1 dy_1 + \rho_2 dy_2}{dy_1 + dy_2} \dots\dots\dots (46)$$

を式 (45) に代入すれば

$$\begin{aligned}
E_b &= \int_{h_2+dy_1}^h \left(\rho_1 g h + \frac{\rho_1 u_1^2}{2} \right) dz + \int_0^{h_2+dy_1} \rho_1 g (h_1 - dy_1) dz + \int_{h_2-dy_2}^{h_2+dy_1} \rho_m g (h_2 + dy_1) dz \\
&+ \frac{\rho_m u_1^2}{6} (dy_1 + dy_2) + \int_0^{h_2-dy_2} \{ \rho_m g (dy_1 + dy_2) + \rho_2 g (h_2 - dy_2) \} dz \\
&= \left(\rho_1 g h + \frac{\rho_1 u_1^2}{2} \right) \{ h - (h_2 + dy_1) \} + \rho_1 g (h_1 - dy_1) (h_2 + dy_1) + (\rho_1 dy_1 + \rho_2 dy_2) g (h_2 + dy_1) \\
&+ \frac{\rho_1 dy_1 + \rho_2 dy_2}{6} u_1^2 + (\rho_1 dy_1 + \rho_2 dy_2) g (h_2 - dh_2) + \rho_2 g (h_2 - dy_2)^2 \\
&= \rho_1 g h^2 + \Delta \rho g h^2 + \frac{\rho_1 u_1^2}{2} h_1 + \Delta \rho g dy_1 dy_2 - \frac{\rho_1 u_1^2}{2} dy_1 + \frac{\rho_1 dy_1 + \rho_2 dy_2}{6} u_1^2 \dots\dots\dots (47)
\end{aligned}$$

ここで、流れは(a)から(b)の状態に移行すると考え、連続の方程式をたてれば

$$\rho_1 u_1 h_1 = \rho_1 u_2 (h_2 - dy_1) + \rho_m \frac{u_1^2}{2} (dy_1 + dy_2)$$

上式に式(46)を代入すれば

$$\rho_1 dy_1 = \rho_2 dy_2 \dots\dots\dots (48)$$

式(44)、式(47)および式(48)より

$$\Delta E = E_b - E_a = \Delta \rho g dy_1 dy_2 - \frac{\rho_1 u_1^2}{6} dy_1 \dots\dots\dots (49)$$

すなわち、成層密度流が中間層内で混合を生ずるようになるには、 ΔE に相当するエネルギーが外部より供給される必要がある。ただし、外部より供給されるエネルギーの一部は中間層内での摩擦力によって失われるはずである。しかし、どのような外部や内部におけるエネルギーの交換があるにせよ、 ΔE の値が小さいほど(a)より(b)への移行が容易と一応考えられる。したがって外部からのエネルギー供給なしで移行できる限界は $\Delta E=0$ である。

換言すれば、上述の流れの条件では

$$\frac{\Delta \rho g dy_1 dy_2}{\rho_1 u_1^2 dy_1} \geq \frac{1}{6} \dots\dots\dots (50)$$

であれば、境界面の安定度が高いことが示される。なお上式左辺は Richardson 数に相当するものであり、かつ Taylor の記号でも表現できる。したがってこの場合には

$$R_i = \frac{g\beta}{\alpha^2} \geq \frac{1}{6} \dots\dots\dots (51)$$

3 粘性を考慮した安定条件

一般に成層密度流では、上下層の相対速度がある値に達すると境界面に内部波が発生する。Keulegan³²⁾は上層流についての実験を行なって、内部波の発生や上下層の混合現象を調べるとともに、混合現象に対する限界条件を決定するには、どのような物理量を考慮すべきかについて理論的な研究を行なった。彼の観察によれば、内部

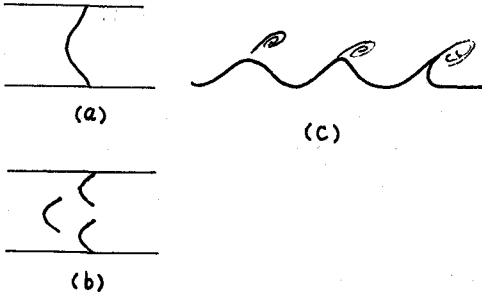


図-7 内部波の形状

波の発生状況は次のようである。すなわち、上層流速が増加し二流体の密度、速度および粘性係数によって定まるある値に達すると、図-7(a)に示すように境界面は一方の側壁から他方に達する数多くの隆起でおおわれるようになる。これらの隆起は下流側へと移動し、波頂を結ぶ線は放物線状を呈し、波高は水路の中央部で最高になっている。流速がわずかに増加すると、内部波は(b)のような形状となり、波頂線は前より短く水路幅の1/2~1/3となる。また波の発生と順序は規則的で、波の伝播は上層流の方向と一致

し、さらに卓越波長は水路全長にわたり、ほぼ一定である。流速がさらに増加すると、内部波の波頂が尖って(c)のようになり混合が始まる。初期の混合は軽微であるが、流速が大きくなるにつれはげしくなる。この場合、流速の増加は、波長をわずかに減少させるが波高を増大させるので、波の Steepness は大きくなり波頂から発する渦の大きさや頻度もますます増加することになる。

Keulegan は、混合の起こる直前の内部波は比較的規則正しい形状を保ち変形せずに下流側に伝播するという実験結果から、上層の流体が下層の流体にエネルギーを供給して内部波を発生させるが、内部波のエネルギーは下層流体の粘性により定常的に消費されてしまうと考えた。このような考察から、粘性を考慮した内部波の安定条件に関し以下のような解析を行なった。すなわち、図-8に示すように境界面に x 軸をとり、内部波の発生に伴う下層流体の運動に注目する。流れは緩やかであって、非圧縮性であるとすれば、運動方程式および連続の方程式はそれぞれ次のようになる。

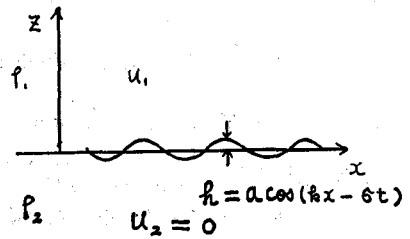


図-8 座 標 系

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (53)$$

ここに u, w はそれぞれ x, z 方向の流速成分で、 z は鉛直上方にとる。Basset は上記の方程式について、

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \nabla^2 \phi \dots\dots\dots (54)$$

を満足する関数 ϕ および ϕ が求められたとすれば、未知量 u, w および p はそれぞれ次のようにして求められることを示した。

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ w &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - g z \dots\dots\dots (56)$$

完全な二層流として問題を取扱うことは困難であるので、上層流の運動を詳細に調べることは止める代わり

に、上層の流体が境界面を通じて下層の流体に動的な影響を境界面に働く垂直応力 P_{zz} の型式で及ぼすこと、さらに下層の流体には上層の流体の存在のため重力加速度 g が $g' = \varepsilon g$ に減少することを仮定する。後者より式(56)は

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - g'z \dots\dots\dots (57)$$

下層流体は全体としては静止し、また水深は無限大とすれば式(54)を満足する ϕ および ψ は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \phi &= A e^{kz} e^{ikx+at} \\ \psi &= C e^{mz} e^{ikx+at} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

ただし

$$m^2 = k^2 + \alpha/\nu \dots\dots\dots (59)$$

したがって、式(58)を式(55)へ代入すれば

$$\left. \begin{aligned} u &= -(ikAe^{kz} + mCe^{mz}) e^{ikx+at} \\ w &= -(kAe^{kz} - ikCe^{mz}) e^{ikx+at} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60)$$

ここで、境界面に生ずる内部波の形状を

$$h = a \cos(kx - \sigma t) \dots\dots\dots (61)$$

と仮定すれば、内部波の波速 c は

$$c = \sigma/k \dots\dots\dots (62)$$

一方

$$\frac{\partial h}{\partial t} = (w)_{z=0}$$

であるから、式(60)より

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -k(A - iC) e^{ikx+at}$$

積分して

$$h = -\frac{k}{\alpha} (A - iC) e^{ikx+at} \dots\dots\dots (63)$$

次に Stokes の法則より非圧縮流体では一般に

$$\left. \begin{aligned} p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ p_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (64)$$

となるが、ここでは上層の流れは下層の流体に対し境界面上で次のような応力状態で釣合っていると仮定する。

$$p_{zz}/\rho = -\beta A e^{ikx+at}, \quad p_{zx} = 0 \dots\dots\dots (65)$$

すなわち、境界面を通じての動的効果は垂直応力の形式で伝えられ、切線応力は働かないか二次的であると考ええる。また限界状態では内部波が規則正しく生起する進行波であることから、式(65)の表現を用いたのであって、 $\beta > 0$ とするとき応力は圧力となる。ここで式(65)を式(64)に代入し p_{zz}/ρ を消去すれば

$$-\beta A e^{ikx+at} = -\left(\frac{p}{\rho}\right)_{z=0} + 2\nu \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=0} \dots\dots\dots (66)$$

一方、境界面上の圧力は式(57)より

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=0} - g'h \dots\dots\dots (67)$$

で示される。したがって式(66)、式(67)より p/ρ を消去し、さらに式(58)、式(60) および式(63)を用いてそれぞれ ϕ , w および h を消去すれば次式が求められる。

$$(\alpha^2 + 2\nu k^2 \alpha - \beta \alpha + g'h)A - i(g'h + 2\nu k m \alpha)C = 0 \dots\dots\dots (68)$$

さらに、式(64)の第2式に式(60)を代入し、式(65)の第2式および式(59)を考慮すれば

$$2ik^2 A + (\alpha + 2\nu k^2)C = 0 \dots\dots\dots (69)$$

A および C が解を持つためには、式(68) および式(69) の係数からなる行列式が零とならなければならない。
そこで行列式を零とおいて展開すれば

$$\alpha^2 + 4\nu k^2 \alpha - \beta \alpha + g'k - 2\nu k^2 \beta + 4\nu^2 k^4 - 4\nu^2 k^3 m = 0$$

ν は小さいので、 ν^2 を含む項を省略すれば

$$\alpha^2 + 4\left(\nu k^2 - \frac{\beta}{4}\right) \alpha + g'k - 2\nu k^2 \beta = 0 \quad \dots\dots\dots (70)$$

上式より内部波の波高が減衰も増大もしない条件は

$$\nu k^2 - \beta/4 = 0 \quad \text{or} \quad \beta = 4\nu k^2 \quad \dots\dots\dots (71)$$

したがって、そのときには

$$\alpha^2 = -g'k + 8\nu^2 k^4 \quad \dots\dots\dots (72)$$

上式の右辺第2項は小さいので

$$\alpha^2 \doteq -g'k \quad \dots\dots\dots (73)$$

ここで、進行波に注目するとし

$$\alpha = -\sigma i \quad \dots\dots\dots (74)$$

とおけば、式(63)より

$$h = \frac{h}{i\sigma} (A - iC) e^{ikx - i\sigma t}$$

さらに式(62)から

$$h = \frac{1}{iC} (A - iC) e^{i(kx - \sigma t)}$$

しかるに、式(69)より

$$\frac{C}{A} = \frac{-2i\nu k^2}{\alpha + 2\nu k^2}$$

であって、 C/A も小さい値であるから

$$h \doteq \frac{A}{ic} e^{i(kx - \sigma t)} \quad \dots\dots\dots (75)$$

とおける。したがって常数を適当に選べば、 h は式(61)に示した内部波形と一致させることができる。

また内部波が Permanent type である場合には、 p_{xz}/ρ は式(65), (71)より

$$p_{xz}/\rho = -4\nu k^2 A e^{i(kx - \sigma t)} \quad \dots\dots\dots (76)$$

さらに式(65)と式(75)を比較すれば

$$-A e^{i(kx - \sigma t)} = c a \sin(kx - \sigma t)$$

となるので(76)は次のように表わされる。

$$p_{xz} = 4\nu k^2 c a \sin(kx - \sigma t) \quad \dots\dots\dots (77)$$

さて、Jeffreys³⁴⁾ は風が水面に及ぼす圧力変動は

$$-p_{xz} = S \rho_1 u_1^2 \frac{dh}{dx} \quad \dots\dots\dots (78)$$

で表わされるとしたが、これにならって上層が下層に及ぼす圧力変動を

$$-p_{xz} = S \rho_1 (u_1 - c)^2 \frac{dh}{dx} \quad \dots\dots\dots (79)$$

とする。式(61)より dh/dx を求めて上式へ代入すれば

$$p_{xz} = S \rho_1 (u_1 - c)^2 k a \sin(kx - \sigma t) \quad \dots\dots\dots (80)$$

式(77)と式(80)を比較すれば

$$\frac{(u_1 - c)^2}{c} = \frac{4\nu k}{S} \quad \dots\dots\dots (81)$$

が求められる。ただし式(77)以前の式はすべて下層流体に対応するもので、特に Suffix はつけなかったが、これからは上層流の効果が入るので上下層の区別を明確にするためつけなければならない。また上式では $\rho_1/\rho_2 \doteq 1$

としている。式(81)は混合現象の始まる前の波速 c , 上層流速 u_1 および波長 $\lambda=2\pi/k$ 間の関係と見てよい。
しかるに、水深が上下層とも深くまた下層の静止している場合の内部波の波速は式(18)において、 $h_1, h_2 \approx \infty$, $u_2=0$ とおけばよい。すなわち

$$c_+ = \frac{u_1}{2} + \left(\frac{eg}{2k} - \frac{u_1^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (82)$$

そこで、内部波が安定である必要条件として c_+ が real であるためには

$$u_1^2 \leq \frac{2eg}{k} = \frac{2g}{k} \frac{\Delta\rho}{\rho_1}$$

すなわち、与えられた流速に対し到達しうる k の最大値は

$$k = \frac{2g}{u_1^2} \frac{\Delta\rho}{\rho_1} \quad (83)$$

式(81)および式(83)より k を消去すれば

$$\frac{u_1^2(u-c)^2}{c} = \frac{8}{S} \nu_2 g \frac{\Delta\rho}{\rho_1} \quad (84)$$

しかるに、内部波が安定である限界時には式(82)から

$$c = u_1/2 \quad \text{となるから}$$

これを式(84)に代入すれば

$$u_1^3 = \frac{16}{S} \nu_2 g \frac{\Delta\rho}{\rho_1} \quad (85)$$

が求められる。したがって、いま

$$\theta = \left(\nu_2 g \frac{\Delta\rho}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{3}} / u_1 \quad (86)$$

なる無次元変数を考えれば、 θ は粘性を考慮した内部波の安定限界を検討するうえにきわめて重要な parameter となることが知られる。

上述の事項より θ がある値より大きければ内部波は安定であるが、小さければ不安定であることが推定される。いま式(86)を変形すれば

$$\theta^3 = \frac{\nu_2 g e}{u_1^3} = \frac{egh}{u_1^2} \frac{\nu_2}{u_1 h}$$

となるので、 $u_1^2/egh = F_{i2}^2$, $u_1 h/\nu_2 = R_e$ とおけば

$$\theta = \frac{1}{F_{i2}^{\frac{2}{3}} R_e^{\frac{1}{3}}} \quad (87)$$

のような表現も可能である。

式(85)および式(86)より限界時の θ の値は一定値をとることが予想されるが、Keulegan の行なった実験では上層が層流と乱流とはそれぞれ異なる一定値をとり

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 0.127, \quad R_e < 450 \\ \theta &= 0.178, \quad R_e > 450 \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

となることが示されている。ただしこのときの R_e は

$$R_e = u_{1c} R / \nu_1$$

であり、 u_{1c} は上層の限界流速、 R は径深を示している。

一方、Ippen および Harleman の行なった下層流の実験では、実験値を

$$\theta = \frac{\nu_2 g \frac{\Delta\rho}{\rho_1}}{u_1^3} = \frac{1}{\frac{u_1^2}{egh_2}} \frac{1}{\frac{u_2 h_2}{\nu_2}} = \frac{1}{F_{i2}^2 R_{e2}} \quad (89)$$

で整理し、図-4の結果から限界時には $F_{i2}=1$ であるとし限界条件として

$$\theta^3 = \theta = \frac{1}{R_{e2}} \quad (90)$$

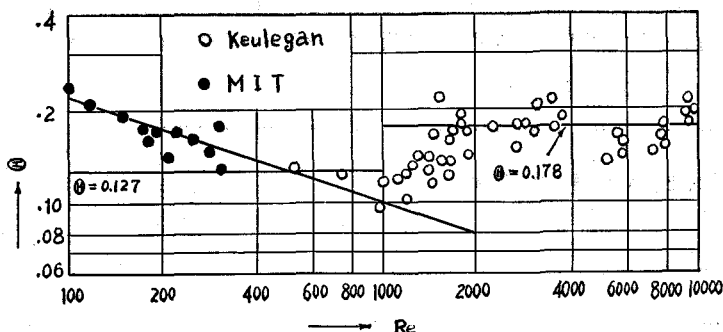


図-9 限界値に対する実験結果

を与えている。

図-9は Keulegan および M. I. T. による限界値に対する実験結果をまとめて取めたものである。

³⁵⁾ ただし両者は互に実験条件が異なるので、 θ に含まれる流速は上層下層いずれかの一様流の流速で示すこととし、また R_c は一様流の存在するほうの流速、ならびに水深を用いることとして限界条件が表現されている。

第3章 境界面に働くせん断応力

1 密度流の開水路流的取扱い

弱混合型の密度流では、境界面をはさんで密度、流速および水深の異なる2つの流れが存在するが、水路、境界面および水面の勾配があまり大きくなければ開水路流と同様な取扱いができる。^{36) 37)} すなわち上下各層の圧力水頭および高度水頭の和を、静水圧分布を仮定して求めれば、次のようになる。

上層：

$$-\frac{p}{\rho_1 g} + z = \zeta_1 + (h_1 + h_2 + s - \zeta_1) = h_1 + h_2 + s$$

下層：

$$-\frac{p}{\rho_2 g} + z = \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1 + \zeta_2 + (h_2 + s - \zeta_2) = (1 - \varepsilon) h_1 + h_2 + s$$

$$\text{ただし } \varepsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \div \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$$

このことより、上層および下層の流れに対する運動方程式は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} -i + \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_1^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial u_1}{\partial t} + i_{f1} &= 0 \\ -i + (1 - \varepsilon) \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_2^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial u_2}{\partial t} + i_{f2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (91)$$

一方、連続方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (92)$$

摩擦勾配 i_f は、水路幅が広いとして両側面での摩擦を無視すれば

$$\left. \begin{aligned} i_{f1} &= \frac{\tau_i}{\rho_1 g h_1} = f'_1 \frac{(u_1 - u_2) |u_1 - u_2|}{2g h_1} \\ i_{f2} &= \frac{\tau_b - \tau_i}{\rho_2 g h_2} = f'_2 \frac{u_2 |u_2|}{2g h_2} - f'_1 \frac{(u_1 - u_2) |u_1 - u_2|}{2g h_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (93)$$

ただし、図-10 に示すように各記号は次のようにとる。

	上層	下層
水 深	h_1	h_2

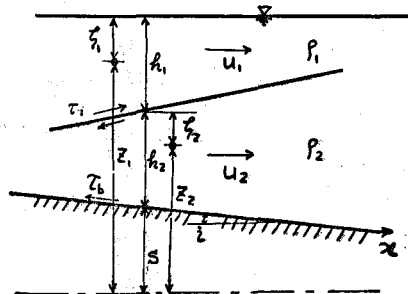


図-10 開水路密度流

流 速	u_1	u_2
密 度	ρ_1	ρ_2
摩擦勾配	i_{f1}	i_{f2}
	境界面	底 面
せん断応力	τ_i	τ_b
抵抗係数	f_i'	f_b'

また、流速補正係数…… α 、水路勾配…… i

密度流の不等流的な特性を調べるため、式(91)および式(92)を定常化すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{u_1^2}{2g} \right) &= i - i_{f1} \\ (1-\varepsilon) \frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{u_2^2}{2g} \right) &= i - i_{f2} \\ u_1 &= \frac{Q_1}{bh_1}, \quad u_2 = \frac{Q_2}{bh_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (94)$$

あとの二式を用い速度水頭の項を消去し、さらに dh_1/dx および dh_2/dx について整頓すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh_1}{dx} &= \frac{-F_{i2}^2(i - i_{f1}) + \frac{1}{\varepsilon}(i_{f2} - i_{f1})}{1 - F_{i1}^2 - F_{i2}^2} \\ \frac{dh_2}{dx} &= \frac{-F_{i1}^2(i - i_{f2}) + \frac{1}{\varepsilon}(i_{f1} - i_{f2})}{1 - F_{i1}^2 - F_{i2}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (95)$$

ただし F_{i1} および F_{i2} は小さいものとし、 $F_{i1}^2 \cdot F_{i2}^2$ はそれぞれ F_{i1}^2 および F_{i2}^2 に比し省略している。

上式は密度流の不等流現象に関する基礎方程式となるものであるが、これを解析的に解くことは困難である。しかし上層流 ($u_1 \neq 0, u_2 = 0$) あるいは下層流 ($u_1 = 0, u_2 \neq 0$) のような特別な場合には抵抗係数を一定として式(95)を解き境界面形状を求めることができる³⁹⁾。

2. 境界面に働くせん断応力

密度流の基礎方程式を解くにあたっては、境界面および底面に働くせん断応力 τ_i および τ_b の性質を知っておく必要がある。何となれば、もし τ_i および τ_b 、したがって抵抗係数 f_i' および f_b' の値が知られば、 i_{f1} および i_{f2} の値も決定され基礎方程式(95)の解を定量的に把握できるようになるからである。そこで、これらの抵抗係数が流速、密度および粘性係数などの基本的な物理量とどのような関係にあるかを検討してみることにする。

一般に密度流においては、上下層の相対速度がかなり大きくとも、密度差のため境界面附近では層流状態が比較的よく保たれ、この部分では純粋な内部摩擦に基づくせん断抵抗が働くものと考えられる。図-11はそれぞれ下層流および上層流に現われる流速分布の概要を示したものである。(a)は $h_1 \gg h_2$ の場合であって、境界面附近の上層が下層に引かれた状態を示しているが、逆流流速はほとんど観測できぬほど小さい。(b)は $h_1 \sim h_2$ の場合であって、境界面附近の下層は上層に引かれ

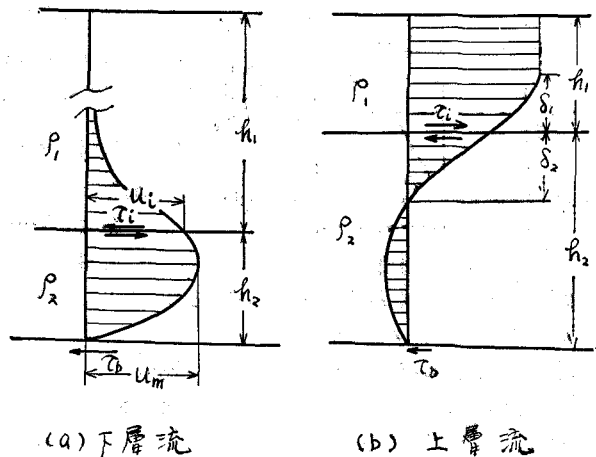


図-11 下層流および上層流の流速分布

ているが、下層全体としては平均流速が零であるためかなり顕著な逆流現象が認められる。(a), (b) いずれの場合においても、内部摩擦に基づく境界面のせん断応力 τ_{io} は速度勾配に比例するので

$$\tau_{io} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \dots\dots\dots (96)$$

によって決定されるべき性質のものである。

次に上下層の相対速度が前の状態よりやや増加してくると、境界面に内部波が発生し、これによる造波抵抗が働くものと考えられる。したがってこのような領域では、内部波が発生したときのエネルギー散逸量を求め

$$\tau_{iw} = \frac{1}{U} \frac{dE}{dt} \dots\dots\dots (97)$$

によってせん断応力 τ_{iw} を求めなければならない。

ただし

$$\frac{dE}{dt} \dots\dots \text{単位時間当りのエネルギー散逸量}$$

$$U \dots\dots \text{基準速度}$$

さらに相対速度が大きくなると内部波は不安定となり、上下層間で混合が生ずるようになる。この場合には混合現象に基づく見かけの摩擦抵抗が働くものと考えられ、そのようなせん断力 τ_{im} は、Reynolds 応力と等しく

$$\tau_{im} = -\overline{\rho u'v'} \dots\dots\dots (98)$$

で表現されるべきものである。またこの他に成層密度流から混合型密度流へ移行する過渡領域では、定常的な混合状態に達するまでに重力に対していくらかの仕事をしなければならない。したがってこれらによる附加せん断力 τ_{ii} も考慮の対象になる。

このようなことより、境界面に働くせん断応力 τ_i は

$$\tau_i = \tau_{io} + \tau_{iw} + \tau_{im} + \tau_{ii} \dots\dots\dots (99)$$

と考えられるが、右辺第3項および第4項については十分な研究がなされていないし、また境界面附近のせん断力の特に強い層（躍層、粘性層、中間層とも呼ばれ、境界層と同様な意味を持つ）の中が層流状態を維持する範囲では、右辺第1項および第2項が支配的でもあるので、以下においては純粋な摩擦抵抗および造波抵抗について考察を進めて行くことにする。

1 純粋な摩擦抵抗

Ippen および Harleman³⁹⁾ は図-11(a) に示す定常的な下層流に働く摩擦抵抗について、次に示すような理論的解析を行ない、実験結果との比較を行なっている。

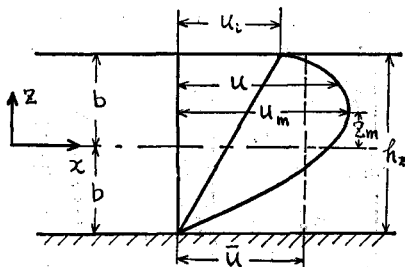


図-12 下層流の特性

境界面はある流速 u_i を持ち、下層の厚さ h_2 は一定で等流状態で流れているものとする。流れは緩やかな層流であるとし、図-12 に示すように座標系をとれば、Navier-Stokes の運動方程式は次のように簡略化して表わすことができる。

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z') \dots\dots\dots (100)$$

ただし

粘性係数…… μ , 圧力…… p

基準面から上方にとった高さ…… z'

静水圧分布を仮定すれば右辺は一定値であるのでただちに積分でき、さらに境界条件

$$z=b, \quad u=u_i; \quad z=-b, \quad u=0$$

を代入すれば、流速分布は次のようになる。

$$u = u_i \left(\frac{b+z}{2b} \right) + \frac{z^2 - b^2}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z') \dots\dots\dots (101)$$

平均流速を $\bar{u}$ で示せば、 $\bar{u}$ は

$$\bar{u} = \frac{u_i}{2} - \frac{b^2}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z') \dots\dots\dots (102)$$

等流状態の下層流では、動水勾配は図-13 より

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z') = \frac{\partial}{\partial x} \{ \rho_1 g h_1 + \rho_2 g (h_2 + s - z') + \rho_2 g z' \} = \frac{\partial}{\partial x} \{ \rho_1 g h_1 + \rho_2 g (h_2 + s) \}$$

しかるに

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial h_1}{\partial x} = i$$

を考慮すれば

$$-\frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z') = -(\rho_2 - \rho_1) g i \dots\dots\dots (103)$$

式(101)および式(102)に式(103)を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} u &= u_i \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_2} \right) - \frac{\Delta \rho}{\rho_2} g i \frac{h_2^2}{2\nu_2} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{4} \right) \\ \bar{u} &= \frac{u_i}{2} + \frac{\Delta \rho}{\rho_2} g i \frac{h_2^2}{12\nu_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (104)$$

ここで、新しい無次元指数 J を次のように定義する。

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_2} g i h_2^2 / \nu_2 \bar{u} = 1/J \dots\dots\dots (105)$$

J は適当に変形することにより

$$J = \frac{\bar{u}^2}{\frac{\Delta \rho}{\rho_2} g h_2} \cdot \frac{1}{\frac{\bar{u} h_2}{\nu_2}} \cdot \frac{1}{i} = \frac{F_{i2}^2}{R_{e2} i} \dots\dots\dots (106)$$

のように示され、内部 Froude 数の自乗と Reynolds 数との比に関係し、密度差を考慮した重力と粘性力との比を示す指数と物理的には考えられる。指数 J を用いれば、簡単な計算より流速分布、境界面の流速、流速最大となる位置 z_m および最大流速 u_m に関する無次元表示が以下のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{\bar{u}} &= 1 + 2 \left(\frac{z}{h_2} \right) - \frac{1}{2J} \left[\left(\frac{z}{h_2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{h_2} \right) - \frac{1}{12} \right] \\ \frac{u_i}{\bar{u}} &= 2 - \frac{1}{6J} \\ \frac{z_m}{h_2} &= 2J - \frac{1}{6} \\ \frac{u_m}{\bar{u}} &= \frac{2}{3} + 2J + \frac{1}{18J} \\ \frac{u_i}{u_m} &= \frac{12J - 1}{12J^2 + 4J + \frac{1}{3}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (107)$$

特別な場合として、境界面が固体壁であれば $u_i = 0$ となるので

$$J_s = 1/12 = 0.083$$

また境界面が自由表面であれば、 $z_m/h_2 = 0.5$ で最大流速となることより

$$J_f = 1/3 = 0.333$$

これらのうち、前者は上層がきわめて動きにくく境界面で最大のせん断力が働く場合、後者は上層が空気のようなものでせん断力が働かない場合の両極端を表わし、下層流の J の範囲は明らかに

$$1/12 < J < 1/3 \dots\dots\dots (108)$$

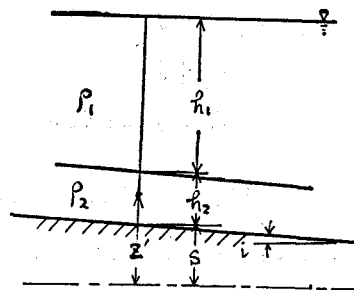


図-13 等流状態の下層流

にある。 J の値を知るためには u_i/u_m の値を求める必要がある。この問題は Keulegan⁽⁴⁰⁾ や Lock⁽⁴¹⁾ によって研究がなされている。すなわち、流体が上下方向に無限に続いており、上下層は互いに平行な異なる密度、粘性

および流速を有する非圧縮流体の流れであり、接触した点より境界面をはさんで下流側に層流境界層が発達するものとする。そして下層が流速 u_m で流れ上層が静止している場合には、 u_i/u_m は両流体の密度比および粘性比によって定まる常数となることが示され

$$\rho_1/\rho_2 \approx 1, \nu_1/\nu_2 \approx 1 \text{ では } u_i/u_m = 0.59$$

となることが示されている。この値を式(107)第5式に代入すれば

$$J = 0.138 \dots \dots \dots (109)$$

またこの値を式(105)に代入すれば、等流状態の下層流の特性が

$$i = \frac{1}{J} \frac{\nu_2 \bar{u} h_2}{\epsilon g h_2^3} = 7.25 \frac{\nu_2}{\epsilon g} \frac{q_2}{h_2^3}$$

となり、底勾配 i が一定であれば単位幅当りの流量 q_2 は下層水深 h_2 の3乗に比例し、また q_2 が一定であれば h_2 は i の1/3の乗に逆比例することが知られる。

さて、上述のような下層流の特性より、境界面あるいは水路床に働くせん断応力を求める。図-11(a)および図-13より、下層流の圧力とせん断力との釣合いを求めれば

$$\Delta p g i b h_2 = (\tau_b + \tau_i) b$$

ただし、水路幅 $\dots b$

さらに

$$\tau_i = \alpha \tau_b \dots \dots \dots (110)$$

とおいて前式に代入すれば

$$\tau_b = \frac{h_2}{1 + \alpha} \Delta p g i \dots \dots \dots (111)$$

そこで水路床の抵抗係数

$$\tau_b = f'_b \frac{\rho_2 \bar{u}^2}{2}$$

を用いて τ_b を消去し、さらに式(106)を考慮すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f'_b} &= \frac{1 + \alpha}{2} \frac{\bar{u}^2}{\epsilon g h_2 i} = \frac{1 + \alpha}{2} \frac{F_{i2}^2}{i} \\ &= \frac{1 + \alpha}{2} J \cdot R_{e2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (112)$$

一方せん断力と流速分布の関係より

$$\alpha = \frac{\tau_i}{\tau_b} = \frac{1 - \frac{2z_m}{h_2}}{1 + \frac{2z_m}{h_2}}$$

しかるに、式(107)の第3式を上式に代入し、 z_m/h_2 を消去すれば

$$\alpha = \frac{\frac{1}{3} - J}{\frac{1}{6} + J} \dots \dots \dots (113)$$

式(109)および式(113)よりそれぞれ J および α の値が求まるので、これらを式(112)に代入すれば、水路床の抵抗係数は

$$\frac{1}{f'_b} = 0.114 R_{e2} \dots \dots \dots (114)$$

で示される。また境界面の抵抗係数は

$$\tau_i = f'_i \frac{\rho_2 \bar{u}^2}{2}$$

で定義できるので、式(110)および式(114)より

$$f'_i = \alpha f'_b = 0.64 f'_b = 5.6 / R_{e2} \dots \dots \dots (115)$$

比較のため平行壁面間の流れの場合には、式(112)において $\alpha = 1, J = 1/12$ とすれば

$$\frac{1}{f'_b} = \frac{Re_2}{12} \dots\dots\dots (116)$$

同様に自由表面を持つ流れでは、 $\alpha=0$, $J_f=1/3$ とおくことにより

$$\frac{1}{f'_b} = \frac{Re_2}{3} \dots\dots\dots (117)$$

図-14 は、M. I. T. における f'_b についての実験結果を示したものであって、抵抗係数は注目する流れの持つ Reynolds 数に逆比例し、かつ式(114)の関係がよくあてはまることを示している。

なお Bata⁽⁴²⁾ は下層流について境界層の発達過程および定常状態に達した時における、境界面の抵抗係数を求めた。また椎貝⁽⁴³⁾ は上層流に注目し、図-11 (b) に示すような流速分布の特性を調べることで、この場合の抵抗係数につき

$$f'_i = \frac{1.6}{Re_1} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)$$

を導き、塩水カサビの実験よりカサビ全長にわたって h_1/h_2 の値を平均することにより

$$f'_i \doteq \frac{3.4}{Re_1} \dots\dots\dots (118)$$

としている。ただし Re_1 …上層流の Reynolds 数

しかし、このようにして求められた抵抗係数の値を用いて、塩水楔の形状や侵入長を計算し、実験水路に現われるそれぞれのものと比較すると、理論から求めた抵抗係数は実験から逆算して求めたそれに比し、著しく小さな値となることが知られる。このことは式(95)に示される密度流の開水路流的な取扱いに多少理論上の不備が残されていることによるものとも考えられるし、あるいは摩擦抵抗には上述の抵抗以外の諸抵抗が現実には多く働くことによるためとも考えられる。いずれにしても今後の研究が望まれるところである。

2) 造波抵抗

密度流が成層型から混合型に移行する過渡領域では境界面に内部波が発生する。しかし境界面附近では密度勾配が大きいのので乱れを抑制する作用が強く、このため過渡領域の範囲も比較的大きく、また内部波による運動は境界面附近に集中すると見られるので、エネルギー散逸量は層流状態を仮定して計算を行なっても大過ないと考えられる。Keulegan⁽⁴⁴⁾ は空気と接触する表面波のエネルギー散逸量に注目し、式中含まれる波速を内部波の波速と見なし、さらに安定限界時の波速と流速との関係を導入することにより、式(97)を用いて境界面に働くせん断応力 τ_{iw} を求めている。

この結果によれば、抵抗係数 f'_{iw} は次のようである。

$$f'_{iw} = 8\pi^3 \left(\frac{v_2}{u_1 \lambda} \right) \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 \dots\dots\dots (119)$$

ただし a および λ はそれぞれ内部波の半波高および波長を示すものとする。

椎貝⁽⁴⁵⁾ も同様な方法で内部波に基づく抵抗係数を算出し、これが Keulegan の指数 θ の関数で表示できることに注目して多くの実験結果と比較対照を行なった。これについて述べれば次のようである。

図-15 に示すように、座標系および諸量を定める。現象を簡単化して考えるため $u_2=0$ とする。第2章の1で行なった解析結果を参照すれば、内部波の存在する場合の速度ポテンシャル ϕ_1 は式(9)、式(11)および式(13)より

$$\phi_1 = -u_1 x + \frac{a(u_1 - c)}{\sinh m h_1} \cosh m(z - h_1) \cos m(x - ct) \dots\dots\dots (120)$$

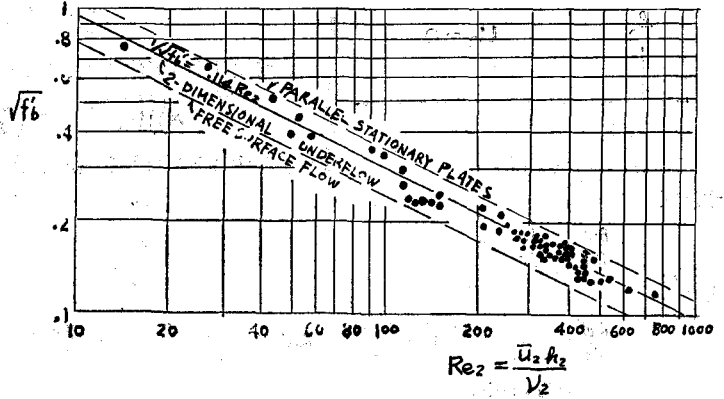


図-14 抵抗係数の実験結果

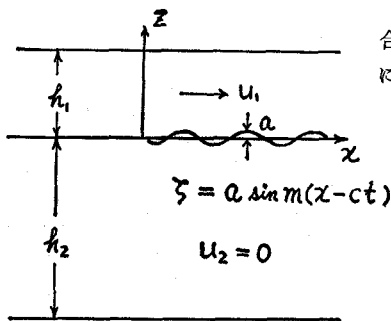


図-15 座 標 系

すれば

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

より

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= 2\mu \iint \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dz + 2\mu \iint \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dz \\ &= 2\mu (I_1 + I_2) \end{aligned}$$

しかるに区分積分を行なえば

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int u \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iint u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dz \\ &= - \int u \frac{\partial u}{\partial n} ds + \iint u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \right) dx dz \\ &= - \int u \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad \text{ただし } \nabla^2 \phi_1 = 0 \end{aligned}$$

同様に

$$I_2 = - \int w \frac{\partial w}{\partial n} ds$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -2\mu \left\{ \int u \frac{\partial u}{\partial n} + w \frac{\partial w}{\partial n} \right\} ds \\ &= -\mu \int \frac{\partial q^2}{\partial n} ds \dots\dots\dots (123) \end{aligned}$$

上式において $q^2 = u^2 + w^2$ であり、 n は注目する流体の内側を正にとった法線の長さを示し、内部波の勾配が小さければ、 $n = z$ とおくことができる。

式(121)より x および z 方向の流速を求めて q^2 を計算すれば

$$q^2 = \left\{ (u_1 - c) + mA \cosh m(z - h_1) \sin mx \right\}^2 + \left\{ mA \sinh m(z - h_1) \cos mx \right\}^2$$

したがって

$$\left(\frac{\partial q^2}{\partial z} \right)_{z=0} = -2m^2(u_1 - c)A \sinh mh_1 \sin mx - 2m^3 A^2 \sinh mh_1 \cosh mh_1$$

上式を式(123)に代入して、1波長当りのエネルギー散逸量を求める。自由表面は不動としているので式(123)

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\mu \int_0^1 \left(\frac{\partial q^2}{\partial z} \right)_{z=0} dx \\ &= 2\lambda \mu m^3 A^2 \sinh mh_1 \cosh mh_1 \dots\dots\dots (124) \end{aligned}$$

内部波は伝播とともに変形しないものとすれば、 $-c$ の流れを重ね合わせるにより現象を定常化して考えても差し支えない。かようにすれば、速度ポテンシャルは

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= -(u_1 - c)x + \frac{a(u_1 - c)}{\sinh mh_1} \cosh m(z - h_1) \cos mx \\ &= -(u_1 - c)x + A \cosh m(z - h_1) \cos mx \\ \text{ただし} \quad A &= \frac{a(u_1 - c)}{\sinh mh_1} \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

さて注目する流体のエネルギー散逸量 dE/dt は一般に

$$\frac{dE}{dt} = \mu \iint \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dz \dots (122)$$

で表わすことができる(単位幅当り)。ここで流れが非回転であると

は式(121)の第3式より A を消去し, $m=2\pi/\lambda$ を考慮すれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} \frac{dE}{dt} &= 2\mu m^3 (u_1 - c)^2 a^2 \coth mh_1 \\ &= 16\pi^3 \mu \frac{u_1^2}{\lambda^3} \left(1 - \frac{1}{F_i}\right)^2 a^2 \coth \frac{2\pi h_1}{\lambda} \dots\dots\dots (125)\end{aligned}$$

ただし $F_i = u_1/c$ で, 流速と内部波速との比を示している。

さて内部波に基づくせん断応力 τ_{iw} が境界面に働くものとすれば, このせん断応力の単位時間に示す仕事量がエネルギー散逸量と等しくならなければならない。このことより単位幅, 1 波長当りの境界面に注目すれば

$$\tau_{iw} \lambda u_1 = \frac{dE}{dt} \dots\dots\dots (126)$$

式(126)を式(125)に代入すれば

$$\tau_{iw} = 16\pi^3 \mu \frac{u_1}{\lambda^3} \left(1 - \frac{1}{F_i}\right)^2 a^2 \coth \frac{2\pi h_1}{\lambda}$$

また造波抵抗による抵抗係数を f'_{iw} とすれば

$$\tau_{iw} = f'_{iw} \frac{\rho_1 u_1^2}{2}$$

なるゆえ

$$\begin{aligned}f'_{iw} &= \frac{2}{\rho_1 u_1^3} \frac{1}{\lambda} \frac{dE}{dt} \\ &= 32\pi^3 \frac{\nu_1}{u_1 \lambda} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{F_i}\right)^2 \coth \frac{2\pi h_1}{\lambda} \dots\dots\dots (127)\end{aligned}$$

上式において, h_1 が十分に大きければ

$$\coth \frac{2\pi h_1}{\lambda} = 1 \dots\dots\dots (128)$$

また, 式(82)より限界状態では内部波の波速 c と F_i はそれぞれ

$$c = \frac{u_1}{2}, \quad F_i = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (129)$$

であるので, このような場合には

$$f'_{iw} = 8\pi^3 \frac{\nu_1}{u_1 \lambda} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \dots\dots\dots (130)$$

となって, Keulegan の導いた結果と一致する。

さて式(127)にもどって考えると, 内部波による抵抗係数は波長が短いほど大きくなる。しかし式(82)を変形すれば

$$\frac{1}{F_i} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{\frac{2\epsilon g}{2\pi u_1^2} - 1} \right\} \dots\dots\dots (131)$$

となるので, 内部波が安定となるためには

$$F_{i1}^2 = \frac{u_1^2}{\epsilon g h_1} \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{\lambda}{h_1}\right) \dots\dots\dots (132)$$

すなわち, 与えられた F_i , F_{i1} および h_1 に対し存在しうる $\lambda_{\min}$ が存在し, これより短い波長のものは碎波してしまうし, これより非常に長い波長のものはほとんど造波抵抗には影響を及ぼさない。したがって造波抵抗に最も大きく寄与するものは限界状態に近い λ であると考えられる。

このことより

$$\frac{\lambda}{h_1} = \pi F_{i1}^2, \quad F_i = 2 \dots\dots\dots (133)$$

とおいて式(127)に代入すれば

$$f'_{iw} = 8\pi^3 \frac{1}{R_{e1}} \frac{1}{\pi F_{i1}^2} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$$

$$= 8\pi^2 \frac{1}{R_{ei} F_{ii}^2} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 \dots\dots\dots (134)$$

ただし h_1 は大きいとし式(128)が満足されるものとする。

また

$$R_{ei} = \frac{u_1 h_1}{\nu_1}, \quad F_{ii} = \frac{u_1^2}{g h_1}$$

いま Keulegan の与えた指数 θ を導入すれば、式(87)より

$$f'_{iw} = 8\pi^2 \theta \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 \dots\dots\dots (135)$$

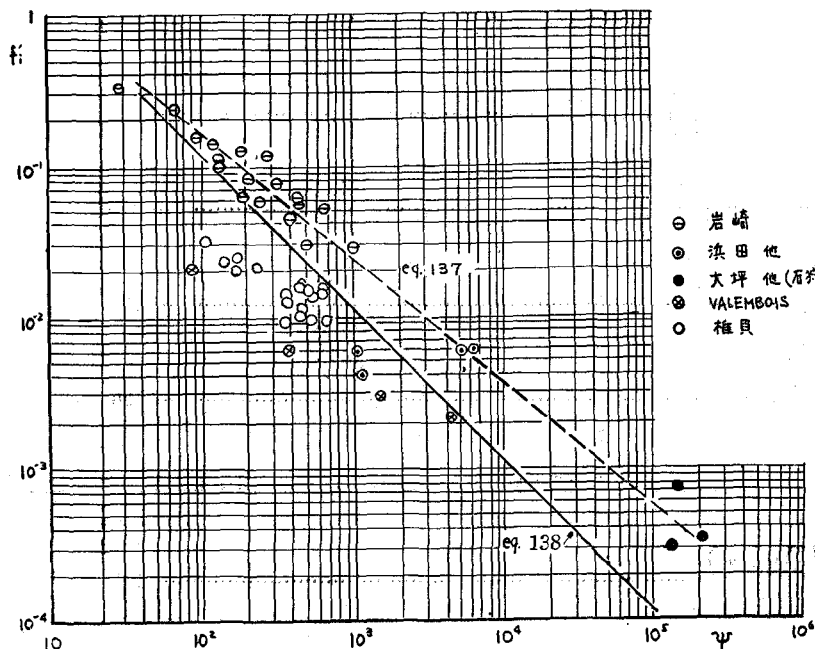
あるいは R_{ei}, F_{ii} を ϕ と書けば

$$f'_{iw} = 8\pi^2 \frac{1}{\phi} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 \dots\dots\dots (136)$$

とも表わされる。

図-16 は各方面で行なわれた境界面における抵抗係数の実験値ならびに実測値を ϕ について整理して表わしたものである。この図より、全体の傾向として f'_{iw} は ϕ に逆比例することが認められる。岩崎⁴⁶⁾ は実験的に

$$f'_{iw} = 7.88 \phi^{-0.836} \dots\dots\dots (137)$$



を導いたが、これは図中の破線で示されている。稚貝は

$$f'_{iw} = \frac{12}{\phi} \dots\dots\dots (138)$$

とし、これは図中の実線で示されている。上式より内部波の Steepness ratio を逆算すると

$$\left(\frac{a}{\lambda} \right)_{max} = 0.391 \dots\dots\dots (139)$$

となり、これは表面波のその最大値よりかなり大きい。内部波の steepness ratio については十分な研究がなされていないので不明の点が多いが、あるいは密度勾配の存在の

図-16 $f'_{iw} \sim \phi$ の関係

ため表面波の場合よりも碎波限界を示す $(a/\lambda)_{max}$ の値が大きくなるとも考えられる。

なお純粋な摩擦抵抗と造波抵抗の両方を考慮に入れれば、合成された抵抗係数 f'_i は一般に

$$f'_i = \frac{A}{R_e} + \frac{B}{\phi} \dots\dots\dots (140)$$

のような形式で表わされるものと見てよい。

参 考 文 献

- 1) Stommel, H. : The role of density current in estuaries, Proc. of Minnesota International Hydraulics Convention, (5th Cong. of I.A.H.R.), (1953)
- 2) Ketchum : The exchange of fresh and salt water in tidal estuary, Jour. Mar. Res., Vol.10, No.1, (1951)
- 3) Arons and Stommel, H. : A mixing theory of tidal flushing, Trans. AGU, Vol.32, No.3, (1951)
- 4) Ippen, A.T. and Harleman, D.R.F. : Steady-state characteristics of subsurface flow, Gravity wave symposium, Nat. Bur. of Stands. Circulation, 521, (1951)
- 5) 浜田 : 河口港としての石巻港の研究, 運輸省港湾局技術研究課, (1950)
- 6) 福島, 柏村, 八畝, 高橋 : 石狩川の河口構造, 第8回海岸工学講演会, (1961)
- 7) 利根川; 伊藤, 佐藤, 岸, 富永 : 河口の塩水楔について, 土木研究所報告 101 号, (1959).
- 8) 長良川; 嶋 : 北伊勢工業用水道長良川水源に対する塩水楔の遡上機構とその防止工法, (1963).
- 9) 五箇瀬川; 伊藤, 佐藤, 岸, 富永 : 河口の塩水楔について, 土木研究所報告, 101 号, (1959).
- 10) 川内川; 篠原, 椿, 遠藤, 浦 : 川内川における塩分侵入に関する研究, 土木学会, 第20回年次学術講演会, (1965)
- 11) 木曾川; 西畑 : 木曾三川感潮部の研究, (1961)
- 12) Harleman, D.R.F., Morgan, R.L. and Purple, R.A. : Selective withdrawal from vertically stratified fluid, Proc. of 8th Congress of I.A.H.R., Vol.2, (1959)
- 13) Craya, A. : Recherches théoriques sur l'écoulement de couche superposées de fluides de densité différent, VI Congrès international de méch. appli., Paris, (1940)
- 14) 高月および南 : 温水取水施設における取水温度の一推算法 および 模型実験について, (1), (2), 水温の研究, Vol.3, (1959)
- 15) 嶋および椎貝 : 密度流の境界面の安定に関する一実験, 土木学会, 第4回水理講演会前刷
- 16) 建設技術研究所 : 冷却用水の湾内循環による最終安定温度の検討
- 17) 和田, 片野 : 入江内における表面水の熱収支の算定, 土木学会, 第20回年次学術講演会, (1965)
- 18) 水温調査会, 千葉 : 五井港水温に関する調査報告 I ~ VI, (1960~1964)
- 19) 千秋, 安芸 : 堺港火力発電所冷却水放水口水理模型実験報告書, 電研依頼報告書 I 6305, (38.8)
- 20) Fry, A. S., Churchill, M. A and Elder, R. A. : Significant effects of density currents in T.V.A.'s integrated reservoir and river system, Proc. of Minnesota Internat. Hydraulics Convention, (1953)
- 21) Haward, C.S. : Density currents in Lake Mead, Proc. of 5th Cong. of I.A.H.R. Minnesota, (1953)
- 22) Montreal I.A.H.R. (1959)
- 23) 野満隆治 : 海岸地下水の研究 (その1), 日本学術協会報告, 第10巻, 第3号, 628, (1935)
- 24) Ippen, A.T. and Harleman, D.R.F. : 4) に同じ
- 25) 河口湖委員会報告 : モデル河口湖実験, 土木学会誌, 第50巻, 8号, (1965)
- 26) 荻田地区工業用水道水源調査報告書, 昭37.11
- 27) 嶋 : N.K.K. 軽量鋼矢板の止水性に関する現場試験報告書, (1963)
- 28) Shima and Ogiwara : The problem of the seepage flow in the rectangular domain including a well, Collected papers, Dep. of Civil Eng. Faculty of Eng. Univ. of Tokyo, Vol.3, (1965)
- 29) 奥田 : 人造淡水湖 (児島湖) における塩分の収支推定について, I, II, 京大防災研年報, 6号, 7号, (1964)
- 30) Sukeyuki Shima : On the so-called diffusion phenomena of seepage flow, Proc. of 9th Convention of I.A.H.R., (1961)
- 31) Ippen, A.T. and Harleman D.R.F. : 4) に同じ

- 32) Tayler, G.I. : Effect of variation in density on the stability of superposed streams of fluid, Proc. of the Royal Society of London, (Aug. 1931)
- 33) Keulegan, G.H. : Interfacial instability and mixing in stratified flows, Jour. of Res. of the National Bureau of Standards, Vol. 43, Nov., (1949)
- 34) Jeffreys, H. : On the Formation of waves by wind, Proc. of the Royal Society of London, Vol. 107, (1925)
- 35) Ippen, A.T. and Harleman, D.R.F. : 4) に同じ
- 36) Schijf, J.B. and Schönfeld, J.C. : Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water, Proc. of 5th Cong. of I.A.H.R., Minnesota, (1953)
- 37) Poggi, B.P. : Sul moto delle correnti stratificate, L'Energia elettrica, No. 3, (1959)
- 38) 土木工学ハンドブック, 第4節, P.292 など参照
- 39) Ippen, A.T. and Harleman, D.R.F. : 4) に同じ
- 40) Keulegan, G.H. : Laminar flow at the interface of two liquid, Jour. of Res. of Nat. Bur. of Stands., 32, 303, (1944)
- 41) Lock, R.C. : The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams, Quart. Jour. of mech. and math., No. 4, (1951)
- 42) Bata, G. : Frictional resistance at the interface of density currents, Proc. of 8th Cong. of I.A.H.R., Vol. 2, (1959)
- 43) 嶋, 椎貝, 玉井 : 河床勾配のある場合の塩水楔について, 土木学会, 第19回年次学術講演会, (1964)
- 44) Keulegan, G.H. : 33) に同じ
- 45) 椎貝 : 塩水楔の研究 (学位論文), (1964)
- 46) 岩崎 : 二成層密度流における乱流拡散について, 土木学会, 第19回年次学術講演会, (1964)